arXiv:2602.05705v1 [math.NT] 5 Feb 2026

加权射影栈中的薄集

STEPHANIE CHAN、DANIEL LOUGHRAN 和 NICK ROME

摘要。我们证明了加权射影栈中属于给定薄子集且高度有界的有理点数量的一个上界。由此，我们证明，100% 的超椭圆曲线都不具有指定的非平凡层结构。

目录

1. 引言 1 2. 叠与薄集 5 3. 数域上的偏斜大筛法 7 4. 加权射影栈中的薄集 11 5. 超椭圆曲线上的层结构 13 参考文献 14

1. 引言

1.1. 薄集。 Serre [45, §3]在研究逆伽罗瓦问题时引入了有理点的薄集。如今，薄集已成为丢番图几何中的基本概念，并以各种形式贯穿于对簇上有理点的研究。若一个簇的有理点集不是薄集，则称该簇满足希尔伯特性质。众所周知，若能验证有限群 G 的单有理簇 $\mathbb{A}^n/G$ 具有希尔伯特性质，便可解决该群的逆伽罗瓦问题。近期大量研究致力于为特定簇确立这一性质，参见例如 [49, 36, 17, 18], 以及近期的综述文章 [24]。另一方面，近来人们普遍认为，要在 Fano 簇上有界高度的有理点中实现 Batyrev–Manin 猜想 [25, 2] 所预言的渐近公式，就需要去掉一个薄子集。近来，这一观点对于解释有界判别式数域上的 Malle 猜想反例也至关重要；在这类问题中，需要考察分类栈上的有理点薄集，参见 [37,§3.7]和 [16,§9]。

Serre [46, 第 13 章，定理 3], 基于 Cohen 的工作 [14], 提出了一种新的证明，证明射影空间 $\mathbb{P}^n$ 具有希尔伯特性质：对于 H朴素 Weil 高度以及某个 $\gamma < 1$，建立了如下界

$$\#\{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) : H(x) \leq B,\ x \in \Omega\} \ll B^{n+\frac{1}{2}}(\log B)^{\gamma} \tag{1.1}$$

2010 数学主题分类。（次级）。

对于任意薄集 $\Omega \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{Q})$。由此结果可以推导出一个众所周知的事实：100% 的次数为 n 的多项式具有伽罗瓦群 S_n。此外，Serre [47]利用这一思路，给出了圆锥曲线丛曲面中含有有理点的纤维数量上界。Loughran–Smeets[38] 极大地推广了这一思路，给出了更一般的、定义在 $\mathbb{P}^n$ 上的纤维化中处处局部可解纤维数量的上界；这一结果催生了一个广泛且活跃的研究领域（有关其历史概述，见 [35] ；有关一些较新的结果，见 [20, 13] ）。此外，对于适当类别的 Fano 簇，文献[9,定理 1.2] 证明，落在给定薄子集中的有理点仅占 0%。

加权射影叠版本的 Batyrev–Manin 猜想的出现，引发了人们对如何将传统有理点研究中的思想推广到栈的范畴的浓厚兴趣。本文旨在研究栈的范畴中的薄集。我们的主要结果是关于加权射影栈的 Serre 定理的一个版本（背景介绍见 §2）。

定理 1.1。 设 $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$，设 $k/\mathbb{Q}$ 为次数为d 的数域，并令 $H_{\mathbf{a}}$ 表示加权高度函数（见定义 *2.2*）。对于任意薄子集 $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$，存在 $\gamma < 1$ 使得

$$\#\{x \in \Omega : H_{\mathbf{a}}(x) \leq B \text{ and } x \in \Omega\} \ll B^{a_0+\cdots+a_n-\frac{\min_i a_i}{2}}(\log B)^{\gamma}.$$

注 1.2。 在 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 上高度至多为 B 的有理点总数的增长率类似于 $B^{a_0+\cdots+a_n}$ [19, 10, 15]。因此，我们看到，加权射影空间中 100% 的点都不属于任意给定的薄集。

我们按照 Serre 的方法 [46, 第 13 章，定理 3] 证明定理 1.1。为此，我们发展了适用于数域的偏斜版大筛法；这就是定理 3.1。我们预计，这种一般性的大筛法可用于加权射影栈上的其他计数问题；我们发展这一方法，正是为了更广泛的用途。定理 1.1 是我们筛法的一个示例应用，但也有可能通过行列式方法为定理 1.1 得到更强的界。

从更定性的角度来看，我们还在 §2 中引入了栈的希尔伯特性质的自然类比，并证明有时可以从该问题的概形版本推出这一性质。

定理 1.3。 设 $\mathcal{X}$ 是域 k 上的一个代数叠。设 X 是一个具有希尔伯特性质的簇，并假设存在一个优势态射$X \to \mathcal{X}$，其一般纤维几何整。那么 $\mathcal{X}$ 具有希尔伯特性质。

定理 1.1 以解析方法证明了数域上的加权射影栈具有希尔伯特性质，其思路源自 Serre 对射影空间的原始证明。将定理 1.3 应用于商映射 $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathbf{a})$，也表明加权射影栈具有希尔伯特性质；这自然要用到 Serre 关于 $\mathbb{A}^{n+1}$ 具有希尔伯特性质的结果。不过，定理 1.1 还使我们能够推导出更强的结论： $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 具有整 Hilbert 性质（见推论 4.2）。

1.2. **加权射影空间中的塞尔问题**。鉴于（1.1），塞尔提出，是否可以改进指数，使其节省 B，而

非仅仅节省$-B^{\frac{1}{2}}$。对于 I 型薄集，这个问题如今称为维数增长猜想。该猜想预言，给定一个整射影簇 X ，则其上绝对Weil高度至多为 B 的点的数量 X增长速度不应超过$O_{X,\,\epsilon}(B^{\dim X+\epsilon})$。Heath-Brown [28] 最初针对超曲面提出了这一猜想，之后 Serre 将其推广到所有射影簇。Heath-Brown [29] 最先对几何整二次超曲面证明了该猜想，随后 Browning–Heath-Brown–Salberger [8] 对次数至少为 6 的簇证明了该猜想，最终 Salberger [42]对所有整射影簇证明了该猜想。此外，Salberger 给出的界仅取决于 X 的维数和次数，从而证实了 Heath-Brown [29]最先提出的猜想的统一版本。此后，Castryck–Cluckers–Dittmann–Nguyen [12] 进一步加强了这种一致性，他们将 B^{ϵ} 改进为对数幂，并证明隐含常数对次数具有显式多项式依赖（前提是次数至少为 5）。Paredes–Sasyk [40]将这一最终结果推广到了数域。

这一问题在 II 型薄集的情形下也得到了深入研究。Broberg [7] 在射影空间维数为 2 或 3，且薄集的次数至少为 3 时，证明了该猜想。Heath-Brown–Pierce [30]在维数至少为 10 的循环覆盖情形下证明了该猜想；此外，在一些特殊情形下，也已有若干结果改进了 Serre 的原始结果 [39, 3, 5, 6]。最近，Buggenhout–Castryck– Cluckers–Santens–Vermeulen [11]证明了次数至少为 4 的 II 型薄集所对应的猜想上界。

鉴于这些研究进展，我们认为有必要在加权射影空间的情形下提出同样的问题。

问题 1.4。设 k 是一个数域，$\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{n+1}$ 是一个权向量，且 $\Omega \subset \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$ 是一个薄子集。那么

$$\#\{x \in \Omega : H_{\mathbf{a}}(x) \leq B)\} \ll_{f,\epsilon} B^{a_0+\cdots+a_n-\min_i a_i+\epsilon}?$$

目前已有若干加权射影空间中 I 型薄集的例子，其中已建立了更强的界。Bonolis–Browning [4]为某一族位于 $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}(1，1，2，n)$ 内的超曲面建立了大小为 $O_n(B^{3-1/20}\log^2 B)$ 的界。此外，Glas–Hochfilzer [26] 针对特征不等于 2 或 3 的任意整体域上的次数分别为 2 和 1 的 del Pezzo曲面，证明了界 $O(B^{\frac{3}{2}+\epsilon})$ 和 $O(B^{2+\epsilon})$。这些曲面分别自然地表现为 $\mathbb{P}(1，1，1，2)$ 和 $\mathbb{P}(1，1，2，3)$ 内的超曲面。值得注意的是，马宁的著名猜想预言，对于这两者，除去直线后，点数为 $O(B^{1+\epsilon})$。

1.3. 超椭圆曲线上的层结构的应用。叠自然地作为模空间出现。这些模空间上的薄集通常对应于具有特殊算术性质的对象。对于加权射影栈，定理 1.1 进而表明，这些模空间所参数化的对象中，100% 不具有这些性质。

栈 $\mathbb{P}(4，6)$ 是椭圆曲线模栈 $\mathcal{M}_{1,\,1}$ 的一种自然紧化。更一般地，奇数 超椭圆曲线的模栈（这里指带有一个标记魏尔斯特拉斯点的超椭圆曲线）

同构于加权射影叠 $\mathbb{P}(4,\ 6,\ \ldots,\ 4g+2)$ 的一个开子集。点 $(a_4,\ a_6,\ \ldots,\ a_{4g+2})$ 对应于曲线

$$y^2 = x^{2g+1} + a_4x^{2g-1} + a_6x^{2g-2} + \cdots + a_{4g+2};$$

见 [27, 命题 5.9] 或 [23, 命题 4.2(1)]。通过对伽罗瓦表示施加限制来添加层结构，可以得到该模栈的自然覆盖。更具体地，设 A 是一个维数为g 、定义在数域 k 上的主极化阿贝尔簇，且 $n \in \mathbb{N}$。令 GSp_{2g} 表示辛相似变换群， $\nu : \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 表示乘子同态。¯的绝对伽罗瓦群 Γ_k 作用于 k 上的 n-挠点 $A[n]$ 。选取一组基可得到同构 $A[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ ，从而得到一个表示 $\rho_{A,n} : \Gamma_k \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$。Weil 配对的伽罗瓦等变性在 $A[n]$上定义了一个非退化斜对称双线性形式，这意味着 $\rho_{A,n}$ 的像包含于 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$中。不同基的选择相差一个共轭，因此 $\rho_{A,n}$ 的像在共轭意义下是良定义的。对于子群 $G \subseteq \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，若$\rho_{A,n}$的像包含于 G的某个共轭中，就称 A 具有层级为-G 的层结构。 k 中存在单位根会对 Im$\rho_{A,n}$施加额外条件，即 Im $\rho_{A,n}$ 的乘子等于分圆特征的像；为避免这些技术问题，我们只考虑满足 $\nu(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$的子群 G 。例如，当 $k = \mathbb{Q}$时，伽罗瓦表示的像总是具有这一性质。若一条光滑射影曲线的雅可比簇具有层级为-G 的层结构，就称该曲线具有层级为-G 的层结构。

定理 1.5。 设 k 是一个数域，设 $g \in \mathbb{N}$， $n \in \mathbb{N}$ 为奇数，并且$G \subseteq$辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 是一个真子群，满足 $\nu(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$。那么，按加权射影高度排序时， k 上 *100%* 的奇数阶双曲线都不具有 *level* G-结构。

我们将此与研究得更为透彻的椭圆曲线情形进行比较。此时，$\mathrm{GSp}_2 = \mathrm{GL}_2$ ，而乘子 ν 就是行列式。已有大量研究致力于确定按加权射影高度排序时，具有指定 level G-结构的椭圆曲线数量的正确数量级。我们不打算在此概述这一庞大的研究领域，而是请读者参阅 Phillips 的近期论文 [41] ；该文作者在任意数域上研究，给出了一大类 G的渐近公式，并详细回顾了这一问题的研究历史。尽管这类结果比定理 1.5 给出了更精确的界，我们结果的优势在于，它对任意奇数 level 结构以及任意数域上任意亏格的奇数阶双曲线均一致适用。

文献中确实存在一些与定理 1.5 思路相近的一般性结果。Zywina [51]证明了，考虑到 Weil 配对所施加的限制，在数域上定义的椭圆曲线中，有 100% 具有最大可能的伽罗瓦作用。他的结果随后被推广到阿贝尔簇[33, 族1], 定理 1. $\mathbb{Q}$，在 [34, 上得到了稍弱的结果；此外，他还为超椭圆曲线2]族 $\mathbb{A}^{2g}$定理 1.给出了一个更为明确的版本。这些工作与我们的结果之间的主要区别在于，在此前的所有论文中，超椭圆曲线都是通过仿射空间中的点来参数化的 ，或 。我们的方法首次为具有给定 level -结构的曲线数量提供了界限

其中曲线按加权射影空间排序，并将模空间作为真正的栈这一性质纳入考量。

1.4. **约定**。 设 $\mathcal{X}$ 是域 k 上的代数叠。 $\mathcal{X}$ 上的 k-有理点构成一个群胚；计数时应使用群胚基数，即将每个同构类赋予其自同构群阶的倒数作为权重。由于我们只关注上界，这些细节对我们并不重要。因此，为使记号简洁，我们用 $\mathcal{X}(k)$ 表示群胚中 $\mathcal{X}$ 上 k- 点的对象的同构类集合。

1.5. **本文结构**。 在 §2 中，我们回顾关于叠和薄集的各种背景知识，并证明定理 1.3。在 §3 中，我们证明主要技术结果（定理 3.1）：这是数域上大筛法的一个偏斜版本。我们预计这一结果还会有其他应用。在 §4 中，我们证明定理 1.1，以及关于加权射影栈的整 Hilbert 性质的一个版本（推论 4.2）。最后，在 §5 中，我们利用定理 1.1 以及带有层结构的阿贝尔簇模叠的一个框架，证明定理 1.5。

致谢。 本项目始于2023年9月在布里斯托尔举行的 WAARP 会议上的一个工作组。作者非常感谢 J. Lyczak 和 R. Paterson 组织此次活动，也感谢使活动得以举办的资助机构。作者感谢 Sebastian Monnet 在本项目启动阶段对叠的热情以及所作的贡献。还要感谢 Tristan Phillips 就层结构展开的讨论，以及 Tim Santens 对问题 1.4 的评论。Daniel Loughran 获英国研究与创新署未来领军学者项目 MR/V021362/1 的资助。Nick Rome 获 FWF 项目 ESP 441-NBL 的资助。

2. 叠与薄集

2.1. **加权射影叠**。

定义 2.1。 设 $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$；我们称 $\mathbf{a}$ 为一个权向量。加权射影叠 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 定义为商叠

$$\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathbf{a}) := [\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}] \tag{2.1}$$

其中，$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 通过 $\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda^{a_0} x_0, \dots, \lambda^{a_n} x_n)$ 作用。这是一个在 $\mathbb{Z}$ 上的适当光滑托里克 Deligne–Mumford 叠。

对于 $\mathbf{a} = (1, \dots, 1)$，可以恢复射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的通常定义。然而，对于不同的权向量，所得的加权射影叠并不是概形。对于任意域 k，我们有

$$\mathbb{P}(\mathbf{a})(k) = \{(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}\}/\sim .$$

其中 $\sim$ 表示等价关系

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda^{a_0} x_0, \dots, \lambda^{a_n} x_n), \text{ for all } \lambda \in k^{\times}.$$

这由希尔伯特第90定理以及商映射 isa $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-torsor 这一事实推出。 (2.1)

Ellenberg–Satriano–Zureick-Brown [21]和 Darda–Yasuda [16]在相当一般的设定下引入了栈上的高度概念。对于

加权射影空间，Deng [19] 首先写出了一个高度，而这一概念与这些更一般的堆叠高度概念 [21, §3.3]相一致。

定义 2.2。设 k 是一个数域，并令 $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1}$。我们将$\mathbf{x}$的加权最大公因数 定义为

$$\mathrm{wgcd}(\mathbf{x}) := \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\min_i \left\lfloor \frac{v_{\mathfrak{p}}(x_i)}{a_i} \right\rfloor}.$$

设 $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$。则$\mathbf{x}$ 的高度为

$$H_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathrm{wgcd}(\mathbf{x}))} \prod_{v \mid \infty_k} \max_i |x_i|_v^{\frac{1}{a_i}}.$$

与射影空间上的有理点类似，我们可以为点 $x \in \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$ 选取一个代表元，其形式为 $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_k^{n+1}$。此外，我们可以假设该代表元的选取满足理想 $\mathrm{wgcd}(\mathbf{x})$ 等于 k 的类群中某个元素的一个固定代表元。

2.2. **叠的希尔伯特性质**。设 V 是域 k上的一个簇。回顾一下，$V(k)$的薄子集定义为任何包含于有限个子集之并中的子集；这些子集或者包含于 V 的某个真闭子簇中（I 型），或者包含于 $\pi(W(k))$中，其中 $W \xrightarrow{\pi} V$ 是次数大于 1 的泛有限占优态射，且 W 是 k 上的一个整簇（II 型）。Darda–Yasuda [16, 定义 5.4] 将这一概念推广到了叠。

定义 2.3. 有限表示整积分叠之间的态射 $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 称为双有理 的，如果存在开稠密子栈 $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$，使得 f限制后给出一个同构 $\mathcal{V} \cong \mathcal{U}$。

如果 f 不是双有理的、可表的，且到其像泛有限，我们就称它为薄的 。$\mathcal{X}(k)$ 的薄子集是指包含于 $\cup_{i=1}^{n} f_i(\mathcal{Y}_i(k))$ 的子集，其中 $f_i : \mathcal{Y}_i \to \mathcal{X}$ 是薄态射，且 n任意。

这可以用熟悉的 I 型和 II 型薄集的语言来理解。由于 f 可表，其次数定义如下（参见 [50, 定义 1.15]）。取一个优势态射 $Z \to \mathcal{X}$，其中 Z 是概形。然后定义 $\deg(\mathcal{Y} \to \mathcal{X}) = \deg(\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} Z \to Z)$，其中后者是概形之间有限表示的泛有限态射，其次数按通常方式定义。根据引理 1.16]，此定义与 Z [50, 的选取无关。接着，若一个子集包含在扎里斯基闭子堆中，则称其为*I* 型；若它具有形式 $\pi(\mathcal{Y}(k))$，其中 $\mathcal{Y}$ 是整的，且 $\pi : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是次数至少为 1 的有限表示泛有限占优态射，则称其为*II* 型。注意，要证明一个集合除去 I 型薄集后是薄的，在 II 型薄集的定义中只需考虑 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 有限（而非仅泛有限）的情形。此外，由于闭浸入是有限态射，我们总可以假设 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ 是有限态射。

定义 2.4. 有限表示整积分叠 $\mathcal{X}$ 在 k 上满足希尔伯特性质，当且仅当 $\mathcal{X}(k)$ 不是薄集。

若 $\mathcal{X}$ 与概形 X双有理等价，则 $\mathcal{X}$ 满足希尔伯特性质，当且仅当 X 满足希尔伯特性质。特别是，这一定义只会为具有非平凡一般稳定子的栈带来真正新的现象。

例 2.5. 设 G 是一个有限群，并考虑分类栈 BG。那么不难看出， $BG[k]$ 具有希尔伯特性质，当且仅当 G 是 k上的一个伽罗瓦群；也就是说，逆伽罗瓦问题在 k上对于 G 有解。这是由 BG上薄集的描述（见[37, §2.2]）得出的。

有了这个定义，我们就可以证明定理 1.3 了。

定理 1.3 的证明。 反设 $\mathcal{X}(k)$ 是薄集。必要时将 $\mathcal{X}$ 替换为一个开稠密子栈后，存在非双有理有限态射 $f_i\colon \mathcal{Y}_i \to \mathcal{X}$，其中 $i = 1, \dots, n$，使得 $\mathcal{X}(k) = \cup_{i=1}^{n} f_i(\mathcal{Y}(k))$。令$\pi\colon X \to \mathcal{X}$如定理 1.3 中所述，并对 $i = 1, \dots, n$ 考虑图式

$$\begin{array}{ccc} Y_i := \mathcal{Y}_i \times_{\mathcal{X}} X & \xrightarrow{g_i} & X \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{Y}_i & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{X}. \end{array}$$

注意到 Y_i 是一个概形，因为 X 是一个概形，且假设 f_i 是有限的，因此是可表的。纤维积的泛性质蕴含 $X(k) = \cup_{i=1}^{n} g_i(Y(k))$。由于 X 满足希尔伯特性质，要导出矛盾，只需证明没有任何 g_i 存在有理截面。然而， f_i 的一般纤维是一个有限概形，而有限概形在扩张到一个不含非平凡有限子域的域后，也不可能获得有理点；这里正是如此，因为 $X \to \mathcal{X}$ 的一般纤维是几何整的。□

3. 数域上的偏斜大筛法

设 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{n+1}$ 是一个权向量。不失一般性，假设 $a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n$。设 k 是一个次数为 d 的数域，并为 $\mathcal{O}_k$ 固定一个整基 $\theta_1, \dots, \theta_d$。

为 $\mathcal{O}_k$ 中的理想类固定一组代表元。对于 $k^{n+1} \setminus \{0\}$ 中的每个元素，我们可以选取一个关于 $k^\times$ 作用的代表元，该代表元位于 $\mathcal{O}_k^{n+1}$ 中，且其加权最大公因数是这些固定代表元之一。这只能在单位作用下唯一确定代表元，因此我们仍须将单位计入考量。令

$$H_{\mathbf{a},\infty}(\mathbf{x}) = \prod_{v \mid \infty} \max_i \{|x_i|_v^{\frac{1}{a_i}}\}.$$

定义 2.2 中引入的加权高度 $H_{\mathbf{a}}(x)$ 因而为 $H_{\mathbf{a},\infty}(\mathbf{x})\ N_{k/\mathbb{Q}}$(加权最大公因数$\mathbf{a}(\mathbf{x})$)。选定代表元后，我们看到加权最大公因数只取有限多个值，因此高度的无限部分将起到关键作用。本节旨在为 $\mathcal{O}_k$ 中的元组建立一种适当的大筛法，考虑加权作用下单位的作用，并对高度的这一无限部分加以限制。

定理 3.1。设 $Q \geq 1$，设 $m \in \mathbb{N}$，并设 $(\Omega_{\mathfrak{p}^m})_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathcal{O}_k^{n+1}/\mathfrak{p}^m$ 中由剩余类构成的集合族。令 $\nu_{\mathfrak{p}^m}$ 表示 $\mathcal{O}_k^{n+1}/\mathfrak{p}^m$ 上的均匀测度，并令 $\mu_k(\cdot)$ 表示 k 中的理想莫比乌斯函数。则有

$$\begin{aligned}\#\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/\mathcal{O}_k^\times : H_{\mathbf{a},\,\infty}(\mathbf{x}) \ll_k B \text{ 且}\mathbf{x}\text{ 模 } \mathfrak{p} \notin \Omega_{\mathfrak{p}^m} \text{ 对所有 } N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \leq Q \;\}\\ \ll_{k,\mathbf{a}} \frac{\prod_{i=0}^n (B^{a_i} + Q^{2m})}{G(Q)}\end{aligned}$$

其中

$$G(Q) = \sum_{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q}) \leq Q} \mu_k(\mathfrak{q})^2 \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q}} \frac{\nu_{\mathfrak{p}^m}(\Omega_{\mathfrak{p}}^m)}{1 - \nu_{\mathfrak{p}^m}(\Omega_{\mathfrak{p}}^m)}.$$

注 3.2. 尽管已有若干将传统大筛法推广到数域的工作，其中最著名的是 Huxley [31] 和 Schaal [43],的研究，但我们未能在现有文献中找到合适的多维数域类比。我们也借此机会对素数幂取模进行筛法，因为我们预计这将来可用于研究簇族中纤维的可解性，其思路与 Serre [47] 或 Loughran–Smeets [38]的工作相同。

若 $\mathcal{O}_k$ 的单位群有限（例如 $k = \mathbb{Q}$），那么利用文献中已有的筛法证明这一结果并不困难。然而，当单位群无限时，必须格外谨慎，尤其是在构造单位作用的基本域时。这是我们的首项任务，我们以类似于 Deng [19, 命题 4.2] 和 Bruin–Manterola Ayala [10,命题 3.6]的方式完成此事。设 ℓ：$k^\times \to \mathbb{R}^{r+s}$ 为标准的对数嵌入，其中r 表示 k 的实嵌入个数， $2s$ 表示复嵌入个数。令 $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r+s-1})$ 为单位群$\ell(\mathcal{O}_k^\times)$ 在 $\mathbb{R}^{r+s}$中的像的一组基。定义

$$F := [0,1)\mathbf{u}_1 + \cdots + [0,1)\mathbf{u}_{r+s-1} \subseteq \mathbb{R}^{r+s},$$

其中 d_i 是 i^{th} 嵌入的局部次数。对任意 $T \geq 1$，记

$$F(T) := F + (d_1, \dots, d_{r+s})(-\infty, \log T].$$

于是我们用$S_{F,\mathbf{a}}(T)$表示$(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r+s}) \in (\mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s)^{(n+1)}$ 中满足

$$\left(\max_{i \in \{0,\dots,n\}} |z_{1,i}|^{\frac{1}{a_i}}, \dots, \max_{i \in \{0,\dots,n\}} |z_{r+s,i}|^{\frac{1}{a_i}} \right) \in \exp(F(T)).$$

引理 3.3. 集合$S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})$ 是 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$上高度至多为 T 的点的单位群自由部分的一个基本域。

证明. 设 $\nu_1, \dots, \nu_r$为全部实位， $\nu_{r+1}, \dots, \nu_{r+s}$为全部复位。对任意 $j \in \{1, \dots, r+s\}$，令 σ_j表示与 ν_j相关联的嵌入。设$\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}$。则对任意单位 ϵ，我们有

$$\max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_j(\epsilon^{a_i} x_i)|^{\frac{1}{a_i}} = \max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_j(\epsilon)| \max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_j(x_i)|^{\frac{1}{a_i}} = \max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_j(x_i)|^{\frac{1}{a_i}}.$$

因此，对于加权射影空间中的任意一点，满足条件的代表元至多有 w_k 个（ k 中单位根的个数）。

$$\left(\max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_1(x_i)|^{\frac{d_1}{a_i}}, \dots, \max_{i \in \{0,\dots,n\}} |\sigma_{r+s}(x_i)|^{\frac{d_{r+s}}{a_i}} \right) \in \exp(F(\infty)).$$

此外，对于任意 T，

$$\exp(F(T)) = \left\{(X_1, \dots, X_{r+s}) \in \exp(F(\infty)) : X_1 \cdots X_{r+s} \le T^d\right\}.$$

因此我们得出结论：对于任意一个 w_k 代表元，都有

$$H_{\mathbf{a},\infty}(\mathbf{x}) \le T \iff (\sigma_1\mathbf{x}, \dots, \sigma_{r+s}\mathbf{x}) \in S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}}). \qquad \square$$

为证明定理 3.1，我们将采用 Kowalski [32] 为大筛法建立的一般框架。具体而言，我们取$Y = \mathcal{O}_k^{n+1}$、 $\Lambda = \{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k\}$ 和 $\rho_{\mathfrak{p}}$ 作为筛法设定： $\mathcal{O}_k^{n+1} \to (\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}^m)^{n+1}$ 标准约化映射。对于任意 $T \ge 1$，我们取$X = \mathcal{O}_k^{n+1} \cap S_{F,\ \mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})$ 作为筛选集，并取 $\mathcal{L}^* = \{\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k : \ N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \ \le Q\}$作为素数筛支撑。因此应用 [32,命题 2.3], ，可得

$$\#\left\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1} \cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}}) : \mathbf{x} \bmod \mathfrak{p}^m \notin \Omega_{\mathfrak{p}^m} \text{ for all } N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \le Q\right\} \le \Delta/G(Q),$$

其中 Δ 是大筛常数，我们现在必须确定它。为简化记号，我们省略 $N_{k/\mathbb{Q}}$的下标。在这一设定下，大筛常数定义为使下列不等式成立的最小非负实数 Δ

$$\sum_{\mathfrak{q} \le Q} \mu_k^2(\mathfrak{q}) \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}^m}^{*} \left| \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1} \cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})} c(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x}) \right|^2 \le \Delta \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1} \cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})} |c(\mathbf{x})|^2 \qquad (3.1)$$

对任意平方可和序列 $c(\mathbf{x})$均成立。这里， χ 求和遍历 $(\mathcal{O}_k/\mathfrak{q}^m)^{n+1}$ 的所有本原加性特征。

引理 3.4。 任意加性特征 χ 都可表示为$(\mathcal{O}_k/\mathfrak{q}^m)^{n+1}$

$$\chi(\mathbf{x}) = e\left(\frac{\mathbf{m}^{(1)} \cdot (x_{1,1}, \dots, x_{1,d}) + \dots + \mathbf{m}^{(n+1)} \cdot (x_{n+1,1}, \dots, x_{n+1,d})}{N(\mathfrak{q}^m)}\right),$$

其中，对于每个 i， $\mathbf{m}^{(i)} \in \mathbb{Z}^d$； 并且$(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{O}_k^{n+1}$ 中的 $\mathbf{x} =$ 满足 $x_i = \sum_{j=1}^d x_{i,j}\theta_j$。此外，对于每个 i 和 j，有

$$|m_j^{(i)}| \le \frac{1}{2}N(\mathfrak{q}^m), \qquad (3.2)$$

并且若 χ 非主特征，则

$$\max_{i,j} |m_j^{(i)}| \gg_k N(\mathfrak{q}^m)^{1-1/d}. \qquad (3.3)$$

证明。 当 $n = 0$ 时，这正是 [31, 引理 1] 的结论。回想有限群的直积的对偶群是各对偶群的直积，即可推出高维情形。□

有了这一结果，我们便可以完成对大筛常数的估计。

定理 *3.1* 的证明。 在整个证明过程中，我们按字典序将 $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$ 中的向量写成 $\mathbb{R}^{d(n+1)}$ 中的向量。设 U 表示区域 $S_{F,\ \mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})$ 在嵌入 $k^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{d(n+1)}$ 下的像。设 $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{d(n+1)}$ 为包含 U 的最小区间乘积，并用 R_j 表示到 j^{th} 坐标轴上的投影长度。给定$\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^{d(n+1)}$，令 $\widetilde{\mathbf{y}}$ 表示

$\mathcal{O}_k^{n+1}$ 中的向量 $(y_1\theta_1+\ldots+y_d\theta_d,\ \ldots,\ y_{nd+1}\theta_1+\ldots+y_{d(n+1)}\theta_d)$。于是，我们可以改写

$$\sum_{\mathfrak{q}\le Q}\mu_k^2(\mathfrak{q})\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}^m}\left|\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}_k^{n+1}\cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})}c(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})\right|^2$$
$$=\sum_{\mathfrak{q}\le Q}\mu_k^2(\mathfrak{q})\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}^m}\left|\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^{d(n+1)}\cap\mathcal{R}}\widetilde{c}(\mathbf{y})\chi(\widetilde{\mathbf{y}})\right|^2,$$

其中，若 $\widetilde{c}(\mathbf{y})=c(\widetilde{\mathbf{y}})$，则为 $\widetilde{y}\in S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})$；否则为 0。

由引理 3.4，存在至多 $O(Q^{md(n+1)})$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1})\in\mathbb{Q}^{d(n+1)}$，其中对每个 $\boldsymbol{\alpha}$，都存在一个范数至多为 Q 的无平方因子整理想 $\mathfrak{q}$，使得对于某个满足 (3.2) 和 (3.3) 的 $\mathbf{m}^{(i)}\in\mathbb{Z}^d$，有 $\alpha_i\overset{(i)}{=}\overline{\mathbf{m}N}_{(\mathfrak{q})^m}$。因此，我们可以写成

$$\sum_{\mathfrak{q}\le Q}\mu_k^2(\mathfrak{q})\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}^m}\left|\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^{d(n+1)}\cap\mathcal{R}}\widetilde{c}(\mathbf{y})\chi(\widetilde{\mathbf{y}})\right|^2=\sum_{i=1}^{cQ^{md(n+1)}}\left|\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^{d(n+1)}\cap\mathcal{R}}\widetilde{c}(\mathbf{y})e\left(\boldsymbol{\alpha}^{(i)}\cdot\mathbf{y}\right)\right|^2.$$

此外，对于不同的 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}'$，我们有

$$\max_{i,j}\left|\frac{m_j^{(i)}}{N(\mathfrak{q})^m}-\frac{m_j'^{(i)}}{N(\mathfrak{q}')^m}\right|\gg_k\frac{1}{N(\mathfrak{q})^{m/d}N(\mathfrak{q}')^{m/d}}.$$

因此，我们可以对每个 $j=1,\ldots,d(n+1)$ 和 $N_j=R_j$，应用 Huxley 大筛 [31, 定理 1]，其中 $\delta_j=Q^{-\frac{2m}{d}}$，从而得到

$$\sum_{\mathfrak{q}\le Q}\mu_k^2(\mathfrak{q})\sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}^m}\left|\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}_k^{n+1}\cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})}c(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})\right|^2$$
$$\le\prod_{j=1}^{d(n+1)}(R_j^{\frac12}+Q^{\frac{m}{d}})^2\sum_{\mathbf{y}\in\mathbb{Z}^{d(n+1)}\cap\mathcal{R}}|\widetilde{c}(\mathbf{y})|^2=\prod_{j=1}^{d(n+1)}(R_j^{\frac12}+Q^{\frac{m}{d}})^2\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{O}_k^{n+1}\cap S_{F,\mathbf{a}}(T^{\frac{1}{d}})}|c(\mathbf{x})|^2.$$

区域 $S_{F,\,\mathbf{a}}(T^{\frac1d})$ 可以包含在盒子 $\{(x_{i,\,\nu})_{0\le i\le n,\ \nu|\infty}\in\mathbb{R}^{d(n+1)}:|x_{i,\,\nu}|_\nu\le T^{\frac{a_i}{d}}\}$ 中，其中将 $\prod_{\nu|\infty}k_\nu^{n+1}$ 与 $\mathbb{R}^{d(n+1)}$ 视为相同。因此，对于 $id<j\le(i+1)d$，我们有 $R_j\ll_k T^{\frac{a_i}{d}}$。综上，我们得到

$$\Delta\ll_k\prod_{j=1}^{d(n+1)}(R_j^{\frac12}+Q^{\frac{m}{d}})^2\ll_k\prod_{i=0}^{n}\prod_{\lambda=1}^{d}(T^{\frac{a_i}{2d}}+Q^{\frac{m}{d}})^2\ll_k\prod_{i=0}^{n}(T^{a_i}+Q^{2m}).$$

最后，取 $T=cB$，其中 c 依赖于该域，应用此结果即可完成证明。□

4. 加权射影栈中的薄集

本节利用定理 3.1 证明定理 1.1。一个微妙之处在于，只要 $\mathbf{a}$ 非平凡，$\mathbb{P}(\mathbf{a})(\mathcal{O}_k) \neq \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$；我们将在下文的推论 4.2 中阐明这一差异。因此，不存在自然的模 $\mathfrak{p}$ 映射 $\mathbb{P}(\mathbf{a})(k) \to \mathbb{P}(\mathbf{a})(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})$，这会使模素数筛法变得棘手。我们通过提升到仿射空间来避开这些问题：映射 $(\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\})(\mathcal{O}_k) \to \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$ 一般而言不是满射。尽管如此，存在一个良定义的满射 $(\mathbb{A}^{n+1}(\mathcal{O}_k)) \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$。令 $\mathcal{A} = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_{h_k}\}$ 为 k 中理想类的一组代表元。对于任意点 $x \in \mathbb{P}(\mathbf{a})(k)$，我们都可以选取一个代表元组 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}$，使得 $\mathrm{wgcd}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathfrak{a}_i$，其中 i。此代表元在单位的作用下唯一。

设 $f\colon \mathcal{Y} \to \mathbb{P}(\mathbf{a})$ 是一个薄态射，且 $\mathcal{Y}$ 整。我们选取一个 $\mathcal{Y}$ 在 $\mathcal{O}_k$ 上的模型，滥用记号，也记作 $\mathcal{Y}$。考虑

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\ \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbf{a}) \end{array}$$

通过与 (2.1) 取纤维积给出。由于 f 可表，g 也可表，因此 Y 是一个概形。因此我们推得

$$\begin{aligned} &\#\{x \in \mathbb{P}(\mathbf{a})(k) : H_{\mathbf{a}}(x) \le B,\ x \in f(\mathcal{Y}(k))\} \\ &\qquad \le \#\{\mathbf{x} \in [\mathcal{O}_k^{n+1}/\mathcal{O}_k^{\times}] : \mathrm{wgcd}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{A},\ H_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \le B,\ \mathbf{x} \in g(Y(k))\}. \end{aligned}$$

由永田紧化定理，我们可以将 g 延拓为一个固有态射 $g^{\mathrm{c}}\colon Y^{\mathrm{c}} \to \mathbb{A}^{n+1}$。由于映射 g^{c} 是泛有限，我们可以将 g^{c} 替换为其相对正规化；这只会使计数问题发生可忽略的变化，从而可假设 g^{c} 是有限的。于是，若 $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}$ 满足 $\mathbf{x} \in g^{\mathrm{c}}(Y^{\mathrm{c}}(k))$，则实际上 $\mathbf{x} \in g^{\mathrm{c}}(Y^{\mathrm{c}}(\mathcal{O}_k))$，因为有限映射是整的 [48, Tag 01WJ]。

因此，我们只需为计数问题

$$\#\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/\mathcal{O}_k^{\times} : \mathrm{wgcd}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \in \mathcal{A},\ H_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \le B,\ \mathbf{x} \in \psi(Z(\mathcal{O}_k))\} \tag{4.1}$$

其中 $\psi\colon Z \to \mathbb{A}^{n+1}_{\mathcal{O}_k}$ 是任意一个非双有理有限态射，且 Z 是一个整概形。(4.1) 中的量因而有如下上界

$$\#\left\{\mathbf{x} \in \mathcal{O}_k^{n+1}/\mathcal{O}_k^{\times} : \begin{array}{l} H_{\mathbf{a},\infty}(\mathbf{x}) \ll_k B, \\ \mathbf{x} \bmod \mathfrak{p} \in \psi(Z(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})) \text{ for all } N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \le Q \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

对任意 $Q \ge 1$ 都成立。在上述推导中，我们用到了这样一个事实：加权最大公因数只有有限种可能取值（其确切数量取决于 k），因此，为了求得上界，可以忽略这一条件。

现在我们已经可以运用定理 3.1 中的大筛法。作为输入，我们需要了解被排除的模 $\mathfrak{p}$ 集合的大小。利用 Serre 的以下结果即可做到这一点。

引理 4.1（[46, §13.2 定理 5]）。存在有限伽罗瓦扩张 L_ψ/k 和一个常数 $0 < c_\psi < 1$，使得若 $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k$ 在 L_ψ 中完全分裂，则

$$|\psi(Z(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}))| \le c_\psi N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n+1} + O\left(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n+\frac{1}{2}}\right).$$

至此，我们完成主定理的证明。

定理 *1.1* 的证明。设 $Q \geq 1$ 为一个参数，稍后我们将具体指定。将定理 3.1 应用于 $m = 1$，得到

$$\#\left\{\mathbf{x} \in [\mathcal{O}_k^{n+1}/\mathcal{O}_k^\times] : \begin{array}{l} H_{\mathbf{a},\infty}(\mathbf{x}) \ll_k B, \\ \mathbf{x} \bmod \mathfrak{p} \in \psi(Z(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p})) \text{ for all } N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \leq Q \end{array}\right\} \ll \frac{\prod_{i=0}^n (B^{a_i} + Q^2)}{G(Q)}.$$

由引理 4.1 的结论可知，存在常数 $c \in (0,1)$ 以及一个正密度为 δ 的素理想集合 $\mathcal{P}$，使得

$$\begin{aligned} G(Q) &\geq \sum_{\substack{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q}) \leq Q \\ \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k,\ \mathfrak{p}\mid\mathfrak{q} \Longrightarrow \mathfrak{p} \in \mathcal{P}}} \mu_k^2(\mathfrak{q}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{q}} \frac{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{n+1} - \#\psi(Z(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}))}{\#\psi(Z(\mathcal{O}_k/\mathfrak{p}))} \\ &\geq \sum_{\substack{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q}) \leq Q \\ \mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_k,\ \mathfrak{p}\mid\mathfrak{q} \Longrightarrow \mathfrak{p} \in \mathcal{P}}} \mu_k^2(\mathfrak{q}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{q}} \left[\frac{1-c}{c} + O(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})\right]. \end{aligned}$$

令 $g(\mathfrak{q}) = \mu_k^2(\mathfrak{q}) \prod_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{q}} \left[\frac{1-c}{c} + O(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-\frac{1}{2}})\right]$，其中 $\mathfrak{q}$ 仅能被 $\mathcal{P}$ 中的素理想整除；否则令 $g(\mathfrak{q})$ 为 0。那么，由切博塔廖夫密度定理可得

$$\begin{aligned} \sum_{N_{k/\mathbb{Q}}(p) \leq x} \frac{g(\mathfrak{p}) \log N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})}{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})} &= \sum_{\substack{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p}) \leq x \\ \mathfrak{p} \in \mathcal{P}}} \frac{(1-c)\log N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})}{cN_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})} + O(N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})^{-\frac{3}{2}+\epsilon}) \\ &\sim \frac{\delta(1-c)}{c} \log x. \end{aligned}$$

因此，应用维尔辛定理（参见例如 [9, 引理 3.11]，其为数域变体）可得

$$G(Q) = \sum_{N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{q}) \leq Q} g(\mathfrak{q}) \gg Q(\log Q)^{\eta\delta - 1},$$

对于 $\eta = \frac{1-c}{c} > 0$。选择 $Q = B^{\text{最小值}_i a_i}$，即可得到带有$\gamma = 1 - \eta\delta$的所需界。□

我们还给出关于整点的以下变体。这是一个稍强的结果，旨在突出一般而言真代数栈上的有理点与整点之间的差异。

推论 4.2。 令 $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{n+1}$，令 $k/\mathbb{Q}$ 为次数为 d 的数域，并令 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$为相应的加权射影叠，视为定义在 $\mathcal{O}_k$上的对象。则 $\mathbb{P}(\mathbf{a})(\mathcal{O}_k)$ 不是薄集。

证明。 $\mathbb{P}(\mathbf{a})(\mathcal{O}_k)$ 中的每个元素都可以表示为 $(x_0, \ldots\ldots, x_n) \in \mathcal{O}_k$，使得 $\gcd(\mathbf{x})$ 是类群中某个元素的一个固定代表（而不是 $\mathrm{wgcd}(\mathbf{x})$）。对 [10, 定理 3.15] 中所给论证稍作变动，可知 $\mathbb{P}(\mathbf{a})$ 上高度不超过 B 的整点总数的增长量级为 $B^{a_0+\cdots+a_n}$。因此，定理 1.1 立即表明 $\mathbb{P}(\mathbf{a})(\mathcal{O}_k)$ 不是稀薄集。□

5. 超椭圆曲线上的层结构

本节证明定理 1.5。

5.1. 阿贝尔簇的模叠。我们首先介绍层结构的模叠。相关背景请参见 [22, §IV.6], ，不过我们采用的约定与*loc. cit* 略有不同，因为我们允许 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-作用，而不仅仅是 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-作用；这样可以得到定义在 $\mathbb{Q}$上的良模空间栈（见[22,备注 IV.6.12]）。

设 A是域 k 上的一个主极化阿贝尔簇（ppav），其特征为 0。 A 上的一个 level-n 层结构是群概形 $A[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$之间的一个同构的选取，该同构在一个固定标量意义下保持 Weil 配对。令 $\mathcal{A}_g$表示 $\mathbb{Q}$上的主极化阿贝尔簇（ppav）的模叠，并令 $\mathcal{A}_{g,\,n}$ 表示带有 level n-层结构的 ppav 的模叠。存在一个自然映射$\mathcal{A}_{g,\,n} \to \mathcal{A}_g$ ，它是一个 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-主丛。栈 $\mathcal{A}_{g,\,n}$ 是光滑的，但不一定连通。设 $G \subseteq \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$是一个子群。我们称商$\mathcal{A}_{g,\,G} := [\mathcal{A}_{g,n}/G]$ 带有 ***level-G*** 层结构的 ppav 的栈。再次存在一个自然映射 $\mathcal{A}_{g,\,G} \to \mathcal{A}_g$ ，它是次数为 $|\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|/|G|$ 的有限 étale 映射。我们首先确定其连通分支。我们使用短正合列

$$1 \to \mathrm{Sp}_{2g} \to \mathrm{GSp}_{2g} \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to 1$$

其中最后一个映射是乘子映射 ν。这个正合列是分裂的。

引理 5.1. 设 $G \subseteq$辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 满足 $\nu(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$。那么 $\mathcal{A}_{g,G}$在 $\mathbb{Q}$ 上几何连通。

证明。 映射 $\mathcal{A}_{g,n} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}$ 分解为 $\mathcal{A}_{g,n} \to \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q}(\mu_n) \to \mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}$，并且 $\mathcal{A}_{g,n}$在 $\mathbb{Q}(\mu_n)$ [22, Cor. IV.6.8] 上几何连通。因此，$\mathcal{A}_{g,n}$ 的几何分支的伽罗瓦群在 $\mathbb{Q}$ 上恰为 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_n)/\mathbb{Q})$，不同的分支对应于乘子不同取值的伽罗瓦轨道。因此， ν(辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ 通过伽罗瓦作用在这些分支上自由且传递地作用。因此，取 G 的商，其中 $\nu(G) =(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ ，即可识别这些连通分支，结论显然。□

接下来，我们将验证这一几何构造与 §1.3 中基于伽罗瓦表示像所使用的 G-层结构概念相一致。

引理 5.2. 设 $A \in \mathcal{A}_g(k)$ 且 $G \subseteq$ 辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$。则 A 属于映射 $\mathcal{A}_{g,G}(k) \to \mathcal{A}_g(k)$ 的像，当且仅当伽罗瓦表示$\rho_{A,n} : \Gamma_k \to$ 辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的像包含于 G 的某个共轭之中。

证明。 连续取商后，得到如下由笛卡尔方块组成的交换图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_{g,n} & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\ k \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_{g,G} & \longrightarrow & BG \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{A}_g & \longrightarrow & B\text{辛相似群}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})
\end{array}$$

其中 $BG = [\mathrm{Spec}\, k/G]$ 表示 G的分类栈。底部的映射恰好是由 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-主丛 $\mathcal{A}_{g,n} \to \mathcal{A}_g$确定的分类映射。然而 $BG(k) = \mathrm{H}^1(k, G) = \mathrm{Hom}(\Gamma_k, G)/\sim$，这里的等价关系是模去 G 中的共轭（后一等式可由用余循环和余边界显式描述非阿贝尔伽罗瓦上同调得到，并利用 Γ_k 在 G上平凡作用这一事实；见 [44, §5.1]）。因此，底部箭头恰好是将 $A \in \mathcal{A}_g(k)$ 映到相应诱导的 $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$-主丛的映射，而这恰好等价于伽罗瓦表示 $\rho_{A,n}$的数据。根据纤维积的泛性质，我们得出，A 属于 $\mathcal{A}_{g,G}(k) \to \mathcal{A}_g(k)$ 的像，当且仅当伽罗瓦表示 $\rho_{A,n}$ 属于 $BG(k) \to B\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ 的像，也就是说，当且仅当它属于 $\mathrm{Hom}(\Gamma_k, G)/\sim \to \mathrm{Hom}(\Gamma_k, \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))/\sim$ 的像。这恰好等价于 $\rho_{A,n}$ 的像在 G 中模共轭。□

5.2. **超椭圆曲线的模叠**。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 $\mathcal{H}_{2g+i}$ 分别表示奇型/偶型超椭圆曲线的模叠。根据 [27, 命题 5.9] 或 [23, 命题 4.2(1)]，我们有 $\mathcal{H}_{2g+1} \subseteq \mathbb{P}(4、6、\cdots、4g+2)$ 作为稠密开子集。雅可比簇给出一个叠态射 $\mathcal{H}_{2g+1} \to \mathcal{A}_g$；拉回得到带有 level-$G$ 结构的超椭圆曲线模叠 $\mathcal{H}_{2g+1、G} \to \mathcal{H}_{2g+1}$。

引理 5.3。令 $n \in \mathbb{N}$ 为奇数。对于任意子群 $G \subseteq$ 辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，映射 $\mathcal{H}_{2g+1、G} \to \mathcal{H}_{2g+1}$ 是有限 *étale* 的。若 $\nu(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$，则栈 $\mathcal{H}_{2g+1、G}$ 是几何连通的。

证明。第一部分由此得出：$\mathcal{A}_{g,G} \to \mathcal{A}_g$ 是有限 étale 的。关于几何连通性，关键事实是：将$\mathcal{H}_{2g+2,n}$视为 $\mathbb{C}$上的栈所诱导的几何单值作用，在 n为奇数时，由 [1, 定理 1(2)]仍为整个 $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$。此外，固定一个魏尔斯特拉斯点并不影响 n 为奇数时的n层结构，因此$\mathcal{H}_{2g+1,n}$ 同样具有完整的单值作用，从而在 $\mathbb{Q}(\mu_n)$上观察时是几何连通的。该结果现在可由与引理 5.1 的证明类似的论证得出。□

5.3. **定理 1.5 的证明**。设 $G \subseteq$ 辛相似群$_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$是满足$\nu(G) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$的真子群。则映射$\mathcal{H}_{2g+1,G} \to \mathcal{H}_{2g+1}$ 是次数大于 1 的有限 étale 映射，且由引理 5.3，$\mathcal{H}_{2g+1,G}$ 是连通的。因此，它在定义 2.3 的意义下是薄映射。于是我们可以应用定理 1.1 与引理 5.2 得到该结果。□

参考文献

[1] N. A’Campo，《辫子、单值化与辛群》。《*Commentarii Mathematici Helvetici*》**54**（1979），第2期，318–327。[2] V. V. Batyrev，Y. I. Manin，《关于代数簇上有界高度有理点的数量》。《*Mathematische Annalen*》**286**（1990），第1–3期，27–43。[3] D. Bonolis，多项式筛法与 Deligne 型和。《*International Mathematics Research Notices*》（2）（2021），1096–1137。[4] D. Bonolis，T. D. Browning，超椭圆纤维化上有理点的一致上界。《比萨高等师范学院科学年鉴》（5）**24**（2023），第1期，173–204。[5] D. Bonolis，L. B. Pierce，多项式筛法的应用：超越变量分离。《代数与数论》**18**（8）（2024），1515–1556。

[6] D. Bonolis，L.B. Pierce，K. Woo，计算 II 型薄集中的整点：奇点、筛法与分层，arXiv:2505.11226。[7] N. Broberg， $\mathbb{P}^1$ 和 $\mathbb{P}^2$的有限覆盖上的有理点。《数论杂志》101（2003），第1期，195–207。[8] T. D. Browning，R. Heath-Brown，P. Salberger，计算代数簇上的有理点。《杜克数学杂志》132（2006），545–578。[9] T.D. Browning，D. Loughran，在簇上筛选有理点。《美国数学会汇刊》371（2019），第8期，5757–5785。[10] P. Bruin，I. Manterola Ayala，在数域上计算加权射影空间中的有理点。预印本，arXiv:2302.10967。[11] T. Buggenhout，W. Castryck，R. Cluckers，T. Santens，F. Vermeulen，关于射影空间中薄集的塞尔问题。预印本，arXiv:2506.13471。[12] W. Castryck，R. Cluckers，P. Dittmann，K.H. Nguyen，维数增长猜想：关于次数的多项式增长且没有对数因子。《代数与数论》14（2020），第8期，2261–2294。[13]S. Chan，P. Koymans，N. Rome，多个圆锥曲线的塞尔问题。预印本，arXiv:2504.21792。[14] S. D. Cohen，伽罗瓦群的分布与希尔伯特不可约性定理。《伦敦数学会会刊》（3）43（1981），第2期，227–250。[15] R. Darda，有界高度的加权射影叠上的有理点，博士论文，《论文集》，巴黎西岱大学，2021年9月，330页，arxiv:2106.10120。[16] R. Darda，T. Yasuda，德利涅–芒福德叠上的 Batyrev–Manin 猜想。《欧洲数学会杂志》（2024）[17] J. Demeio，S. Streeter，低次数 del Pezzo曲面的弱逼近。《International Mathematics Research Notices》，第13期，11549–11576，2023。[18] J. Demeio，S. Streeter，R. Winter，二次 del Pezzo 曲面的弱弱逼近与希尔伯特性质。《伦敦数学会会刊》（ 3 ） 128 （ 2024 ），第5期，论文编号 e12601，28页。[19] A. Deng，加权射影空间上的有理点，arxiv:9812082。[20]K. Destagnol，J. Lyczak，E. Sofos，广义沙特莱簇的局部可解性，arXiv:2504.11388。[21] J. S. Ellenberg，M. Satriano，D. Zureick-Brown，叠上的高度与广义巴特列夫–曼因–马勒猜想。《数学论坛：西格玛》11：论文编号 e14，54页，（2023）。[22] G. Faltings，C-L. Chai，阿贝尔簇的退化。附有 David Mumford 的附录。《数学及其交界领域成果》（3）22。施普林格出版社，柏林，1990年。[23] M. Fedorchuk，具有 A型和D型奇点的超椭圆曲线模空间。《数学杂志》276（2014），第1–2期，299–328。[24] A. Fehm，A. Javanpeykar，簇的希尔伯特性质，arXiv:2511.18431[25] J. Franke，Y. I. Manin，Y. Tschinkel，Fano 簇上有界高度的有理点。《数学创刊》95（1989），第2期，421–435。[26]J. Glas，L. Hochfilzer，低次数 del Pezzo曲面上的有理点，arXiv:2401.04759。[27] C. Han，J.-Y. Park，在 $\mathbb{P}^1$上枚举奇数次超椭圆曲线和阿贝尔曲面。《数学杂志》304（2023），第1期，论文编号5，32页[28] D. R. Heath-Brown，十个变量中的三次型。《伦敦数学会会刊》47（1983），第3期，225–257。[29] D. R. Heath-Brown，曲线和曲面上有理点的密度。《数学年刊》155（2002），553–595。[30] D. R. Heath-Brown，L. B. Pierce，光滑循环覆盖上的有理点计数。《数论杂志》132（2012），第8期，1741–1757。[31] M.N. Huxley，代数数域的大筛不等式。《Mathematika》15（1968），178–187。

[32] E. Kowalski, 《大筛法及其应用》。算术几何、随机游走与离散群。剑桥数学专著 175。剑桥大学出版社，2008年。[33] A. Landesman、A. Swaminathan、J. Tao、Y. Xu, 《有理族阿贝尔簇的伽罗瓦表示的满射性》。附录由 D. Lombardo 撰写。《代数与数论》13（2019），第5期，995–1038[34] A. Landesman、A. Swaminathan、J. Tao、Y. Xu, 《其雅可比簇挠点上具有极大伽罗瓦作用的超椭圆曲线》。《印第安纳大学数学杂志》69（2020），第7期，2461–2492。[35] D. Loughran、N. Rome、E. Sofos, 《族中有理点的首项常数》。预印本，arXiv:2210.13559。[36] D. Loughran、C. Salgado, 《椭圆曲面上的秩跳跃与希尔伯特性质》。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》72（2022），第2期，617–638。[37]D. Loughran、T. Santens, 《Malle 猜想与叠的布劳尔群》，arXiv:2412.04196。[38] D. Loughran、A. Smeets, 《有理点稀少的纤维化》。《几何与泛函分析》26(5)（2016），1449–1482。[39] R. Munshi, 《 $\mathbb{P}^n$循环覆盖上有理点的密度》。《波尔多数论杂志》21（2009），335–341。[40] M. Paredes、R. Sasyk, 《全局域上的簇有理点数的一致上界》。《代数与数论》16（2022），第8期，1941–2000。[41] T. Phillips, 《加权射影栈态射像中的有界高度点》。预印本，arXiv:2201.10624。[42] P. Salberger, 《射影簇上有理点的计数》。《伦敦数学会会刊》（第3辑）126（2023），第4期，1092–1133。[43] W. Schaal, 《代数数域中的大筛法》。《数论杂志》2（1970），249–270。[44] J.-P. Serre, 《伽罗瓦上同调》。1997年英文版的修订重印本。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2002年。[45] J.-P. Serre, 《伽罗瓦理论专题》。第二版。附 Henri Darmon 的注释。数学研究札记 1。A K Peters, Ltd.，韦尔斯利，马萨诸塞州，2008年。[46] J.-P. Serre, 《莫德尔–韦伊定理讲义》。第3版。数学视角，E15。Springer Fachmedien Wiesbaden，1997年。[47] J.-P. Serre, 《$\mathrm{Br}_2(\mathbb{Q}(T_1,\dots,T_n))$ 中元素的特化》。《巴黎科学院院报》数学辑 I 311（1990），第7期，397–402。[48] Stacks Project 作者, 《Stacks Project》，https://stacks.math.columbia.edu，2023年。[49] S. Streeter, 《双二次曲线丛和德尔佩佐簇的希尔伯特性质》。《数学研究快报》28（2021），第1期，271–283。[50] A. Vistoli, 《代数栈及其模空间上的交理论》。《数学创刊》97（1989），第3期，613–670。[51] D. Zywina, 《挠点上具有极大伽罗瓦作用的椭圆曲线》。《伦敦数学会通报》42（2010），第5期，811–826。

伦敦大学学院数学系，高尔街，伦敦，WC1E 6BT，英国。

巴斯大学数学科学系，克拉弗顿唐，巴斯，BA2 7AY，英国。

格拉茨工业大学分析与数论研究所，施泰雷尔街30/II，8010格拉茨，奥地利。