arXiv:2602.05719v1 [math.SP] 5 Feb 2026

# 时间周期性¨薛定谔算子的有限能量子空间

E. SKIBSTED

Abstract. 对于具有时间周期性短程成对势的 $N$体薛定谔算子，我们通过含时对易子方法证明所有通道波算子均存在。对于 $N = 2$，我们用该方法的简化版本证明渐近完备性，从而重新得到 Yajima 通过定态方法证明的完备性结果 [Yaj1]。我们提出了有限能量子空间的定义，直观而言，该子空间由具有“有限渐近能量”的态组成。我们利用这一几何概念刻画波算子子空间，后者是各通道波算子值域的直和。因此，我们的主要结果表明这两个子空间相同。进而，对于 $N = 2$，它们与单值算子纯点子空间的正交子空间相同（由渐近完备性可知）。对于 $N \geq 3$，时间周期性短程势的渐近完备性仍是一个未解问题。在这种情况下，本文的主要结果或可作为证明（或可能否定）渐近完备性的一个中间步骤。本文的一个关键中间结果也可能发挥作用：该结果断言，与纯点子空间正交的态满足一个（锐利的）最小速度界。因此，能否为 $N \geq 3$导出一个良好的极大速度界，仍是一个未解问题。我们的结果适用于处于时间周期外电场中的 $N$体粒子系统，其中电场的时间平均值为零，例如 AC-Stark模型。

关键词： $N$体时间周期性Schr¨odinger算子；短程散射理论；波算子与有限能量子空间。

2010年数学学科分类：81Q10，35P05。

Contents

1. 引言 2 1.1. 与时间无关的模型 2 1.2. 一种物理含时模型 3 1.3. 物理模型与约化物理模型的结果 5 1.4. 相关文献与本文结构 7 2. $N$体哈密顿算子、记号与结果 8 2.1. 广义 $N$体短程哈密顿算子 8 2.2. 结果 12 3. Yafaev 构造 15 3.1. Yafaev 齐次函数 15 3.2. Yafaev 观测量及其若干对易子性质 17 4. 初步局域化结果 18 4.1. 辅助哈密顿量 19 4.2. 极高能区域中的界 23 4.3. 入射区域中的界 25 4.4. 命题 2.14 的证明 33

5. 局域化到严格出射区域 33 6. 初步传播估计 38 6.1. 积分估计 39 6.2. 平方根问题：式 (6.6c) 的另一种证明 41 6.3. 广义积分估计 48 7. $\mathcal{H}^+_{\rm ener}$ 50中的态的渐近聚类 7.1. 辐射条件界 50 7.2. $\mathcal{H}^+_{\rm ener}$ 51中态的先验局域化 7.3. 命题 7.1 的证明 55 8. 定理 2.6 的证明 56 9. 定理 2.9 的证明 58 10. 定理 2.10 及其余结果的证明 58 10.1. 定理 2.10 的证明 58 10.2. 渐近完备性：另一判据 60 10.3. 命题 2.11 和 2.12 的证明 61 参考文献 62

## 1. Introduction

由 $N$ 个粒子组成的量子力学系统通过与时间无关的短程成对势相互作用，其大时间行为已得到充分理解：在质心框架中，通道波算子存在且完备。这一渐近完备性结果为散射态的演化提供了令人满意的大时间描述。本文将研究时间依赖的（更确切地说，是时间周期性的）短程多体哈密顿量的散射问题。尽管渐近完备性尚未得到证明或确立，我们仍获得了若干相关的新结果。我们的主要工具是对易子方法。

**1.1. 时间无关模型**。我们简要回顾上述定常情形下的完备性结果，部分目的是为本文将要研究的散射问题提供动机。因此，考虑通过短程成对势相互作用的 $n$ 维粒子$j = 1, \ldots, N$

$$V_{ij}(x_i - x_j) = \mathcal{O}(|x_i - x_j|^{-1-2\mu}), \quad \mu > 0. \tag{1.1}$$

总哈密顿量为

$$H = H^{a_{\max}} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2m_j}\Delta_{x_j} + \sum_{1\le i<j\le N} V_{ij}(x_i - x_j). \tag{1.2}$$

它作用于希尔伯特空间 $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{X})$上，其中质心空间

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^{a_{\max}} = \Big\{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \ \Big| \sum_{j=1}^{N} m_j x_j = 0\Big\}.$$

对于簇分解 $a \neq a_{\max} = \{1, \ldots, N\}$，存在类似定义的子哈密顿量 $H^a$，其作用于 $L^2(\mathbf{X}^a)$，其中 $\mathbf{X}^a \subsetneq \mathbf{X}$ 由满足以下条件的向量组成：$a$ 中每个簇的质心均为零。

对于任意通道 $\alpha=(a,\lambda^\alpha,u^\alpha)$，即 $a$ 为一个簇分解，$a\neq a_{\max}$、$\lambda^\alpha\in\mathbb{R}$，以及对于归一化的 $u^\alpha\in L^2(\mathbf{X}^a)$ 的 $(H^a-\lambda^\alpha)u^\alpha=0$，相应的正向和反向通道波算子 $W_\alpha^\pm$定义为

$$W_\alpha^\pm\psi_a=\lim_{t\to\pm\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tH}\Big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda^\alpha}u^\alpha\big)\otimes\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta_{x_a}}\psi_a\big)\Big);\quad \psi_a\in L^2(\mathbf{X}_a). \tag{1.3a}$$

这里我们将$\mathbf{X}=\mathbf{X}^a\oplus\mathbf{X}_a$作了正交分解。通道波算子的存在及其完备性，也就是说，$H$ 的绝对连续子空间由它们的值域张成，

$$\sum_\alpha^\oplus \mathrm{ran}(W_\alpha^\pm)=\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)=\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}^\perp(H), \tag{1.3b}$$

这是数理物理中一个研究充分的问题，几十年前便已得到彻底解决，参见 [SS、Gr、De、Yaf、DG、HS、Is]。上述部分文献（其中一些是综述）也涉及长程势的散射理论，不过所有研究都基于对易子方法。本文同样采用对易子方法，且在一定程度上遵循文献中的思路。更一般地说，本文还借鉴了上述文献中的思想，以及 [Yaj1、KY、MS], 中专门针对含时问题的思想和结果。

1.2. **一个物理含时模型**。现在，我们将 $-\sum_{j=1}^N q_j\,E(t)\cdot x_j$作为一个新项加到（1.2）右端，其中 $E(t)\in\mathbb{R}^n$ 是任意一个时间平均值为零的时间周期向量，$q_j$ 是第 $j$个粒子的电荷。这个哈密顿量描述了一个量子力学系统：带电粒子处于时间平均值为零的恒定时间周期外电场中，并通过短程对势相互作用。同样，我们可以平凡地分离出质心运动，从而研究由时间周期哈密顿量 $H=H(t)$生成的 $L^2(\mathbf{X})$中的（约化）演化。自然会提出同样的问题：$L^2(\mathbf{X})$中的“散射态”如何演化？这正是本文的主题。

为简单起见，我们假设 $E(t)$ 的周期为一。因此，我们假设

$$E(t+1)=E(t)\ \text{ and }\ \int_0^1 E(t)\,\mathrm{d}t=0. \tag{1.4}$$

我们将生成元 $H(t)$ 写成如下形式。沿用之前的记号$x=(x_1,\ .....,\ x_N)\in(\mathbb{R}^n)^N$和 $y=(y_1,\ .....,\ y_N)\in(\mathbb{R}^n)^N$，表达式

$$x\cdot y=\sum_{j=1}^N 2m_jx_j\cdot y_j$$

defi定义了一个内积，使得总哈密顿量分解为直和，

$$H(t)\otimes I+I\otimes H_{\mathrm{CM}}(t),$$

对应于正交分解 $(\mathbb{R}^n)^N=\mathbf{X}\oplus\mathbf{X}_{\mathrm{CM}}$。设 $Q=q_1+\cdots q_N$、$M=m_1+\cdots m_N$以及

$$\mathcal{E}(t)=\tfrac12\Big(\big(\tfrac{q_j}{m_j}-\tfrac{Q}{M}\big)E(t),\dots,\big(\tfrac{q_N}{m_N}-\tfrac{Q}{M}\big)E(t)\Big).$$

则 $\mathcal{E}(t) \in \mathbf{X}$，并且我们可以用动量算符 $p = -\mathrm{i}\nabla_x$ 将质心哈密顿量 $H(t)$表示为

$$H = H(t) = p^2 - \mathcal{E}(t) \cdot x + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j).$$

显然，除非所有 $j = 1, \cdots, N$ 的荷质比 $\frac{q_j}{m_j} = \frac{Q}{M}$，否则该哈密顿量具有非平凡的时间依赖性，当然，其时间平均值为零且具有周期性。它生成一种动力学，

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi \text{ and } U(s,s) = I,$$

我们感兴趣的是理解演化 $U(t,0)\psi$ 的行为，其中态 $\psi$ 与单值算子$U(1,0)$的纯点子空间正交。（这些态是我们模型的散射态。）

1.2.1. 物理模型的约化。按照 [MS]，采用伽利略变换来简化演化是很方便的。因此令

$$\begin{aligned}
b(t) &= \int_0^t \mathcal{E}(s)\,\mathrm{d}s - b_0, \quad b_0 = \int_0^1 \int_0^t \mathcal{E}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,\\
c(t) &= 2\int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s - c_0, \quad c_0 = 2\int_0^1 \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,\\
\alpha(t) &= \int_0^t |b(s)|^2\,\mathrm{d}s - t\alpha_0, \quad \alpha_0 = \int_0^1 |b(s)|^2\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

这里 $b(t)$ $c(t) \in \mathbf{X}$，这些向量的周期为一且均值为零，标量 $\alpha(t)$ 也具有周期性。于是定义

$$S(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha(t)}\exp(\mathrm{i}b(t)\cdot x)\exp(-\mathrm{i}c(t)\cdot p), \tag{1.5a}$$

我们可以记为

$$\begin{aligned}
S(t)^* H(t) S(t) &= H_{\mathrm{G}}(t) - \mathrm{i}\big(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)^*\big)S(t) + \alpha_0;\\
H_{\mathrm{G}}(t) &= p^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{ij}(x_i - x_j + c(t)_i - c(t)_j),
\end{aligned}$$

因此

$$S(t)^* U(t,s) S(s) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(s-t)\alpha_0} U_{\mathrm{G}}(t,s), \tag{1.5b}$$

其中 $U_{\mathrm{G}}$ 表示动力学

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U_{\mathrm{G}}(t,s)\psi = H_{\mathrm{G}}(t)U_{\mathrm{G}}(t,s)\psi \text{ and } U_{\mathrm{G}}(s,s) = I.$$

显然，生成元 $H_{\mathrm{G}}(t)$是一个具有时间周期性短程对势的时间依赖薛定谔算子。因此，核心问题是：与单值算子 $U_{\mathrm{G}}(1,0)$的纯点子空间正交的态 $\psi$ （记作$\mathcal{H}_{\mathrm{G,pp}}$）的演化 $U_{\mathrm{G}}(t,0)\psi$ 表现如何?

受与时间无关的短程情形完备性表述的启发，我们因此考虑关于这一问题的如下猜想。

对于任意通道 $\alpha = (a, \lambda^\alpha, u^\alpha)$，即 $a$ 为簇分解 $a \neq a_{\max}$，$\lambda^\alpha \in [0, 2\pi)$，且 $U^a_{\mathrm{G}}(1,0)$ $u^\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha} u^\alpha$ 为归一化的 $u^\alpha \in L^2(\mathbf{X}^a)$，我们引入相应的通道波算子 $W^{\pm}{}_{\mathrm{G}\,\alpha}$，定义为

$$W^{\pm}_{\mathrm{G},\alpha}\psi_a = \lim_{t\to\pm\infty} U_{\mathrm{G}}(0,t)\Big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha[t]}U^a_{\mathrm{G}}(t-[t])u^\alpha\big)\otimes\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}\psi_a\big)\Big);\ \psi_a \in L^2(\mathbf{X}_a). \quad (1.6a)$$

这里，$[t] \in [0,1)$ 表示 $t \in \mathbb{R}$ 的整数部分，$p_a = -\mathrm{i}\nabla_{x_a}$，并且如前所述，我们已将 $\mathbf{X} = \mathbf{X}^a \oplus \mathbf{X}_a$ 作正交分解。还需注意，$U^a_{\mathrm{G}}(t) = U^a{}_{\mathrm{G}}(t,0)$ 表示由子哈密顿量 $H^a_G(t)$ 所生成的动力学，其定义方式与 $H_G(t)$ 类似（但作用于 $L^2(\mathbf{X}^a)$，而非作用于 $L^2(\mathbf{X})$）。由于在此情形下渐近完备性尚不清楚，我们将其陈述为一个猜想：

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,wave}} := \sum_{\alpha}^{\oplus} \mathrm{ran}(W^{\pm}_{\mathrm{G},\alpha}) = \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}. \quad (1.6b)$$

如果已知 (1.6b)，那么对于原来的含时问题，我们便会得到一个类似的完备性 结果。这可通过沿相反方向施行伽利略变换而得到。更确切地说，例如请注意性质 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}} = S(0)\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}$，其中 $\mathcal{H}_{\mathrm{pp}}$ 是单值算子 $U(1,0)$ 的纯点子空间。类似地，算子 $S(0)W^{\pm}{}_{\mathrm{G}\,\alpha}S(0)^*_a$ 正是物理通道波算子，参见下文的计算 (1.10a) 与 (1.10b)。由此便可得到对物理模型中所有散射态之演化的相当令人满意的长时间描述。

尽管一般情况下 (1.6b) 尚未得到证明，但值得一提的是，对于 $N = 2$，以及在额外强条件下的 $N = 3$ 或更大情形，该结果已为人所知，见 [Yaj1, Yaj2, Na]。已知的 $N \geq 3$ 条件似乎非常强，因此人们可能会怀疑 (1.6b) 一般情况下是否成立（这或许根源于经典力学中的一些例子？）。在实际层面，要证明 (1.6b)，可能需要克服两个障碍：

1) 演化 $\psi_G(t) = U_{\mathrm{G}}(t,\ 0)\psi$, $\psi \in \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G},\ \mathrm{pp}}$ 是否分别集中于严格的出射/入射相空间区域?

2) 演化 $\psi_G(t)$ 是否集中于有限动能区域?

无论如何，若 (1.6b) 已知成立，那么这些问题便会有肯定的答案。由于哈密顿量是时间依赖的，这些问题并非易解。与之恰恰相反，在与时间无关的情形下，存在简短直接的肯定答案。

我们通过定义有限能量子空间 $\mathcal{H}^{\pm}{}_{\mathrm{G},\ \text{能量}}$ 来详细说明 2)

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ener}} = \big\{\psi \in \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}} \mid \lim_{E\to\infty} \limsup_{t\to\pm\infty} \|F(p^2 > E)\psi_G(t)\| = 0\big\}.$$

（此处及下文 $F(\cdot > E) = 1_{(E,\infty)}$ 且 $F(\cdot < E) = 1_{(-\infty,E)}$。）那么，对 2) 的确切肯定回答应为断言 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G},\ \mathrm{pp}} = \mathcal{H}^{\pm}{}_{,\mathrm{G}\ \text{能量}}$。这一性质尚不为人所知。

**1.3. 物理模型和约化物理模型的结果。** 本文针对约化物理模型给出的主要结果（在对 (1.1) 加入较弱的补充条件，并在广义情形下证明）是以下断言

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,wave}} = \sum_{\alpha}^{\oplus} \mathrm{ran}(W^{\pm}_{\mathrm{G},\alpha}) = \mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ener}}. \quad (1.7)$$

此外，我们证明，对于 $N=3$

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ener}} = \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}} \ominus \mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ie}}, \tag{1.8}$$

其中递增能量子空间定义为

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ie}} = \big\{\psi \in \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}} \mid \forall E>0: \quad \lim_{t\to\pm\infty} \|F(p^2<E)\psi_G(t)\| = 0\big\}.$$

虽然对于 $N\geq 4$，(1.8) 尚未得到证明，但我们确实证明了：若 $\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,即}} = \{0\}$对于 $H_{\mathrm{G}}$ 成立，且对于所有子哈密顿量也成立，那么渐近完备性 $\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,波}} = \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}$确实成立（对于 $N=3$，这是 (1.7) 和 (1.8) 的推论）。

在证明 (1.7) 的过程中，我们证明了 1) 中对所有态 $\psi \in \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}$ 成立的局域化断言。因此，对于这类态，演化 $\psi_G(t)$ 确实集中于 $t\to\pm\infty$ 的严格出射/入射相空间区域。特别地，$\psi_G(t)$ 集中于严格正动能区域（鉴于哈密顿量的时间依赖性，这本身已是一项非平凡性质）。

物理模型中 (1.7) 的对应形式为

$$\sum_{\alpha}^{\oplus} \mathrm{ran}(W^{\pm}_{\alpha}) = \mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ener}}, \tag{1.9}$$

其中（用典范分解 $S(t) = S(t)^a \otimes S(t)_a$ 表示）

$$\begin{aligned} &W^{\pm}_{\alpha'} = S(0) W^{\pm}_{\mathrm{G},\alpha} S(0)^*_a, \\ &\alpha = (a,\lambda^\alpha,u^\alpha), \quad \alpha' = (a,\lambda^\alpha+\alpha^a_0, S(0)^a u^\alpha), \quad \alpha^a_0 = \int_0^1 |b(s)^a|^2\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{1.10a}$$

是物理通道波算子（此处经过重新参数化），而

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ener}} = \big\{\psi\in\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}} \mid \lim_{E\to\infty}\limsup_{t\to\pm\infty} \|F(p^2>E)\psi(t)\| = 0\big\}; \quad \psi(t) = U(t,0)\psi.$$

对于 (1.10a)，我们注意到，表达式 $p_a^2 - \mathcal{E}(t)_a\cdot x_a$ 在 $L^2(\mathbf{X}_a)$ 上定义了一个哈密顿量，生成动力学 $U_a$，且存在以下极限

$$W^{\pm}_{\alpha}\psi_a = \lim_{t\to\pm\infty} U(0,t)\Big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha[t]}U^a(t-[t])u^\alpha\big)\otimes\big(U_a(t)\psi_a\big)\Big),\ \psi_a\in L^2(\mathbf{X}_a). \tag{1.10b}$$

这里，$U^a(t) = U^a(t,0)$ 表示由子哈密顿量 $H^a(t)$ 生成的动力学，其定义方式与 $H(t)$ 类似。事实上，利用 (1.5a) 和 (1.5b)，在等式 (1.6a) 两边同时作用以 $S(0)$，即可推出这些极限存在。右侧可化简为$W^{\pm}_{\alpha'}S(0)_a\psi_a$。特别地，$W^{\pm}_{\alpha'}$ 存在，因此 $W^{\pm}_{\alpha}$ 也随之存在。显然，我们也得到了公式 (1.10a)。

对于 (1.9)，我们在等式 (1.7) 两边同时作用以 $S(0)$，再利用 (1.10a)、(1.10b) 以及 $\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ener}} = S(0)\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{G,ener}}$ 这一事实，即可得到该公式。当然，完备性意味着将 (1.9) 右侧替换为 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}}$。

对于 $N=3$ 完备性等价于性质 $\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{即}} = \{0\}$，其中

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ie}} = \big\{\psi\in\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}} \mid \forall E>0: \lim_{t\to\pm\infty}\|F(p^2<E)\psi(t)\| = 0\big\},$$

因为在这种情况下

$$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ener}} = \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}} \ominus \mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ie}}. \tag{1.11}$$

注意，对于 $N=3$，(1.11) 可由类似的断言 (1.8) 以相同方式推出。对于$N\geq 4$，完备性判据（可类似地推导）表明：$\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{即}} = \{0\}$ 对于 $H$以及所有子哈密顿量也成立。

$\mathcal{H}^{\pm}$ 即中的态，在经典力学中对应于动能不断增加的轨道 $p(t)^2 \to \infty$。目前尚不清楚这类轨道是否存在（理想情况下，它们并不存在）。

尽管我们的分析主要集中于研究 $\mathcal{H}^{\pm}{}_{\mathrm{G,ener}}$（因而也涵盖 $\mathcal{H}^{\pm}_{\mathrm{ener}}$），但我们为 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}$中的态得到了一个新的传播估计。具体而言，这是以下逐点最小速度界。

$$\forall \psi \in \mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}\, \forall \epsilon > 0 : \lim_{|t|\to\infty} \|F(|x| < |t|^{1-\epsilon})\psi_G(t)\| = 0. \tag{1.12}$$

当然，对 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{pp}}$中的态也有类似结论。这个最小速度界对我们证明（1.7）很重要，不过我们认为它本身也有独立的价值。特别要注意的是，即使对于那些我们不知道（甚至可能并不预期）具有有限速度上界的态，速度下界仍然成立。对于时间无关模型，能量守恒可给出速度下界和上界，参见例如 [DG，命题 4.11.1、定理 4.13.1]以及 [Is，定理 3.8、3.11、3.12]（包括这些界的积分形式）。

1.3.1. 总结性评论。 显然，(1.12) 是空间 $\mathcal{H}^{\perp}_{\mathrm{G,pp}}$ 的一种刻画性几何性质。我们还要指出， [MS] 中的积分局部衰减估计（见 (2.3)）与 (1.12) 有关，但仍有相当大的差异。这些积分估计贯穿全文，对我们都很重要，尤其是它们被用于推导 (1.12)（具体而言，在此情形下，我们利用的是任意取值的 $r = 0$ 和 $s > \frac{1}{2}$ 所对应的 (2.3)）。证明过程有些复杂。除了前面提到的 [MS] 中的估计之外，证明还基于对易子方法（全文皆如此），尤其是无界的时间依赖的传播可观测量。出于其他目的，我们将经常使用有界传播可观测量这一概念。

我们工作的一个主要目标是探究正对易子技术在证明（或可能证伪）完备性猜想方面能够发挥多大作用。这些工具与 Kato扰动光滑性技术截然不同；后者源自 [Ka1]，而前面提到的文献 [Yaj1, Yaj2, Na] 均依赖于该技术。尽管我们未能得到最终的完备性结果，但我们的努力带来了新的相关几何性质方面的结果（如上所述）。除了（量子）平滑效应之外，正对易子技术还与经典力学密切相关（事实上，它们可能受到经典力学的限制）。本文进一步凸显了这一点：我们只考虑足够光滑的势。然而，即便在这一假设下，要证明这些技术中的各种“量子误差”可以忽略不计，仍是一项重大挑战；典型的做法是借助 [MS] 中的积分局部衰减估计。由此可见，经典泊松括号决定了对易子正性所需的内容，这也正如预期。

1.4. **相关文献与论文结构**。 关于恒定外电场（与时间无关或时间周期性）中的带电粒子多体量子力学系统的散射，还有其他研究，参见 [AT, HMS, Ad]。然而，这些研究中的时间平均值不为零，这不仅意味着物理图景截然不同，证明方法也大相径庭。特别是，对于时间平均值非零的模型，渐近完备性已得到证明。本文看起来还为时过早，因为渐近完备性尚未得到证明（也未被证伪）。

我们还提及 [KY, BM] 的研究，其结果与（1.7）的精神相同（尽管内容不同）。更确切地说，他们的主要结果给出了某些波算子值域中态的几何刻画，而显然（1.7）具有相同的性质。

(1.12) 的推导见第4节。我们在第5节进一步分析，并引入适当的渐近可观测量 ，以证明正向演化确实集中于严格出射区域。第6节和第7节的设定更类似于「与时间无关」的情形，因此在某种意义上更易处理。另一方面，第6节和第7节的分析涉及一个新的复杂平方根对易问题。我们借助 [MS] 中完整的积分局域衰减估计克服了这一问题（这相当于通过 $r > 0$ 给出的 (2.3) 明确刻画动量空间衰减）。作为一项主要结果，我们证明了 $\mathcal{H}^{+}{}_{\mathrm{G,ener}}$ 中的态具有渐近聚簇 性质，这是证明 (1.7) 的一个重要要素（为简单起见，仅给出正号情形）。这一概念也可用于刻画渐近完备性 (1.6b)（见第10节）。在第8至10节中，我们证明了第2.2小节所述的若干结果。这些证明基于 Yafaev的构造/观测量 [Yaf], ，相关内容将在第3节回顾。这些结果以及 [MS] 中所需的结果，均在广义薛定谔算子的熟悉框架下陈述。第2.1小节介绍相关条件、记号、摘录自 [MS] 的内容及其他预备知识。

## 2. $N$-body Hamiltonians, notation and results

2.1. 广义 $N$ 体短程哈密顿量。设 X 是一个（非零）有限维实内积空间，配备一个有限族 $\{\mathrm{X}_a\}_{a\in\mathcal{A}}$，且该族关于交集封闭：对于任意 $a, b \in \mathcal{A}$ ，都存在 $c \in \mathcal{A}$，记作 $c = a \vee b$，使得 $\mathrm{X}_a \cap \mathrm{X}_b = \mathrm{X}_c$。我们通过在 $\mathrm{X}_a \supseteq \mathrm{X}_b$ 时写作 $a \leq b$ （或等价地写作 $b \geq a$），对 $\mathcal{A}$ 规定序关系。假设存在 $a_{\min}, a_{\max} \in \mathcal{A}$ ，使得 $\mathrm{X}_{a_{\min}} = \mathrm{X}$ 且 $\mathrm{X}_{a_{\max}} = \{0\}$。我们将使用简写记号 $a_0 = a_{\max}$。令 $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \{a_0\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \setminus \{a_{\min}\}$ 和 $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$。对于 $a \in \mathcal{A}_2$ ，子空间 $\mathrm{X}_a$ 称为碰撞平面。对于 $a \in \mathcal{A}_1$ ，我们使用记号 $d_a = \dim \mathrm{X}_a$ ，特别是简写记号 $d = d_{a_{\min}} = \dim \mathrm{X}$。

对于 $\mathcal{A}$ 中的任意链 $a_{\min} = a_1 \subsetneq \cdots \subsetneq a_n = a_0$，整数 $n \geq 2$ 称为其长度。如果 $N$ 是 $\mathcal{A}$ 中出现的最大长度，则该模型称为 $N$ 体模型。因此，二体模型基于结构 $\mathcal{A} = \{a_{\min}, a_0\}$。三体模型由性质 $\mathcal{A}_3 \neq \emptyset$ 以及对于所有不同的 $a, b \in \mathcal{A}_3$ 均有 $\mathrm{X}_a \cap \mathrm{X}_b = \{0\}$ 这一条件给出。本文的条件（下文称为条件 2.1 ）是一个短程条件。特别是，在此条件下， $N$体散射理论具有规范意义（后文将予以证明）。尽管二体模型的短程散射理论已相当成熟 [Ho, Yaj1], ，但我们对多体散射理论的了解仍相当有限。

令$\mathrm{X}^a \subseteq \mathrm{X}$ 为$\mathrm{X}_a \subseteq \mathrm{X}$的正交补，并将 $x \in \mathrm{X}$ 的相应正交分解记为

$$x = x^a \oplus x_a = \pi^a x \oplus \pi_a x \in \mathrm{X}^a \oplus \mathrm{X}_a.$$

向量 $x^a$ 和 $x_a$ 分别称为 $x$的内部分量 和簇间分量 。动量算符 $p = -\mathrm{i}\nabla$ 也以类似方式分解， $p = p^a \oplus p_a$。对于 $a \neq a_{\min}$ ， $\mathrm{X}^a$ 中的单位球面记作$\mathrm{S}^a$；而对于 $a \neq a_0$ ， $\mathrm{X}_a$ 中的单位球面记作$\mathrm{S}_a$。我们将使用如下记号

$r(x) = \langle x\rangle = \left(1+|x|^2\right)^{1/2}$ 表示 $x \in \mathbf{X}$ （也可能表示另一个赋范空间）。对于 $x \in \mathbf{X}\setminus\{0\}$，我们记作 $\hat{}x = x/|x| \in \mathbf{S}^{a_0}$。

实值可测函数 $V\colon \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ 称为多体型势，如果存在实值可测函数 $V_a\colon \mathbf{X}^a \to \mathbb{R}$ 使得

$$V(t,x) = \sum_{a\in\mathcal{A}} V_a(t,x^a) \ \text{ for } x \in \mathbf{X}.$$

我们取 $V_{a_{\min}}(t,\ \cdot) = 0$，并在全文中对$a \neq a_{\min}$施加以下条件。

**条件 2.1**。存在 $\mu \in (0,\ 1/2)$，使得对所有 $a \in \mathcal{A}_2$，势$V_a = V_a(t,\ x^a)$ 满足:

*(1)* $V_a(t+1,\ x^a) = V_a(t,\ x^a),\ \ t \in \mathbb{R}$。*(2)* $V_a \in C^2(\mathbb{R}\times X^a)$。*(3)* $V_a(t,\ y) = o(1)$, $y\cdot\nabla_y V_a(t,\ y) = o(1)$ 并且

$$|y|^{|\gamma|}\partial_y^\gamma \partial_t^k V_a(t,y) = \mathcal{O}(1) \ \textit{for}\ 0 \le k \le 1 \ \textit{and}\ k+|\gamma| \le 2.$$

*(4)* $|y|^{1+2\mu}\partial_y^\gamma V_a(t,\ y) = \mathcal{O}(1)$ 对于 $|\gamma| \le 1$。

这里 $o(1)$ 表示 $o(1) \to 0$ 对 $|y| \to \infty$成立，且关于 $t$一致，对 $\mathcal{O}(1)$亦然 .

对于某些中间结果，并不需要条件(4)。在纳入短程界(4)后，散射理论具有唯一的含义。除了条件 2.1 未包含局部奇点这一事实之外，它定义了一类相当一般的周期为1的短程势。

对于任意 $a \in \mathcal{A}$，我们如下引入相应的哈密顿算子 $H^a$ 与 $H_a$。对于$a = a_{\min}$，我们分别在 $\mathcal{H}^{a_{\min}} = L^2(\{0\}) = \mathbb{C}$ 上定义 $H^{a_{\min}} = 0$，并在 $L^2(\mathbf{X})$上定义 $H_{a_{\min}} = p^2$。对于 $a \neq a_{\min}$，我们令

$$V^a = V^a(t,x^a) = \sum_{b\le a} V_b(t,x^b), \quad x^a \in \mathbf{X}^a,$$

然后定义

$H^a = H^a(t) = -\Delta_{x^a} + V^a$ on $\mathcal{H}^a = L^2(\mathbf{X}^a)$ and $H_a = H^a\otimes I + I\otimes p_a^2$ on $L^2(\mathbf{X})$。

我们简记

$$V^{a_0} = V = V(t), \quad H^{a_0} = H = H(t), \quad \mathcal{H}^{a_0} = \mathcal{H} = L^2(\mathbf{X}).$$

算子 $H$, $H^a$ 和 $H_a$, $a \neq a_0$ 生成动力学，即满足某些要求的幺正算子族 $U(t,s)$、$U^a(t,s)$ 和 $U_a(t,s)$。对于任意的 $r,s,t \in \mathbb{R}$，我们具体说明 $U(t,s)$ 所需满足的条件（ $U^a(t,s)$ 和 $U_a(t,s)$ 的条件类似）：

$$U(s,s) = I, \tag{2.1a}$$

$$U(s,r)U(r,t) = U(s,t), \tag{2.1b}$$

$$U(t+1,s+1) = U(t,s), \tag{2.1c}$$

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,s) = H(t)U(t,s) \quad (\text{in the strong sense}). \tag{2.1d}$$

(2.1d) 的含义是，公式 $\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,s)\psi = H(t)U(t,s)\psi$对任意 $\psi \in \langle p\rangle^{-2}L^2(\mathbf{X})$ 都成立。此外，对任意 $\kappa \in [0,2]$ 和 $\psi \in \langle p\rangle^{-\kappa}L^2(\mathbf{X})$，以下结论也成立

映射 $\mathbb{R}^2 \ni (t,s) \to \langle p\rangle^{\kappa} U(t,s)\psi \in L^2(\mathbf{X})$ 是连续的。事实上，根据吉田定理，这样的动力学存在，参见 [Yo，第 XIV 节4]。

简记 $U(t) = U(t,\ 0)$、$U^a(t) = U^a(t,\ 0)$ 和 $U_a(t) = U_a(t,\ 0)$，则单值算子 $U(1)$ 的阈值按定义为子单值算子 $U^a(1)$、$a \in \mathcal{A}_1$ 的特征值，因此它们构成集合

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(U(1)) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}_1} \sigma_{\mathrm{pp}}(U^a(1)).$$

令 $[t] \in \mathbb{Z}$ 表示任意给定 $t \in \mathbb{R}$ （由 $t - [t] \in [0,1)$ 表征）的整数部分。于是我们可以记下

$$U(t) = U(t-[t])U([t]) = U(t-[t])U(1)^{[t]}, \tag{2.2}$$

$U^a(t)$ 和 $U_a(t)$ 也同理。

由 [MS] 可知，阈值集 $\mathcal{T}$ 是闭且可数的，并且奇异连续谱 $\sigma_{\mathrm{sc}}(U(1)) = \emptyset$。此外，非阈值特征值集在 $\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}$ 中是离散的。我们引入以下记号

$$\mathcal{T}_{\mathrm{p}} = \mathcal{T}_{\mathrm{p}}(U(1)) = \sigma_{\mathrm{pp}}(U(1)) \cup \mathcal{T}(U(1)).$$

远离 $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}$ 时，已知以下一类积分局部衰减估计（局部 Kato 光滑性类型， [Ka2]）。

**定理 2.2.** *([MS])* 设 $V = \Sigma_{a\in\mathcal{A}} V_a$ 满足条件 *2.1 (1)–(3)*。令$s > \frac{1}{2} > r \geq 0$，并令 $g$ 为定义在单位圆上、支集远离 $\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(U(1))$ 的有界博雷尔可测函数。则存在 $C > 0$ 使得

$$\forall\, \psi \in \mathcal{H}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \big\| \langle p\rangle^r \langle x\rangle^{-s} U(t) g(U(1))\psi \big\|^2 \,\mathrm{d}t \leq C\|\psi\|^2. \tag{2.3}$$

上述局部衰减估计对我们至关重要。为了叙述的完备性，我们陈述如下关于特征函数衰减的结果。

**定理 2.3.** *([MS])* 设 $V = \Sigma_{a\in\mathcal{A}} V_a$ 满足条件 *2.1 (1)–(3)*。令$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} \in \sigma_{\mathrm{pp}}(U(1))$ 与 $u \in \mathcal{H}$ 满足 $U(1)u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda}u$。则 $u \in \mathcal{D}(p)$，并且若进一步 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} \notin \mathcal{T}(U(1))$ 则对每一个 $\kappa > 0$，其中

$$\lambda + \kappa^2 < \inf\big\{E > \lambda : \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E} \in \mathcal{T}(U(1))\big\}$$

函数 $\mathrm{e}^{\kappa|x|}u \in \mathcal{H}$。

2.1.1. 一般记号。任何取值于 $[0,1]$ 的函数 $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$ 都称为支撑函数。给定这样的函数 $f$ 和函数 $f_1 \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$，若 $f = 1$ 在 $\mathrm{supp}\, f_1$ 的某个邻域内成立，我们记作$f \succ f_1$。对于 $\mathbb{T}$上的光滑函数，我们也将使用类似记号 $g \succ g_1$。

若 $T$ 是希尔伯特空间上的自伴算子，且 $f$ 是支撑函数，则可用众所周知的 Helffer–Sj¨ostrand 公式表示算子 $f(T)$

$$\begin{aligned} f(T) &= \int_{\mathbb{C}} (T-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) \ \text{ with} \\ \mathrm{d}\mu_f(z) &= \pi^{-1}(\bar\partial\tilde f)(z)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v; \quad z = u+\mathrm{i}v. \end{aligned} \tag{2.4}$$

˜这里，$f$ 是 $f$的一个“近似解析”延拓；在此情形下，可令其具有紧支撑（另见 [H¨o, (3.1.11)]）。公式 (2.4) 可推广到更一般的函数类，参见 [DG，命题 C.2。2], 并且尤其可用作

计算对易子的标准工具。由于本文将相当自由地使用该公式，有兴趣的读者或可参阅 [Sk1，第 6],节，该节专门讨论公式 (2.4) 在 $N$体薛定谔¨算子中的各种应用。

**定义 2.4.** *1)* 类 $\mathcal{F}_+$ 表示由非负函数$\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 组成的集合，这些函数支撑在 $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$上，满足 $\sqrt{\chi} \in C^\infty(\mathbb{R})$，且具有非负导数，并遵循 $\sqrt{\chi'} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。

*2)* 令 $\chi_+$ 表示任意满足以下性质的 $\chi \in \mathcal{F}_+$：

$$\chi(t) = \begin{cases} 0 & for\ t \le 4/3 \\ 1 & for\ t \ge 5/3 \end{cases}, \quad \chi' \ge 0, \tag{2.5a}$$

$$\sqrt{\chi}, \sqrt{\chi'}, (1-\chi^2)^{1/4}, \sqrt{-\big((1-\chi^2)^{1/2}\big)'} \in C^\infty \tag{2.5b}$$

以及函数 $\mathbb{R} \ni t \to \int_{-\infty}^{t} \chi^2(s)\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$ 的平方根是光滑的。 (2.5c)

*3)* 令 $\chi_- = (1-\chi_+^2)^{1/2}$。*4)* 对任意 $\kappa, K \in \mathbb{R}_+$，若 $2\kappa < K$，记号 $\chi_{\kappa,K}$ 表示函数$\chi_{\kappa,K}(t) = \chi_+(t/\kappa)\chi_-(t/K)$。

函数 $\chi_+$ 和 $\chi_-$ 视为固定函数。除非另有说明，以下我们将 $\chi_+ = \chi$简记为。我们注意到

$$\chi_+^2 + \chi_-^2 = 1, \quad \sqrt{\chi_+}, \sqrt{\chi_+'}, \sqrt{\chi_-}, \sqrt{-\chi_-'} \in C^\infty$$

并且函数 $\mathbb{R} \ni t \to \int_{-\infty}^{t} \chi_{\kappa,K}^2(s)\,\mathrm{d}s \in \mathbb{R}$, $0 < 2\kappa < K$ 属于 $\mathcal{F}_+$。

**R备注 2.5.** i) 我们可以构造 2) 中的函数 $\chi = \chi_+$，使其满足 $\chi(t) = (t-4/3)^{-1}\exp\big(1/(4/3-t)\big)$，对所有略微位于 $4/3$ 右侧的 $t$ 均成立；显然，这符合 2) 中的部分要求。ii) 对任意 $\epsilon > 0$，以及任意给定的实值函数 $h \in C^\infty(\mathbb{R})$，若其支撑集包含于 $\mathbb{R}_+$ 且导数紧支撑，则存在 $\chi_1, \chi_2 \in \mathcal{F}_+$，使得

$$\sup_{\mathbb{R}} |h - \chi_1 + \chi_2| \le \epsilon.$$

这个逼近结果很容易得到：首先将 $h$ 的导数分解为正部和负部，然后利用标准卷积技巧对这些函数的平方根进行平滑处理。所得光滑函数的平方的适当原函数即为所需的函数 $\chi_1$ 和 $\chi_2$。

如果 $T$是希尔伯特空间 $\mathcal{G}$上的自伴算子，并且 $\varphi \in \mathcal{G}$，则 $\langle T\rangle_\varphi := \langle \varphi, T\varphi\rangle$，并且 $F(T<C) := 1_{(-\infty,C)}(T)$（对 $F(T>C)$和 $F(-C<T<C)$同样成立）。如果 $S$ 是 $\mathcal{G}$ 上的另一个算子，我们（形式上）按如下方式引入关于 $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$ 的迭代对易子$\mathrm{ad}_T^k(S)$。令$\mathrm{ad}_T^0(S) = S$，并且（递归地）对 $k \in \mathbb{N}$有$\mathrm{ad}_T^k(S) = \big[\mathrm{ad}_T^{k-1}(S),\ T\big]$。然后我们可以形式上利用(2.4)展开

$$f(T)S = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{k!} \mathrm{ad}_T^k(S) f^{(k)}(T).$$

我们将具体使用该公式的截断，其误差由下文引入的阶这一概念加以控制。

我们用 $\mathcal{L}(X,Y)$表示从一个（抽象）巴拿赫空间 $X$到另一个巴拿赫空间 $Y$的有界算子空间，并将 $\mathcal{L}(X,X)$简记为 $=\mathcal{L}(X)$。$X$ 的对偶空间记为 $X^*$。

回顾标准的加权 $L^2$ 空间

$$L^2_s=L^2_s(\mathbf{X})=\langle x\rangle^{-s}L^2(\mathbf{X})\ \text{ for } s\in\mathbb{R},\quad L^2_{-\infty}=\bigcup_{s\in\mathbb{R}}L^2_s,\quad L^2_{\infty}=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}L^2_s.$$

设 $S$ 是 $\mathcal{H}=L^2(\mathbf{X})$上的任意算子，满足 $S,S^*:\ L^2_\infty\to L^2_\infty$，并设 $\sigma\in\mathbb{R}$。那么，如果对每个 $s\in\mathbb{R}$，限制 $S_{|L^2_\infty}$ 可延拓为算子 $S_s\in\mathcal{L}(L^2_s,L^2_{s-\sigma})$，我们就称 $S$ 的阶为 $\sigma$。换言之，

$$\|\langle x\rangle^{s-\sigma}S\langle x\rangle^{-s}\psi\|\le C_s\|\psi\|\ \text{for all}\ \psi\in L^2_\infty. \tag{2.6a}$$

若 $S$ 的阶为 $\sigma$，则记作

$$S=\mathcal{O}(\langle x\rangle^{\sigma})=\mathcal{O}(r^{\sigma});\quad r=\langle x\rangle. \tag{2.6b}$$

所有阶算子构成一个分次代数。特别地，若 $S$ 和 $T$ 的阶分别为 $\sigma$ 和 $\tau$，则 $ST$ 的阶为 $\sigma+\tau$。对于给定的 $\sigma\in\mathbb{R}$，记号 $S=\mathcal{O}(r^{-\sigma+})$表示对某个 $\breve{\sigma}>\sigma$有 $S=\mathcal{O}(r^{-\breve{\sigma}})$。若$(S_\theta)_{\theta\in\Theta}$ 是一个阶为 $\sigma$ 的算子族，并且式（2.6a）对所有 $s\in\mathbb{R}$均关于 $\theta\in\Theta$ 一致成立，则称 $S_\theta$ 关于 $\theta$-一致地为 $\sigma$阶，记作 $S=\mathcal{O}_{\text{unif}}(r^{\sigma})$。对于给定的 $\sigma\in\mathbb{R}$，若对某个 $\breve{\sigma}>\sigma$有 $S=\mathcal{O}_{\text{unif}}(r^{-\breve{\sigma}})$，则记作 $S=\mathcal{O}_{\text{unif}}(r^{-\sigma+})$。若对所有 $\sigma\in\mathbb{R}$都有 $S=\mathcal{O}(r^{\sigma})$，则记作 $S=\mathcal{O}(r^{-\infty})$；一致情形下也类似，$S=\mathcal{O}_{\text{unif}}(r^{-\infty})$表示对所有 $\sigma\in\mathbb{R}$都有 $S=\mathcal{O}_{\text{unif}}(r^{\sigma})$。

对于给定的算子族 $S(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$,$t\ge1$，我们采用约定 $S=\mathcal{O}(t^{\sigma})$，表示当 $\|S(t)\|\le Ct^{\sigma}$ 时，$S(t)$ 的算子范数有界。记号 $S=\mathcal{O}(t^{-\sigma+})$ 和 $S=\mathcal{O}(t^{-\infty})$ 分别表示，对某个 $\breve{\sigma}>\sigma$ 有 $S=\mathcal{O}(t^{-\breve{\sigma}})$，以及对所有 $\sigma\in\mathbb{R}$ 均有 $S=\mathcal{O}(t^{\sigma})$。

**2.2. 结果。** 对于任意通道 $\alpha=(a,\ \lambda^\alpha,\ u^\alpha)$，即 $a\in\mathcal{A}_1$，$\lambda^\alpha\in[0,2\pi)$ 和$U^a(1)u^\alpha=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha}u^\alpha$，以及一个归一化的 $u^\alpha\in\mathcal{H}^a$，我们将相应的通道波算子 $W^\pm_\alpha$定义为以下强极限

$$W^\pm_\alpha\psi_a=\lim_{t\to\pm\infty}U(0,t)\Big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha[t]}U^a(t-[t])u^\alpha\big)\otimes\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}\psi_a\big)\Big);\quad \psi_a\in L^2(\mathbf{X}_a). \tag{2.7}$$

这里 $[t]\in[0,1)$ 表示 $t\in\mathbb{R}$ 的整数部分，并回顾一下 $p_a=-\mathrm{i}\nabla_{x_a}$。另请注意（参见（2.2））：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha[t]}U^a(t-[t])u^\alpha=U^a(t)u^\alpha,$$

因此（由于 $U_a(t)=U^a(t)\otimes\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}$），可得

$$W^\pm_\alpha\psi_a=\lim_{t\to\pm\infty}U(0,t)U_a(t)\big(u^\alpha\otimes\psi_a\big);\quad \psi_a\in L^2(\mathbf{X}_a).$$

对于通道 $\alpha_{\min}:=(a_{\min},0,1)$，相应的波算子可简化为

$$W^\pm_{\alpha_{\min}}\psi=\lim_{t\to\pm\infty}U(0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2}\psi;\quad \psi\in\mathcal{H}.$$

本文的一个基本结果是 [RS 定理 XI.35 和 XI.36]，的如下版本，该版本讨论的是与时间无关的情形。我们证明通道波算子的存在性时不使用 Cook–Kuroda 论证（该论证用于 [RS]），不需要对通道本征函数作衰减假设（这些假设可能无法从定理 2.3 得知），并且适用于任意维数的“成对势”。

（据我们所知，证明 [RS 定理 XI.34 和 XI.35] 需要势的成对相互作用具有三维或更高维数。）

**定理 2.6.** 在条件 *2.1* 下，所有通道波算子 $W_\alpha^\pm$ 均存在。对任意两个不同的通道 $\alpha \neq \beta$，成立 值域$(W_\alpha^\pm) \perp$ 值域$(W_\beta^\pm)$（即正向通道以及反向通道的正交性均成立）。

借助 (2.2)，我们这一 1-周期模型的交织性质可表述为（参见 [RS，定理 XI.36]，其中给出了定常情形的类似版本）

$$U(1)W_\alpha^\pm = W_\alpha^\pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\alpha}; \quad k_\alpha := p_a^2 + \lambda^\alpha. \tag{2.8}$$

我们将着重研究正向通道波算子 $W_\alpha^+$（即 $t \to +\infty$ 时的散射）。当然，反向通道波算子 $W_\alpha^-$ 也有类似结果。

**定义 2.7.** *1)* 子空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \subseteq \mathcal{H}$ 表示 $U(1)$ 的绝对连续子空间。（它由 $U(1)$ 的束缚态集合的正交补给出。）*2)* 有限能量子空间 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} \subseteq \mathcal{H}$ 由向量 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 组成，对这些向量，下述界对 $\psi(t) = U(t)\psi$ 成立。

$$\lim_{E\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \|F(p^2 > E)\psi(t)\| = 0. \tag{2.9}$$

*3)* 增能子空间 $\mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}}$ 由满足以下界的向量 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 组成，其中 $\psi(t) = U(t)\psi$。

$$\forall E > 0: \quad \lim_{t\to\infty} \|F(p^2 < E)\psi(t)\| = 0. \tag{2.10}$$

*4)* 波算子子空间 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} \subseteq \mathcal{H}$ 定义为前向通道波算子值域的直和，即

$$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} = \sum_\alpha^\oplus \mathrm{ran}(W_\alpha^+).$$

上述空间是针对族 $H = H(\cdot)$ 及其动力学 $U(\cdot)$ 定义的。为强调这种依赖关系，我们可以记作 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$、$\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} = \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H)$、$\mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}} = \mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}}(H)$ 和 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} = \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$。对于 $a \in \mathcal{A}_3$，相应的空间记作 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$、$\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a)$、$\mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}}(H^a)$ 和 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a)$；这相当于将 $H$ 替换为 $H^a$，并将动力学 $U$ 替换为 $U^a$。

**注释 2.8**。 i) 由 (2.2) 显然可知，$\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 和 $\mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}}$ 是单值算子 $U(1)$ 及其逆算子 $U(0,1)$ 的不变子空间。ii) 由 (2.8) 可知，$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}$ 对 $U(1)$ 及其逆算子也不变。还可推出 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$。 iii) 利用 ii) 和吉田定理容易看出 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} \subseteq \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$，并且显然 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 和 $\mathcal{H}^+{}_{\mathrm{ie}}$ 是正交子空间。因此

$$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} \subseteq \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{ac}} \ominus \mathcal{H}^+_{\mathrm{ie}} \subseteq \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}. \tag{2.11}$$

iv）渐近完备性断言 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$。

关于 $N = 2$ 渐近完备性，这是众所周知的，参见 [Yaj1]。在这种情况下，我们给出一个简洁且完全依赖时间的证明，以证明这一性质。

**定理 2.9**。 二体模型满足渐近完备性，即有 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H) = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$ $N = 2$。

我们的主要结果针对一般多体模型，表述如下。

**定理 2.10**。对于任意 $N$

$$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H) = \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H). \tag{2.12}$$

可以将 (2.12) 看作波算子子空间的几何刻画。此外，由 (2.12) 可知，多体模型的渐近完备性等价于性质 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$，因此这也是一个完备性判据。本文不证明该判据对 $N \geq 3$ 的适用性（也不证明渐近完备性）。我们指出，Nakamura [Na] 在强条件下（包括成对势的指数衰减）证明了 $N = 3$ 的完备性。最近，Yajima [Yaj2] 证明了该结论对任意 $N$ 成立，但同样是在强条件下（包括对成对势的小性条件）。

在命题 10.1 中，我们给出了一个不同于$\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$的渐近完备性判据。该判据基于“渐近聚簇”这一概念；事实上，它也是我们证明上述更具几何意味的定理的关键要素。

对于 $N = 3$，另一个关于渐近完备性的判据是 $\mathcal{H}^+ = \{0\}$，这归功于对（2.12）的以下加强。

**命题 2.11**。对于 $N = 3$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}} \oplus \mathcal{H}^+_{\mathrm{ie}} = \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} \oplus \mathcal{H}^+_{\mathrm{ie}}. \tag{2.13}$$

一般而言，该几何判据表述如下。

**命题 2.12**。 对于任意 $N$， 以下断言 $i)$ 与 $ii)$ 等价。

$i)$ $\forall a \in \mathcal{A}_2$: $\quad \mathcal{H}^+_{\mathrm{ie}}(H^a) = \{0\}$.
$ii)$ $\forall a \in \mathcal{A}_2$: $\quad \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a) = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$.

我们记录以下逐点衰减结果（对于任意 $N$）。

**引理 2.13**。 对于任意 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 和任意 $R > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \|F(|x| < R)\psi(t)\| = 0; \quad \psi(t) = U(t)\psi. \tag{2.14}$$

证明。 考虑 $\phi(t) = \|\langle p\rangle^{-1} r^{-1}\psi(t)\|^2$，其中 $\psi = g(U(1))\psi$ 对某个 $g \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$。由稠密性与对易，只需证明 $\phi(t) \to 0$ 对 $t \to \infty$。借助 (2.3)，函数 $\phi$ 在无穷远处可积。此外，由于它具有有界导数，确实有 $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = 0$。 □

借助一个相当复杂的证明（见第4节），这一逐点衰减结果被证明对任意 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 成立。下述对 $\lambda < 1$ 的进一步推广（记为 (2.15b)）是精确的，其意义在于它对 $\lambda = 1$ 并不成立。它可以称为最小速度界，这与该术语在与时间无关的 $N$ 体散射理论中的用法一致。

**命题 2.14.** 对任意 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 以及任意 $R > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \|F(|x| < R)\psi(t)\| = 0; \quad \psi(t) = U(t)\psi. \tag{2.15a}$$

更一般地，对任意 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 以及任意 $\lambda < 1$

$$\lim_{t\to\infty} \|F(|x| < t^{\lambda})\psi(t)\| = 0; \quad \psi(t) = U(t)\psi. \tag{2.15b}$$

## 3. Yafaev's constructions

在 [Yaf] 中，构造了若干实函数 $m_a \in C^{\infty}(\mathbf{X})$、 $a \in \mathcal{A}_1$ 和 $m_{a_0} \in C^{\infty}(\mathbf{X})$。对于 $|x| > 5/6$，它们是一次齐次的；此外，在该区域内， $m_{a_0}$（局部）是凸的。这些函数是依赖于一个小参数 $\epsilon > 0$ 构造的；一旦给定，便用于这些构造

$$M_a = 2\,\mathrm{Re}(w_a \cdot p) = -\mathrm{i}\sum_{j\le d}\big((w_a)_j\partial_{x_j} + \partial_{x_j}(w_a)_j\big); \quad w_a = \mathrm{grad}\, m_a. \tag{3.1}$$

算子 $M_a$、 $a \in \mathcal{A}_1$ 可视为"通道局域化算子"，而形如 $M_{a_0}$ 的算子则部分用作辅助量，用于控制哈密顿量与通道局域化算子之间的对易子。（关于一个初步应用，参见 (7.3)。）如 [Yaf] 所示，这一方案有助于证明定常情形下的渐近完备性。

我们考虑$\mathbf{X}\setminus\{0\}$的各种锥形子集，它们定义于 $a \in \mathcal{A}_1$ 和 $\varepsilon$， $\delta \in (0,\ 1)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}'_a &= \mathbf{X}_a \setminus \cup_{b\not\le a,\, b\in\mathcal{A}} \mathbf{X}_b,\\
\mathbf{X}_a(\varepsilon) &= \{x \in \mathbf{X} \mid |x_a| > (1-\varepsilon)|x|\},\\
\overline{\mathbf{X}_a(\varepsilon)} &= \{x \in \mathbf{X}\setminus\{0\} \mid |x_a| \ge (1-\varepsilon)|x|\},\\
\mathbf{Y}_a(\varepsilon) &= \big(\mathbf{X}\setminus\{0\}\big) \setminus \cup_{b\not\le a,\, b\in\mathcal{A}_1} \mathbf{X}_b(\varepsilon),\\
\mathbf{Z}_a(\delta) &= \mathbf{X}_a(\delta) \setminus \cup_{b\not\le a,\, b\in\mathcal{A}_1} \overline{\mathbf{X}_b(3\delta^{1/d_a})}; \qquad d_a = \dim \mathbf{X}_a.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

集合 $\mathbf{X}_a(\varepsilon)$、$\mathbf{Y}_a(\varepsilon)$ 和 $\mathbf{Z}_a(\delta)$ 的结构为 $\mathbb{R}_+ V$，其中 $V$ 是单位球面 $\mathbf{S}^{a_0} \subseteq \mathbf{X}$ 的子集。对于 $\mathbf{X}_a(\varepsilon)$ 和 $\mathbf{Z}_a(\delta)$，集合 $V$ 是相对开集；而对于 $\mathbf{Y}_a(\varepsilon)$，该集合是紧集。我们还记录，$\mathbf{X}_a \setminus \{0\} \subseteq \mathbf{X}_a(\varepsilon) \subseteq \{|x^a| < \sqrt{2}\,\varepsilon|x|\}$，且 $\mathbf{Z}_a(\delta) \subseteq \mathbf{X}_a(\delta) \cap \mathbf{Y}_a(3\delta^{1/d_a})$。下面的包含关系不那么显然（见[Sk2，引理 3.10]）：

$$\forall a \in \mathcal{A}_1\, \forall \varepsilon \in (0,1): \quad \mathbf{Y}_a(\varepsilon) \subseteq \cup_{b\le a} \mathbf{X}'_b. \tag{3.3}$$

Yafaev 的构造涉及一族锥$\mathbf{X}_a(\varepsilon)$，其"宽度"大致为$\varepsilon \approx \epsilon^{d_a}$，其中参数为 $\epsilon > 0$。该参数取值足够小，其大小主要由以下几何性质决定：存在 $C > 0$，使得对所有 $a$， $b \in \mathcal{A}_1$ 和 $x \in \mathbf{X}$

$$|x^c| \le C\big(|x^a| + |x^b|\big); \quad c = a \vee b. \tag{3.4}$$

我们注意到，(3.4) 对 Graf 构造 [Gr, De] 也至关重要。关于本节回顾的 Yafaev 构造的完整介绍，请参见 [Sk2]。

3.1. **Yafaev 齐次函数**。对于较小的 $\epsilon > 0$以及任意 $a \in \mathcal{A}_1$ 我们定义

$$\varepsilon^a_k = k\epsilon^{d_a}, \quad k = 1, 2, 3,$$

并将区间（$\varepsilon^a_2$， $\varepsilon^a_3$）中的数值 $\varepsilon_a$ 视为"可容许的"。更确切地说，我们将 $\varepsilon_a$ 视为满足以下约束的自由实参数

$$\varepsilon^a_2 = 2\epsilon^{d_a} < \varepsilon_a < 3\epsilon^{d_a} = \varepsilon^a_3. \tag{3.5}$$

固定 $\mathcal{A}_1$ 的任意一种排序后，我们用这些参数引入“可容许”向量

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{a_1}, \dots \varepsilon_{a_n}), \quad n = \#\mathcal{A}_1,$$

并记 $\mathrm{d}\bar{\varepsilon}$ 为相应的勒贝格测度。

令 $\varepsilon > 0$ 和 $a \in \mathcal{A}_1$

$$h_{a,\varepsilon}(x) = (1+\varepsilon)|x_a|; \quad x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}.$$

令 $\Theta = 1_{[0,\infty)}$，则对任意 $a \in \mathcal{A}_1$ 及任意可容许向量 $\bar{\varepsilon}$，定义

$$m_a(x,\bar{\varepsilon}) = h_{a,\varepsilon_a}(x)\Theta\big(h_{a,\varepsilon_a}(x) - \max_{\mathcal{A}_1 \ni c \neq a} h_{c,\varepsilon_c}(x)\big); \quad x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}.$$

对于每个 $c \in \mathcal{A}_1$，我们任意固定一个非负函数 $\varphi_c \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$，使得

$$\operatorname{supp}\varphi_c \subseteq (\varepsilon_2^c, \varepsilon_3^c) \text{ and } \int_{\mathbb{R}} \varphi_c(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = 1,$$

然后按下式对 $m_a(x,\bar{\varepsilon})$、$a \in \mathcal{A}_1$ 在 $\bar{\varepsilon}$ 上取函数平均

$$m_a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m_a(x,\bar{\varepsilon}) \prod_{c\in\mathcal{A}_1} \varphi_c(\varepsilon_c)\,\mathrm{d}\bar{\varepsilon}; \quad x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}.$$

**引理 3.1**。对于每个 $a \in \mathcal{A}_1$，函数 $m_a$：$\mathbf{X}\setminus\{0\} \to [0,\infty)$ 对任意充分小的 $\epsilon > 0$ 以及任意 $b \in \mathcal{A}_1$均满足以下性质：

*1)* $m_a$ 是一次齐次的。*2)* $m_a \in C^{\infty}(X \setminus \{0\})$。*3)* 若 $b \leq a$ 且 $x \in X_b(\varepsilon_1^b)$，则 $m_a(x) = m_a(x_b)$。*4)* 若 $b \not\leq a$ 且 $x \in X_b(\varepsilon_1^b)$，则 $m_a(x) = 0$。*5)* 若 $a \neq a_{\min}$、$x \neq 0$ 且 $|x^a| \geq \sqrt{2}\,\varepsilon_3^a|x|$，则 $m_a(x) = 0$。——

按照 [Yaf] 的做法，我们为 $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$ 和可容许向量 $\bar{\varepsilon}$ 引入

$$m_{a_0}(x,\bar{\varepsilon}) = \max_{a\in\mathcal{A}_1} h_{a,\varepsilon_a}(x),$$

并令那么

$$m_{a_0}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} m_{a_0}(x,\bar{\varepsilon}) \prod_{c\in\mathcal{A}_1} \varphi_c(\varepsilon_c)\,\mathrm{d}\bar{\varepsilon}.$$

**引理 3.2**。函数 $m_{a_0}$：$\mathbf{X} \setminus \{0\} \to (0,\ \infty)$ 对任意充分小的 $\epsilon > 0$均满足以下性质：

*i)* $m_{a_0}$ 是次数为1的凸齐次函数。*ii)* $m_{a_0} \in C^{\infty}(\mathbf{X}\setminus\{0\})$。*iii)* 如果 $b \in \mathcal{A}_1$ 且 $x \in \mathbf{X}_b(\varepsilon_1^b)$，那么 $m_{a_0}(x) = m_{a_0}(x_b)$。*iv)* $m_{a_0} = \sum_{a\in\mathcal{A}_1} m_a$（所有函数都定义在同一个 $\epsilon$ 上）。*v)* 设 $a \in \mathcal{A}_1$，并假设 $x \in \mathbf{X}_a(\varepsilon_1^a) \setminus \cup_{b\geq a}\mathbf{X}_b(\varepsilon_3^b)$。那么

$$m_{a_0}(x) = m_a(x) = C_a|x_a|; \quad C_a = \int_{\mathbb{R}} (1+\varepsilon)\,\varphi_a(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon.$$

六） $m_{a_0} \in C^{\infty}$（$\mathbf{X}\setminus\{0\}$）的导数满足

$$\nabla\big(m_{a_0}(x) - |x|\big) = \sum_{a\in\mathcal{A}_1} \int \mathrm{d}\varepsilon_a \nabla\big(h_{a,\varepsilon_a}(x) - |x|\big)\,\varphi_a(\varepsilon_a)$$

$$\prod_{\mathcal{A}_1 \ni b \neq a} \Big( \int \Theta\big(h_{a,\varepsilon_a}(x) - h_{b,\varepsilon_b}(x)\big) \varphi_b(\varepsilon_b)\, \mathrm{d}\varepsilon_b \Big).$$

特别地，存在 $C > 0$，使得对所有 $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$

$$|\nabla\big(m_{a_0}(x) - |x|\big)| \leq C\sqrt{\epsilon}.$$

3.2. **Yafaev 的观测量及若干对易子性质**。我们将引理 3.1 中的函数 $m_a$ 和引理 3.2 中的函数 $m_{a_0}$ 乘以一个适当的因子（具体来说，例如因子 $\chi_+(2|x|)$），从而对它们进行光滑修正。我们采用这些修正，并（稍作宽泛使用）仍用相同的记号 $m_a$和 $m_{a_0}$ 表示光滑化后的版本。于是，我们可以将式 (3.1) 中相应的一阶算子 $M_a$ 和 $M_{a_0}$ 视为自伴算子。

在我们的应用中，上述 Yafaev 观测量将用于构造适当的“相空间单位分解”。本小节将提供一些初步的计算细节，说明如何控制它们与哈密顿量 $H$的对易子。尽管这里没有明确讨论，类似的论证也适用于哈密顿算子 $H_a$、 $a \in \mathcal{A}_1$。

根据 (3.3)，对于任意 $a \in \mathcal{A}_1$ 和任意 $\varepsilon$， $\delta_0 \in (0, 1)$，我们可以写成

$$\mathbf{Y}_a(\varepsilon) \subseteq \cup_{b \leq a} \cup_{\delta \in (0, \delta_0]} \mathbf{Z}_b(\delta).$$

由紧性可知，对于任意固定的 $\varepsilon$， $\delta_0 \in (0, 1)$，都存在一个有限覆盖

$$\mathbf{Y}_a(\varepsilon) \subseteq \cup_{j \leq J} \mathbf{Z}_{b_j}(\delta_j), \tag{3.6}$$

其中 $\delta_1, \ldots, \delta_J \in (0, \delta_0]$ 以及 $b_1, \ldots, b_J \leq a$； $J = J(a)$。此处及下文中，我们倾向于省略各量对给定 $a \in \mathcal{A}_1$的依赖。

我们回顾一下，函数 $m_a$, $a \in \mathcal{A}_1$依赖于一个正参数 $\epsilon$，并且根据引理 3.1 4) 满足

$$\operatorname{supp} m_a \subseteq \mathbf{Y}_a(\epsilon^d); \quad d = \dim \mathbf{X}. \tag{3.7}$$

有了引理 3.1 和引理 3.2，我们还注意到，两个引理中分别独立地出现了（小的）正参数 $\epsilon$。首先，我们选择该参数，并在两个引理中将其固定为相同的小 $\epsilon$，从而唯一确定整个族 $(M_a)_{a \in \mathcal{A}}$。根据引理 3.2 iv)，我们可以记录恒等式 $M_{a_0} = \sum_{a \in \mathcal{A}_1} M_a$，它将在第 7.2 小节中起关键作用。在运用该恒等式之前，我们将证明局部化到出射区域，这一结论用$M_{a_0}$（稍作修改）来表述。我们将在第 4 节和第 5 节的大部分内容中处理这一问题，而第 6 节则讨论相关的传播估计。

3.2.1. 对易子的表示i$[p^2, M_a]$。我们需要对引理 3.2 作进一步应用，更确切地说，针对某些输入 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_J \leq \epsilon$（其中 $J = J(a)$,$a \in \mathcal{A}_1$ 的定义如下）。我们将 (3.6) 应用于 $\varepsilon = \delta_0 = \epsilon^d$ （参见 (3.7)）。由于$\delta_j \leq \delta_0$，我们可以通过要求 $\epsilon_j^{d_{b_j}} = \delta_j$ 来引入正的 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_J \leq \epsilon$。引理 3.2 中的新输入 $\epsilon = \epsilon_j$ 会产生相应的函数，记作 $m_j$。特别是在区域 $\mathbf{Z}^{b_j}(\delta_j)$ 中，引理 3.1 中的函数 $m_a$ 仅依赖于$x_{b_j}$（这归功于引理 3.1 3) 以及性质 $\mathbf{X}^{b_j}(\delta_j) \subseteq \mathbf{X}^{b_j}(\epsilon^{d_{b_j}})$），而（这归功于引理 3.2 v)）

$$m_j(x) = C_j |x_{b_j}|, \quad C_j = \int_{\mathbb{R}} (1 + \varepsilon)\, \varphi_{b_j}(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon. \tag{3.8}$$

接下来我们引入向量值一阶算子

$$G_b = \chi_+(2|x_b|)|x_b|^{-1/2}P(x_b)\cdot p_b,\ \text{where}\ P(x) = I - |x|^{-2}|x\rangle\langle x|. \tag{3.9}$$

（或者说， $P(x_b)$ 将 $\mathbf{X}_b$正交投影到 $x_b$ 上。）我们为所考虑的 $a\in\mathcal{A}_1$ 选取一个从属于覆盖（3.6）的二次分割 $\hat{}\,\xi_1,\dots,\hat{}\,\xi_J\in C^\infty(\mathbf{S}^{a_0})$（即 $\sum_j \hat{}\,\xi_j^2 = 1$）（回顾（3.3）之前的讨论）。于是，利用支集性质（3.6）和（3.7），可以写成

$$m_a(x) = \sum_{j\le J} m_{a,j}(x);\quad m_{a,j}(x) = \hat{\xi}_j^2(\hat{x})m_a(x),\quad \hat{x} = x/|x|,$$

并且由前面的讨论可知

$$\chi_+^2(|x|)m_{a,j}(x) = \xi_j^2 m_a(x_{b_j}),\quad \xi_j = \xi_j(x) := \hat{\xi}_j(\hat{x})\chi_+(|x|),$$

以及

$$\begin{aligned} p\cdot\big(\chi_+^2(|x|)\nabla^2 m_a(x)\big)p &= \sum_{j\le J} p\cdot\big(\xi_j^2\nabla^2 m_a(x_{b_j})\big)p \\ &= \sum_{j\le J} G_{b_j}^*\big(\xi_j^2\mathcal{G}_j\big)G_{b_j};\quad \mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j(x_{b_j})\ \text{bounded}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

采用适当的动量局域化后，左边与 $\frac{1}{4}\mathrm{i}[p^2, M_a]$相差至多 $-3$阶。然而，这种动量局域化并非由能量局域化所提供（因为我们的哈密顿量依赖于时间），这会给我们的应用带来困难。

根据 $m_j$ 的凸性以及（3.8），我们可以记录如下估计

$$Q(a,j)^*Q(a,j)\le p\cdot\big(\chi_+^2(|x|)\nabla^2 m_j(x)\big)p;\quad Q(a,j) := \xi_j G_{b_j}. \tag{3.11}$$

这里，右侧应为对易子$\frac{1}{4}\mathrm{i}[p^2, M_j]$的“首项”，其中 $M_j$ 由针对 $m_j$ 的修正$-\chi_+(2|x|)m_j(x)$给出。该估计将在第 7.1 小节中用于推导某些辐射条件界（尽管那里使用的是略有不同的正则化），而这些界对于证明渐近聚类结果命题 7.1 至关重要。

## 4. Preliminary localization results

我们考虑第3节中的算子$M = M_{a_0}$（以一个固定的小$\epsilon > 0$表示）。此处及下文中，对其构造式 (3.1) 中的基础函数$m_{a_0}$ 进行修正并简记，将更为方便。在下一个定义中，我们使用引理 3.2 中的严格齐次函数 $m_{a_0}$，并引入光滑修正

$$m(x) := f_{\mathrm{cvx}}(m_{a_0}(x)), \tag{4.1a}$$

其中， $f_{\mathrm{cvx}}\in C^\infty(\mathbb{R}_+)$取为凸函数，使得对于 $s\le 1/4$， $f_{\mathrm{cvx}}(s) = 1$，并且对于 $s\ge 1/2$，$f_{\mathrm{cvx}}(s) = s + 2/3$。注意， $m(x)\ge 1$ 是$\mathbf{X}$上的光滑凸函数，固定为 $m(x) = m_{a_0}(x) + 2/3$，其中 $|x|\ge 1/2$。

因此，为了更加精确地与式 (3.1) 保持一致，今后我们将保留记号 $M$，用以表示自伴算子

$$M = M_0 := 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{grad}\, m\cdot p). \tag{4.1b}$$

由于 $m_{a_0}$ 取决于小参数 $\epsilon > 0$，上述量 $m$ 和 $M$也同样如此。不过，为避免下文出现诸如 $m_{\epsilon,\,t}$ 或 $(m_\epsilon)_t$ 这样繁琐的记号，我们省略这种依赖关系，改用简化记号 $m_t$。

取 $\lambda \in (0,\ 1)$（稍后会将 1 略微减小），于是我们引入

$$m_t(x) = t^\lambda m\big(x/t^\lambda\big) \ \text{ and } \ M_t = 2\,\mathrm{Re}\,\Big(\big(\nabla m\big)\big(x/t^\lambda\big)\cdot p\Big); \quad t \geq 1. \tag{4.2}$$

显然，(4.2) 中与 $t = 1$ 对应的量与 (4.1a) 和 (4.1b) 一致（因此也与 $M_0 = M_1 = (M_t)|_{t=1}$ 一致）。本节和第5节只需要时间缩放量。

注意（回顾 $r := \langle x\rangle$），

$$m_t(x) \geq \max\big(m_{a_0}(x) + 2/3, t^\lambda\big) \geq 2^{-1}\max\big(r, t^\lambda\big), \tag{4.3a}$$

$$m_t(x) \leq 3\max\big(r, t^\lambda\big), \tag{4.3b}$$

而 $x$ 导数 $\partial_x^\gamma m_t(x)$ 满足

$$\forall |\gamma| \geq 1\, \exists C > 0\, \forall t \geq 1\, \forall x \in \mathbf{X}: \quad \big|\partial_x^\gamma m_t(x)\big| \leq C r^{1-|\gamma|}. \tag{4.3c}$$

引入海森堡导数 $\mathbf{D} = \partial_t + \mathrm{i}[H(t)\ \cdot]$，我们记录如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{D}m_t &= M_t + \partial_t m_t = M_t + \lambda t^{\lambda-1}\big(m\big(x/t^\lambda\big) - x/t^\lambda\cdot\big(\nabla m\big)\big(x/t^\lambda\big)\big) \\ &= M_t + \mathcal{O}\big(t^{\lambda-1}\big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

进而

$$\begin{aligned} \mathbf{D}M_t &= 4t^{-\lambda}\big(p - \tfrac{\lambda}{4}x/t\big)\cdot\big(\nabla^2 m\big)(x/t^\lambda)\big(p - \tfrac{\lambda}{4}x/t\big) \\ &\quad - \tfrac{\lambda^2}{4}t^{\lambda-2}x/t^\lambda\cdot\big(\nabla^2 m\big)(x/t^\lambda)x/t^\lambda \\ &\quad - t^{-3\lambda}\big(\Delta^2 m\big)(x/t^\lambda) - 2\big(\nabla m\big)(x/t^\lambda)\cdot\nabla V \\ &= B_t^* B_t + R_t, \quad \text{where} \\ &\qquad B_t = 2t^{-\lambda/2}\sqrt{\big(\nabla^2 m\big)(x/t^\lambda)}\big(p - \tfrac{\lambda}{4}x/t\big), \end{aligned} \tag{4.5a}$$

且余项 $R_t$ 满足以下界

$$R_t = \mathcal{O}\big(t^{\lambda-2}\big) + \mathcal{O}\big(t^{-3\lambda}\big) + \mathcal{O}\big(t^{-\lambda(1+2\mu)}\big), \tag{4.5b}$$

$$R_t = \mathcal{O}\big(r^{1-2/\lambda}\big) + \mathcal{O}\big(r^{-3}\big) + \mathcal{O}\big(r^{-1-2\mu}\big) \quad (\text{uniformly in } t \geq 1). \tag{4.5c}$$

中间项 $-t^{-3\lambda}\big(\Delta^2 m\big)(x/t^\lambda)$ 属于 $R(t)$，是一项“量子修正项”，而另外两项则与经典力学“相符”。在第4.3小节中，我们计算并估计由量 $m_t$ 和 $M_t$ 构造的可观测量 $\Psi$ 的海森堡导数$\mathbf{D}\Psi$，见 (4.26a) 和 (4.26b)。计算将表明，$\mathbf{D}\Psi$ 的“主导阶”与相应经典可观测量的时间导数相符，符合预期。因此，例如，上述中间项只会产生一个足够小的项。

**4.1. 一个辅助哈密顿量。**我们考虑 $t \geq 1$ 的哈密顿量

$$\breve{H}_t = \breve{H}_{t,\delta,\lambda} = m_t^{-\delta} H(t) m_t^{-\delta}, \quad \delta \in (1/2, 3/5),\ 2\lambda\delta > 1, \tag{4.6}$$

通过 Friedrichs 扩张过程在 $\mathcal{H}$ 上实现为自伴算子。更准确地说，我们考虑闭二次型

$$\begin{aligned} \langle\psi, \breve{H}_t\psi\rangle &= \sum_{j\leq d}\big\|p_j m_t^{-\delta}\psi\big\|^2 + \langle\psi, V(t)\psi\rangle \text{ on } \mathcal{H}_{\mathrm{qf}}; \\ \mathcal{H}_{\mathrm{qf}} &= \{\psi \in L^2 \mid p_j\psi \in L^2_{-\delta} \text{ for all } j \leq d\}. \end{aligned}$$

其算子定义域明确表示为

$$\mathcal{D}(\breve{H}_t) = \{\psi \in \mathcal{H}_{\rm qf} \mid p^2\psi \in L^2_{-2\delta}\} = \{\psi \in L^2 \mid p^2 m_t^{-\delta}\psi \in L^2_{-\delta}\},$$

由标准的光滑化函数方法可知，施瓦茨空间 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$在 $\mathcal{H}_{\rm qf}$ 中$\breve{}$稠密，并且在 $\mathcal{D}(H_t)$ 中同样稠密。此外，我们可以将无界项 $m_t^{-\delta}p^2m_t^{-\delta}$视为一个伪微分算子（即伪微分算子，参见 [H¨o，第十八章]关于伪微分算子的一般论述）。上述断言可通过对易来证明。尽管我们略去细节，但请注意例如如下椭圆估计

$$\sum_{j\le d} \big\| p_j\big(1+\kappa p^2\big)^{-1/2} m_t^{-\delta}\psi\big\|^2 \le C\big(\|\psi\|^2 + \|m_t^{-2\delta}p^2\psi\|^2\big).$$

这里 $C$ 与 $\kappa > 0$无关，从而我们可以令 $\kappa \to 0$。

参数 $\delta$ 在全文中均可视为固定的，例如可取为 $\delta = 4/7$。在本节中，实际上任何 $\delta \in (1/2,1)$均可使用（其中 $\lambda < 1$ 满足 $\lambda > 1/(2\delta)$），讨论见注释 4.7 iii)。

算子 $M_t$ ia 是一个一阶微分算子，因此它具有显式的流。很容易检查（例如利用格朗沃尔不等式）该流 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma M_t}$ 保持 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$、 $\mathcal{D}(\breve{H}_t)$ 以及空间 $L^2_s$ 不变。特别地，$M_t$ 在 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 上是本质自伴的，并且

$$M_t\psi = \big(2p\cdot\big(\nabla m\big)\big(x/t^\lambda\big) + \mathrm{i}t^{-\lambda}(\Delta m)\big(x/t^\lambda\big)\big)\psi \text{ on } \mathcal{D}(M_t);$$
$$\mathcal{D}(M_t) = \{\psi \in L^2 \mid p\cdot\big(\nabla m\big)\big(x/t^\lambda\big)\psi \in L^2\}.$$

（由于 $M_t$ 具有分布作用，也记作 $M_t$，或者写作 $\mathcal{D}(M_t) = \{\psi \in L^2 \mid M_t\psi \in L^2\}$。）

$\breve{}$ $\breve{}$我们可以将对易子 $\mathrm{i}[H_t, M_t]$ 解释为定义域为 $\mathcal{D}(H_t)$ 的算子，并将其规定为如下的（强）极限

$$-\mathrm{iad}^1_{\breve{H}_t}(M_t) = \mathrm{i}\big[\breve{H}_t, M_t\big] = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\sigma\to 0} \sigma^{-1}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma M_t}\breve{H}_t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma M_t} - \breve{H}_t\big), \tag{4.7}$$

然后再由其形式表达式给出（在 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 上计算所得）。特别地，

$\breve{}$ $\breve{}$$\mathrm{i}[H_t, M_t]$ 可以视为一个 $H_t$-有界算子。（参见 [GGM]，其中对以这种方式计算对易子作了抽象说明。）特别地，对于 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$，有 $(\breve{H}_t - z)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(M_t))$。

此外，我们还可以记录这些界，参见约定（2.6b），

$$(\breve{H}_t - z)^{-1}, \quad p_j m_t^{-\delta}(\breve{H}_t - z)^{-1} = \mathcal{O}(r^0); \quad \mathrm{Im}\, z \neq 0, \quad 1 \le j \le d. \tag{4.8}$$

$L^2$ 上的有界性直接由 $\breve{H}_t$的定义得到。为证明 $L^\infty$ 的不变性，我们需要将任意高次幂 $\langle x\rangle^s$ 穿过预解式（$\breve{H}_t - z$）$^{-1}$。一种方便的做法是，先反复将有界近似（$\chi_-$（$|x|/n$）$\langle x\rangle$）$^s$ 穿过预解式，逐步降低指数，然后利用在 $L^2$上观察到的有界性取 $n \to \infty$。所得公式表明，$\langle x\rangle^s$（$\breve{H}_t - z$）$^{-1}\langle x\rangle^{-s}$ 是有界的。对于（4.8）的其余情形，我们也可以作类似论证。

特别地，对于任意给定的 $\mathrm{Im}\, z \neq 0$，将算子 $M_t m_t^{-\delta}$（$\breve{H}_t - z$）$^{-1}$视为 $\mathcal{L}$（$\mathcal{D}$（$M_t$） $\mathcal{H}$）的元素时，它可延拓为 $\mathcal{H}$上的有界算子；事实上，$M_t$（$\breve{H}_t - z$）$^{-1}$可以毫无歧义地视为 $\delta$阶算子。

在下文（2.6b）中使用的抽象参数 $\theta$ 通常就是时间 $t \ge 1$。为简化表述，我们通常更倾向于在这种情况下使用统一记号 $\mathcal{O}(r^s)$,

尽管这些界关于 $t \geq 1$ 是一致的。前文已经采用过这一约定。

**引理 4.1**。 设 $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ 给定，且其导数紧支撑，并设$f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$。则 $f\big(\breve{H}_t\big)$ 和 $\chi(M_t)$ 均为 *0* 阶（关于 $t \geq 1$一致），且下列展开成立（余项估计关于 $t \geq 1$一致）。

*1)* 对所有 $s \in \mathbb{R}$:

$$\big[f\big(\breve{H}_t\big), m_t^s\big] = -\mathrm{ad}^1_{\breve{H}_t}(m_t^s) f^{(1)}\big(\breve{H}_t\big) + \mathcal{O}(r^{s-2-2\delta}), \tag{4.9a}$$

$$M_t f\big(\breve{H}_t\big) - f\big(\breve{H}_t\big) M_t = \mathrm{ad}^1_{\breve{H}_t}(M_t) f^{(1)}\big(\breve{H}_t\big) + \mathcal{O}(r^{-2-\delta}). \tag{4.9b}$$

*2)* 对所有 $s \in \mathbb{R}$ 和 $K \in \mathbb{N}$:

$$\big[\chi(M_t), m_t^s\big] = \sum_{k=1}^{K} \tfrac{(-1)^k}{k!} \mathrm{ad}^k_{M_t}(m_t^s) \chi^{(k)}(M_t) + \mathcal{O}(r^{s-K-1}). \tag{4.9c}$$

*3)* 对于 $k = 0$、$1$、$2$，算子 $\mathrm{ad}^k_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big)) = \mathcal{O}(r^{-k})$，以及

$$\chi(M_t) f\big(\breve{H}_t\big) = \sum_{k=0}^{2} \tfrac{(-1)^k}{k!} \mathrm{ad}^k_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big)) \chi^{(k)}(M_t) + \mathcal{O}(r^{-2-\delta}). \tag{4.9d}$$

**备注**。 (4.9a) 右侧的第一项为 $s - 1 - \delta$ 阶。(4.9b) 右侧的第一项为 $-1$ 阶，参见 (4.7)。(4.9b) 的左侧先验地是定义在 $\mathcal{D}(M_t)$ 上的二次型；借助 (4.7)，它可扩张为有界算子，如下文计算 (4.11) 所示。(4.9c) 和 (4.9d) 中的算子分别为 $s-1$ 阶和 0 阶。另请注意，尽管 (4.9c) 和 (4.9d) 中出现的因子 $\chi(M_t)$ 为 0 阶，且所述展开成立，但从任何通常意义上说，该算子都不是良好的伪微分算子。

引理 *4.1* 的证明。 利用表示式 (2.4) 对易反复进行计算，并对 $\langle x\rangle$ 作有界逼近，例如采用在 $n \in \mathbb{N}$ 较大时由 $\chi_{-}(|x|/n)\langle x\rangle$ 给出的逼近（如 (4.8) 中所用），根据 (4.8) 及其证明，很容易证明 $f(\breve{H}_t)$ 的阶为 0。

对于断言 1)，我们同样计算

$$\begin{aligned} &\big[f\big(\breve{H}_t\big), m_t^s\big] + \mathrm{ad}^1_{\breve{H}_t}(m_t^s) f^{(1)}\big(\breve{H}_t\big) \\ &\qquad = \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}_t - z)^{-1} \mathrm{ad}^2_{\breve{H}_t}(m_t^s) (\breve{H}_t - z)^{-2} \, \mathrm{d}\mu_f(z), \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中 $\mathrm{ad}^2_{\breve{H}_t}(m_t^s)(\breve{H}_t - \mathrm{i})^{-1}$ 的阶为 $s - 2 - 2\delta$。这说明了 (4.9a)。

作为 $\mathcal{D}(M_t)$上的二次型，我们有（极限取弱意义）

$$\begin{aligned} M_t f\big(\breve{H}_t\big) &= \lim_{\sigma \to 0} \mathrm{i}\sigma^{-1}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma M_t} - I\big) f\big(\breve{H}_t\big), \\ f\big(\breve{H}_t\big) M_t &= \lim_{\sigma \to 0} f\big(\breve{H}_t\big) \mathrm{i}\sigma^{-1}\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma M_t} - I\big), \end{aligned}$$

分别。结合（4.7），我们像在（4.10）中那样计算，下面使用记号 $T(\sigma) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sigma M_t} T \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma M_t}$,

$$\begin{aligned}
&\big[f\big(\breve{H}_t\big), M_t\big] = -\mathrm{i}\,\mathrm{s}\text{-}\lim_{\sigma\to 0} \sigma^{-1}\big(f\big(\breve{H}_t(\sigma)\big) - f\big(\breve{H}_t\big)\big) \\
&= \mathrm{i}\,\mathrm{s}\text{-}\lim_{\sigma\to 0} \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}_t(\sigma) - z)^{-1}\sigma^{-1}\big(\breve{H}_t(\sigma) - \breve{H}_t\big)(\breve{H}_t - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) \\
&= \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}_t - z)^{-1}\mathrm{ad}^1_{\breve{H}_t}(M_t)(\breve{H}_t - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) \\
&= -\mathrm{ad}^1_{\breve{H}_t}(M_t) f^{(1)}\big(\breve{H}_t\big) + \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}_t - z)^{-1}\mathrm{ad}^2_{\breve{H}_t}(M_t)(\breve{H}_t - z)^{-2}\,\mathrm{d}\mu_f(z),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

由于 $(\breve{H}_t - \mathrm{i})^{-1}\mathrm{ad}^2_{\breve{H}_t}(M_t)(\breve{H}_t - \mathrm{i})^{-1}$ 具有 $-2-\delta$ 阶，故 (4.9b) 成立。

对于断言 2)，利用 (2.4) 对 $\chi$ 作紧支撑逼近（例如 $\chi_n = \chi_-(|\cdot|/n)\chi$）是方便的。由此可知 $\chi_n(M_t)$ 为 0 阶。此外，在此情形下 2) 的有效性易于验证。注意 $\mathrm{ad}^k_{M_t}(m_t^s)$ 是 $s-k$ 阶的乘法算子。为完成 2) 的证明，我们对逼近函数取几乎解析延拓，并使相应测度 $d\mu_{\chi_n}(z) = \pi^{-1}\bar{\partial}\widetilde{\chi_n}(z)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 的密度具有一致有界。更精确地说，这意味着¯ ¯一种构造，使得逐点有 $\partial\widetilde{\chi_n}(z) \to \partial\widetilde{\chi}(z)$，并且这些界

$$\forall N \in \mathbb{N}: \quad |\bar{\partial}\tilde{f}(z)| \le C_N\langle z\rangle^{-1-N}|\mathrm{Im}\, z|^N \tag{4.12}$$

˜对于扩展函数族 $f = \widetilde{\chi_n}$, $n\in\mathbb{N}$，上述结论一致成立。这使我们可以利用勒贝格控制收敛定理令 $n\to\infty$。特别是，极限过程的论证表明，$\chi(M_t)$的阶为 0，$\chi(M_t)$的阶也为 2。对于断言 3

）we p以类似方式继续 y 并对易 pute

$$\begin{aligned}
&\big[\chi(M_t), f\big(\breve{H}_t\big)\big] \\
&= \int_{\mathbb{C}} (M_t - z)^{-1}\mathrm{ad}^1_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big))(M_t - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_\chi(z) \\
&= -\mathrm{ad}^1_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big))\chi'(M_t) + \int_{\mathbb{C}} (M_t - z)^{-1}\mathrm{ad}^2_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big))(M_t - z)^{-2}\,\mathrm{d}\mu_\chi(z).
\end{aligned}$$

由 (4.11) 及其证明可知，$\mathrm{ad}^1_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big))$ 和 $\mathrm{ad}^2_{M_t}(f\big(\breve{H}_t\big))$ 的阶分别为$-1$ 和 $-2$。这表明，若在积分中再向左多做一次对易，展开式 (4.9d) 的误差阶将为 $-3$。然而，由于我们没有关于二阶以上势函数导数的假设，这次对易只能使误差阶为 $-2-\delta$，正如 (4.9d) 所述。□

我们现在需要酉算子 $U = U(1)$ 的表示公式 (2.4) 的如下版本。

**引理 4.2.** 设 $g\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{T}\setminus\{1\})$。设 $U$ 为 $\mathcal{H}$ 上的酉算子。则

$$\begin{aligned}
g(U) = \int_{\mathbb{C}} (U - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_g(z) \ \ with \\
\mathrm{d}\mu_g(z) = \pi^{-1}(\bar{\partial}\tilde{g})(z)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v; \quad z = u + \mathrm{i}v.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

这里的 $\tilde{g}$ 表示 $g$ 的紧支撑几乎解析延拓。

证明。 函数 $\tilde{g}$ 可由凯莱变换按如下方式构造。考虑由 $h(x) = g\big((x-\mathrm{i})/(x+\mathrm{i})\big)$ 给出的 $h \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$。取 $h$ 的紧支撑几乎解析延拓 $h$ ，然后定义 $\tilde{g}(z) = h(\eta(z))$，其中 $\eta(z) = -\mathrm{i}(z+1)/(z-1)$。由于 $\eta$ 是解析的，因此可得 $\partial\eta = 0$，进而我们可以计算

$$\bar{\partial}\tilde{g}(z) = \partial_{\bar{z}}\tilde{h}\big(\eta(z)\big) = \big(\bar{\partial}\tilde{h}\big)\big(\eta(z)\big)\overline{\eta'(z)}.$$

特别地，可得对于任意 $N \in \mathbb{N}$

$$|\bar{\partial}\tilde{g}(z)| \le C_N |\mathrm{dist}(z,\mathbb{T})|^N.$$

因此， $\tilde{g}$ 确实是 $g$的紧支撑几乎解析延拓，并且由此得到 (4.13)（参见 [H¨o, (3.1.11)]）。□

**推论 4.3**。令 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 和 $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{X})$。则

$$[1,\infty) \ni t \to x^{\alpha}\partial_x^{\beta}U(t)g(U(1))\psi \in \mathcal{H}$$

$a$对于任意满足 $|\alpha+\beta| \le 2$ 的多重指标 $\alpha$ 和 $\beta$，均为定义良好的连续映射 .

证明。 对于 $\alpha = 0$ ，由 (4.13)、吉田定理以及熟知的杜哈梅尔公式可得该结果（例如，可将该公式应用于动量分量 $p_j$ 的近似 $T = p_j/(1+\kappa p^2)$，其中 $\kappa > 0$ 足够小）

$$[T, U(\sigma)] = U(\sigma)\big(U(\sigma)^{-1}TU(\sigma) - T\big) = U(\sigma)\int_0^{\sigma} U(s)^{-1}\mathrm{i}[H(s)\ T]U(s)\,\mathrm{d}s. \quad (4.14)$$

通过对 $x^{\alpha}$ 进行有界逼近，一般情形可以类似地处理。具体细节略去。□

4.2. **超高能区域中的界**。

**引理 4.4.** 对于任意 $\psi \in \mathcal{H}$ ，演化 $\psi(t) = U(t)\psi$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_+(\breve{H}_t)\psi(t)\| = 0, \quad (4.15a)$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\big(I - \chi_-(\breve{H}_t)\big)\psi(t)\| = 0. \quad (4.15b)$$

证明。 注意到，(4.15b) 是 (4.15a) 的推论。为证明 (4.15a)，只需（利用稠密性）对任意固定的 $\psi \in \mathcal{D}(p^2)$ 验证该估计。

**I.** 引入哈密顿量

$$\widehat{H}_t = 2^{2\delta+1}t^{-2\lambda\delta}H(t),$$

我们将证明

$$\|\chi_+(\widehat{H}_t)\psi(t)\| \to 0. \quad (4.16)$$

我们按如下方式定义 $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$： $f(s) = (s-1)\chi_+^2(s)$，然后定义可观测量

$$\Psi = t^{2\lambda\delta}f(\widehat{H}_t).$$

该可观测量的海森堡导数 $\mathbf{D} = \partial_t + \mathrm{i}[H(t)\ \cdot]$ 近似为负。更准确地说，回顾一般记号 $\langle T\rangle_{\varphi} = \langle\varphi, T\varphi\rangle$，我们可以计算 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\langle\Psi\rangle_{\psi(t)} = \langle\mathbf{D}\Psi\rangle_{\psi(t)}$ ，得到

$$\mathbf{D}\Psi \le Ct^{-\lambda\delta}; \quad t \ge 1. \quad (4.17)$$

为证明 (4.17)，我们首先注意到

$$\mathbf{D}\widehat{H}_t = -2\lambda\delta t^{-1}\widehat{H}_t + 2^{2\delta+1}t^{-2\lambda\delta}(\partial_t V).$$

˜取一个满足以下条件的适当的 $f$ $f$ 几乎解析延拓

$$\forall N \in \mathbb{N}: \quad |\bar{\partial}\tilde{f}(z)| \leq C_N\langle z\rangle^{-N}|\mathrm{Im}\, z|^N \tag{4.18}$$

然后我们利用 (2.4)，并在主导阶得到

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Psi &\approx 2\lambda\delta t^{-1}\Psi - t^{2\lambda\delta-1}\sqrt{f'}(\widehat{H}_t)\Big(2\lambda\delta\widehat{H}_t - 2^{2\delta+1}t^{1-2\lambda\delta}(\partial_t V)\Big)\sqrt{f'}(\widehat{H}_t)\\ &\leq -t^{2\lambda\delta-1}\sqrt{f'}(\widehat{H}_t)\big(2\lambda\delta - 2^{2\delta+1}t^{1-2\lambda\delta}(\partial_t V)\big)\sqrt{f'}(\widehat{H}_t)\\ &\leq -t^{2\lambda\delta-1}\big(2\lambda\delta - Ct^{1-2\lambda\delta}\big)f'(\widehat{H}_t).\end{aligned}$$

由于 $2\lambda\delta > 1$ 右端最终为非正。上述近似中的误差（由 ≈标示）是两项之和。第一项由下式给出

$$\begin{aligned}&2^{2\delta+1}\int_{\mathbb{C}}(\widehat{H}_t - z)^{-1}[\widehat{H}_t, (\partial_t V)](\widehat{H}_t - z)^{-2}\,\mathrm{d}\mu_f(z)\\ &= -\mathrm{i}\tfrac{2^{4\delta+3}}{t^{2\lambda\delta}}\int_{\mathbb{C}}(\widehat{H}_t - z)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\big(p\cdot(\nabla\partial_t V)\big)(\widehat{H}_t - z)^{-2}\,\mathrm{d}\mu_f(z) = \mathcal{O}(t^{-\lambda\delta}).\end{aligned}$$

这里我们使用了一致有界性 $t^{-\lambda\delta}\|p(\widehat{H}_t - z)^{-1}\| \leq C|\mathrm{Im}\ z|^{-1}\langle z\rangle^{1/2}$ 以及 (4.18)。第二项由下式给出

$$\begin{aligned}&2^{2\delta+1}[(\partial_t V), \sqrt{f'}(\widehat{H}_t)]\sqrt{f'}(\widehat{H}_t)\\ &= -\mathrm{i}\tfrac{2^{4\delta+3}}{t^{2\lambda\delta}}\int_{\mathbb{C}}(\widehat{H}_t - z)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\big(p\cdot(\nabla\partial_t V)\big)(\widehat{H}_t - z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_{\sqrt{f'}}(z)\,\sqrt{f'}(\widehat{H}_t) = \mathcal{O}(t^{-\lambda\delta}).\end{aligned}$$

这里我们利用 $\sqrt{f'}$ 的一个由满足 (4.12) 的几乎解析延拓给出的表示作了类似估计。因此总误差具有 $\mathcal{O}(t^{-\lambda\delta})$的形式，从而得到 (4.17)。
)

Noting that $\Psi \geq 3^{-1}t^{2\lambda\delta}\chi_+^2(\widehat{H}_t)$, clearly (4.16) follows from (4.17) by integration.

**II**。借助 (4.16)，尚需证明

$$\|\chi_+(\check{H}_t)\chi_-^2(\widehat{H}_t)\psi(t)\| \to 0.$$

这将通过证明“能量界”来完成

$$\|\chi_+(\check{H}_t)\chi_-(\widehat{H}_t)\| \leq Ct^{-\lambda\delta}. \tag{4.19}$$

我们首先使用 (4.3a) 和 (4.3c)，估计为

$$\check{H}_t \leq 2^{-1}\widehat{H}_t + C_1 t^{-2\lambda\delta}, \tag{4.20a}$$

$$\check{H}_t(\widehat{H}_t - \mathrm{i})^{-1} = \mathcal{O}(t^0), \tag{4.20b}$$

$$(\widehat{H}_t - \mathrm{i})^{-1}[\check{H}_t, \widehat{H}_t](\widehat{H}_t - \mathrm{i})^{-1} = \mathcal{O}(t^{-2\lambda\delta-\lambda(1-\delta)}). \tag{4.20c}$$

然后我们对任意 $\varphi \in \mathcal{H}$ 应用这些界、(2.4) 和反复对易，估计如下：

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{3}\|\chi_+(\check{H}_t)\chi_-(\widehat{H}_t)\varphi\|^2\\ &\leq \langle\check{H}_t - I\rangle_{\chi_+(\check{H}_t)\chi_-(\widehat{H}_t)\varphi}\\ &\leq \langle\check{H}_t - I\rangle_{\chi_-(\widehat{H}_t)\chi_+(\check{H}_t)\varphi} + C_2 t^{-2\lambda\delta}\|\varphi\|^2 \quad \text{(by (4.20}b\text{) and (4.20}c\text{) applied twice)}\\ &\leq (C_1 + C_2)t^{-2\lambda\delta}\|\varphi\|^2 \qquad \text{(by (4.20}a\text{).}\end{aligned}$$

因此，借助 $C^2 = 3(C_1 + C_2)$ 可得 (4.19)，且 (4.15a) 得证。 □

4.3. **入射区域中的界**。我们导出 $M_t$ 的一个初步传播估计，记为 (4.24a)。（此项研究将在第5节完成。）˜ ˇ受 (4.15b) 与引理 4.1 的启发，我们引入实函数 $f$, $f, f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R})$，使得

$$f\big(\check{H}_t\big) = \chi_-\big(\check{H}_t\big), \quad \tilde{f}\big(\check{H}_t\big) = \chi_-\big(\check{H}_t/2\big), \quad \check{f}\big(\check{H}_t\big) = \tilde{f}\big(\check{H}_t\big)\check{H}_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big). \tag{4.21a}$$

因此，以下将这些函数视为固定的，且与 $t \geq 1$ 无关。（注意，$C + H_t \geq 1$ 对某个与 $t \geq 1$ 无关的 $C \geq 1$ 成立。）显然，我们可以假设 $f \succ f$；若存在因子 $f$（$H_t$），则需要考虑 $M_t$ 的以下“部分正则化”。对于每个 $t \geq 1$，我们引入

$$\widetilde{M}_t\psi = M_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)^2\psi - \big[M_t, \tilde{f}\big(\check{H}_t\big)\big]\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)\psi \text{ on } \mathcal{D}(\widetilde{M}_t);$$
$$\mathcal{D}(\widetilde{M}_t) = \{\psi \in L^2 \mid M_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)^2\psi \in L^2\}.$$

˜根据引理 4.1 1)，第二项是有界的。我们可以（无歧义地）将 $M_t$ 视为一个（一致）$\delta$ 阶算子，参见 (4.8)。下文将证明，$M_t$ 是自伴的，其核心为 $\mathcal{S}$（$\mathbf{X}$）。注意，在形式上

$$\widetilde{M}_t = \tilde{f}\big(\check{H}_t\big)M_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big). \tag{4.21b}$$

˜由引理 4.1 1) 可知，$\mathcal{D}$（$M_t$）$\subseteq \mathcal{D}$（$M_t$），并且对任意 $\psi \in \mathcal{D}$（$M_t$），确有 $\widetilde{M}_t\psi = \tilde{f}\big(\check{H}_t\big)M_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)\psi$。

.....的最小作用 $\widetilde{M}_t$，记作 $M_{t,\ \min}$ 或者为方便起见，下文简记为˜ $M_{\min}$，其定义域为 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$。注意，$M_t = M_{\min}^*$。由于 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 在∼ ——— ∼$\mathcal{D}(M_t)$ 中稠密，且 $M_t$ 是闭的，因此 $\mathcal{D}(M_t) \subseteq \mathcal{D}(M_{\min}) \subseteq \mathcal{D}(M_t)$。我们声称，事实上闭包

$$\overline{M_{\min}} = \widetilde{M}_t. \tag{4.22}$$

˜为此，我们对任意 $\psi \in \mathcal{D}(M_t)$ 进行计算

$$\widetilde{M}_t\psi = \lim_{n\to\infty} \chi_-(r/n)\widetilde{M}_t\psi = \lim_{n\to\infty} \widetilde{M}_t\chi_-(r/n)\psi.$$

随后，利用标准的光滑化函数方法（应用于 $\chi_-(r/n)\psi$），可得 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$˜ 是 $M_t$ 的核心，证毕。

最后，利用 (4.22) 可得 $\widetilde{M}_t = M_{\min} = (\overline{M_{\min}})^* = \big(\widetilde{M}_t\big)^*$。由此我们得出结论˜，确实 $M_t$ 在 $\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 上本质自伴。

˜**备注 4.5**。i) 我们需要 $M_t$，而不仅仅是 $M_t$，才能证明下面的断言 (4.24a)。原因在于，无法对 $(t^{\epsilon_1}M_t - z)^{-1}(\partial_t M_t)(t^{\epsilon_1}M_t - z)^{-1}$ 给出界，即使采用类似于 $\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)$ 的外部动量截断也无法做到。因此，我们不能对 (4.24b) 使用与下文相同的方法。˜ii) 容易验证，(4.24b) 中的算子 $\chi_-(t^{\epsilon_1}M_t)$（当 $\epsilon_1 > 0$ 足够小时）是一个零阶算子，参见引理 4.1。事实上，反复对易表明，对于任意 $s \in \mathbb{R}$

$$\big[\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t), m_t^s\big] = \mathcal{O}(r^{s+\epsilon_1/\lambda-1}). \tag{4.23}$$

**引理 4.6**。对于所有充分小的 $\epsilon_1 > 0$（仅由 $\lambda$ 和 $\delta$ 决定），以及所有 $\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$，以下界对于 $\psi(t) = U(t)\psi$成立。

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_-(t^{\epsilon_1}M_t)\psi(t)\| = 0, \tag{4.24a}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\psi(t)\| = 0. \tag{4.24b}$$

证明。(4.24a) 和 (4.24b) 中的断言是等价的。事实上，由 (4.15b) 可知，我们可以任意将 $\psi(t)$ 替换为 $f(H_t)\psi(t)$。注意，接下来（此处假设 $\epsilon_1 < \lambda$）

$$T := \big(\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) - \chi_-(t^{\epsilon_1}M_t)\big)f(\breve{H}_t) = \mathcal{O}(t^{\epsilon_1-\lambda}) = \mathcal{O}(t^{-0_+}), \tag{4.25a}$$

根据 (2.4)，这是表示式的一个简单推论

$$T = \int_{\mathbb{C}} (t^{\epsilon_1}M_t - z)^{-1}t^{\epsilon_1}\big(M_t - \widetilde{M}_t\big)(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t - z)^{-1}f(\breve{H}_t)\,\mathrm{d}\mu_{\chi_-}(z) \tag{4.25b}$$

以及以下事实：$f = \tilde{f}f$和 $[M_t, \tilde{f}(\breve{H}_t)] = \mathcal{O}(t^{-\lambda})$（参见 (4.9b)）。因此，只需证明 (4.24b)。

对于 (4.24b)，我们可以（利用稠密性）假设 $\psi = g(U(1))\,\breve{\psi}$，其中 $\breve{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})$ 且 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$。

考虑较小 $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$ 时的时间依赖可观测量

$$\Psi = f(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t); \quad t \geq 1. \tag{4.26a}$$

更准确地说，在下文的步骤 I–IV 中，我们在条件 $2\lambda\delta > 1$、$\epsilon_1 < 2(1-\lambda)$ 以及 $\epsilon_2$ 充分小时考察该量 $\Psi$，参见 (4.31) 和 (4.33)。(4.24b) 的完整证明（见步骤 V 和 VI）还需要 $\epsilon_1$ 足够小，例如参见 (4.37) 和 (4.42)。我们指出，$m_t^{-\epsilon_2/2}\Psi m_t^{-\epsilon_2/2}$ 关于 $t \geq 1$ 一致地为零阶。

现在，利用 (4.3b) 和推论 4.3，我们可以计算并估计（下文将分若干步骤详细说明）$\mathrm{d}\,\mathrm{d}t\langle\Psi\rangle_{\psi(t)} = \langle\mathbf{D}\Psi\rangle_{\psi(t)}$，其中

$$\mathbf{D}\Psi = \partial_t\Psi + \mathrm{i}[H(t),\Psi] \leq \mathcal{O}(t^{-1_+}) + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1_+}). \tag{4.26b}$$

由 (2.3) 和积分可知，(4.26b) 表明 $\langle\Psi\rangle_{\psi(t)}$ 关于时间有界。接着利用 (4.3a) 和 (4.15b)，显然可得 (4.24b)。

为了证明 (4.26b)，作为启发，我们先从$\mathbf{D}\Psi$ 中提取“主导阶”贡献（这与经典力学一致），并忽略“量子对易误差”。在步骤 I–IV 中，我们将看到主导阶项与 (4.26b) 一致；步骤 V 和 VI 则将利用前面各步骤引入的各种记号，给出 (4.26b) 的完整证明。

**I.** 我们记作（在此处及步骤 I–IV 中使用近似相等符号$\approx$，作直观理解）

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Psi &\approx 2\,\mathrm{Re}\Big(\big(\mathbf{D}\breve{H}_t\big)f'(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\Big)\\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\Big(f(\breve{H}_t)\big(\mathbf{D}(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big)\chi_-'(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\Big)\\ &\quad + f(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big(\mathbf{D}m_t^{\epsilon_2}\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t) =: T_1 + T_2 + T_3,\end{aligned} \tag{4.27}$$

然后依次利用 (4.4) 和 (4.5a)，

$$\mathbf{D}\breve{H}_t \approx -2\delta m_t^{-1}\breve{H}_t\big(\widetilde{M}_t + \mathcal{O}(t^{\lambda-1})\big) + m_t^{-2\delta}\mathcal{O}(r^0), \tag{4.28a}$$

$$\mathbf{D}(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) \approx \epsilon_1 t^{-1}\big(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t\big) + t^{\epsilon_1}\big(B_t^* B_t + R_t\big), \tag{4.28b}$$

$$\mathbf{D}m_t^{\epsilon_2} = \epsilon_2 m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\big(\widetilde{M}_t + \mathcal{O}(t^{\lambda-1})\big)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}. \tag{4.28c}$$

~注意，在 (4.28a)-(4.28c) 中，我们不区分 $M_t$ 和 $M_t$；这当然是由于 (4.27) 中存在 $f(H_t)$ 的因子以及性质 $\sim f \succ f$。在接下来的步骤II-IV中，我们将把 (4.28a)-(4.28c) 代入 (4.27) 中相应的项 $T_1$-$T_3$ 后得到的各项标识出来。正如将要证明的那样，按照 (4.26b) 的精确定义，它们全都实质上是负的。

**II.** 对于 $T_1$，我们引入

$$\bar{f}(s) = \sqrt{-\chi_-'(s)s\chi_-(s)}, \tag{4.29}$$

结合 (4.28a) 可得

$$\begin{aligned} T_1 &\approx 4\delta \bar{f}(\breve{H}_t)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\Big(\widetilde{M}_t + \mathcal{O}(t^{\lambda-1}\Big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\bar{f}(\breve{H}_t) \\ &\qquad + \mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2\delta}) \\ &\le 8\delta t^{-\epsilon_1}\bar{f}(\breve{H}_t)m_t^{\epsilon_2-1}\bar{f}(\breve{H}_t) + t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1}) + \mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2\delta}) \\ &= t^{-\epsilon_1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1}) + t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1}) + \mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2\delta}) \\ &= \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+}). \end{aligned} \tag{4.30}$$

在最后一步中，我们使用了熟知的估计 $ab \le p^{-1}a^p + q^{-1}b^q$, $p^{-1}+q^{-1}=1$。对于中间项，这导致

$$t^{\lambda-1}r^{\epsilon_2-1} \le p^{-1}t^{(\lambda-1)p} + q^{-1}r^{(\epsilon_2-1)q}$$

取 $p>1$ 足够大且 $\epsilon_2>0$ 足够小，使得

$$(1-\lambda)p > 1 \text{ and } (1-\epsilon_2)q > 1. \tag{4.31}$$

对于第一项，我们作类似论证。

**III**。对于 $T_2$，我们引入

$$\bar{\chi}_1(s) = \bar{f}(s) = \sqrt{-\chi_-'(s)s\chi_-(s)} \text{ and } \bar{\chi}_2(s) = \sqrt{-\chi_-'(s)\chi_-(s)},$$

结合（4.28b）和（4.5c）可得

$$\begin{aligned} T_2 &\approx -2\epsilon_1 t^{-1} f(\breve{H}_t)\bar{\chi}_1(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2}\bar{\chi}_1(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t) \\ &\quad - 2t^{\epsilon_1} f(\breve{H}_t)\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2/2}\Big(B_t^* B_t + R_t\Big)m_t^{\epsilon_2/2}\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t) \\ &\le r^{\epsilon_1/\lambda}\Big(\mathcal{O}\big(r^{1-2/\lambda+\epsilon_2}\big) + \mathcal{O}\big(r^{-1-2\mu+\epsilon_2}\big)\Big) \\ &= \mathcal{O}(r^{-1+}). \end{aligned} \tag{4.32}$$

在最后一步中，我们用到了

$$\epsilon_1 < 2(1-\lambda), \tag{4.33}$$

以及 $\epsilon_2>0$取值足够小这一事实。（我们省略了 $R_t$的量子修正项 $\mathcal{O}(r^{-3})$。）

**IV.** 对于 $T_3$，我们引入

$$\bar{\chi}_3(s) = s\chi_-^2(s),$$

由此导出 (4.28c)

$$\begin{aligned} T_3 &= \epsilon_2 f(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\Big(\widetilde{M}_t+\mathcal{O}(t^{\lambda-1})\Big)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\\ &= \epsilon_2 t^{-\epsilon_1} f(\breve{H}_t)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}\bar{\chi}_3(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{(\epsilon_2-1)/2}f(\breve{H}_t)+\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2})+t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1})\\ &\leq t^{-\epsilon_1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1})+\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2})+t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1}) \qquad (4.34)\\ &= \mathcal{O}(t^{-1+})+\mathcal{O}(r^{-1+}). \end{aligned}$$

这里的项 $\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2})$ 是与 (4.9c) 和注4.5 ii) 相关的量子修正（目前可以省略）。

结合步骤II-IV中的界，我们得到估计式 (4.26b)，但尚未包含“量子修正项”，这正是所需的。

为继续讨论并给出 (4.26b) 的完整证明，我们将问题分为两部分，分别分析项 $\partial_t\Psi$ 和 $\mathrm{i}[H(t)\ \Psi]$。主要工具是 (2.4)，下文将不再特别说明而直接使用。

**V.** 我们讨论 $\partial_t\Psi$ 的“简单情形”；更准确地说，我们证明该项符合 (4.26b)，但还差一个项，该项将被纳入并最终在步骤 VI 中处理。首先我们将其拆分

$$\begin{aligned} \partial_t\Psi &= 2\,\mathrm{Re}\,\Big(\big(\partial_t f(\breve{H}_t)\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\Big)\\ &\quad+2\,\mathrm{Re}\,\Big(f(\breve{H}_t)\big(\partial_t\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big)m_t^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\Big) \qquad (4.35)\\ &\quad+f(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big(\partial_t m_t^{\epsilon_2}\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)=:S_1+S_2+S_3. \end{aligned}$$

我们可以分别计算 $S_1$、$S_2$ 和 $S_3$，并与相应的“经典表达式”（下文将明确给出，尽管在前面的步骤中已部分出现）进行比较，分别记为 $S_1^{\mathrm{clas}}$、$S_2^{\mathrm{clas}}$ 和 $S_3^{\mathrm{clas}}$。

受步骤 II 的启发，我们令

$$\begin{aligned} S_1^{\mathrm{clas}} &= 2\bar{f}(\breve{H}_t)m_t^{\epsilon_2/2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)2\delta(\partial_t m_t)m_t^{-1}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m_t^{\epsilon_2/2}\bar{f}(\breve{H}_t)\\ &\quad+2\,\mathrm{Re}\,\big(f'(\breve{H}_t)m_t^{\epsilon_2-2\delta}(\partial_t V(t))\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t)\big). \end{aligned}$$

由引理 4.1 和注4.5 ii)，我们可以记录为

$$S_1^{\mathrm{clas}} = t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1})+\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2\delta}).$$

我们通过对易计算

$$\begin{aligned} &\partial_t f(\breve{H}_t)\\ &= -\int_{\mathbb{C}}(\breve{H}_t-z)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\Big(2(\partial_t m_t^{-\delta})H(t)m_t^{-\delta}+m_t^{-\delta}(\partial_t V(t))m_t^{-\delta}\Big)(\breve{H}_t-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z)\\ &= \int_{\mathbb{C}}(\breve{H}_t-z)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\Big(2\delta(\partial_t m_t)m_t^{-1}\breve{H}_t+m_t^{-2\delta}\mathcal{O}(r^0)\Big)(\breve{H}_t-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z)\\ &= -2\delta\,\mathrm{Re}\,\Big((\partial_t m_t)m_t^{-1}\breve{H}_t f'(\breve{H}_t)\Big)+\mathcal{O}(r^{-2\delta})\\ &\quad-\delta\int_{\mathbb{C}}(\breve{H}_t-z)^{-1}m_t^{-\delta}\big[p^2,(\partial_t m_t)m_t^{-1}\big]m_t^{-\delta}\breve{H}_t(\breve{H}_t-z)^{-2}\,\mathrm{d}\mu_f(z)\\ &\quad+\delta\int_{\mathbb{C}}(\breve{H}_t-z)^{-2}\breve{H}_t m_t^{-\delta}\big[p^2,(\partial_t m_t)m_t^{-1}\big]m_t^{-\delta}(\breve{H}_t-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) \end{aligned}$$

$$= -2\delta \operatorname{Re}\Big((\partial_t m_t) m_t^{-1} \breve{H}_t f'(\breve{H}_t)\Big) + \mathcal{O}(r^{-2\delta}).$$

这里我们使用了式 (4.4) 中的 $\partial_t m_t$ 表达式进行计算

$$\big[p^2, (\partial_t m_t) m_t^{-1}\big] = -\mathrm{i}2 \operatorname{Re}\big(p \cdot \nabla\big((\partial_t m_t) m_t^{-1}\big)\big) = \operatorname{Re}\big(p \cdot \mathcal{O}(r^{-2})\big),$$

然后利用 (4.8) 进行估界。

代入 $S_1$ 各种对易关系后，可参见引理 4.1 和注4.5 ii)，得到

$$S_1 - S_1^{\mathrm{clas}} = \mathcal{O}(r^{\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2-2}) + \mathcal{O}(r^{\epsilon_2-2\delta}) = \mathcal{O}(r^{-1+}).$$

例如，注意到

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\big((\partial_t m_t) m_t^{-1} \chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) m_t^{\epsilon_2} \chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big)\\ &= m_t^{\epsilon_2/2} \chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)(\partial_t m_t) m_t^{-1} \chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) m_t^{\epsilon_2/2} + \mathcal{O}(r^{\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2-2}).\end{aligned}$$

特别地，可得 $S_1 = \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+})$，这与 (4.26b) 一致。受步骤 III 启发，我们令

$$\begin{aligned}S_2^{\mathrm{clas}} &= -2\epsilon_1 t^{-1} f(\breve{H}_t) \bar{\chi}_1(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) m_t^{\epsilon_2} \bar{\chi}_1(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) f(\breve{H}_t) + 4\lambda t^{\epsilon_1-1} S;\\ S &= T \operatorname{Re}\Big(x/t^\lambda \cdot (\nabla^2 m)(x/t^\lambda) p\Big) T^*,\\ T &= f(\breve{H}_t) \bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) m_t^{\epsilon_2/2} \tilde{f}(\breve{H}_t), \quad T^* = \tilde{f}(\breve{H}_t) m_t^{\epsilon_2/2} \bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t) f(\breve{H}_t).\end{aligned} \tag{4.36}$$

显然， $S_2^{\mathrm{clas}}$的第一项为负，而第二项没有确定的符号；与 (4.26b) 相比，它“过大”（将在步骤 VI 中处理）。我们断言

$$\begin{aligned}&S_2 - S_2^{\mathrm{clas}}\\ &= t^{\epsilon_1-1}\mathcal{O}\big(r^{\epsilon_2-1}\big) + t^{2\epsilon_1-1}\mathcal{O}\big(r^{\epsilon_2+\delta-1}\big)\\ &\qquad + \mathcal{O}(r^{-2\delta+\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2}) + \mathcal{O}(r^{-2+\delta+2\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2})\\ &= \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+}).\end{aligned} \tag{4.37}$$

显然，当$\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$足够小时，第二个界是第一个界的推论。反过来，第一个界大致可通过上述论证得到。尤其是，第一项和第二项基本上来自上述的对易与对称化。不过还有一个问题（体现为$\widetilde{\ }$第三项和第四项的存在）：算子 $M_t$ 含有 $\tilde{f}$（$\breve{H}_t$）的因子，而这些因子的时间导数并未包含在$S_2^{\mathrm{clas}}$中。（我们只计入了来自 $\tilde{f}$（$\breve{H}_t$）$\big(\partial_t$（$t^{\epsilon_1} M_t$）$\big)\tilde{f}$（$\breve{H}_t$）的贡献。）因此，我们需要检查 $\big(\partial_t \tilde{f}$（$\breve{H}_t$）$\big) M_t \tilde{f}$（$\breve{H}_t$）及其伴随表达式产生的贡献是否符合（4.26b）中的误差项。为此，我们需要对上述计算作如下略微改进（将 $f$ 替换为 $f$后使用）

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{f}(\breve{H}_t) = \operatorname{Re}\Big(\Big( &-2\delta(\partial_t m_t) m_t^{-1} \breve{H}_t + (\partial_t V(t)) m_t^{-2\delta}\Big) \tilde{f}'(\breve{H}_t)\Big)\\ &+ \mathcal{O}(r^0) m_t^{-\delta-2} + \mathcal{O}(r^0) m_t^{-3\delta}.\end{aligned} \tag{4.38}$$

代入 $\big(\partial_t \tilde{f}(\breve{H}_t)\big) M_t \tilde{f}(\breve{H}_t)$，再依次代入 $S_2$ 后，(4.38) 中的第二项和第三项各贡献一个形如 $\mathcal{O}(r^{-2\delta+\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2})$ 的项。这里我们使用了 $m_t^{-\delta} M_t \tilde{f}(\breve{H}_t) = \mathcal{O}(r^0)$，参见 (4.8)。对于第一项，对易后我们使用

$\sim f f' = 0$。因此，这一项对 $S_2$ 的总贡献包含使其衰减性得到改善的对易子。更准确地说，以这种方式产生的全部附加误差项具有 $\mathcal{O}(r^{-2+\delta+2\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2})$ 的形式。我们已经证明了 (4.37)，并得出 $S_2 = S_2^{\mathrm{clas}} + \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+})$。因此，与我们证明 (4.26b) 的目标进行比较，可以记录

$$S_2 \leq 4\lambda t^{\epsilon_1-1} S + \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+}). \tag{4.39}$$

最后，我们令

$$S_3^{\mathrm{clas}} = S_3 = f(\breve{H}_t)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\big(\partial_t m_t^{\epsilon_2}\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f(\breve{H}_t).$$

如第四步所示，我们可以对 $S_3 = t^{\lambda-1}\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-1}) = \mathcal{O}(t^{-1+}) + \mathcal{O}(r^{-1+})$ 给出界。

总之，我们记录如下：除去 (4.39) 右侧的第一项外，$\partial_t \Psi$ 在 (4.26b) 中的精确贡献符合该估计。

**六**。剩下需要考察的是，(4.26b) 中的项 $\mathrm{i}[H(t)\ \Psi]$ 与[缺失内容]结合后符合该估计。(4.39) 这将完成 (4.26b) 的证明。

我们的首要任务是证明以下计算的合理性

$$\mathrm{i}[H(t),\Psi] = \mathrm{i}\big[m_t^\delta \breve{f}\big(\breve{H}_t\big)m_t^\delta,\Psi\big] + \mathcal{O}(r^{-1+}). \tag{4.40}$$

在证明的后续部分，将其简写为会更方便

$$m_t = m, \quad M_t = M, \quad \widetilde{M}_t = \widetilde{M}, \quad \breve{H}_t = \breve{H} \ \text{ and } \ H(t) = H,$$

尽管这种记号简化略显不严谨（此前的含义是 $m = m_{t=1}$ 和 $M = M_{t=1}$）。以下所有估计都关于 $t \geq 1$一致。

为得到 (4.40)，我们断言

$$m^\delta \breve{f}\big(\breve{H}\big)m^\delta\Psi = H\tilde{f}^2\big(\breve{H}\big)\Psi + \mathcal{O}(r^{-1+}) = H\Psi + \mathcal{O}(r^{-1+}). \tag{4.41}$$

事实上，利用 (4.9a) 和 (4.9b)

$$\begin{aligned} Hm^{-\delta}[\tilde{f}^2\big(\breve{H}\big),m^\delta]f\big(\breve{H}\big) &= Hm^{-\delta}(\tilde{f}^2)^{(1)}\big(\breve{H}\big)\big[\breve{H},m^\delta\big]f\big(\breve{H}\big) + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= Hm^{-\delta}(\tilde{f}^2)^{(1)}\big(\breve{H}\big)\big[-\mathrm{i}\delta m^{-(\delta+1)/2}\widetilde{M}m^{-(\delta+1)/2}, f\big(\breve{H}\big)\big] + \mathcal{O}(r^{-2}) \\ &= \mathcal{O}(r^{-2}) = \mathcal{O}(r^{-(1+\epsilon_2)+}). \end{aligned}$$

这就证明了 (4.41)，从而得出 (4.40)。

还需计算并估计 (4.40) 右侧的第一项。它可以展开为若干项之和：$T_1$、$T_2$ 和 $T_3$（与 (4.27) 中的项不同）

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\big[m^\delta \breve{f}\big(\breve{H}\big)m^\delta,\Psi\big] &= T_1 + T_2 + T_3; \\ T_1 &= \mathrm{i}\big[m^\delta,\Psi\big]\breve{f}\big(\breve{H}\big)m^\delta, \\ T_2 &= T_1^* = m^\delta \breve{f}\big(\breve{H}\big)\mathrm{i}\big[m^\delta,\Psi\big], \\ T_3 &= m^\delta \mathrm{i}\big[\breve{f}\big(\breve{H}\big),\Psi\big]m^\delta. \end{aligned}$$

对于 $T_1$，类似地，这就需要计算

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\big[m^\delta,\Psi\big] &= \mathrm{i}\big[m^\delta, f(\breve{H})\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f(\breve{H})\big] = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5; \\ S_1 &= \mathrm{i}\big[m^\delta, f\big(\breve{H}\big)\big]\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\breve{H}\big), \\ S_2 &= S_1^* = f\big(\breve{H}\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\mathrm{i}\big[m^\delta, f\big(\breve{H}\big)\big], \\ S_3 &= f\big(\breve{H}\big)\,\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{i}\big[m^\delta,\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big]m^{\epsilon_2}\big)f\big(\breve{H}\big), \end{aligned}$$

$$S_4 = f\big(\breve{H}\big)\,\mathrm{Re}\,\big(\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big[m^{\epsilon_2},\mathrm{i}\big[m^{\delta},\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big]\big]\big)f\big(\breve{H}\big),$$
$$S_5 = f\big(\breve{H}\big)\,\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{i}\big[m^{\delta},\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big]\big[m^{\epsilon_2},\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big]\big)f\big(\breve{H}\big),$$

根据式 (4.9a)

$$S_1 = -\delta f'(\breve{H})m^{-(\delta+1)/2}\widetilde{M}m^{-(\delta+1)/2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\breve{H}\big)+\mathcal{O}(r^{\epsilon_2-\delta-2}).$$

由 (4.9a) 和 (4.23) 可知，它对 $T_1$ 的贡献形式为

$$-\delta f'\big(\breve{H}\big)m^{\epsilon_2-1}\widetilde{M}\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\breve{H}\big)\breve{f}\big(\breve{H}\big)+\mathcal{O}(r^{-1+}).$$

类似地，$S_2$ 对 $T_1$ 的贡献为

$$-\delta f\big(\breve{H}\big)\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\widetilde{M}m^{\epsilon_2-1}f'\big(\breve{H}\big)\breve{f}\big(\breve{H}\big)+\mathcal{O}(r^{-1+}).$$

稍作修改 (4.9c)，并将其应用于 $s=\delta$ 和 $K=2$，可知算子 $S_3$ 是以下表达式的实部

$$\begin{aligned}&-2\delta t^{\epsilon_1}f\big(\breve{H}\big)|\nabla m|^2m^{\delta-1}(\chi_-^2)'(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}f\big(\breve{H}\big)\\&\quad-\tfrac{\mathrm{i}}{2}t^{2\epsilon_1}f\big(\breve{H}\big)\mathrm{ad}^2_{\widetilde{M}}(m^{\delta})(\chi_-^2)^{(2)}(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}f\big(\breve{H}\big)\\&\qquad+\mathcal{O}(r^{3\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2+\delta-3})+\mathcal{O}(r^{2\epsilon_1/\lambda+\epsilon_2-2}).\end{aligned}\tag{4.42}$$

最后一项需要解释。它源于 $\mathrm{i}[m^{\delta},\tilde{f}(\breve{H})]M\tilde{f}(\breve{H})$ 及其伴随表达式，其贡献由 (4.9a) 和 (4.9b) 处理。我们的应用与上文使用 (4.38) 的方式类似。因此，在对易之后（误差为最后一项所指定的 $\tilde{}$），我们利用 $ff'=0$ 这一事实。另请注意，为了推导 $\tilde{}$，表达式 (4.42) 中用到了相关性质 $ff=f$。总之，我们的演算表明，(4.42) 的实部确实是 $S_3$ 的有效公式。

代入 $T_1$ 相当于从右侧乘以因子 $\breve{f}\big(\breve{H}\big)m^{\delta}$，这会使误差的阶提高 $\delta$。(4.42) 的第三项和第四项符合 (4.26b) 中的误差项。由于 (4.42) 的第二项趋于纯虚数，因此它也只会产生这类误差项。因此，只有 (4.42) 第一项的实部需要进一步考察。

出于同样的原因，项 $S_4$ 和 $S_5$ 对 $T_1$ 的贡献也只有 (4.26b) 中的误差项。再考虑到 $T_2=T_1^*$，最终经过对称化（使用引理 4.1 和 (4.23)）后，我们得到

$$\begin{aligned}T_1+T_2&=-4\delta\,\mathrm{Re}\,\Big(f'\big(\breve{H}\big)m^{\epsilon_2-1}\widetilde{M}\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\breve{H}\big)\breve{f}\big(\breve{H}\big)\\&\qquad+t^{\epsilon_1}f\big(\breve{H}\big)\,\mathrm{Re}\,\big(|\nabla m|^2m^{\delta-1}(\chi_-^2)'(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\big)f\big(\breve{H}\big)\breve{f}\big(\breve{H}\big)m^{\delta}\Big)+\mathcal{O}(r^{-1+})\\&=4\delta m^{(\epsilon_2-1)/2}\bar{f}(\breve{H})\,\widetilde{M}\chi_-^2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\,\bar{f}(\breve{H})m^{(\epsilon_2-1)/2}\\&\qquad-4\delta t^{\epsilon_1}\,\mathrm{Re}\,\Big(f\big(\breve{H}\big)(\chi_-^2)'(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})|\nabla m|^2m^{2\delta+\epsilon_2-1}f\big(\breve{H}\big)\breve{H}\Big)+\mathcal{O}(r^{-1+}).\end{aligned}$$

第一项有上界 $Ct^{-\epsilon_1}m^{\epsilon_2-1}$，这与 (4.26b) 一致。第二项将与使用以下要素计算得到的 $T_3$ 中的一项抵消。

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\big[\breve{f}\big(\breve{H}\big),\Psi\big]&=f\big(\breve{H}\big)\mathrm{i}\big[\breve{f}\big(\breve{H}\big),\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})m^{\epsilon_2}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\big]f\big(\breve{H}\big)\\&=-2t^{\epsilon_1}f\big(\breve{H}\big)\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)m^{\epsilon_2/2}\mathrm{i}\big[\breve{f}\big(\breve{H}\big),\widetilde{M}\big]m^{\epsilon_2/2}\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f\big(\breve{H}\big)\\&\qquad+f\big(\breve{H}\big)\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\mathrm{i}\big[\breve{f}\big(\breve{H}\big),m^{\epsilon_2}\big]\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\breve{H}\big)+\mathcal{O}(r^{-(1+2\delta)_+}).\end{aligned}$$

这里我们在 $f$ 中使用了 (4.9d)（将其中的 $f$ 替换为 $\check{f}$），并将其中的 $\chi(M_t)$ 替换为 $\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})$。我们还利用了 $\mathrm{i}\,\mathrm{ad}^2_{\widetilde{M}}(\check{f}(\check{H})) = \mathcal{O}(r^{-2})$ 是纯虚数这一事实（从而在对称化时得到更快的衰减）。

接着

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\big[\check{f}\big(\check{H}\big),\widetilde{M}\big] &= R_1+R_2+R_3+\mathcal{O}(r^{-(1+2\delta+\epsilon_2)_+});\\ R_1 &= \tilde{f}'(\check{H})\mathrm{i}\big[\check{H},\widetilde{M}\big]\check{H}\tilde{f}(\check{H})+\tilde{f}(\check{H})\check{H}\mathrm{i}\big[\check{H},\widetilde{M}\big]\tilde{f}'(\check{H}),\\ R_2 &= \tilde{f}^2(\check{H})\mathrm{i}[m^{-\delta},M]Hm^{-\delta}\tilde{f}^2(\check{H})+\tilde{f}^2(\check{H})m^{-\delta}H\mathrm{i}[m^{-\delta},M]\tilde{f}^2(\check{H}),\\ R_3 &= \tilde{f}^2(\check{H})m^{-\delta}\mathrm{i}[H,M]m^{-\delta}\tilde{f}^2(\check{H}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\big[\check{f}\big(\check{H}\big),m^{\epsilon_2}\big] &= R_4+R_5+\mathcal{O}(r^{-(1+2\delta)_+});\\ R_4 &= \tilde{f}'(\check{H})\mathrm{i}\big[\check{H},m^{\epsilon_2}\big]\check{H}\tilde{f}(\check{H})+\tilde{f}(\check{H})\check{H}\mathrm{i}\big[\check{H},m^{\epsilon_2}\big]\tilde{f}'(\check{H}),\\ R_5 &= \tilde{f}(\check{H})m^{-\delta}\mathrm{i}[H,m^{\epsilon_2}]m^{-\delta}\tilde{f}(\check{H}).\end{aligned}$$

$R_1$ 和 $R_4$ 对 $T_3$ 的贡献具有形式 $\mathcal{O}(r^{-1+})$（因为 $f\tilde{f}'=0$），而 $R_2$ 对 $T_3$ 的贡献确实与$T_1+T_2$的上述第二项相消。

对称化后，$R_3+R_5$ 对 $T_3$ 的贡献具有如下形式

$$\begin{aligned}&-2t^{\epsilon_1}f\big(\check{H}\big)\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)\,m^{\epsilon_2/2}\,\tilde{f}^2\big(\check{H}\big)\mathrm{i}[p^2,M]\tilde{f}^2\big(\check{H}\big)\,m^{\epsilon_2/2}\,\bar{\chi}_2(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t)f\big(\check{H}\big)\\ &+\epsilon_2 m^{(\epsilon_2-1)/2}f\big(\check{H}\big)\,\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})\widetilde{M}\chi_-(t^{\epsilon_1}\widetilde{M})f\big(\check{H}\big)m^{(\epsilon_2-1)/2}+\mathcal{O}(r^{-1+}).\end{aligned}$$

中间项的上界为$Ct^{-\epsilon_1}m^{\epsilon_2-1}$（这与（4.26b）一致）。

对于第一项，我们可以将 $\mathrm{i}[p^2,M]$ 替换为 $4t^{-\lambda}p\cdot(\nabla^2 m)(x/t^\lambda)p$，并将 $\tilde{f}^2\big(\check{H}\big)$ 的每个因子替换为 $\tilde{f}\big(\check{H}\big)$的一个（单独）因子。将所得表达式与（4.39）结合起来，回顾（4.36）中的算子 $S$ 和 $T$，并同时使用（4.5a）中的算子 $B=B_t$，最后通过配方得到上界

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Psi &\le -2t^{\epsilon_1}TB^*BT^*+\mathcal{O}(t^{-1+})+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+})\\ &\le \mathcal{O}(t^{-1+})+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+}).\end{aligned}\tag{4.43}$$

我们已证明 (4.26b)，因此 (4.24b) 得证。 □

**注释 4.7**。 i) 与 (4.32) 相比，请注意 (4.43) 中出现了$\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)$ 的因子。我们可以在 $t\ge 1$ 上局部一致地给出界

$$A:=m_t^{\epsilon_2/2}\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)B_t^*B_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)m_t^{\epsilon_2/2}=\mathcal{O}(r^{\epsilon_2+2\delta-1}),$$

且无法得到更好的界。特别地，$A$ 不是有界算子。我们可以用算子序列 $A_n\nearrow A$ 对其作近似，例如取为

$$A_n=m_t^{\epsilon_2/2}\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)B_t^*\chi_-^2(r/n)B_t\tilde{f}\big(\check{H}_t\big)m_t^{\epsilon_2/2};\quad n\in\mathbb{N}.$$

这种近似对于在有界情形下推导积分传播估计很有用（这大致相当于在上述证明中令 $\epsilon_2=0$）。参见推论 5.1 及其证明；另请参见注释 6.2 和推论 6.1 的证明，其中采用了密切相关的处理方法。

虽然可以从上述对引理 4.6 的证明中考虑的无界情形推导出积分传播估计（该证明有些复杂；我们在证明中只是忽略了负项），但我们并不需要这些估计。相反，在接下来的各节中（尤其是从第 6 节起），我们将需要各种相关估计，并采用更简化的证明。事实上，证明方案基本相同。为避免枯燥地重复论证，我们只会着重阐述证明的不同方面。

ii) 容易验证，(4.43) 右端可以替换为

$$\mathcal{O}(t^{-1-\varepsilon}) + \mathcal{O}(t^{-2\varepsilon})\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1})$$

对于某个 $\varepsilon > 0$ （取决于所涉及的参数）。

iii) 尽管我们（可能）固定了 $\delta = 4/7$，从而接近 $1/2$，但这并非上述引理 4.6 证明所必需的（后文会用到）。事实上，上述证明的自然极限是 $\delta < 1$（而不是 $\delta < 3/5$）。这归功于量子对称化效应。因此，形式上计算

$$\mathrm{i}[p^2, \chi_-(M_t)] + \sqrt{-\chi_-'(M_t)}\,\mathrm{i}[p^2, M_t]\sqrt{-\chi_-'(M_t)} \approx 0,$$

它的误差项可表示为 $\mathsf{ad}^3_{M_t}(p^2) \approx p \cdot \mathcal{O}(r^{-3})p$。写作

$$p \cdot \mathcal{O}(r^{-3})p = \big(pm_t^{-\delta}\big) \cdot m_t^{2\delta}\mathcal{O}(r^{-3})\big(m_t^{-\delta}p\big),$$

˘我们看到，当夹在 $f(H_t)$ 的因子之间时，误差的有效阶为 $2\delta - 3 < -1$，这使其满足“可积性”。注意，若没有对称化，误差将以 $\mathsf{ad}^2_{M_t}(p^2) \approx \mathcal{O}(r^{2\delta-2})$ 的形式表示，对于任意 $\delta > 1/2$，这都不足以满足可积性。

**4.4. 命题 2.14 的证明。** 我们使用 (4.24a) 以及性质

$$F(|x| < R)\chi_+(t^{\epsilon_1}M_t) = 0 \text{ for all large } t, \tag{4.44}$$

对 (2.15a) 的估计如下

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \|F(|x| < R)\psi(t)\| &= \lim_{t\to\infty} \|F(|x| < R)\big(\chi_-^2(t^{\epsilon_1}M_t) + \chi_+^2(t^{\epsilon_1}M_t)\big)\psi(t)\| \\ &\le \lim_{t\to\infty} \|\chi_-(t^{\epsilon_1}M_t)\psi(t)\| = 0.\end{aligned}$$

由于 (4.44) 成立，且 $R = t^\lambda/8$ 和 $\lambda$ 可以任意接近 1（可能需要将 $\epsilon_1 > 0$ 取小），因此 (2.15b) 也成立。□

## 5. Localization to the strictly outgoing region

我们回顾一下，小节 3.1 中的构造依赖于一个较小的正参数 $\epsilon_\circ$。与第4节一样，此参数固定不变，我们将使用 (4.21a) 和 (4.21b) 中导出的量，以及 (4.5a) 中的二次型 $B_t^*B_t$。此外，我们还将使用 (4.29) 中引入的函数 $f$（它也会以类似方式出现）。

**推论 5.1.** 设给定 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 和 $\chi \in \mathcal{F}_+$。那么，使用记号$\psi(t) = U(t)g(U(1))\psi$，对任意 $\psi \in \mathcal{H}$，以下界成立。

$$\begin{aligned}\forall\,\psi \in \mathcal{H}: \quad &\int_1^\infty \big\|Q_1\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t \le C\|\psi\|^2; \\ Q_1 = Q_{1,t} &= 2\sqrt{\widetilde{M}_t\chi\big(\widetilde{M}_t\big)}\,\bar{f}\big(\check{H}_t\big)\,m_t^{-1/2}.\end{aligned} \tag{5.1a}$$

$$\forall\,\psi\in\mathcal{H}:\quad \int_1^\infty \big\|Q_2\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le C\|\psi\|^2;\qquad Q_2=Q_{2,t}=B_t\,\tilde f(\breve H_t)\sqrt{\chi'}\big(\widetilde{M}_t\big)f\big(\breve H_t\big). \tag{5.1b}$$

证明. 由稠密性，并利用注 4.7 i) 以及勒贝格控制收敛定理和单调收敛定理，对于界 (5.1a) 和 (5.1b)，我们可以假设$\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$。（或者，我们也可以按照第 6.1 小节中推论 6.1 的证明进行。）

引入这一族一致有界的可观测量

$$\Psi=\Psi_t=f(\breve H_t)\chi\big(\widetilde{M}_t\big)f(\breve H_t),\quad t\ge 1, \tag{5.2a}$$

我们可以计算

$$\exists\,\varepsilon>0:\qquad \mathbf{D}\Psi=\delta Q_1^*Q_1+Q_2^*Q_2+\mathcal{O}(t^{-1-\varepsilon})+t^{-2\varepsilon}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1}). \tag{5.2b}$$

事实上，（5.2b）可通过仿照引理 4.6 的证明得到（另请注意注 4.7 ii））。在当前情形下，与（4.26a）比较，$\epsilon_1=\epsilon_2=0$并且我们已将 $\chi_-$ 的因子乘积替换为 $\chi$，显然简化了计算，参见注 4.7 i）。这里省略这一计算的细节。注意，与（4.26b）相比，海森堡导数（5.2b）本质上是正的（而（4.26b）本质上是负的）。

显然，通过积分$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\Psi\rangle_{\psi(t)}=\langle\mathbf{D}\Psi\rangle_{\psi(t)}$，利用 $\Psi$ 的有界性、（5.2b）和（2.3），即可得到 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 的界（5.1a）和（5.1b）。□

推论 5.1 中的因子 $g\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 用于通过 (2.3) 处理 (5.2b) 的第四项。然而，即使没有这种局部化，(5.2b) 仍有一些非平凡的应用。下面给出这样一个光滑化型结果（请注意，$Q_2$ 无界）。

**推论 5.2.** 给定 $\chi\in\mathcal{F}_+$。存在 $C>0$，使得对于任意子区间 $[a,b]\subseteq[1,\infty)$，以下关于 $\varphi(t)=U(t)\varphi$ 的界均成立（其中$Q_j=Q_{j,t}$、$j=1$和$2$按照(5.2b)中的给定方式取值）。

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{H}:\quad \delta\int_a^b\big\|Q_1\varphi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le\big(C(b-a)+\sup\chi\big)\|\varphi\|^2, \tag{5.3a}$$

$$\forall\,\varphi\in\mathcal{H}:\quad \int_a^b\big\|Q_2\varphi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le\big(C(b-a)+\sup\chi\big)\|\varphi\|^2. \tag{5.3b}$$

证明。 由 (5.2b) 可得

$$\mathbf{D}\Psi\ge\delta Q_1^*Q_1+Q_2^*Q_2-C. \tag{5.4}$$

由于 $0\le\Psi\le\sup\chi$，对 $\langle\mathbf{D}\Psi_t\rangle_{\varphi(t)}$ 积分即可得到取此 $C$ 时的界。 □

**引理 5.3**。 对于任意 $h\in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ 和 $\psi\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$，极限存在

$$h(M^+)\psi:=\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty}U(t)^{-1}h\big(\widetilde{M}_t\big)\psi(t)\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}};\quad \psi(t)=U(t)\psi. \tag{5.5}$$

我们可以写成

$$\langle\psi,h(M^+)\psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\mathcal{E}_\psi^+(\mathrm{d}x) \tag{5.6}$$

关于一个（唯一的）单位分解 $\mathcal{E}^+(\cdot)$ 在 $\mathbb{R}$ 上（取值于 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$上的正交投影）。对于任意博雷尔子集 $B\subseteq\mathbb{R}$，正交投影 $\mathcal{E}^+(B)$与单值算子 $U(1)$对易。其支撑

$\operatorname{supp}(\mathcal{E}^+) \subseteq [0,\infty)$，且在子空间 $\mathcal{H}^+ := \mathcal{E}^+([0,\infty))\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$上，通过在（5.6）中取 $h(\lambda) = \lambda$ 可得到一个正算子 $M^+$（因此 $\mathcal{E}^+(\cdot)$ 是 $M^+$的谱分解）。最后，这个子空间 $\mathcal{H}^+$ 包含 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$。

证明。 首先我们证明该极限存在

$$h(M^+)\psi = \mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty} U(t)^* h\big(\widetilde{M}_t\big)\psi(t). \tag{5.7}$$

这将分三步完成。

**I.** 我们将问题化简为证明下述极限 (5.8) 的良定义性。由稠密性可假设 $\psi = g(U(1))\breve{\psi}$，其中 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 且 $\breve{\psi} \in \mathcal{H}$（或者可能是 $\breve{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbf{X})$）。同理，可假设 $h$ 为实值、光滑且在零的某个邻域内为常数。我们将其分解

$$h - h(0) = \big(h-h(0)\big)1_{(-\infty,0)} + \big(h-h(0)\big)1_{[0,\infty)} =: h_- + h_+.$$

根据 (4.24b)，只需证明该极限存在

$$h_+(M^+)\psi = \mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty} U(t)^* h_+\big(\widetilde{M}_t\big)\psi(t).$$

再由注 2.5 ii)，只需证明该极限存在

$$\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty} U(t)^* \chi\big(\widetilde{M}_t\big)\psi(t); \quad \chi \in \mathcal{F}_+.$$

就 (5.2a) 中的可观测量 $\Psi_t$ 而言，借助引理 4.4 及对易关系（参见 (4.9d)），我们需要证明存在

$$\chi(M^+)\psi = \lim_{t\to\infty} U(t)^*\Psi_t\psi(t). \tag{5.8}$$

**II**。因此，设 $\psi$ 如上所述给定，并设 $\chi \in \mathcal{F}_+$。取函数 $\tilde{g}$， $g_1 \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$，使得 $\tilde{g} \succ g_1 \succ g$。现在我们将证明

$$\lim_{t\to\infty} \big\|\big(1-\tilde{g}(U(1))\big)U(t)^*\Psi_t\psi(t)\big\| = 0. \tag{5.9}$$

回顾 (2.2)，只需证明

$$\lim_{t\to\infty} \Big\|\Big(U(t-[t])^*\Psi_t U(t-[t])g_1(U(1)) - g_1(U(1))\Psi_t\Big)\psi([t])\Big\| = 0. \tag{5.10}$$

我们证明 (5.10) 时，对 $g_1$ 仅使用性质 $g_1 \in C(\mathbb{T})$。事实上，根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，我们可以将 $g_1(U(1))$ 的因子替换为任意整数次幂 $U(1)^k$。令 $\sigma := t - [t] + k$，我们得到（最后一步用到了 $H(s) = H(s+[t]-k)$）

$$\begin{aligned} &U(1)^{-k}U(t-[t])^*\Psi_t U(t-[t])U(1)^k - \Psi_t \\ &\quad = U(\sigma)^*\Psi_{\sigma+[t]-k}U(\sigma) - \Psi_{[t]-k} + \big(\Psi_{[t]-k} - \Psi_t\big) \\ &\quad = \int_0^\sigma U(s)^*(\mathbf{D}\Psi)_{s+[t]-k}U(s)\,\mathrm{d}s + \mathcal{O}(t^{-0+}). \end{aligned}$$

我们需要证明

$$\lim_{t\to\infty} \Big\|\int_0^\sigma U(s)^*(\mathbf{D}\Psi)_{s+[t]-k}U(s)\psi([t])\,\mathrm{d}s\Big\| = 0.$$

由 (5.2b) 可知，只需证明

$$\lim_{t\to\infty}\Big\|\int_0^\sigma U(s)^*Q^*_{j,s+[t]-k}Q_{j,s+[t]-k}\psi(s+[t])\,\mathrm{d}s\Big\|=0;\quad j=1,2. \tag{5.11}$$

我们可以先与任意 $\varphi\in\mathcal{H}$ 取内积，再应用柯西–施瓦茨不等式、推论 5.1 和 5.2（以及仿射变量变换），从而对该积分作出界估计。用这种方式可将积分估计为 $o(t^0)\|\varphi\|$，当 $t\to\infty$ 时。由此证明了 (5.11)，因此也证明了 (5.9)。

**III**。现在我们可以证明极限 (5.8) 的存在。得益于步骤 II，我们只需证明下列极限存在

$$\psi_\infty=\lim_{t\to\infty}\tilde g(U(1))U(t)^*\Psi_t\psi(t);\quad \psi(t)=U(t)\psi. \tag{5.12}$$

回忆一下，$\psi=g(U(1))\,\breve\psi$，其中 $\breve\psi\in\mathcal{H}$。

对于任意给定的 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$，我们考虑演化 $\widetilde\varphi(t)=U(t)\tilde g(U(1))\varphi$。我们验证柯西条件，首先对任意大的 $t_2>t_1>1$ 写出

$$\big\langle\widetilde\varphi(t_2),\Psi_{t_2}\psi(t_2)\big\rangle-\big\langle\widetilde\varphi(t_1),\Psi_{t_1}\psi(t_1)\big\rangle=\int_{t_1}^{t_2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\widetilde\varphi(t),\Psi_t\psi(t)\rangle\,\mathrm{d}t.$$

由 (5.2b)、柯西–施瓦茨不等式、推论 5.1 及 (2.3)，我们可以将右侧的积分估计为 $o(t_1^0)\|\varphi\|$，当 $t_1\to\infty$ 时；此估计对 $t_2>t_1$ 和 $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 一致成立。这就保证了 (5.12) 中极限向量 $\psi_\infty\in\mathcal{H}$ 的良定义性。我们已经证明了 (5.7)，并且由 (5.9) 也可推出 (5.5)。

**IV**. 根据构造 (5.5) 的良定义性，不难得出映射 $C_{\mathrm c}(\mathbb{R})\ni h\to h(M^+)\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathrm{ac}})$ 是一个连续的 $*$-同态，因此可将其表示为（参见 [Ru, Theorem12.22]）

$$\langle\psi,h(M^+)\psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\mathrm{d}\mathcal{E}^+_\psi(x) \tag{5.13}$$

由唯一的单位分解 $\mathcal{E}^+(\cdot)$ 表示在 $\mathbb{R}$ 上。

根据引理 4.6，支集 $\mathrm{supp}(\mathcal{E}^+)\subseteq[0,\infty)$，因此 $\mathcal{E}^+(\cdot)$ 是作用于 $\mathcal{H}^+=\mathcal{E}^+([0,\infty))\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 上的正算子 $M^+$ 的谱分解。

**V**. 我们证明 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}\subseteq\mathcal{H}^+$，即投影 $\mathcal{E}^+(\mathbb{R})$ 在 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 上的作用等同于单位算子。考虑由 $h_n(s)=\chi_-(|s|/n)$ 给出的函数递增序列 $h_n\in C_{\mathrm c}(\mathbb{R})$。我们需要证明

$$\langle\psi,h_n(M^+)\psi\rangle\to\|\psi\|^2. \tag{5.14}$$

我们计算并估计如下

$$\begin{aligned}\big\langle\psi,\big(I-h_n(M^+)\big)\psi\big\rangle&=\lim_{t\to\infty}\big\langle U(t)\psi,\big(I-h_n\big(\widetilde{M}_t\big)\big)U(t)\psi\big\rangle\\&\le\limsup_{t\to\infty}\big|\big\langle F(p^2>E)U(t)\psi,\big(I-h_n\big(\widetilde{M}_t\big)\big)U(t)\psi\big\rangle\big|\\&\quad+\limsup_{t\to\infty}\big|\big\langle F(p^2<E)U(t)\psi,\big(I-h_n\big(\widetilde{M}_t\big)\big)U(t)\psi\big\rangle\big|.\end{aligned}$$

通过选取足够大的 $E$，第一项可以在 $n$ 上一致地取得任意小。对于固定的 $E$，我们注意到一致有界

$$\big\|F(p^2<E)\big(I-h_n\big(\widetilde{M}_t\big)\big)\big\|\le n^{-1}\big\|F(p^2<E)\widetilde{M}_t)\big\|\le n^{-1}C\big\|F(p^2<E)\langle p\rangle\big\|,$$

从而得到

$$\limsup_{t\to\infty}\big\|F(p^2<E)\big(I-h_n\big(\widetilde{M}_t\big)\big)\big\|\to 0 \text{ for } n\to\infty.$$

我们已经证明了 (5.14)。

**六**。我们证明正交投影 $\mathcal{E}^+(B)$ 与单值算子 $U(1)$ 可交换。根据关系式 (5.13)，只需证明 $U(1)$ 与算子 $h(M^+)$ 可交换，因此进而只需证明对于任意 $\chi\in\mathcal{F}_+$ 和 $\psi\in\mathcal{H}_{\rm ac}$

$$[\chi(M^+),U(1)]\psi=\lim_{\mathbb{N}\ni t\to\infty}[U(t)^*\Psi_tU(t),U(1)]\psi=0. \tag{5.15}$$

注意到当 $g_1(z)=z$ 且对于 $\psi(t)=U(t)\psi$ 时，(5.10) 成立，故可得结果 (5.15)。□

**L引理 5.4**。 正算子 $M^+$ 的核为零，即 $\mathcal{E}^+(\{0\})=0$。

证明。 任取 $\psi=g(U(1))\breve{\psi}$，满足 $g\in C_{\rm c}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\rm p})$ 且 $\breve{\psi}\in\ker(M^+)=\operatorname{ran}(\mathcal{E}^+(\{0\}))$。我们需要证明 $\psi=0$。又由于 $\psi\in\ker(M^+)$，因此对任意 $R>1$

$$0-\langle\chi_+\big(R\widetilde{M}_t\big)\rangle_{f(\breve{H}_t)\psi(t)}=\int_t^\infty\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\langle\chi_+\big(R\widetilde{M}_s\big)\rangle_{f(\breve{H}_s))\psi(s)}\,\mathrm{d}s;\quad\psi(t)=U(t)\psi. \tag{5.16}$$

这里，右侧的时间导数对几乎所有 $s\geq 1$ 都符合 (5.2b)，并且由 (5.2b) 关于 $\chi=\chi_+(R\cdot)$ 的证明可知，该积分有如下形式的下界：$-CR^3t^{-\varepsilon}$。取 $R=t^{\epsilon_1}$, $3\epsilon_1<\varepsilon$，得到

$$\lim_{t\to\infty}\|\chi_-\big(t^{\epsilon_1}\widetilde{M}_t\big)f(\breve{H}_t)\psi(t)\|^2=\lim_{t\to\infty}\|f(\breve{H}_t)\psi(t)\|^2=\|\psi\|^2. \tag{5.17}$$

(4.24b) 与此 $\epsilon_1$（如有需要，可取更小值）以及 (5.17) 相结合，得出结论 $\psi=0$。□

回顾一下，$M_0=M_1=(M_t)|_{t=1}$。

**推论 5.5.** 对于任意 $\psi\in\mathcal{H}_{\rm ac}$，演化 $\psi(t)=U(t)\psi$ 满足

$$\lim_{\kappa\searrow 0}\limsup_{t\to\infty}\|\chi_-(M_0/\kappa)\psi(t)\|=0, \tag{5.18a}$$

$$\lim_{\kappa\searrow 0}\limsup_{t\to\infty}\|\big(I-\chi_+(M_0/\kappa)\big)\psi(t)\|=0. \tag{5.18b}$$

证明。 只需证明 (5.18a)。

**I**。我们证明 $\psi\in\mathcal{H}^+$ 情形下的 (5.18a)。根据引理 5.4，我们可以假设 $\psi\in$ 属于 $\mathcal{E}^+(\mathbb{R}_+)$ 的值域，因此 $\psi=h(M^+)\breve{\psi}$，其中某个 $h\in C_{\rm c}^\infty(\mathbb{R}_+)$ 和某个 $\breve{\psi}\in\mathcal{H}_{\rm ac}$。先验地，算子 $M^+$ 依赖于一个接近 1 的参数 $\lambda<1$。然而，实际上它并不依赖于该参数，这是因为

$$\lim_{t\to\infty}\|h\big(\widetilde{M}_t\big)\breve{\psi}(t)-h(M_0)\breve{\psi}(t)\|=0,\quad\breve{\psi}(t)=U(t)\breve{\psi}. \tag{5.19}$$

后者进而由 (2.15b) 推出，具体如下：我们可以在 (5.19) 中用 $M_t$替换$\sim M_t$，参见 (4.15b)、(4.25a) 和 (4.25b)，然后我们利用

$$\lim_{t\to\infty}\big\|\big(I-\chi_+\big(|x|/t^\lambda\big)\big)\breve{\psi}(t)\big\|=0,$$
$$\big(h(M_t)-h(M_0)\big)\chi_+\big(|x|/t^\lambda\big)=\mathcal{O}(t^{-0+}),$$

其中第二个断言由如 (4.25b) 中的表示以及利用下述事实的交换性得出

$$\big(M_t - M_0\big)\chi_+\big(|x|/t^\lambda\big) = 0.$$

由于 (5.19) 中的函数 $h$ 的支集包含在 $\mathbb{R}_+$ 中，因此对所有足够小的 $\kappa > 0$，都有 $\chi_-(\cdot/\kappa)h = 0$，从而也有

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_-(M_0/\kappa)\psi(t)\| = 0; \quad \psi = h(M^+)\breve{\psi}.$$

我们已经证明了 (5.18a)。

**II.** 我们在一般情形下证明 (5.18a)，$\psi \in \mathcal{H}_{\rm ac}$。步骤 I 中的论证可得

$$\lim_{t\to\infty} \|\chi_-(M_0/\kappa)\chi_+(\widetilde{M_t})\psi(t)\| = 0; \quad \kappa < 1/2,\, \psi(t) = U(t)\psi.$$

由引理 4.6，我们可以假设 $\psi = h(M^+)\psi$ 对某个 $h \in C_{\rm c}^\infty(\mathbb{R})$ 成立。特别地，这意味着 $\psi \in \mathcal{H}^+$，因此步骤 I 适用。□

**备注 5.6.** 在下一节及本文后续部分，我们将使用˘ ˘(5.18b)，以及一个与 $H_t = H_{t,\delta,\lambda}$ 略有不同的辅助哈密顿量（即 (4.6) 中给出的˘ ˘那个）。它记作 $H(t) = H_\delta(t)$，并由 (6.2) 定义。由对易可轻易得出，对任意 $\lambda_1 \in (\lambda,1)$

$$\Big(f(\breve{H}_t) - f\big(\breve{H}(t)\big)\Big)\chi_+\big(|x|/t^{\lambda_1}\big) = \mathcal{O}(t^{-0_+}).$$

˘因此，再次利用 (2.15b)，我们可以将局域化因子 $f(H_t)$ 任意替换为因子 $f\big(\breve{H}(t)\big)$，从而特别得到对 (4.15b) 和 (5.18b) 的如下改进。

$$\forall \psi \in \mathcal{H}_{\rm ac}: \quad \lim_{\kappa\searrow 0} \limsup_{t\to\infty} \Big\| \Big(I - \chi_+(M_0/\kappa) f\big(\breve{H}(t)\big)\Big) U(t)\psi \Big\| = 0. \tag{5.20}$$

界 (5.20) 将作为本文进一步分析的起点。特别是，今后我们不再需要 (4.2) 中的时间缩放量。

## 6. Preliminary propagation estimates

我们回顾由 (4.1a) 和 (4.1b) 给出的量 $m$ 和 $M = M_0$。在本节及后文中，我们不使用 (4.2) 中更一般的量 $m_t$ 和 $M = M_t$，而只需要时间取 1 时的版本

$$m(x) = f_{\rm cvx}(m_{a_0}(x)), \tag{6.1a}$$

$$M = M_0 = 2\,{\rm Re}({\rm grad}\, m \cdot p), \tag{6.1b}$$

其中，与前文一样，$f_{\rm cvx} \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ 取为凸函数，使得对于 $s \le 1/4$，$f_{\rm cvx}(s) = 1$；对于 $s \ge 1/2$，$f_{\rm cvx}(s) = s + 2/3$。我们回顾一下，构造 $m_{a_0}$ 时所用的小正参数 $\epsilon$ 被视为固定值。

我们考虑辅助哈密顿量

$$\breve{H} = \breve{H}(t) = \breve{H}_\delta(t) = m^{-\delta}H(t)m^{-\delta}, \quad \delta \in (1/2, 3/5), \tag{6.2}$$

通过 Friedrichs 扩张过程实现为自伴算子。这˘ ˘与（4.6）中给出的辅助哈密顿量 $H_t = H_{t,\delta,\lambda}$ 并不相同，但显然˘相似。我们倾向于略去 $H_\delta(t)$ 对 $\delta$ 和 $t$ 的依赖，而仅使用˘ ˘简写符号 $H$。我们此后的分析将不再使用算子 $H_t$，并将

完全基于 (6.1a)-(6.2) 以及局域化结果 (5.20)。我们将自由地使用 (4.21a) 和 (4.29) 的类似结果，即满足下述条件的实值且与时间无关的函数~ ⌣ _$f, f, f, f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$f(\check{H}) = \chi_-(\check{H}), \quad \tilde{f}(\check{H}) = \chi_-(\check{H}/2), \quad \check{f}(\check{H}) = \tilde{f}(\check{H})\check{H}\tilde{f}(\check{H}),$$
$$\bar{f}(\check{H}) = \sqrt{-\chi_-'(\check{H})\check{H}\chi_-(\check{H})}. \tag{6.3}$$

6.1. **积分估计**。 我们对引理 4.6 的证明揭示了有用的光滑性估计，这些估计类似于推论 5.1，但现在完全（因此也有所简化地）用量（6.1a）—（6.3）来表述。以下结果可视为对局域化结果（5.20）的补充。

**推论 6.1**。 设 $g \in C_c^\infty(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_p)$ 和 $\kappa > 0$ 已给定。则采用记号$\psi(t) = U(t)g(U(1))\psi$，对任意 $\psi \in \mathcal{H}$，下列界成立。

$$\forall\, \psi \in \mathcal{H}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left\|Q_{1,\kappa}\psi(t)\right\|^2 \mathrm{d}t \le C\|\psi\|^2;$$
$$Q_{1,\kappa} = Q_{1,\kappa}(t) = 2\sqrt{M\chi_+^2(M/\kappa)}\,\bar{f}(\check{H})\, m^{-1/2}. \tag{6.4a}$$

$$\forall\, \psi \in \mathcal{H}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left\|Q_{2,\kappa}\psi(t)\right\|^2 \mathrm{d}t \le C\|\psi\|^2;$$
$$Q_{2,\kappa} = Q_{2,\kappa}(t) = 2\sqrt{p\cdot\nabla^2 m(x)p}\,\tilde{f}(\check{H})\sqrt{(\chi_+^2)^{(1)}(M/\kappa)}f(\check{H}). \tag{6.4b}$$

注释 6.2。虽然容易看出 $Q_{1,\kappa}$ 有界，但对 $Q_{2,\kappa}$则需要作出解释。引理 4.6 和推论 5.1 的证明已经涉及这种解释。下文给出的推论 6.1 的证明也采用同样的解释：我们将 $p\cdot\nabla^2 m(x)p$ 视为递增的正则化形式 $p\cdot\left(\chi_-^2(r/n)\nabla^2 m\right)p$, $n \in \mathbb{N}$的极限形式。现在， $4\left\langle p\cdot\left(\chi_-^2(r/n)\nabla^2 m\right)p\right\rangle_{\widetilde{\psi}}$ with$\widetilde{\psi} := \tilde{f}(\check{H})\sqrt{(\chi_+^2)^{(1)}(M/\kappa)}f(\check{H})\psi(t)$ 是一个定义良好的表达式。证明表明，将其作此替换后，界（6.4b）对 $n$ 一致成立，因此令$n \to \infty$ ，并利用勒贝格单调收敛定理，我们得出被积函数$\left\|Q_{2,\kappa}\psi(t)\right\|^2$ 对几乎所有 $t \in \mathbb{R}$均有限。稍后我们会发现，利用权重 $W = \langle p\rangle^{1/3}$对 $Q_{2,\kappa}$ 进行正则化很方便，因为 $Q_{2,\kappa}W^{-1}$ 有界，参见推论 6.6。

**推论 6.1 的证明**。我们首先计算有界函数的时间导数

$$\phi(t) = \phi_\kappa(t) = \left\langle f\left(\check{H}(t)\right)\chi_+^2(M/\kappa)f\left(\check{H}(t)\right)\right\rangle_{\psi(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6.5}$$

通过仿照推论 5.1 的证明，然后像之前一样展开并检查可积性。更确切地说，对于正则化，我们按以下方式进行

$$\phi_n(t) = \phi_{\kappa,n}(t) = \left\langle f\left(\check{H}\right)\chi_-(r/n)\chi_+^2(M/\kappa)\chi_-(r/n)f\left(\check{H}\right)\right\rangle_{\psi(t)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

断言，对任意区间 $[-T,$ 上的导数积分后，结果为 $T]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(\delta\left\|\chi_-(r/n)Q_{1,\kappa}\psi(t)\right\|^2 + \kappa^{-1}\left\|\chi_-(r/n)Q_{2,\kappa}(t)\psi(t)\right\|^2\right)\mathrm{d}t \le C\|\psi\|^2$$

其中常数 $C$ 与 $T > 0$无关。

事实上，大多数项要么在极限 $n \to \infty$ 下趋于零，要么可由（2.3）处理。展开后的导数中只有两项无法用这种方式处理，但它们恰好相加为上述非负被积函数。由此得到上述界，再应用两次勒贝格单调收敛定理，即可完成该引理的证明。

注意，对于极限被积函数 $\delta\big\|Q_{1,\kappa}(t)\psi(t)\big\|^2+\kappa^{-1}\big\|Q_{2,\kappa}(t)\psi(t)\big\|^2$，第一项对所有 $t$ 都有定义，而第二项仅对几乎所有$t$有定义，参见注释 6.2。还要注意，取极限的过程表明 $\phi$ 是绝对连续的。□

对于 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 中的态（将在第 7 节讨论），我们可以在局部化结果 (5.20) 的基础上，加入形式为 $\chi_-(M/K)$ 的能量截断，其中 $K>0$ 较大。这启发了以下类似于（并推广了）(6.4b) 的界。

**推论 6.3**。设 $g\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$、$\chi\in\mathcal{F}_+$ 和 $K>2\kappa>0$ 给定。则采用记号 $\psi(t)=U(t)g(U(1))\psi$，对任意 $\psi\in\mathcal{H}$，以下各界成立。

$$\begin{aligned}&\forall\,\psi\in\mathcal{H}:\quad \int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q_{2,\chi}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le C\|\psi\|^2;\\ &Q_{2,\chi}=Q_{2,\chi}(t)=2\sqrt{p\cdot\nabla^2m(x)p}\,\tilde f\big(\breve H\big)\sqrt{\chi'}(M)f\big(\breve H\big),\end{aligned}\tag{6.6a}$$

因此特别有，

$$\begin{aligned}&\forall\,\psi\in\mathcal{H}:\quad \int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q_{2,K}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le C\|\psi\|^2;\\ &Q_{2,K}=Q_{2,K}(t)=2\sqrt{p\cdot\nabla^2m(x)p}\,\tilde f\big(\breve H\big)\sqrt{-(\chi_-^2)^{(1)}(M/K)}f\big(\breve H\big).\end{aligned}\tag{6.6b}$$

$$\begin{aligned}&\forall\,\psi\in\mathcal{H}:\quad \int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q_{2,\kappa,K}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le C\|\psi\|^2;\\ &Q_{2,\kappa,K}=Q_{2,\kappa,K}(t)=2\sqrt{p\cdot\nabla^2m(x)p}\,\tilde f\big(\breve H\big)\chi_{\kappa,K}(M)f\big(\breve H\big).\end{aligned}\tag{6.6c}$$

证明。考虑有界函数

$$\phi(t)=\big\langle\Psi\big\rangle_{\psi(t)};\quad \Psi=f\big(\breve H(t)\big)\chi(M)f\big(\breve H(t)\big),\quad t\in\mathbb{R}.\tag{6.7a}$$

其形式与 (6.5) 中的函数 $\phi$类似，我们可以仿照推论 6.1 的证明，通过正则化得出 $\phi$ 是绝对连续的，且其导数 $\phi'$ 可积。我们计算 $\phi'=\big\langle\mathbf{D}^\Psi\big\rangle_{\psi(t)}$，其中

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}\Psi=\delta Q_1^*Q_1+Q_2^*Q_2+\mathcal{O}(r^{-1+});\\ &Q_1=Q_{1,\chi}=2\sqrt{M\chi(M)}\,\bar f\big(\breve H\big)\,m^{-1/2},\quad Q_2=Q_{2,\chi},\end{aligned}\tag{6.7b}$$

特别地，导数的主导阶是一对非负项之和，其中一项为$\big\|Q_{2,\chi}\psi(t)\big\|^2$。这就证明了(6.6a)。

由于 $K\chi_+^2(\cdot/K)\in\mathcal{F}_+$，显然 (6.6b) 是 (6.6a) 的特例。（或者注意到，(6.6b) 与 (6.4b) 相同，只需令 $\kappa=K$。）

对于 (6.6c)，我们将 (6.6a) 应用于由 $\chi(t)=\int_{-\infty}^t\chi_{\kappa,K}^2(s)\,\mathrm{d}s$ 定义的 $\chi\in\mathcal{F}_+$。□

在推论 6.3 的证明中，需要因子 $g\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$，以便利用 (2.3) 处理 (6.7b) 的第三项。即使没有这种局部化，(6.7b) 仍有一些非平凡的应用。下面给出这一光滑化型结果，它与推论 5.2 完全类似（证明也类似）。

**推论 6.4**。 给定 $\chi \in \mathcal{F}_+$，存在 $C > 0$，使得对于任意实数 $a < b$，以下关于 $\varphi(t) = U(t)\varphi$ 的界成立，$\varphi \in \mathcal{H}$，并且其中 $Q_j$、$j = 1$、$2$ 如 (6.7b) 中所给。

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{H}: \quad \delta \int_a^b \big\|Q_1\varphi(t)\big\|^2 \,\mathrm{d}t \le \big(C(b-a) + \sup\chi\big)\|\varphi\|^2, \tag{6.8a}$$

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{H}: \quad \int_a^b \big\|Q_2\varphi(t)\big\|^2 \,\mathrm{d}t \le \big(C(b-a) + \sup\chi\big)\|\varphi\|^2. \tag{6.8b}$$

**注 6.5**。 由于上述 $Q_1$ 是有界的，最重要的断言是第二个界（6.8b）。事实上，我们只需要（6.8b）的以下略有变形的版本：假设将 $\chi(M)$ 替换为 $\chi(M_1)$，其中 $M_1$ 按照与 $M$ 相同的方式构造˘，但使用的可能是不同的 $m$，记作 $m_1$。定义（与之前一样令 $H = m^{-\delta}H(t)m^{-\delta}$）

$$Q_2 = Q_{2,\chi,m,m_1} = 2\sqrt{p\cdot\nabla^2 m_1(x)p}\,\tilde f\big(\breve H\big)\sqrt{\chi'}(M_1)f\big(\breve H\big).$$

那么，对于某个 $C > 0$，有

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{H}: \quad \int_a^b \big\|Q_{2,\chi,m,m_1}\varphi(t)\big\|^2 \,\mathrm{d}t \le \big(C(b-a) + \sup\chi\big)\|\varphi\|^2. \tag{6.9}$$

这可由使用 $\Psi = f\big(\breve H(t)\big)\chi(M_1)f\big(\breve H(t)\big)$ 得到，从而得到（5.4）的简化类似形式，记为 $\mathbf{D}\Psi \ge Q_2^*Q_2 - C$，随后我们可以按照推论 5.2 的证明进行。

**6.2. 平方根问题：对 (6.6c) 的另一种证明**。 上述对 (6.6c) 的证明无法推广到我们稍后所需的程度。本小节将给出另一种证明。虽然这种证明方案复杂得多，但其思路有助于推广。一般而言，很难将算子与正算子的平方根交换，这可称为“平方根奇异性问题”。在本例中，或许可以尝试将一个具体算子（此处为 $h(M)$，其中 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$）与 $\sqrt{4p\cdot\nabla^2 m(x)p}$（或者也可以与 $2\sqrt{\nabla^2 m(x)p}$）交换，并估计对易子；然而，这似乎行不通。因此，我们将在计算和估计对易子之前，先对这个平方根进行正则化。我们的正则化充分利用了积分局部衰减估计 (2.3) 的全部效力，即带有明确包含的平滑因子的 (2.3)。第 6.3 小节中，我们也将用同样的方法处理其他例子。

我们引入辅助算子

$$\begin{aligned} P = P_{\rho,W}(t) = \tilde f\big(\breve H\big)W^{-1}\big(p\cdot\nabla^2 m(x)p\big)W^{-1}\tilde f\big(\breve H\big) + r^{-2\rho};\\ W = \langle p\rangle^{1/3}, \quad \rho \in [\delta, (6-3\delta)/7). \end{aligned} \tag{6.10}$$

˘通过对 $H$ 的 (4.8) 的类似结果进行插值，并利用 $\delta < 3/5$，可知 $P$ 是一个正的有界算子。关于更精细的性质，请参见引理 6.8。与 $\delta$ 一样，此后参数 $\rho$ 也可视为固定。供后文使用，注意

$$7\rho + 3\delta < 6. \tag{6.11}$$

读者可以将参数 $\delta$ 和 $\rho$ 视为选取为“足够接近”但大于 $1/2$ 的常数。事实上，全文只需取 $\rho = \delta = 4/7$ 即可。

我们需要 (6.6a) 的以下版本。

**推论 6.6.** 设给定 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 和 $\chi \in \mathcal{F}_{+}$。那么，采用记号$\psi(t) = U(t)g(U(1))\psi$，对任意 $\psi \in \mathcal{H}$，以下界成立。

$$\begin{aligned} \forall\, \psi \in \mathcal{H}: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \big\| Q_{2,\chi,\rho,W}\, \psi(t) \big\|^2 \,\mathrm{d}t \leq C\|\psi\|^2; \\ & Q_{2,\chi,\rho,W} = Q_{2,\chi,\rho,W}(t) = 2\sqrt{P}\, \sqrt{\chi'}(M) f\big(\breve{H}\big) W. \end{aligned} \tag{6.12}$$

证明。 由 (6.6a)

$$\begin{aligned} \forall\, \psi \in \mathcal{H}: \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \big\| Q_{2,\chi} W^{-1} W \psi(t) \big\|^2 \,\mathrm{d}t \leq C\|\psi\|^2; \\ & Q_{2,\chi} = Q_{2,\chi}(t) = 2\sqrt{p \cdot \nabla^2 m(x) p}\, \tilde{f}\big(\breve{H}\big) \sqrt{\chi'}(M) f\big(\breve{H}\big). \end{aligned}$$

我们使用 (2.3) 处理 $r^{-2\rho}$ 中的 $P$，接下来只需证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big\| \sqrt{p \cdot \nabla^2 m(x) p}\, W^{-1} \tilde{f}\big(\breve{H}\big) \sqrt{\chi'}(M) f\big(\breve{H}\big) W \psi(t) \big\|^2 \,\mathrm{d}t \leq C\|\psi\|^2.$$

因此，根据对易，只需证明

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \big\| S_{\chi} W \psi(t) \big\|^2 \,\mathrm{d}t \leq C\|\psi\|^2; \\ & \quad S_{\chi} = S_{\chi}(t) = \sqrt{p \cdot \nabla^2 m(x) p}\, \big[ W^{-1}, \tilde{f}\big(\breve{H}\big) \sqrt{\chi'}(M) f\big(\breve{H}\big) \big]. \end{aligned}$$

由 (2.4) 以及伪微分算子演算可推出 $[W^{-1}, \sqrt{\chi'}(M)] = \mathcal{O}(r^{-1})$。又由于 $[W^{-1}, \tilde{f}\big(\breve{H}\big)] = \big(\breve{H} - \mathrm{i}\big)^{-1} \mathcal{O}(r^{-1})$，因此

$$S_{\chi}^{*} S_{\chi} = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{2\delta-1-2}) = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1_{+}}). \tag{6.13}$$

由 (2.3) 即得结论。 □

**注 6.7.** 我们在上文利用因子 $\langle p \rangle^{r} := W = \langle p \rangle^{1/3}$ 和 (2.3) 证明了 (6.6a) 蕴含 (6.12)。事实上，得益于 (6.13)，(6.6a) 和 (6.12) 可视为等价的界。由于对易子 $[V, p_j]$ 不具有全局权重，似乎无法更直接地证明 (6.12)。

利用 $P$ 的平方根公式，

$$\sqrt{P} = \pi^{-1} \int_{0}^{\infty} \tau^{-1/2} P (P + \tau)^{-1} \,\mathrm{d}\tau, \tag{6.14}$$

我们现在开始研究与 $\sqrt{P}$ 有关的某些对易子。

**引理 6.8.** 算子 $P$ 对所有 $s$、$\sigma \in \mathbb{R}$ 均满足以下性质，且关于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\tau > 0$ 一致。

$$P = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\delta/3-1}), \tag{6.15a}$$

$$r^{s-\sigma} P r^{-s} = r^{-\sigma} P + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\delta/3-2-\sigma}), \tag{6.15b}$$

$$(P + \tau)^{-1} = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{2\rho}). \tag{6.15c}$$

$$r^{s-\sigma} (P + \tau)^{-1} r^{-s} = r^{-\sigma} (P + \tau)^{-1} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\rho+\delta/3-2-\sigma}), \tag{6.15d}$$

$$\sqrt{P} = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{2\delta/3-1/2}), \tag{6.15e}$$

$$r^{s-\sigma} \sqrt{P} r^{-s} = r^{-\sigma} \sqrt{P} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\delta/3+2\rho-2-\sigma}). \tag{6.15f}$$

证明。**I**。我们将证明归结为证明 (6.15d) 和 (6.15f)。首先注意到$\big[r^s, p\cdot\big(\chi_+^2(|x|)\nabla^2 m(x)\big)p\big]=0$，且关于 $t\in\mathbb{R}$ 一致

$$\big[r^s,\tilde f(\breve H)\big]=\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{s-1-\delta}),$$

参见 (4.9a)。结合伪微分算子演算，可得 (6.15a) 和 (6.15b)。

由 (6.15a) 以及熟知的 $T^*T$-论证

$$r^{1/2-2\delta/3}\sqrt{P}\text{ is bounded uniformly in }t, \tag{6.16a}$$

类似地，我们可以记下

$$\sup_{\tau>0}\tau\|(P+\tau)^{-1}\|\le 1, \tag{6.16b}$$

$$\sup_{\tau>0}\|\sqrt{P}(P+\tau)^{-1/2}\|\le 1, \tag{6.16c}$$

$$\sup_{\tau>0}\|\big(r^{-2\rho}+\tau\big)^{1/2}(P+\tau)^{-1/2}\|\le 1, \tag{6.16d}$$

$$\sup_{\tau>0}\|r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\|\le 1. \tag{6.16e}$$

由 (6.16a) 和 (6.15f) 即可得出断言 (6.15e)。类似地，由 (6.16e) 和 (6.15d) 可得出断言 (6.15c)。因此，只需证明 (6.15d) 和 (6.15f)。

**II**。这里我们证明 (6.15d)。令 $\eta=2-2\rho-\delta/3$，并对所有 $s\in\mathbb{R}$ 引入算子 $B_s=r^{s-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-s-\rho}$。只需证明

$$T_s:=B_s-B_0=\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-\eta}), \tag{6.17}$$

进而只需证明，对所有 $s\in\mathbb{R}$，算子 $r^\eta T_s$ 都是有界的（关于 $t$ 和 $\tau$一致有界）。显然我们可以假设 $s\ne 0$。

对于情形 $s>0$，我们计算

$$\begin{aligned}B_s&=r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\big(I+r^\rho\big[P,r^s\big](P+\tau)^{-1}r^{-s-\rho}\big)\\&=r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\big(I+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\rho+\delta/3-2+s})(P+\tau)^{-1}r^{-s-\rho}\big).\end{aligned} \tag{6.18}$$

由于 $\rho+\delta/3-2+s=s-\rho-\eta$，我们可以对此进行迭代，每一步获得一个因子 $r^{-\eta}$，从而（利用(6.16e)）推出 $B_s$ 是（一致）有界的，进而也有

$$r^\eta T_s=r^\eta r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-\eta})B_s=B_\eta\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^0)B_s \tag{6.19a}$$

is (一致 y) 对 $s$有界 $>0$, 如所欲证。(这里我们还用到了 $B_\eta$ 是有界的。) $s<0$ 的情形类似。在 (6.18) 中，我们将因子 $r^{-s}$ 移到左边（而不是将 $r^s$ 移到右边），从而再次得到 $B_s$ 是（关于参数一致）有界的。特别地，此时我们知道 (6.15c) 成立。(6.19a) 的类似结论为

$$r^\eta T_s=\big(r^\eta B_s\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-\eta})\big)\big(r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\big)=\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^0), \tag{6.19b}$$

因此可得，对 $s<0$ 也有 $r^\eta T_s$ 是（关于参数一致）有界的。我们已经证明了 (6.15d)。

**III**。最后我们证明 (6.15f)。我们可以假设 $\sigma=0$，并令

$$T_s=r^s\sqrt{P}r^{-s}-\sqrt{P},$$

只需证明对所有 $s\in\mathbb{R}$

$$T_sr^\eta\text{ is (uniformly) bounded};\quad \eta=2-2\rho-\delta/3. \tag{6.20}$$

利用 (6.14)，我们计算

$$\begin{aligned} T_s r^{\eta} &= \int_0^{\infty} \tfrac{\tau^{1/2}}{\pi}(P+\tau)^{-1}\big[r^s,P\big](P+\tau)^{-1}r^{\eta-s}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{\infty} \tfrac{\tau^{1/2}}{\pi}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\delta/3-2+s})(P+\tau)^{-1}r^{\eta-s}\,\mathrm{d}\tau; \end{aligned} \tag{6.21}$$

将 (6.21) 中的积分拆分为 $\int_0^1\cdots\mathrm{d}\tau+\int_1^{\infty}\cdots\mathrm{d}\tau$。我们先估计

$$\|\tau^{1/2}(P+\tau)^{-1}\|\le\tau^{-1/2}, \tag{6.22}$$

然后利用 (6.15c)

$$\|r^{\delta/3-2+s}(P+\tau)^{-1}r^{\eta-s}\|=\|r^{-2\rho-\eta+s}(P+\tau)^{-1}r^{\eta-s}\|\le C_1,$$

从而得到第一个积分有限。由 (6.15c)，并至多进行一次类似于 (6.18) 的对易

$$\|r^{\delta/3-2+s}(P+\tau)^{-1}r^{\eta-s}\|=\|r^{\delta/3-2+s}(P+\tau)^{-1}r^{2-\delta/3-s-2\rho}\|\le C_2\tau^{-1},$$

结合 (6.22)，从而得到第二个积分有限。

我们已经证明了 (6.20)，因此也证明了 (6.15f)。 □

下面我们介绍一种比先前所用方法更为“稳健”的证明 (6.6c) 的程序。

另一种证明：(6.6c)。一。我们建立一套新的证明方案。回忆记号 $\psi(t)=U(t)g(U(1))\psi$（针对 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$，或针对 $\psi\in\mathcal{H}$），我们首先指出，该函数的时间导数

$$\phi(t)=\big\langle f\big(\breve{H}(t)\big)\chi_{\kappa,K}^2(M)f\big(\breve{H}(t)\big)\big\rangle_{\psi(t)}$$

是可积的。事实上，利用记号 (6.5)，可得 $\phi(t)=\phi_{\kappa}(t)-\phi_K(t)$，并且我们已经证明 $\phi_{\kappa}'$，$\phi_K'\in L^1(\mathbb{R},\,\mathrm{d}t)$ 与界 (6.4a) 和 (6.4b) 相符。

现在我们考虑该有界函数的时间导数

$$\begin{aligned} \breve{\phi}(t)&=\langle\Psi\rangle_{\psi(t)};\\ \Psi&=f\big(\breve{H}\big)M\chi_{\kappa,K}^2(M)f\big(\breve{H}\big)\\ &=f\big(\breve{H}\big)\chi_+(M/\kappa)\chi_-(M/K)M\chi_-(M/K)\chi_+(M/\kappa)f\big(\breve{H}\big), \end{aligned} \tag{6.23}$$

计算、展开并检验各项的可积性。从 $\psi\in\mathcal{S}(\mathbf{X})$ 到任意 $\psi\in\mathcal{H}$ 的延拓在推论 5.1 的证明中有所说明（或者也可采用推论 6.1 的证明中更为直接的方案）。我们断言，在展开与对称化之后（将在步骤二至六中详述），除单独一项外，所有项均可借助 (6.4a)、(6.4b) 以及 (6.6b) 加以处理，参见上述注。本质上只产生一个新项，它相当于与 $\Psi$ 中出现的 $M$ 的中间因子所作对易子的贡献。然而 $\mathrm{i}[p^2,M]$ 具有由 $4p\cdot\nabla^2m(x)p$ 给出的“正性内容”，并在 $\breve{\phi}$ 的导数中引出“新项”$\big\|Q_{2,\,\kappa,\,K}(t)\psi(t)\big\|^2$。从而可得 (6.6c)。

**II.** 我们检查发现，步骤 I 中概述的计算、展开和对称化过程确实可行。按照引理 4.6 的证明方案，

来自 $\mathrm{d}\,\mathrm{d}t f(\breve{H})$ 的贡献可由 (2.3) 估计，而对易子 $\mathrm{i}[H,\Psi]$ 可替换为 $\mathrm{i}[m^\delta \breve{f}(\breve{H}) m^\delta,\Psi] = \mathrm{i}\overline{[m^\delta \tilde{f}(\breve{H})\breve{H}\tilde{f}(\breve{H}) m^\delta,\Psi]}$。根据乘积法则，对易子的展开包含七项，分别与 $\Psi$ 的七个因子逐一交换。来自中间因子的贡献

$$S_4 = f(\breve{H})\chi_{\kappa,K}(M)\mathrm{i}\big[m^\delta \breve{f}(\breve{H}) m^\delta, M\big]\chi_{\kappa,K}(M) f(\breve{H})$$

i这是步骤 I 中提到的所需“新项”。它不需要对称化。其余各项之和具有如下形式

$$S_1+S_2+S_3+S_5+S_6+S_7 = (S_1+\mathrm{hc})+(S_2+\mathrm{hc})+(S_3+\mathrm{hc}),$$

其中 $S_1+\mathrm{hc} = S_1+S_1^* = S_1+S_7$，对于 $S_2$ 和 $S_3$ 也类似。

在下文的步骤 III–V 中，我们处理 $S_2+\mathrm{hc}$ 对时间积分的贡献；在步骤 VI 中，我们处理为 $S_3+\mathrm{hc}$（可用类似方式处理）和 $S_1+\mathrm{hc}$（处理起来简单得多）所定义的其余情形。

**III.** $S_2+\mathrm{hc}$**:** 根据定义

$$S_2+\mathrm{hc} = f(\breve{H})\mathrm{i}\big[m^\delta \breve{f}(\breve{H}) m^\delta, \chi_+(M/\kappa)\big] M\chi_-^2(M/K)\chi_+(M/\kappa) f(\breve{H}) + \mathrm{hc}.$$

经过一些与引理 4.6 和推论 6.6 的证明中出现的计算类似的计算后，辨认出主要部分如下，并将在下文证明

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{\kappa} W f(\breve{H}) B_\kappa \tilde{f}(\breve{H})\, W^{-1}\big(p\cdot\nabla^2 m(x) p\big) W^{-1} \tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa h(M) f(\breve{H}) W + \mathrm{hc};\\ &\qquad B_\kappa = \sqrt{(\chi_+^2)^{(1)}(M/\kappa)}, \qquad h(s) = \chi_+(2s/\kappa) s \chi_-^2(s/K). \end{aligned} \tag{6.24}$$

用 (6.10) 中的正算子 $P = P_{\rho,\,W}$ 表示，该表达式的形式为

$$\tfrac{2}{\kappa} W\big(f(\breve{H}) B_\kappa\, P_{\rho,W}\, B_\kappa h(M) f(\breve{H}) + \mathrm{hc} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+})\big) W.$$

首先，由对易可得（此处略去引理 4.6 证明中步骤 VI 的元素）

$$S_2+\mathrm{hc} = \tfrac{2}{\kappa} f(\breve{H}) B_\kappa \tilde{f}(\breve{H})\,\big(p\cdot\nabla^2 m(x) p\big)\tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa h(M) f(\breve{H}) + \mathrm{hc} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+}).$$

其次，我们论证该表达式的本质部分可进一步识别为

$$\tfrac{2}{\kappa} W f(\breve{H}) B_\kappa \tilde{f}(\breve{H})\, W^{-1}\big(p\cdot\nabla^2 m(x) p\big)\tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa h(M) f(\breve{H}) + \mathrm{hc}. \tag{6.25}$$

这相当于估计

$$\tfrac{2}{\kappa} W\big[f(\breve{H}) B_\kappa \tilde{f}(\breve{H}),\, W^{-1}\big]\big(p\cdot\nabla^2 m(x) p\big)\tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa h(M) f(\breve{H}) + \mathrm{hc},$$

因此，由对易（参见引理 4.1）并采用 (6.4b) 中的记号，

$$\begin{aligned} &\tfrac{2}{\kappa} W\big[f(\breve{H}) B_\kappa \tilde{f}(\breve{H}),\, W^{-1}\big] h(M) \tilde{f}(\breve{H}) \sqrt{p\cdot\nabla^2 m(x) p}\\ &\qquad\qquad \sqrt{p\cdot\nabla^2 m(x) p}\,\tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa f(\breve{H}) + \mathrm{hc}\\ &= \kappa^1 W S^*_{\chi_+^2,h} Q_{2,\kappa} + \mathrm{hc};\\ &\qquad S_{\chi_+^2,h} = \sqrt{p\cdot\nabla^2 m(x) p}\,\tilde{f}(\breve{H}) h(M)\big[W^{-1}, \tilde{f}(\breve{H}) B_\kappa f(\breve{H})\big]. \end{aligned}$$

最后一个表达式可利用 (6.4b)、对 (6.13) 的轻微修改以及 (2.3) 进行处理，从而得到其对时间积分贡献的界 $C\|\psi\|^2$，因此本质部分确实由 (6.25) 给出。

第三，为了由 (6.25) 得到 (6.24)，只需估计

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{\kappa}Wf\big(\breve{H}\big)B_\kappa\tilde{f}\big(\breve{H}\big)\,W^{-1}\sqrt{p\cdot\nabla^2m(x)p}\\&\qquad\sqrt{p\cdot\nabla^2m(x)p}\Big[W^{-1},\tilde{f}\big(\breve{H}\big)B_\kappa h(M)f\big(\breve{H}\big)\Big]W+\mathrm{hc}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

重复上述论证，并使用 (6.12) 及对 (6.13) 的轻微修改，即可得出，来自 (6.26) 的贡献的时间积分有界于 $C\|\psi\|^2$。我们已如所需导出了主项 (6.24)。

**IV**。我们继续研究 $S_2+\mathrm{hc}$。利用 (6.10) 中的正算子 $P=P_{\rho,\,W}$及其平方根 $Q=Q_{\rho,\,W}=\sqrt{P_{\rho,\,W}}$，表达式 (6.24) 可写为 $\overline{\tfrac{2}{\kappa}WTW}$，其中

$$\begin{aligned}T=&f\big(\breve{H}\big)B_\kappa\,Q^2\,B_\kappa h(M)f\big(\breve{H}\big)+\mathrm{hc}+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+})\\=&2f\big(\breve{H}\big)B_\kappa\,Qh(M)QB_\kappa f\big(\breve{H}\big)+\Big(f\big(\breve{H}\big)B_\kappa\,QS+\mathrm{hc}\Big)+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+});\end{aligned}\tag{6.27}$$

$$S=S_{\kappa,\rho,W}=\big[QB_\kappa\,,h(M)\big]f\big(\breve{H}\big)=\big[Q\,,h(M)\big]B_\kappa f\big(\breve{H}\big).$$

显然，第一项可由推论 6.6 处理，我们只需控制涉及算子 $S$ 的中间项。我们将其分解为

$$\begin{aligned}&S=Q^{-1}R_1B_\kappa f\big(\breve{H}\big)+Q^{-1}R_2B_\kappa f\big(\breve{H}\big);\\&R_1=2^{-1}\big[P,M\big]h'(M),\qquad R_2=Q\big[Q,h(M)\big]-2^{-1}\big[P,M\big]h'(M).\end{aligned}$$

来自 $Q^{-1}R_1B_\kappa f\big(\breve{H}\big)$ 的贡献很容易处理：我们将其代入 (6.27) 的中间项，并利用抵消 $QQ^{-1}=I$。这得到表达式

$$2^{-1}f\big(\breve{H}\big)B_\kappa\Big(\big[P,M\big]h'(M)-h'(M)\big[P,M\big]\Big)B_\kappa f\big(\breve{H}\big),$$

其形式为 $\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\delta/3-3})=\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+})$，参见引理 4.1（及其证明）。对于 (6.27) 中来自 $Q^{-1}R_2B_\kappa f\big(\breve{H}\big)$ 的项，只需证明

$$\forall\,\psi\in\mathcal{H}:\quad\int_{-\infty}^{\infty}\big\|r^\rho R_2B_\kappa f\big(\breve{H}\big)W\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\le C\|\psi\|^2.\tag{6.28}$$

现在，为了处理 (6.28)，我们利用 (6.14) 进行计算

$$\begin{aligned}Q\big[Q,h(M)\big]=&\,2^{-1}[P,h(M)]\\&+\int_0^\infty\tfrac{\tau^{1/2}}{\pi}\sqrt{P}(P+\tau)^{-2}\mathrm{ad}_P^2(h(M))(P+\tau)^{-1}\,\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{6.29a}$$

注意，对于任意 $\varepsilon>0$

$$\pi^{-1}\int_0^\infty\tau^{1/2}F(P>\varepsilon)\sqrt{P}(P+\tau)^{-2}\,\mathrm{d}\tau=2^{-1}F(P>\varepsilon),$$

这意味着左乘投影 $F(P>\varepsilon)$ 后，(6.29a) 成立。由于 $\ker(P)=\{0\}$，令 $\varepsilon\to0$，即可得到 (6.29a)。

再利用 $\mathrm{ad}_M^k(P)=\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\delta/3-k-1})$，$k=0,\,1,\,2$，可得

$$2^{-1}[P,h(M)]=2^{-1}\big[P,M\big]h'(M)+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\delta/3-3}).\tag{6.29b}$$

将 (6.29b) 代入 (6.29a)，得到公式

$$R_2=\int_0^\infty\tfrac{\tau^{1/2}}{\pi}\sqrt{P}(P+\tau)^{-2}\mathrm{ad}_P^2(h(M))(P+\tau)^{-1}\,\mathrm{d}\tau+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{4\delta/3-3}).$$

第二项的形式为 $\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-2\rho})$。类似地，将第一项写成 $r^{-\rho}Rr^{-\rho}$ 的形式，计算得

$$R=\int_0^\infty \tau^{1/2}r^\rho\sqrt{P}(P+\tau)^{-2}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4})(P+\tau)^{-1}r^\rho\,\mathrm{d}\tau,$$

因此，对于 (6.28)，尚需证明

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\Big\|\int_0^\infty \tau^{1/2}r^\rho\sqrt{P}(P+\tau)^{-2}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4})(P+\tau)^{-1}r^\rho\,\mathrm{d}\tau\Big\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}<\infty. \tag{6.30}$$

**V**。我们证明 (6.30)，从而完成对项 $S_2$ +hc 的处理。我们的证明基于引理 6.8 及其证明。若我们“忽略” $P$ 的第一项（考虑$P\approx r^{-2\rho}$），从而也忽略交换误差，那么界 (6.30) 应当是下述简化界的一个“推论”:

$$\sup_{r\geq 1}\int_0^\infty \tau^{1/2}r^{2\rho+8\delta/3-4}(r^{-2\rho}+\tau)^{-5/2}\,\mathrm{d}\tau<\infty,$$

而根据 (6.11)，数 $\eta:=4-4\rho-8\delta/3>0$，故该式成立。

为了严谨地进行论证，我们需要考虑某些对易问题。先考察将 $r^\rho\sqrt{P}$ 替换为 $\sqrt{P}r^\rho$ 后产生的“主要贡献”（其误差将在下文由 (6.15f) 控制）。然后我们将积分拆分为 $\int_0^1\cdots\mathrm{d}\tau+\int_1^\infty\cdots\mathrm{d}\tau$，并首先检验其在 $(0,1)$ 上的（一致）可积性:

$$\phi(\tau):=\tau^{1/2}\|\sqrt{P}r^\rho(P+\tau)^{-2}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4})(P+\tau)^{-1}r^\rho\|.$$

我们注意到（6.18）的以下几个版本。

$$\begin{aligned}&r^\rho(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\\&=(P+\tau)^{-1}\big(I+\big[P,r^\rho\big](P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\big)\\&=(P+\tau)^{-1}\big(I+\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\rho+\delta/3-2})(P+\tau)^{-1}r^{-\rho}\big)\\&=:(P+\tau)^{-1}\big(I+A\big),\end{aligned} \tag{6.31a}$$

$$\begin{aligned}r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}r^\rho&=\big(I+r^{-\rho}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{\rho+\delta/3-2})\big)(P+\tau)^{-1}\\&=\big(I+A^*\big)(P+\tau)^{-1},\end{aligned} \tag{6.31b}$$

首先结合（6.16c）和（6.16d）可得，最后一步则结合（6.15c）可得,

$$\begin{aligned}&\phi(\tau)\\&\leq C_1\tau^{1/2}\|\big(r^{-2\rho}+\tau\big)^{-1/2}\big(I+A\big)r^\rho(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4+\rho})\big(I+A^*\big)(P+\tau)^{-1}\|\\&\leq C_2\|\big(r^{-2\rho}+\tau\big)^{-1/2}\big(I+A\big)r^\rho(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4+\rho})\big(I+A^*\big)\big(r^{-2\rho}+\tau\big)^{-1/2}\|\\&\leq C_3\|r^\rho\big(I+A\big)r^\rho(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4+\rho})\big(I+A^*\big)r^\rho\|\\&\leq C_4\|r^\rho\big(I+A\big)r^{-\rho}\Big(r^{2\rho}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4+2\rho})\Big)r^{-\rho}\big(I+A^*\big)r^\rho\|\\&\leq C_5\|r^{2\rho}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-2\rho-\eta})\|;\quad \eta=4-4\rho-8\delta/3.\end{aligned}$$

通过将 (6.31a) 中的 $\rho$ 替换为 $2\rho$ 并使用 (6.15c)（采用相同的方法），此外对 (6.15c) 和 (6.16b) 进行插值（利用 $0<\eta<2\rho$），我们进而可以给出界

$$\|r^{2\rho}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-2\rho-\eta})\|\leq C_1\|P+\tau)^{-1}r^{-\eta}\|\leq C_2\tau^{-(1-\eta/2\rho)}. \tag{6.32}$$

显然，(6.32) 得出 $\int_0^1 \phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty$，因此 $\int_0^1 \cdots \mathrm{d}\tau$ 有限，这正是所需的。根据上文给出的 $\phi(\tau)$ 的第二个估计（并再次使用 (6.15c) 和 (6.31a)），我们还可以估计

$$\int_1^\infty \phi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \leq \int_1^\infty C\tau^{-1/2}\tau^{-1}\tau^{-1/2}\,\mathrm{d}\tau = C < \infty.$$

尚需检验上述将 $r^\rho\sqrt{P}$ 替换为 $\sqrt{P}r^\rho$ 的步骤。根据 (6.15f)（取 $s=\rho$ 和 $\sigma=0$），我们需要证明下式可积：

$$\breve{\phi}(\tau) := \tau^{1/2}\|r^{\breve{\rho}}(P+\tau)^{-2}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4})(P+\tau)^{-1}r^\rho\|; \quad \breve{\rho} = \delta/3+3\rho-2.$$

B利用 (6.31a)，将 $\rho$ 替换为 $\breve{\rho}$，我们按照上述方法估计（并作类似的 $A$）：

$$\begin{aligned}\breve{\phi}(\tau) &\leq C_1\|(P+\tau)^{-1}\big(I+A\big)r^{\breve{\rho}}(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{8\delta/3-4+\rho})\big(I+A^*\big)\big(r^{-2\rho}+\tau\big)^{-1/2}\|\\ &\leq C_2\|(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^0)(P+\tau)^{-1}r^{\breve{\rho}+8\delta/3-4+2\rho}\|\\ &= C_2\|(P+\tau)^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^0)(P+\tau)^{-1}r^{-2\rho}r^{7\rho+3\delta-6}\|\\ &= \|(P+\tau)^{-1}r^{-\breve{\eta}}\mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^0)\|; \quad \breve{\eta} = 6-3\delta-7\rho.\end{aligned}$$

按照 (6.32) 中的论证（利用 $0<\breve{\eta}<2\rho$，参见 (6.11)），可知 $\int_0^1 \cdots \mathrm{d}\tau$ 的贡献有限；对于 $\tau>1$，估计表明 $\breve{\phi}(\tau) \leq C\tau^{-2}$，因此 $\int_1^\infty \cdots \mathrm{d}\tau$ 的贡献也有限。

我们已经验证了 (6.30)，从而证明了 (6.28)。

**六.** 我们处理 $S_3$ +hc 和 $S_1$ +hc 对时间积分的贡献。$S_3$ +hc：根据定义

$$S_3 + \mathrm{hc} = f\big(\breve{H}\big)\chi_+(M/\kappa)\mathrm{i}\big[m^\delta \breve{f}\big(\breve{H}\big)m^\delta, \chi_-(M/K)\big]M\chi_{\kappa,K}(M)f\big(\breve{H}\big) + \mathrm{hc}.$$

这一项可以用类似处理 $S_2$ +hc 的方法处理，只是在对易之后使用 (6.6b) 而非 (6.4b)。显然，涉及对易子的困难项

$$\Big[Q\sqrt{-(\chi_-^2)^{(1)}(M/K)}, \breve{h}(M)\Big]f\big(\breve{H}\big), \quad Q = Q_{\rho,W}, \quad \breve{h}(s) = \chi_-(s/2K)s\chi_+^2(s/\kappa),$$

可以像之前一样处理。

$S_1$ +hc：我们计算如下，参见推论 6.1 的证明，

$$\begin{aligned}S_1 + \mathrm{hc} &= \mathrm{i}\big[m^\delta \breve{f}\big(\breve{H}\big)m^\delta, f\big(\breve{H}\big)\big]M\chi_{\kappa,K}^2(M)f\big(\breve{H}\big) + \mathrm{hc}\\ &= 4\delta m^{-1/2}\bar{f}\big(\breve{H}\big)\,M^2\chi_{\kappa,K}^2(M)\,\bar{f}\big(\breve{H}\big)m^{-1/2} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+}).\end{aligned}$$

显然，(6.4a) 适用。 □

6.3. **广义积分估计**。回想一下，$m$ 和 $M$ 依赖于一个较小的 $\epsilon>0$，我们令 $\epsilon_0=\epsilon$ 和 $m_0=m$。这与我们先前的约定 $M_0=M$ 一致。现在进一步假设给定有限个较小的正数 $\epsilon_1$、.....、$\epsilon_I$，以及相应的函数 $m_1$、.....、$m_I$ 和算子 $M_1$、.....、$M_I$；它们的定义与 $m_0$ 和 $M_0$ 相同，只需在构造中将 $\epsilon_0$ 替换为 $\epsilon_1$、.....、$\epsilon_I$。在第 7.1 小节中，我们将介绍这一设置的一个具体例子；对我们在第 7.3 小节而言，下面的推论 6.9（以引理 7.3 的形式呈现）将发挥重要作用。

然后引入算子

$$E_{-1} = f\big(\breve{H}\big), \tag{6.33a}$$

并令对于 $i=0$，1，……，$I$，且给定 $K>2\kappa>0$

$$E_i=\chi_i(\mathbf{M})f\big(\breve{H}\big); \tag{6.33b}$$

$$\chi_i(\mathbf{M})=\chi_{\kappa,K}(M_i)\chi_{\kappa,K}(M_{i-1})\cdot\cdots\cdot\chi_{\kappa,K}(M_0). \tag{6.33c}$$

注意，$\breve{H}$ 和 $f\big(\breve{H}\big)$ 是根据 (6.2) 和 (6.3) 以 $m_0=m$（如 (6.6c) 中所考虑的）定义的，并结合因子 $\chi_0(\mathbf{M})=\chi_{\kappa,K}(M_0)$).

**推论 6.9.** 给定 $g\in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$、$\chi\in\mathcal{F}_{+}$、$K>2\kappa>0$ 以及任意小的$\epsilon_0$、$\epsilon_1\ldots$、$\epsilon_I>0$。那么，采用记号 $\psi(t)=U(t)g(U(1))\psi$，对于任意$\psi\in\mathcal{H}$，以下界成立。

$$\begin{aligned}\forall\psi\in\mathcal{H}\ \forall i=0,\ldots,I:\quad &\int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q_{2,i}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\leq C\|\psi\|^2;\\ &Q_{2,i}=Q_{2,i}(t)=2\sqrt{p\cdot\nabla^2m_i(x)p)}\tilde{f}\big(\breve{H}\big)\sqrt{\chi'}(M_i)E_{i-1}.\end{aligned} \tag{6.34a}$$

$$\begin{aligned}\forall\psi\in\mathcal{H}\ \forall i=0,\ldots,I:\quad &\int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q'_{2,i}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\leq C\|\psi\|^2;\\ &Q'_{2,i}=Q'_{2,i}(t)=2\sqrt{p\cdot\nabla^2m_i(x)p}\tilde{f}\big(\breve{H}\big)E_i.\end{aligned} \tag{6.34b}$$

证明概要。</style}界 (6.34b) 是界 (6.34a) 的一个特例，参见推论 6.3 的证明。

(6.34a) 的证明通过对 $i$ 进行归纳法完成。根据 (6.6a)，我们知道 (6.34a) 对 $i=0$ 成立。因此，设 $i\in\{1\ldots,I\}$，且已知 (6.34a) 对指标 $0,\ldots,i-1$ 成立。接下来需要验证 (6.34a) 对这个 $i$ 成立。

受 (6.6a) 的证明以及“(6.6c) 的另一种证明”启发，我们考虑有界函数的时间导数

$$\phi_i(t)=\big\langle f\big(\breve{H}(t)\big)\chi_{i-1}(\mathbf{M})^*\chi(M_i)\chi_{i-1}(\mathbf{M})f\big(\breve{H}(t)\big)\big\rangle_{\psi(t)}. \tag{6.35}$$

来自中间因子 $\chi(M_i)$ 的主要贡献

$$\big\langle f\big(\breve{H}\big)\chi_{i-1}(\mathbf{M})^*\sqrt{\chi'}(M_i)\mathrm{i}\big[m^{\delta}\breve{f}\big(\breve{H}\big)m^{\delta},M_i\big]\sqrt{\chi'}(M_i)\chi_{i-1}(\mathbf{M})f\big(\breve{H}\big)\big\rangle_{\psi(t)},$$

就是所需项。其他因子的对易所产生的贡献，则在对称化后通过归纳法处理。我们通过使用在 (6.6c) 的另一种证明中所用的算子 $P=P_{\rho,W}(t)$ 的不同形式，避开（危险的）平方根奇异性问题。注意，将 $i$ 替换为任意满足 $0\leq j\leq i-1$ 的 $j$ 后，界 (6.34a) 等价于以下界：

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\big\|Q_{2,j,\rho,W}\psi(t)\big\|^2\,\mathrm{d}t\leq C\|\psi\|^2;\\ &Q_{2,j,\chi,\rho,W}=Q_{2,j,\chi,\rho,W}(t)=2\sqrt{P_j}\sqrt{\chi'}(M_j)E_{j-1}W,\\ &P_j=P_{j,\rho,W}(t)=\tilde{f}\big(\breve{H}\big)W^{-1}\big(p\cdot\nabla^2m_j(x)p\big)W^{-1}\tilde{f}\big(\breve{H}\big)+r^{-2\rho}.\end{aligned} \tag{6.36}$$

这里，$P_0$ 和 $Q_{2,\,0,\,\chi,\,\rho,\,W}$ 分别与推论 6.6 中的 (6.10) 和 $Q_{2,\,\chi,\,\rho,\,W}$ 一致。因此，关于 $j=0$ 的上述等价性可由注 6.7 得出。一般情形 $0\leq j\leq i-1$ 可通过对易类似地得出。

归纳步骤仿照我们利用 (6.36) 和对易子给出的 (6.6c) 的另一种证明。请注意，先前的复杂之处在于处理对易子 $[\sqrt{P_0},h(M_0)]$。现在我们同样需要处理对易子

$$\big[\sqrt{P}_j,\chi_{\kappa,K}(M_{j+1}))\cdots\chi_{\kappa,K}(M_{i-1})\chi(M_i)\chi_{\kappa,K}(M_{i-1})\cdots\chi_{\kappa,K}(M_{j+1})\big] \tag{6.37}$$

对于 $j \leq i-2$，以及对于 $j = i-1$的对易子 $\big[\sqrt{P_j}, \chi(M_i)\big]$。请注意，这种化简是通过仿照先前的证明，结合归纳假设和 (6.36)，并分别使用 $\chi = \chi_1 = \chi_+^2(\cdot/\kappa)$ 和 $\chi = \chi_2 = \chi_+^2(\cdot/K)$ 得到的（因为 $(\chi_{\kappa,\ \kappa}^2)' = \chi_1' - \chi_2'$）。这些界分别类似于 (6.4b) 和 (6.12)。同样，所需的动量局域化由 $f\big(\breve{H}\big)$ 的因子提供；事实上，我们可以像 (6.6c) 的另一种证明那样处理 (6.37)。因此，证明的模式相同。证明细节从略。□

## 7. Asymptotic clustering of states in $\mathcal{H}_{\rm ener}^+$

本节的主要结果如下。

**命题 7.1.** 对任意 $\psi \in \mathcal{H}_{\rm ener}^+$ 与 $\varepsilon > 0$，存在态族$\big\{\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H} \mid a \in \mathcal{A}_1\big\}$，使得

$$\limsup_{t\to\infty} \Big\| U(t)\psi - \sum_{a\in\mathcal{A}_1} U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon} \Big\| \leq \varepsilon. \tag{7.1}$$

**注记 7.2.** 所构造的向量$\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{\rm ener}^+(H_a)$：由 (7.19b) 可得 $\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{\rm ac}(H_a)$，并由 (7.14) 与 (7.19b) 可得

$$\varphi_{a,\varepsilon} = \lim_{t\to\infty} U_a(t)^* S_a(t) U(t)\psi. \tag{7.2}$$

此处 $S_a(t)$ 在 (7.10a) 中对取自 $\mathcal{H}_{\rm ener}^+$ 的稠密子集中的某个固定 $\psi$ 加以定义。表示式 (7.2) 表明确实有 $\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}_{\rm ener}^+(H_a)$，例如可通过交换性质 $[\chi(p^2/E)\ S_a(t)] = \mathcal{O}_{\rm unif}(r^{-0+})$ 看出。

性质 (7.1) 可称为渐近聚簇，这与与时间无关的 $N$ 体散射理论中所用的这一术语一致，例如参见 [DG，第 6 节.11]。证明在第 7.3 小节中给出。在第 7.1 小节中，我们利用第 3.2 与 6.3 小节导出若干积分估计。在第 7.2 小节中，我们导出态在 $\mathcal{H}_{\rm ener}^+$中的初始局域化。

**7.1. 辐射条件界。** 与第 3.2 小节和第 6.3 小节一样，我们首先固定$\epsilon = \epsilon_0 > 0$。我们回顾一下，对于我们在第 3.2.1 小节中选取的每个 $a \in \mathcal{A}_1$，都取了某些小的正数 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_J$，使得某个 $J = J(a) \in \mathbb{N}$成立。接下来再改变 $a \in \mathcal{A}_1$，由此得到一族函数 $m_i$ 和算子 $M_i$，它们符合第 6.3 小节开头所述的条件。具体而言，我们采用相同的记号 $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_I$,$m_0, m_1, \ldots, m_I$和 $M_0, M_1, \ldots, M_I$，也就是说，我们使用指标 $i \in \{0, \ldots, I\}$。虽然要到第 7.2 小节才会用到，但我们注意到

$$M_0\chi_+(|x|) = \sum_{a\in\mathcal{A}_1} M_a\chi_+(|x|), \tag{7.3}$$

其中算子 $M_a$ 如第 3.2 小节中所述给出（以 $\epsilon$ 表示）。

我们将把推论 6.9 应用于上述情形。具体而言，这涉及固定参数 $K > 2\kappa > 0$ 下的构造 (6.33a)-(6.33c)。

若按上述约定将 $(a,\ j)$ 记为 $i \in \{1, \ldots, I\}$，则由 (3.11) 可得（回顾一下，$Q(a,\ j) = \xi_j G_{b_j}$ 已在第 3.2.1 小节中定义）：

$$E_i^* \tilde{f}\big(\breve{H}\big) Q(a,j)^* Q(a,j) \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_i \leq 4^{-1} Q_{2,i}'(t)^* Q_{2,i}'(t),$$

或者用缩写 $Q_i := Q(a,\ j)$ 表述为

$$E_i^* \tilde{f}\big(\breve{H}\big) Q_i^* Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_i \leq 4^{-1} Q_{2,i}'(t)^* Q_{2,i}'(t). \tag{7.4}$$

我们回顾推论 6.9 中（6.34b）的设定：对于 $\psi \in \mathcal{H}$ 以及固定的 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$，我们考虑演化 $\psi(t) = U(t)g(U(1))\psi$。

**引理 7.3.** 在条件 (6.34b) 下，按上述说明选取 $M_0, M_1, \dots, M_I$（特别是固定 $E_1, \dots, E_I$），采用 (7.4) 中的标记约定，可得对于任意 $\psi \in \mathcal{H}$ 和 $i = 1, \dots, I$：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big\| Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_i \psi(t) \big\|^2 \, \mathrm{d}t \le C \|\psi\|^2. \tag{7.5a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big\| Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_I \psi(t) \big\|^2 \, \mathrm{d}t \le C \|\psi\|^2. \tag{7.5b}$$

证明. 界 (7.5a) 由 (6.34b) 和 (7.4) 立即得到。

对于 (7.5b)，若 $i = I$，则结论由 (7.5a) 显然可得。若 $i < I$，我们写作

$$E_I = \chi_{\kappa,K}(M_I) \cdot \cdots \cdot \chi_{\kappa,K}(M_{i+1}) E_i,$$

然后

$$\begin{aligned} Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_I &= \big(\chi_{\kappa,K}(M_I) \cdot \cdots \cdot \chi_{\kappa,K}(M_{i+1})\big) Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_i \\ &\qquad + \big[Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big), \chi_{\kappa,K}(M_I) \cdot \cdots \cdot \chi_{\kappa,K}(M_{i+1})\big] E_i \\ &= \mathcal{O}(r^0) Q_i \tilde{f}\big(\breve{H}\big) E_i + \mathcal{O}(r^{\delta - 3/2}). \end{aligned}$$

由 (7.5a) 和 (2.3) 得出结论。 □

**7.2. 态在 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 中的先验局域化。**下面考虑任意满足 $\psi = g(U(1))\psi$ 的 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$，其中某个 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$（以下固定）成立。由于这类向量在 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 中稠密，因此我们需要对 $\psi$ 进行“局域化”。相应演化 $\psi(t) = U(t)\psi$ 的最终结果陈述如下，即引理 7.4。

我们取较大的 $K > 1$ 和较小的 $\kappa > 0$，借助 (5.20)（对 $M_0$ 以及 $M_1, \dots, M_I$ 进行类似的局域化），便可在较大的 $t > 1$ 下对 $\psi(t)$ 作一致局域化，其中 $\psi(t) \approx E_I^* E_I \psi(t)$（这里使用了出现在 (7.5b) 中的因子 $E_I$）。除了 (5.20)，我们还利用了 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$，从而通过 $\chi_-(M_i/K)$ 的因子实现局域化，$i = 0, \dots, I$。更准确地说，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可知对所有充分小的 $\kappa > 0$ 以及所有充分大的 $K > 1$

$$\limsup_{t \to \infty} \big\| \psi(t) - E_I^* E_I \psi(t) \big\| \le \varepsilon.$$

此后（包括第 8 节），对于给定的 $\mathcal{H}$ 值函数 $\psi(\cdot)$ 和 $\psi_1(\cdot)$，我们将沿用符号 $\psi(t) \approx \psi_1(t)$ 的类似含义。

我们还需要借助“通道相空间单位分解”进行进一步的初始局域化，以便简化演化。注意，经过对易后，可以自由地插入一个因子 $\chi_+(2M_0/\kappa)$，写作 $E_I^* E_I \to E_I^* \chi_+(2M_0/\kappa) E_I$。回顾 (7.3)，于是我们可以写成

$$\chi_+(2M_0/\kappa)\chi_+(|x|) = \sum_{a \in \mathcal{A}_1} h_\kappa(M_0) M_a \chi_+(|x|); \quad h_\kappa(t) = \chi_+(2t/\kappa) t^{-1}. \tag{7.6}$$

公式 (7.6) 将是构造适当相空间单位分解的关键。因子 $M_a$、$a \in \mathcal{A}_1$ 的出现，使得有可能在相空间的相应部分用 $H_a$ 替换 $H$。为便于下文（以及第 8 节）使用，下面明确写出它们的位置空间局部化。对每个 $a \in \mathcal{A}_1$，选取一个函数 $\xi_a \in C^{\infty}(\mathbf{S}^{a_0})$，使得 $\xi_a = 1$ 在 $\mathbf{S}^{a_0} \cap \mathbf{Y}_a(\epsilon^d) \cap \big\{|\omega^a| \le \sqrt{6}\, \epsilon^{d_a}\big\}$ 上成立，并且 $\xi_a = 0$ 在 $(\mathbf{S}^{a_0} \setminus \mathbf{Y}_a(\epsilon^d/2)) \cup \big\{|\omega^a| > 2\sqrt{6}\, \epsilon^{d_a}\big\}$ 上成立。

ˆ令 $\xi_a = \xi_a(x) = \xi_a(\hat{x})\chi_+(4|x|)$。由引理 3.1 的 4) 和 5) 可知，算子 $M_a$ 满足

$$M_a = M_a\xi_a = \xi_a M_a. \tag{7.7}$$

记录如下性质

$$\forall a \in \mathcal{A}_1 : \quad f(\breve{H})\xi_a - \xi_a f\big(\breve{H}_a\big) = \mathcal{O}(r^{-1-\min\{2\mu,\delta\}}). \tag{7.8}$$

事实上，由 (2.4)

$$\begin{aligned} f(\breve{H})\xi_a - \xi_a f\big(\breve{H}_a\big) &= \int_{\mathbb{C}} \big((\breve{H}-z)^{-1}\xi_a - \xi_a(\breve{H}_a-z)^{-1}\big)\,\mathrm{d}\mu_f(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}-z)^{-1}\big(\xi_a\breve{H}_a - \breve{H}\xi_a\big)(\breve{H}_a-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} (\breve{H}-z)^{-1}\mathcal{O}(r^{-1-\min\{2\mu,\delta\}})(\breve{H}_a-z)^{-1}\,\mathrm{d}\mu_f(z) = \mathcal{O}(r^{-1-\min\{2\mu,\delta\}}). \end{aligned}$$

下面我们将结合使用 (7.6)–(7.8)。然而，由于因子 $M_a$ 无界，我们需要先对其进行正则化，才能应用 (7.6)。

7.2.1. $\psi$ 的通道相空间分割$(t)$。我们引入函数

$$\chi_{-L,L}(t) = \chi_-(-t/L)\chi_-(t/L); \quad L > 1.$$

为了对 $M_a$ 进行正则化，我们先考虑进一步的局部化

$$\psi(t) \approx E_I^*\chi_+(2M_0/\kappa)\tilde{f}\big(\breve{H}\big)\chi_{-L,L}(M_{a_1})\cdots\chi_{-L,L}(M_{a_{\#\mathcal{A}_1}})E_I\psi(t). \tag{7.9}$$

在最后一个乘积中，我们以任意方式将 $\mathcal{A}_1$ 中的元素标记为$a_1,\ldots,a_{\#\mathcal{A}_1}$，并选择足够大的 $L > 1$，以满足我们使用符号 $\approx$ 的要求（再次利用 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$）。

接下来，我们将 (7.6) 代入 (7.9) 右侧的表达式，得到

$$\psi(t) \approx \sum_{a\in\mathcal{A}_1} E_I^* h_\kappa(M_0)M_a\tilde{f}\big(\breve{H}\big)\chi_{-L,L}(M_{a_1})\cdots\chi_{-L,L}(M_{a_{\#\mathcal{A}_1}})\tilde{f}\big(\breve{H}\big)E_I\psi(t).$$

我们省略了 $\chi_+(|x|)$ 的因子，这根据命题 2.14 是合理的。对于每个 $a \in \mathcal{A}_1$，右侧对应的项都含有因子 $\chi_{-L,L}(M_a)$，对易后，出现的因子 $M_a$ 变得有界。我们已证明

$$\begin{aligned} \psi(t) &\approx \sum_{a\in\mathcal{A}_1} E_I^* R_a E_I\psi(t); \\ R_a = R_a(t) &= h_\kappa(M_0)\big(M_a\chi_{-L,L}(M_a)\big)\tilde{f}\big(\breve{H}\big)\prod_{\mathcal{A}_1\ni b\neq a}\chi_{-L,L}(M_b) \end{aligned}$$

乘积与之前相同，只是因子 $\chi_{-L,L}(M_a)$ 被移到左侧“以与 $M_a$ 相遇”。根据命题 2.14，当 $t\to\infty$ 时，对易误差趋于零。

接下来，我们先写出$M_a = \xi_a M_a$ （参见（7.7）），再最终利用（7.8）将因子 $\xi_a$ 移到左侧，从而把因子 $f\big(\breve{H}\big)$（位于因子$E_I^*$中）替换为 $f\big(\breve{H}_a\big)$。因此

$$\psi(t) \approx \sum_{a\in\mathcal{A}_1} S_a\psi(t);\ S_a = S_a(t) = f\big(\breve{H}_a\big)\chi_I(\mathbf{M})^* R_a\chi_I(\mathbf{M})f\big(\breve{H}\big). \tag{7.10a}$$

回想 $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}$（$\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}}$），我们任取一个满足 $\tilde{g} \succ g$的函数 $\tilde{g} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}$（$\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}}$）。然后可以如下进一步细化这一局部化（证明细节见下文）。

$$\psi(t) \approx \sum_{a \in \mathcal{A}_1} U_a(t-[t])\tilde{g}(U_a(1))U_a(t-[t])^* S_a(t)U(t)g(U(1))\psi. \tag{7.10b}$$

因此，我们需要考虑 $\kappa > 0$ 较小、 $K$， $L > 1$ 较大时的“单位分解”

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_1} U_a(t-[t])\tilde{g}(U_a(1))U_a(t-[t])^* S_a(t). \tag{7.11}$$

我们几乎已经证明了以下结果。

**引理 7.4.** 设（如上） $g, \tilde{g} \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 满足 $\tilde{g} \succ g$，并设 $\psi = g(U(1))\psi \in \mathcal{H}_{\mathrm{ener}}^{+}$。那么，对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个较小的 $\kappa > 0$ 以及较大的 $K, L > 1$，使得对于相应的算子 $S_a(t)$（如 (7.10a) 中所给出），且满足 $\psi(t) = U(t)\psi$,

$$\limsup_{t \to \infty} \Big\| \psi(t) - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} U_a(t-[t])\tilde{g}(U_a(1))U_a(t-[t])^* S_a(t)\psi(t) \Big\| \leq \varepsilon, \tag{7.12a}$$

$$\limsup_{t \to \infty} \Big\| \psi(t) - \sum_{a \in \mathcal{A}_1} U_a(t-[t])\tilde{g}(U_a(1))S_a([t])\psi([t]) \Big\| \leq \varepsilon. \tag{7.12b}$$

证明。 结论 (7.12b) 可由 (7.12a) 轻易推出，而 (7.12a) 则只是对缺失部分 (7.10b) 的重复。

**I.** 利用 (7.10a)，我们证明加强后的结论 (7.12a)。基本上，这可以通过模仿引理 5.3 证明中的步骤 II 来完成。取 $g_1 \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 使得 $\tilde{g} \succ g_1 \succ g$。于是 $(\tilde{g}-1)g_1 = 0$，并回想

$$\begin{aligned} U(t) &= U(t-[t])U([t]) = U(t-[t])U(1)^{[t]}, \\ U_a(t) &= U_a(t-[t])U_a([t]) = U_a(t-[t])U_a(1)^{[t]}, \end{aligned} \tag{7.13}$$

（由 (7.10a) 可知）只需证明，对于每个 $a \in \mathcal{A}_1$

$$\lim_{t \to \infty} \Big\| \Big( U_a(t-[t])^* S_a(t) U(t-[t]) g_1(U(1)) - g_1(U_a(1))S_a(t) \Big) \psi([t]) \Big\| = 0. \tag{7.14}$$

根据斯通-魏尔斯特拉斯定理，我们可以分别将因子 $g_1(U(1))$ 和 $g_1(U_a(1))$ 替换为任意整数次幂 $U(1)^k$ 和 $U_a(1)^k$。完成这一步后，并令$\sigma := t - [t] + k$ 我们仿照引理 5.3 的证明写出

$$\begin{aligned} &U_a(\sigma)^* S_a(t) U(\sigma) - S_a(t) \\ &\quad = U_a(\sigma)^* S_a(\sigma + [t] - k) U(\sigma) - S_a([t]-k) + \big( S_a([t]-k) - S_a(t) \big) \\ &\quad = \int_0^{\sigma} U_a(s)^* (\mathbf{D}_1^a S_a)(s + [t] - k) U(s) \, \mathrm{ds} + \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-0+}); \\ &\qquad \mathbf{D}_1^a S_a = \partial_t S_a + \mathbf{D}_2^a S_a, \quad \mathbf{D}_2^a S_a = \mathrm{i}(H_a S_a - S_a H). \end{aligned}$$

根据命题 2.14，只需证明

$$\lim_{t \to \infty} \Big\| \int_0^{\sigma} U_a(s)^* (\mathbf{D}_a^1 S_a)_{s+[t]-k} \psi(s + [t]) \, \mathrm{ds} \Big\| = 0. \tag{7.15}$$

由于 $\partial_t S_a = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-1+}) = \mathcal{O}_{\mathrm{unif}}(r^{-0+})$，这里可以将 $\mathbf{D}_1^a S_a$替换为 $\mathbf{D}_2^a S_a$，事实上可替换为 $\mathrm{i}[H, S_a]$。这里我们利用了 $M_a$ 在 $M_a \chi_{-L,L}(M_a)$ 的相应因子中的局部化性质（参见（7.7）和（7.8）及其周围的讨论）。对于

出于同样的原因，在 $\mathrm{i}[H, S_a]$ 中，我们可以将 $S_a$ 的左因子 $f(\breve{H}_a)$ 替换为 $f(\breve{H})$。（下面将不加说明地使用对 $S_a$ 的这一修改。）

我们可以沿着引理 4.6 证明中步骤 VI 的思路计算这个对易子。具体而言，起点是将 $H$ 替换为 $m^\delta \breve{f}(\breve{H}) m^\delta$。与前面一样，该计算基于乘积法则，并涉及若干项；对此我们需要用到各种已建立的积分界，包括 (6.8a)-(6.9)。我们与任意 $\varphi \in \mathcal{H}$ 取内积，展开对易子，然后应用柯西–施瓦茨不等式（如引理 5.3 证明中的步骤 II）。对于 $\mathrm{i}[H, S_a]$（更准确地说是 $\mathrm{i}[m^\delta \breve{f}(\breve{H}) m^\delta, S_a]$）展开式中不能直接通过命题 2.14 处理的项，需要将其分解为 $Q_1^* T_1$ 或 $Q_2^* T_2$ 的形式，其中 $Q_1$ 和 $Q_2$ 确实可以通过推论 6.4 和注 6.5 处理（下面会进一步说明）。同样，因子 $T_1$ 或 $T_2$ 需要展开为 $BQ$ 形式的若干项，其中 $B$ 有界，且涉及的 $Q$ 算子也可以通过推论 6.1 和 6.9 以及引理 7.3 处理。最后，上述积分由此估计为 $o(t^0)\|\varphi\|$ 当 $t \to \infty$，从而证明 (7.15)，也就证明了 (7.14)。因此，按照这一证明方案可得 (7.12a)。

接下来需要确认所概述的因子分解过程是可行的。首先回顾一下，在引理 5.3 的证明中，精确计算 (5.2b) 得到

$$\lim_{t\to\infty} \Big\| \int_0^\sigma U(s)^* Q_{j,s+[t]-k}^* Q_{j,s+[t]-k} \psi(s+[t])\, \mathrm{d}s \Big\| = 0; \quad j = 1, 2.$$

这里，因子分解 $Q_{j,s+[t]-k}^* Q_{j,s+[t]-k}$（由 (5.2b) 得到）采用了上述方案的简化版本。由于当前可观测量 $S_a$ 的结构更为复杂（包含种类更多的因子），因此 $\mathrm{i}[H, S_a]$ 的因子分解也更为复杂。事实上，我们还必须处理第 6.2 小节中遇到的“平方根问题”。后者出现在处理来自 $\mathrm{i}[H, h_\kappa(M_0)]$ 的贡献，以及 $\chi_I(\mathbf{M})$ 和 $\chi_I(\mathbf{M})^*$、$i = 0, \ldots, I$ 的 $\mathrm{i}[H, \chi_{\kappa,K}(M_i)]$ 因子时。在所有情况下，“危险因子” $4\big(p \cdot \nabla^2 m_i(x) p\big)$ 都会出现。我们仍需通过 $W = \langle p \rangle^{1/3}$ 进行正则化，并采用记号

$$Q_{2,i,\chi,\rho,W} = Q_{2,i,\chi,\rho,W}(t) = 2\sqrt{P_i}\sqrt{\chi'}(M_i) E_{i-1} W,$$
$$P_i = P_{i,\rho,W}(t) = \tilde{f}(\breve{H}) W^{-1} \big(p \cdot \nabla^2 m_i(x) p\big) W^{-1} \tilde{f}(\breve{H}) + r^{-2\rho}$$

对 (6.36) 进行计算，并将对易操作移至右侧后，我们得到一个如下形式的因子

$$Q_{2,i,\chi,\rho,W}(s+[t]-k)\psi(s+[t]) = Q_{2,i,\chi,\rho,W}(s+[t])\psi(s+[t]).$$

接下来我们可以利用

$$\int_0^\sigma \big\| Q_{2,i,\chi,\rho,W}(s+[t]-k)\psi(s+[t]) \big\|^2 \, \mathrm{d}s$$
$$= \int_{[t]}^{\sigma+[t]} \big\| Q_{2,i,\chi,\rho,W}(s) U(s) \psi \big\|^2 \, \mathrm{d}s \to 0 \text{ for } t \to \infty.$$

在这种情况下，剩下的工作是将因子 $(\sqrt{\chi'}(M_i) f(\breve{H}) W)^* \sqrt{P_i}$ 移到左侧，与 $U_a(s)\varphi$ 合并，并使用 (6.9)。为此，我们需要采用第 6.2 小节中给出的 (6.6c) 的另一种证明，推导出对易关系（我们将在下文讨论这个问题）。将其移到左侧后，我们使用界

$$\int_0^\sigma \big\| \sqrt{P_i}\sqrt{\chi'}(M_i) f(\breve{H}) W \xi_a \varphi_a(s) \big\|^2 \, \mathrm{d}s \le C\|\varphi\|^2; \quad \varphi_a(s) = U_a(s)\varphi. \tag{7.16}$$

这里， $\xi_a$ 是 (7.7) 和 (7.8) 中的局部化函数（显然也可以将其移到左侧）。它使我们能够将 (7.16) 中出现的任何 $H$ 替换为 $H_a$。于是，(7.16) 可由 (6.9)（应用于 $H_a$ 而非 $H$）以及与 $W^{-1}$ 的对易关系推出，后者如推论 6.6 的证明所示（此处利用 $Wf\big(\breve{H}_a\big) = \mathcal{O}(r^{\delta/3})$）。

对于对易误差，我们基本上可以仿照另一种证明 (6.6c) 中的步骤 IV 和 V。不过，目前的问题是，因子 $f\big(\breve{H}\big)W = \mathcal{O}(r^{\delta/3})$ 无界。另一方面，现在我们只需要单侧使用 (2.3)，这会产生一个额外因子 $r^{-\rho}$。从这个角度来看， $r^{\delta/3-\rho}$ 有界这一事实使我们能够仿照其中给出的对易过程。

对于所讨论的对算子 $S_a$ 的对易子的各项贡献，我们得出所需的界 $o(t^0)\|\varphi\|$ 。

两个 $\mathrm{i}[H, f\big(\breve{H}\big)]$ 项所产生的贡献由 (6.4a) 和 (6.8a) 处理，而 $\mathrm{i}[H, \tilde{f}\big(\breve{H}\big)]$ 所产生的贡献则由 (4.9a) 处理。

第三类贡献来自对易子 $\mathrm{i}[H, M_a\chi_{-L,L}(M_a)]$和 $\mathrm{i}[H, \chi_{-L,L}(M_b)]$, $b \neq a$。对于这两种情况，我们都使用 (3.10)，写成

$$p \cdot \big(\chi_+^2(|x|)\nabla^2 m_a(x)\big)p = \sum_{j\leq J} Q(a,j)^*\mathcal{G}_j Q(a,j); \quad \mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j(x_{b_j}) \text{ bounded.}$$

对易后，我们应用引理 7.3 处理涉及 $\psi$ 的积分（在使用柯西–施瓦茨不等式之后）。对于涉及 $\varphi$的积分，我们先使用 (3.11)，再将 (6.9) 用于如下形式

$$\int_0^\sigma \big\|2\sqrt{p\cdot\nabla^2 m_i(x)p}\,\tilde{f}\big(\breve{H}_a\big)\chi_{\kappa,K}(M_i)f\big(\breve{H}_a\big)\varphi_a(s)\big\|^2\,\mathrm{d}s \leq C\|\varphi\|^2. \tag{7.17}$$

此处请注意，与 $Q(a,\ j)$ 对易相当直接（这里没有“平方根问题”）。

除去界定各种对易误差时省略的细节（为方便起见，此处省略），我们已经证明了 (7.14)。因此，(7.12a) 成立。

**II**。我们证明 (7.12b)。由于 $S_a(t) = S_a([t]) + \mathcal{O}(r^{-2\delta})$，因此只需（由 (7.12a)）证明

$$\lim_{t\to\infty}\Big\|\Big(U_a(t-[t])^*S_a(t)U(t-[t]) - S_a(t)\Big)\psi([t])\Big\| = 0. \tag{7.18}$$

显然，对于情形 $g_1 = 1$ ，(7.18) 等价于 (7.14)（对应于在上述证明中取 $k = 0$）。□

7.3. **命题 7.1 的证明**。由稠密性可知，只需考虑任意给定的态$\psi = g(U(1))\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ （如引理 7.4 中所述）。再设 $\varepsilon > 0$ 已给定。在引理 7.4 的条件下（给定 $\psi$ 和 $\varepsilon$），我们对每个 $a \in \mathcal{A}_1$ 引入

$$\varphi_{a,\varepsilon} = \lim_{t\to\infty} U_a(t)^*U_a(t-[t])\tilde{g}(U_a(1))S_a([t])\psi([t]) \in \mathcal{H}. \tag{7.19a}$$

由 (7.12b) 可知，只需证明 $\varphi_{a,\ \varepsilon}$ 是一个定义良好的向量。利用 (7.13)，这等价于证明极限存在

$$\lim_{t\to\infty} U_a([t])^*\tilde{g}(U_a(1))S_a([t])\psi([t]) = \lim_{t\to\infty}\tilde{g}(U_a(1))U_a([t])^*S_a([t])\psi([t]).$$

因此（显然）只需证明该极限存在

$$\varphi_{a,\varepsilon} = \lim_{t\to\infty}\tilde{g}(U_a(1))U_a(t)^*S_a(t)\psi(t). \tag{7.19b}$$

为实现后一个目标，我们引入演化 $\widetilde{\varphi}_a(t) = U_a(t)\tilde{g}(U_a(1))\varphi$, $\varphi \in \mathcal{H}$。为验证柯西条件，仿照引理 5.3 证明中的步骤 III，当 $t_2 > t_1 > 1$ 足够大时，我们写出

$$\big\langle \widetilde{\varphi}_a(t_2), S_a(t_2)\psi(t_2)\big\rangle - \big\langle \widetilde{\varphi}_a(t_1), S_a(t_1)\psi(t_1)\big\rangle = \int_{t_1}^{t_2} \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \widetilde{\varphi}_a(t), S_a(t)\psi(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

接下来，我们如同引理 7.4 的证明那样计算导数，展开（特别是利用 (3.10)），然后借助推论 6.1 和 6.9 以及引理 7.3 进行估计。我们对 $H$ 应用（如明确所述的）界，并对 $H_a$ 应用类似的界。（后一类界不过是特殊情形。）事实上（更具体地说），出现在表达式 $R_a$ 中的 $M_a$ 与 $M_b$ 的函数之因子、$b \neq a$ 以及 $h_\kappa(M_0)$ 之因子的海森堡导数所产生的贡献，分别由 (3.10) 与 (7.5b)、(6.34b)（应用于 $i = 0$）加以处理。来自 $f(H)$ 与 $f(H_a)$ 的 $\breve{}$ $\breve{}$ 个因子的贡献由 (6.4a) 处理，而来自 $\chi_I(M)$ 之因子的贡献则由 (6.34a) 处理。如前，来自 $\mathrm{i}[H, \tilde{f}(\breve{H})]$ 的贡献由 (4.9a) 处理。当然，这些应用需要各种对易论证。特别地，上述对 (6.34a) 的应用需要按我们在第 6.2 小节中对 (6.6c) 的另一种证明所用的方案来进行对易。如同引理 7.4 的证明那样，我们略去关于交换误差之界的细节。

由于我们的界具有标准的 Kato 型形式，上述积分按这种方式有界，即当 $t_1 \to \infty$ 时为 $o(t_1^0)\|\varphi\|$，且对 $t_2 > t_1$ 和 $\varphi \in \mathcal{H}$ 一致。由此得到极限 (7.19b) 的存在性。□

## 8. Proof of Theorem 2.6

我们证明前向通道波算子的存在性与正交性。为简单起见，我们只考虑这一情形（后向情形可类似处理，或借助时间反演性质）。

**I.** 我们证明前向通道波算子的存在性。其证明基本上沿用引理 7.4 与命题 7.1 的证明思路。

回顾：对任意通道 $\beta = (b,\ \lambda^\beta,\ u^\beta)$，即 $b \in \mathcal{A}_1$、$\lambda^\beta \in [0, 2\pi)$，以及归一化的 $u^\beta \in \mathcal{H}^b$ 所对应的 $U^b(1)u^\beta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\beta} u^\beta$，相应的前向通道波算子由下式给出

$$W_\beta^+ \psi_b = \lim_{t\to\infty} U(0,t)\Big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\beta [t]} U^b(t-[t])u^\beta\big) \otimes \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_b^2}\psi_b\big)\Big); \quad \psi_b \in L^2(\mathbf{X}_b). \tag{8.1a}$$

或者写作

$$W_\beta^+ \psi_b = \lim_{t\to\infty} U(0,t)U_b(t)\big(u^\beta \otimes \psi_b\big); \quad \psi_b \in L^2(\mathbf{X}_b). \tag{8.1b}$$

由稠密性，只需证明对任意 Schwartz $\widehat{}$ 函数，即 $\psi_b \in \mathcal{S}(\mathbf{X}_b)$，上述极限存在。事实上，我们可以假设其傅里叶变换 $\psi_b = F_b\psi_b \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbf{X}_b)$，向量 $\varphi_b := u^\beta \otimes \psi_b$ 满足 $\varphi_b = g(U_b(1))\varphi_b$，其中某个 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T} \setminus \mathcal{T}_{\mathrm{p}})$ 成立，并且对某个（较小的）$\epsilon' > 0$

$$\operatorname{supp} \widehat{\psi_b} \subseteq \mathbf{X}_b \cap \mathbf{Y}_b(\epsilon') = (\mathbf{X}_b \setminus \{0\}) \setminus \cup_{c \not\leq b,\, c\in\mathcal{A}_1} \mathbf{X}_c(\epsilon'). \tag{8.2}$$

记 $\varphi_b(t) = U_b(t)\varphi_b$，我们需要证明该极限存在

$$\lim_{t\to\infty} U(0,t)U_b(t)\varphi_b = \lim_{t\to\infty} U(0,t)\varphi_b(t).$$

与命题 7.1 的证明中一样，我们将验证柯西条件。

首先，我们引入（7.10a）中“单位分解” $\sum_{a\in\mathcal{A}_1} S_a(t)$的一个变体，更确切地说，其形式为 $\sum_{a\in\mathcal{A}_1} S_a^b(t)$；它基本上由与（7.10a）相同的“构建模块”组成，我们令

$$S_a^b(t) = f\big(\breve{H}\big)\chi_I(\mathbf{M})^* R_a^b(t)\chi_I(\mathbf{M})f\big(\breve{H}_b\big);$$
$$R_a^b(t) = h_\kappa(M_0)\big(M_a\chi_{-L,L}(M_a)\big)\tilde{f}\big(\breve{H}_b\big)\prod_{\mathcal{A}_1\ni c\neq a}\chi_{-L,L}(M_c).$$

特别注意，这一构造涉及小参数 $\epsilon=\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_I, \kappa>0$ 和大参数 $K, L>1$，这些参数可以调整，以验证柯西条件。我们对一个 $\epsilon << \epsilon'$ 使用 (8.2)（事实上，$2\sqrt{6\epsilon} < \sqrt{1-(1-\epsilon')^2}$ 就足够了）。接着，由引理 3.1 的 4) 和 5)（应用于这个 $\epsilon$，并按 (7.7) 和 (7.8) 的方式实现）以及对态 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_b^2}\psi_b$ 的稳相分析可得（证明细节略去）：

$$\varphi_b(t) \approx \sum_{a\in\mathcal{A}_1} S_a^b(t)\varphi_b(t) \approx S_b^b(t)\varphi_b(t).$$

这里我们使用符号 $\approx$，其含义与第 7.2 小节中的相同。

接下来，仿照引理 7.4 的证明可知，对于任意满足 $\tilde{g}\succ g$ 的 $\tilde{g}\in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$，

$$\varphi_b(t) \approx U(t-[t])\tilde{g}(U(1))S_b^b([t])\varphi_b([t]),$$

剩下的就是证明极限存在

$$\lim_{t\to\infty} U(0,[t])\tilde{g}(U(1))S_b^b([t])\varphi_b([t]) = \lim_{t\to\infty}\tilde{g}(U(1))U(0,t)S_b^b(t)\varphi_b(t).$$

注意，这一化简与证明命题 7.1 中化简为证明极限 (7.19b) 存在的过程完全类似。从这里出发，我们可以按照证明命题 7.1 的相同方式完成证明，同时回想一下，所涉及的积分估计具有对称形式。因此，定理 2.6 的第一部分得证。

**II**。我们证明定理 2.6 的第二部分，即通道正交性（前向情形）。与时间无关情形的断言见 [RS, 定理 XI.36 (b)]。对于光滑势，基本上也可以用类似方法证明，下面将对此加以说明。

考虑两个不同的通道 $\alpha=(a,\lambda^\alpha,u^\alpha)$ 和 $\alpha=(b,\lambda^\beta,u^\beta)$。若 $a=b$，正交性显然成立。因此，我们只考虑 $a\neq b$ 的情形。令

$$\varphi_\alpha(\sigma) = \big(U^a(\sigma)u^\alpha\big)\otimes\psi_a \text{ and } \varphi_\beta(\sigma) = \big(U^b(\sigma)u^\beta\big)\otimes\psi_b; \quad \sigma = t-[t].$$

我们需要证明

$$\big\langle\varphi_\alpha(\sigma), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_b^2-p_a^2)}\varphi_\beta(\sigma)\big\rangle \to 0 \text{ for } t\to\infty. \tag{8.3}$$

通过逼近，我们可以假设 $u^\alpha\in\mathcal{S}(\mathbf{X}^a)$ 和 $\psi_a\in\mathcal{S}(\mathbf{X}_a)$，当 $\alpha$ 被 $\beta$ 替换时也同样如此。利用标准的卷积技巧和熟知的 Duhamel 型计算（参见 (4.14)），我们还可以进一步假设条件 2.1 成立，且所有“对势”在 $x$ 中均为光滑函数，其导数一致有界。在这些假设下，按照 (4.14) 中的 Duhamel 型计算，容易验证

$$\forall s\in\mathbb{R}: \quad \sup_{\sigma\in[0,1)}\|\varphi_\alpha(\sigma)\|_{L^2_s(\mathbf{X})}<\infty \text{ and } \sup_{\sigma\in[0,1)}\|\varphi_\beta(\sigma)\|_{L^2_s(\mathbf{X})}<\infty. \tag{8.4}$$

我们将 $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}$ 分解，其中 $\mathbf{Z}$ 的确定方法是：先将 $p_b^2 - p_a^2 = \Sigma_{1\leq j\leq n} c_j p_j^2$ 写成由所有 $c_j \neq 0$ 构成的形式，这些 $c_j \neq 0$ 对应于某个 $n$ 维子空间 $\mathbf{Z}$ 的一组标准正交基。对任意 $s > n/2$ 使用 (8.4) 和柯西–施瓦茨不等式，可得

$$\sup_{\sigma\in[0,1)} \|\varphi_\alpha(\sigma)\|_{L^2(\mathbf{Y},L^1(\mathbf{Z}))} < \infty \text{ and } \sup_{\sigma\in[0,1)} \|\varphi_\beta(\sigma)\|_{L^2(\mathbf{Y},L^1(\mathbf{Z}))} < \infty. \tag{8.5}$$

写作

$$\left\langle \varphi_\alpha(\sigma), \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p_b^2-p_a^2)}\varphi_\beta(\sigma)\right\rangle = \int_{\mathbf{Y}} \left\langle \varphi_\alpha(\sigma,y,\cdot), \prod_{1\leq j\leq n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tc_jp_j^2}\varphi_\beta(\sigma,y,\cdot)\right\rangle_{L^2(\mathbf{Z})} \mathrm{d}y,$$

我们先利用 (8.5)，再应用柯西–施瓦茨不等式来估计右端。注意，每个一维自由动力学都会贡献一个因子 $t^{-1/2}$，从而得到总界 $\mathcal{O}(t^{-n/2})$。特别地，(8.3) 得证。□

## 9. Proof of Theorem 2.9

考虑满足 $\psi = g(U(1))\psi$ 的 $N = 2$ 向量 $\psi \in \mathcal{H}$，其中某个 $g \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$。这类向量在 $\mathcal{H}_{\mathrm{ac}} = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H)$ 中稠密。我们将证明任意给定的此类$\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}} = \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$，从而证明定理 2.9。

令 $\psi(t) = U(t)\psi$。取 $\tilde{g} \succ g$，使得同时满足 $\tilde{g} \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}})$。于是有

$$\lim_{t\to\infty} \left\|\psi(t) - U_{a_{\min}}(t-[t])\tilde{g}(U_{a_{\min}}(1))\psi([t])\right\| = 0. \tag{9.1}$$

这是 (7.12b) 的一个简化版本，证明方法类似，但更容易，因为引理 7.4 的证明中出现的量 $\mathbf{D}_1^a S_a$ 现在被 $-\mathrm{i}V$ 取代（事实上，这可以直接由命题 2.14 处理）。

接下来，仿照命题 7.1 的证明进行推导，可得极限存在：

$$\varphi = \lim_{t\to\infty} U_{a_{\min}}(t)^* U_{a_{\min}}(t-[t])\tilde{g}(U_{a_{\min}}(1))\psi([t]). \tag{9.2}$$

由 (9.1) 和 (9.2) 可得

$$\left\|\psi - W^+_{a_{\min}}\varphi\right\| = \lim_{t\to\infty} \left\|\psi(t) - U_{a_{\min}}(t)\varphi\right\| = 0.$$

因此 $\psi \in$ 值域 $\left(W^+_{a_{\min}}\right) = \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}$。

□

## 10. Proof of Theorem 2.10 and remaining results

我们证明主要结果定理 2.10。将其视为渐近完备性的一个判据，我们还给出另一个判据，并证明命题 2.11 和 2.12（它们也可视为判据）。处理所有问题的主要工具都是命题 7.1 的各种变体。

**10.1. 定理 2.10 的证明。** 我们对 $N$ 使用归纳法。对于 $N = 2$，断言 (2.12)，即 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H) = \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H)$，是定理 2.9 的推论。假设 $N \geq 3$，且 (2.12) 对 $N' \leq N-1$ 成立，则我们需要证明它对 $N' = N$ 成立。由该归纳假设可得，对所有 $a \in \mathcal{A}_3$，$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a) = \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a)$。

设给定 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H)$。我们需要证明 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$。再设给定 $\varepsilon > 0$，由命题 7.1 和注记 7.2 可知，存在态族 $\{\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H_a) \mid a \in \mathcal{A}_1\}$，使得

$$\limsup_{t\to\infty} \Big\| U(t)\psi - \sum_{a\in\mathcal{A}_1} U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon} \Big\| \le \varepsilon. \tag{10.1}$$

我们断言存在 $\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty} U(0,t)U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon}$，事实上，这些极限向量属于 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，且 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$在 $\mathcal{H}$中是闭的，因此可得 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$，从而证明了该定理。

对于 $a = a_{\min}$，显然

$$\lim_{t\to\infty} U(0,t)U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon} = W^+_{\alpha_{\min}}\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H).$$

因此，以下固定任意一个 $a \in \mathcal{A}_3$。我们需要证明 $\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty} U(0,t)U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon}$存在，且表示 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$中的一个向量，从而完成证明。

写作 $I = g+\bar g$, $g \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{T}\setminus\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(U(1)))$，并回想 $U_a(t) = U^a(t)\otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}$，我们将其分解为

$$U_a(t) = \big(U^a(t)g(U^a(1))\big)\otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2} + \big(U^a(t)\bar g(U^a(1))\big)\otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}.$$

我们将此公式应用于一个逐渐增大的非负函数序列 $g_n \uparrow 1-1_{\mathcal{T}_{\mathrm{p}}}$(因此 $\bar g_n \downarrow 1_{\mathcal{T}_{\mathrm{p}}}$)。由谱定理可得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \Big\| \big(U^a(t)\bar g_n(U^a(1))\otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon} - \sum_{\substack{\alpha=(a,\lambda^\alpha,u^\alpha);\\ a \text{ fixed}}} \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\alpha[t]}U^a(t-[t])u^\alpha\big)\otimes\langle u^\alpha,\varphi_{a,\varepsilon}\rangle \Big\| \to 0.$$

特别是，对于 $\psi^a_\alpha = \psi^a_{\alpha,\ \varepsilon} := \langle u^\alpha,\ \varphi_{a,\ \varepsilon}\rangle (= \langle u^\alpha,\ \varphi_{a,\ \varepsilon}\rangle_{\mathcal{H}^a} \in L^2(\mathbf{X}_a))$

$$\limsup_{t\to\infty} \Big\| U(0,t)\big(U^a(t)\bar g_n(U^a(1))\otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}\big)\varphi_{a,\varepsilon} - \sum_{\alpha=(a,\lambda^\alpha,u^\alpha);\ a \text{ fixed}} W^+_\alpha\psi^a_\alpha \Big\| \to 0.$$

取足够大的 $n$，即可使这里引入任意指定阶的误差 .

接下来，我们将到 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a)$ 上的正交投影写作

$$\bigoplus_{\beta=(b,\lambda^\beta,u^\beta),\, b\lneq a} P^a_\beta; \quad P^a_\beta = W^+_\beta(H^a)W^+_\beta(H^a)^*.$$

我们声称，对于任意固定的（较大的） $n$

$$\varphi^n_{a,\varepsilon} := \big(g_n(U^a(1))\otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon} = \sum_{\beta=(b,\lambda^\beta,u^\beta),\, b\lneq a} \big(P^a_\beta g_n(U^a(1))\otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon}. \tag{10.2}$$

为此，令 $\{\psi_{a,1},\psi_{a,2},\ldots\}$ 为 $L^2(\mathbf{X}_a)$ 中的一组标准正交基。首先，我们证明，对于每个 $j\in\mathbb{N}$，向量

$$\psi^a_j := \langle \psi_{a,j}, \varphi^n_{a,\varepsilon}\rangle_{L^2(\mathbf{X}_a)} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a). \tag{10.3}$$

显然 $\psi^a_j \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$。此外，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned}\|F((p^a)^2 > E)U^a(t)\psi^a_j\| &\le \|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp_a^2}\psi_{a,j}\|\,\|F((p^a)^2>E)U_a(t)\varphi^n_{a,\varepsilon}\| \\ &\le \|F(p^2>E)U_a(t)\varphi^n_{a,\varepsilon}\|.\end{aligned}$$

由于 $\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H_a)$ 也 $\varphi^n_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H_a)$，因此 (10.3) 确实成立。

结合 (10.3) 和性质 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a) = \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a)$，我们由此推得 $\psi^a_j \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a)$。因此，对等式 (10.2) 两边取第 $j$ 个

基函数的部分内积，所得公式是正确的。由于这对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都成立，我们最终由帕塞瓦尔反演公式得出 (10.2)。

根据通道正交性，我们可以将求和替换为一个有限求和（至多再相差一个规定阶的误差），记为

$$\sum_{\beta,\,\mathrm{finite}}^{\oplus} \big(P^a_\beta g_n(U^a(1)) \otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon}.$$

然后，我们对这有限多个项中的每一项进行计算，对某个$\psi^a_\beta = \psi^a_{\beta,\varepsilon} \in L^2(\mathbf{X}_b)$

$$\lim_{t\to\infty} \Big\| \big(U^a(t)P^a_\beta g_n(U^a(1)) \otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon} - \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\beta[t]}U^b(t-[t])u^\beta\big) \otimes \big(\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(p^a_b)^2} \otimes I\big)\psi^a_\beta\big)\Big\| = 0.$$

事实上，这在如下取法下成立

$$\psi^a_\beta = \big(W^+_\beta(H^a)^* g_n(U^a(1)) \otimes I\big)\varphi_{a,\varepsilon} \in L^2(\mathbf{X}^a_b) \otimes L^2(\mathbf{X}_a) = L^2(\mathbf{X}_b).$$

重新引入因子 $I \otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2_a}$，我们得出

$$\lim_{t\to\infty} \Big\| \big(U^a(t)P^a_\beta g_n(U^a(1)) \otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2_a}\big)\varphi_{a,\varepsilon} - \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^\beta[t]}U^b(t-[t])u^\beta\big) \otimes \big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2_b}\psi^a_\beta\big)\Big\| = 0,$$

从而有

$$\lim_{t\to\infty} \Big\| U(0,t)\big(U^a(t)P^a_\beta g_n(U^a(1)) \otimes \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tp^2_a}\big)\varphi_{a,\varepsilon} - W^+_\beta\psi^a_\beta\Big\| = 0.$$

总之，极限向量 $\lim_{t\to\infty} U(0,t)U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon} \in \mathcal{H}$ 存在，并且在任意预先指定阶的误差范围内，我们已将该向量写成形如 $W^+_\beta\psi_\beta$ 的向量的有限和； $b \in \mathcal{A}_1$。由于 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$ 的闭性，可知该极限向量属于 $\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$，正如所需。因此亦有 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H)$。□

**10.2. 渐近完备性，另一判据。** 上述对定理 2.10 的证明依赖于命题 7.1 与注记 7.2。然而该证明并不需要这些断言的全部强度。因此，若对任意给定的 $\psi^a \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a)$ 与 $\varepsilon > 0$，我们知道存在一个态族$\{\varphi^a_{b,\varepsilon} \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a_b) \mid b \lneq a\}$（在上述与 $a = a_0$ 一起使用的归纳论证中），使得

$$\liminf_{t\to\infty} \Big\| U^a(t)\psi^a - \sum_{b\lneq a} U^a_b(t)\varphi^a_{b,\varepsilon}\Big\| \le \varepsilon. \tag{10.4}$$

这里，对于一般的 $a \in \mathcal{A}_2$ 和 $b \lneq a$，动力学 $U^a_b(t)$ 由 $H^a_b = H^b \otimes I + I \otimes (p^a_b)^2$ 生成。注意，(10.4) 略弱于 (7.1)（后者应用于 $\mathcal{A}_2$ 的所有元素）。

由命题 7.1 可知，对于 $\psi^a \in \mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}(H^a)$，(10.4) 成立；不过，该断言或许在更弱的条件下也成立，即 $\psi^a \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$，并且假设某个态族 $\varphi^a_{b,\,\varepsilon}$ 已知仅为 $\mathcal{H}^a$ 的元素。我们将 (10.4) 表述为如下假设：对任意 $a \in \mathcal{A}_2$、$\psi^a \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$ 和 $\varepsilon > 0$ 均成立。

**命题 10.1。** 以下断言 *i)* 与 *ii)* 等价。

*i)* $\forall a \in \mathcal{A}_2\, \forall \psi^a \in \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)\, \forall \varepsilon > 0$:

渐近界 (10.4) 对态族 $\varphi^a_{b\text{成立},\,\varepsilon} \in \mathcal{H}^a$； $b \lneq a$.

*ii)* $\forall a \in \mathcal{A}_2$: $\quad \mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a) = \mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$.

证明。显然，ii) 蕴含 i)，并且根据定理 2.9，ii) 对 $N=2$ 成立。

对于 $N\geq 3$ 集合 $\mathcal{A}_3\neq\emptyset$。假设 $N\geq 3$且已知 $i)_{N'}$ 蕴含$ii)_{N'}$，其中 $N'\leq N-1$，那么我们需要证明该蕴含关系对 $N'=N$ 也成立。因此（假设 $a_0$ 的长度为 $N$），我们知道对所有 $a\in\mathcal{A}_3$，$\mathcal{H}^+_{\mathrm{wave}}(H^a)=\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}(H^a)$。此外，对 $a=a_0$ 使用 (10.4)，便可仿照上述定理 2.10 的证明，得到 $ii)_N$，从而完成归纳证明。□

10.3. **命题 2.11 和 2.12 的证明**。在命题的证明中，命题 7.1 的假设 $\psi\in\mathcal{H}^+_{\mathrm{ener}}$ 用于提供形如$h(M_i)$ 或 $h(M_b)$、$h\in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ 的因子，以便在 (7.10a) 中定义 $S_a(t)$。更确切地说，该假设使我们能够将演化 $\psi(t)$ 任意乘以 $S_a(t)$（如 (7.10a) 所示）。如果我们只知道 $\psi\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$，那么原则上就不能使用 (7.10a)。这表明，我们需要将任意给定的 $\psi=g(U(1))\psi\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 拆分为两部分之和，例如 $\psi=\psi_{\mathrm{ie}}+\psi_{\mathrm{fi}}$，其中 $\psi_{\mathrm{ie}}\in\mathcal{H}^+$ 即，且 (7.10a) 适用于以 $\psi_{\mathrm{fi}}$ 替换的 $\psi$。这样拆分后，我们便可使用下述 (7.1) 的版本。

对于任意 $\varepsilon>0$，存在一个态族 $\{\varphi_{a,\varepsilon}\in\mathcal{H}\mid a\in\mathcal{A}_1\}$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\Big\|U(t)\psi_{\mathrm{fi}}-\sum_{a\in\mathcal{A}_1}U_a(t)\varphi_{a,\varepsilon}\Big\|\leq\varepsilon. \tag{10.5}$$

注意，(7.1) 是第 10.1 小节中的关键估计。类似地，(10.4) 给出的版本是第 10.2 小节中的主要组成部分。

为了得到这样的分解 $\psi=\psi_{\mathrm{ie}}+\psi_{\mathrm{fi}}$，我们需要改写引理 5.3 中渐近可观测量 $M^+$ 的构造。现在它由以下内容确定：

$$h(M^+)\psi=\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty}U(t)^{-1}h\big(M\big)\psi(t)\in\mathcal{H}_{\mathrm{ac}};\quad h\in C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}),\,\psi(t)=U(t)\psi. \tag{10.6a}$$

注意，这里我们使用了 $M$，而不是 (5.5) 中的 $M_t$；不过，得益于 (5.19)，两者给出相同的极限算子。回顾一下，

$$\langle\psi,h(M^+)\psi\rangle=\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\mathcal{E}^+_\psi(\mathrm{d}x), \tag{10.6b}$$

其中，$\mathcal{E}^+(\cdot)$ 是正算子 $M^+$ 的谱分解，该算子定义在子空间 $\mathcal{E}^+(\mathbb{R}_+)\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}\subseteq\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 上。

引入记号 $M^+_0=M^+$、$\mathcal{E}^+_0=\mathcal{E}^+(\mathbb{R}_+)$ 和 $\mathcal{H}^+_0=\mathcal{E}^+_0\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$。对于在 (7.10a) 中定义 $S_a(t)$ 时使用的其他因子 $M_1,\ldots M_I$，我们类似地在子空间 $\mathcal{H}^+_i\subseteq\mathcal{H}^+_0$ 上引入正渐近可观测量 $M^+_i$，定义如下：

$$h(M^+_i)\psi=\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty}U(t)^{-1}h\big(M_i\big)\psi(t)\in\mathcal{H}^+_0,\quad i=1,\ldots,I,\,\psi\in\mathcal{H}^+_0,$$

$$h(M^+_i)=\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\mathcal{E}^+_i(\mathrm{d}x),\quad\mathcal{H}^+_i=\mathcal{E}^+_i\mathcal{H}^+_0,\quad\mathcal{E}^+_i=\mathcal{E}^+_i(\mathbb{R}_+).$$

上述投影 $\mathcal{E}^+_i$、$i=0,$ ....., $I$彼此对易。因此，它们的乘积，记为 $\mathcal{E}^+{}_{\mathbf{M}}=\Pi_i\,\mathcal{E}^+_i$，是另一个正交投影。在子空间 $\mathcal{H}^+{}_{\mathbf{M}}=\mathcal{E}^+{}_{\mathbf{M}}\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}$ 上，我们可以用同样的方法为$M_b$、$b\in\mathcal{A}_1$引入自伴渐近可观测量，它们定义在子空间$\mathcal{H}^+_b\subseteq\mathcal{H}^+{}_{\mathbf{M}}$ 上，由

$$h(M^+_b)\psi=\mathcal{H}\text{-}\lim_{t\to\infty}U(t)^{-1}h\big(M_b\big)\psi(t)\in\mathcal{H}^+_{\mathbf{M}},\quad b\in\mathcal{A}_1,\,\psi\in\mathcal{H}^+_{\mathbf{M}},$$

$$h(M^+_b)=\int_{\mathbb{R}}h(x)\,\mathcal{E}^+_b(\mathrm{d}x),\quad\mathcal{H}^+_b=\mathcal{E}^+_b\mathcal{H}^+_{\mathbf{M}},\quad\mathcal{E}^+_b=\mathcal{E}^+_b(\mathbb{R}).$$

它们的乘积，记为 $\mathcal{E}^+_{\mathcal{A}_1} = \Pi_b \mathcal{E}^+_b$，是另一个正交投影； $\mathcal{E}^+{}_{\rm tot} := \mathcal{E}^+_{\mathcal{A}_1}\mathcal{E}^+{}_{\rm M}$同样是正交投影，并投影到 $\mathcal{H}^+_{\rm tot} := \mathcal{E}^+_{\rm tot}\mathcal{H}_{\rm ac}$。

现在回到我们的分解问题 $\psi = \psi_{\rm ie} + \psi_{\rm fi}$，定义 $\psi_{\rm fi} = \mathcal{E}^+_{\rm tot}\psi$ and$\psi_{\rm ie} = \psi - \psi_{\rm fi}$。由构造本身可知，确实有 $\psi_{\rm ie} \in$ran$(I - \mathcal{E}^+_{\rm tot}) \subseteq \mathcal{H}^+{}_{\rm 即}$，正如所需。这里我们用到了 $(I - \mathcal{E}^+_0)\mathcal{H}_{\rm ac} \subseteq \mathcal{H}^+{}_{\rm 即}$、$(I - \mathcal{E}^+_i)\mathcal{H}^+_0 \subseteq \mathcal{H}^+{}_{\rm 即}$，对于$i = 1, \dots, I$，并且还用到了 $(I - \mathcal{E}^+_b)\mathcal{H}^+{}_{\rm M} \subseteq \mathcal{H}^+{}_{\rm 即}$，对于 $b \in \mathcal{A}_{\rm 1o}$。另一方面，向量 $\psi_{\rm fi}$ 的演化满足 (7.10a)，误差在极限 $\kappa \to 0$ 和 $K, L \to \infty$下趋于零，也就是说，在任意给定的 $\varepsilon$-容差范围内。因此，正如所需，(7.10a) 确实适用于将 $\psi$ 替换为 $\psi_{\rm fi}$的情形。然后，我们仿照 (7.1) 的证明（该证明基于给定的 $\psi = g(U(1))\psi \in \mathcal{H}^+_{\rm ener}$ 的 (7.10a)）得出 (10.5)。

**命题的证明。** 在两种情况下，我们都利用输入 (10.5) 仿照定理 2.10 的证明。

对于命题 2.11，我们将输入 (10.5)（对于任意给定的 $\psi = g(U(1))\psi \in \mathcal{H}_{\rm ac}$）与定理 2.9 结合使用。无需归纳法即可完成证明。注意，事实上，该论证表明 $\psi_{\rm fi} = \psi - \psi_{\rm ie} \in \mathcal{H}^+_{\rm wave}$。

对于命题 2.12，我们采用类似的论证（针对较困难的蕴含方向），但现在使用归纳法，整个过程与第 10.2 小节（或与第 10.1 小节）完全类似。我们得出 $\psi \in \mathcal{H}^+_{\rm wave}$，正如所要求的那样。□

## References

[*Ad*] *T. Adachi*，时间周期电场中具有长程相互作用的*N*体量子系统的渐近完备性，《数学物理通讯》*275 (2007)，443–477*。[*AT*] *T. Adachi*，*H. Tamura*，具有斯塔克效应的长程多粒子系统的渐近完备性。*II*，《数学物理通讯》*174 (1996)，537–559*。[*BM*] *A.Black*，*T. Malinovitch*，具有锥形衰减的*Schr¨odinger*算子的散射，《泛函分析杂志》*288 (2025)，37*页。[*De*] *J. Derezi´nski*，$N$粒子长程量子系统的渐近完备性，《数学年刊》*38 (1993)，427–476*。[*DG*] *J. Derezi´nski*，*C. G´erard*，经典与量子 $N$粒子系统的散射理论，物理学文本与专著，柏林，*Springer 1997*。[*GGM*] *V. Georgescu*，*C. G´erard*，*J.S. Møller*，对易子、 $C_0$半群与预解式估计。《泛函分析杂志》*216 (2004)，303–361*。[*Gr*] *G.M. Graf*， $N$体短程量子系统的渐近完备性：一个新证明，《数学物理通讯》*132 (1990)，73–101*。[*Ho*] *J.S. Howland*，时间周期哈密顿量的散射理论，《印第安纳大学数学杂志》*28 (1979)，471–494*。[*HMS*] *I. Herbst*，*J.S. Møller*，*E. Skibsted*，*N*体斯塔克哈密顿算子的渐近完备性，《数学物理通讯》*174 (1996)，509–535*。[*HS*] *W. Hunziker*，*I. Sigal*， $N$体量子系统的含时散射理论，《数学物理评论》*12 (2000)，1033–1084*。[*H¨o*] *L. H¨ormander*，线性偏微分算子分析。*I–IV*，柏林，*Springer 1983–85*。[*Is*] *H. Isozaki*，多体*Schr¨odinger*方程——散射理论与本征函数展开，数学物理研究，新加坡，*Springer 2023*。[*Ka*1] *T. Kato*，某些非自伴算子的波算子与相似性，《数学年鉴》*162 (1966)，258–276*。[*Ka*2] *T. Kato*，光滑算子与对易子，《数学研究》*31 (1968)，535–546*。[*KY*] *H. Kitada*，*K. Yajima*，时间周期哈密顿量的束缚态与散射态，*Ann. Inst. Henri Poincar´e 39 (1983)，145–157*。[*MS*] *J.S. Møller*，*E. Skibsted*，时间周期多体系统的谱理论，《数学进展》*188 (2004)，137–221*。

[*Na*] *S. Nakamura*，具有时间周期势的三体*Schr ¨odinger*方程的渐近完备性，东京大学理学部*IA*辑数学*33 (1986)*，*379–402*。[*RS*] *M. Reed*，*B. Simon*，现代数理物理方法*I–IV*，纽约，学术出版社*1972-78*。[*Ru*] *W. Rudin*，泛函分析，新德里，塔塔麦格劳-希尔，*TMH*版*1973*。[*SS*] *I. Sigal*，*A. Soffer*，$N$粒子散射问题：短程系统的渐近完备性，《数学年刊》*(2) 126 (1987)*，*35–108*。[*Sk*1] *E. Skibsted*，定态散射理论：$N$体长程情形，《数学物理通讯》*401 (2023)*，*2193–2267*。[*Sk*2] *E. Skibsted*，定态完备性：$N$体短程情形，《数学进展》*481 (2025)*，*1–50*。[*Yaf*] *D.R. Yafaev*，$N$粒子哈密顿算子的辐射条件与散射理论，《数学物理通讯》*154 (1993)*，*523–554*。[*Yaj*1] *K. Yajima*，具有时间周期势的*Schr ¨odinger*方程的散射理论，《日本数学会志》*29 (1977)*，*729–743*。[*Yaj*2] *K. Yajima*，具有时间依赖小势的 $N$体*Schr ¨odinger*方程的能量有界性，预印本*2024*，*https://doi.org/10.48550/arXiv.2403.07400*[*Yo*] *K. Yoshida*，泛函分析，柏林，*Springer 1965*。

(E. Skibsted) Institut for Matematik, Aarhus Universitet,
Ny Munkegade 8000Aarhus C, Denmark电子邮件地址: skibsted@math.au.dk