PDMI 预印本 07/2025

狄利克雷 L-函数的 Lindel¨of 假设的一种研究方法

Yuri Matiyasevich

俄罗斯科学院 V. A. 斯捷克洛夫数
学研究所圣彼得堡分部

yumat@pdmi.ras.ru

arXiv:2602.05731v1 [math.NT] 5 Feb 2026

摘要。 所提出的方法基于狄利克雷 L-函数通过不完全伽马函数的一种已知表示。下不完全伽马函数在无穷远处的泰勒系数的一些性质似乎是新的。具体而言，这些系数可以用图沙尔多多项式表示。此外，这些系数还可用于重新表述狄利克雷 L-函数的函数方程。这种关系“解释”了为什么 $|L_\chi(1/2+\mathrm{i}t)|$ 应当很小。

为简要介绍这些新思路，我们先在第1节给出一个关于 Lindel¨of 假设的“公式证明”。这并非真正的证明，因为我们既不关心级数的收敛性，也没有论证改变求和顺序的合理性。

在第2节中，我们提出了一些设想，探讨如何将第1节中的“证明”转化为严谨的数学证明。

第3至第5节包含一些技术细节和参考文献。

关键词： 林德洛夫¨假设、狄利克雷 L-函数、函数方程、级数加速、不完全伽马函数、图沙尔多多项式

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部预印本

主编

С. В. Кисляков

编委会

В. М.Бабич、М. А. Всемирнов、А. И.Генералов、И. А. Ибрагимов、Л. Ю. Колотилина、Ю.В. Матиясевич、Н. Ю.Нецветаев、С. И. Репин、Г. А. Серегин

主办单位：俄罗斯科学院瓦·阿·斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部联邦国家预算科学机构

大众传媒注册证明：ЭЛ NoФС 77-33560，2008年10月16日颁发。由联邦通信与大众传媒监督局颁发

联系方式：191023，圣彼得堡市丰坦卡河堤街27号
电话：(812) 312-40-58；(812) 571-57-54 电子邮箱：
admin@pdmi.ras.ru
https://www.pdmi.ras.ru/preprint/

信息与出版部门负责人 В. Н. Симонова

1 “公式证明”

我们首先给出可称为 Lindel¨of 猜想的“公式证明”。在本节中，我们忽略级数的收敛性，也不证明改变求和次序的合理性。在下一节中，我们将讨论如何把这一“证明”转化为严格的数学论证。

为简化记号，本节讨论一个特定函数 $L_3(s)$；对任意狄利克雷 L-函数的推广将在第 5 节中讨论。

函数 $L_3(s)$（当 $\Re(s) > 0$ 时）由狄利克雷级数定义。

$$L_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_3(n) n^{-s}, \tag{1}$$

其中， χ_3 是模 3 的唯一非主特征：

$$\chi_3(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n \equiv 0 \pmod 3, \\ 1, & \text{if } n \equiv 1 \pmod 3, \\ -1, & \text{if } n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases} \tag{2}$$

林德勒夫假设（针对 $L_3(s)$ 的情形）。对于每个正的 ε

$$L_3(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t) = O_\varepsilon(t^\varepsilon) \tag{3}$$

当 $t \to +\infty$ 时。

该假设也可以用函数来表述。

$$\xi_3(s) = g_3(s) L_3(s), \tag{4}$$

其中

$$g_3(s) = \left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\tfrac{s+1}{2}\right). \tag{5}$$

具体而言，对于一个正的 a

$$|\Gamma(a + \mathrm{i}\,t)| = (1 + o_a(t)) \sqrt{2\pi} t^{a-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{2}} \quad \text{as } t \to +\infty. \tag{6}$$

因此，(3) 等价于

$$\xi_3(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}t) = O_\epsilon\left(t^{\frac{1}{4}+\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{\pi t}{4}}\right). \tag{7}$$

众所周知，函数 $\xi_3(s)$ 满足函数方程

$$\xi_3(s) = \xi_3(1 - s). \tag{8}$$

这意味着

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)=\tfrac{1}{2}\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)+\tfrac{1}{2}\xi_3(\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}t). \tag{9}$$

将 (1) 和 (5) 直接代入 (9)，得到如下结果 :

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}t}{2}}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{\mathrm{i}t}{2}\right)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}t}{2}}\Gamma\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{\mathrm{i}t}{2}\right)n^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}. \tag{10}$$

事实证明（详情见第 3 节），我们可以去掉因子 $_{1\,2}$，并将完全伽马函数替换为第二个参数适当的下不完全伽马函数:

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}t}{2}}\gamma\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{\mathrm{i}t}{2},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}t}{2}}\gamma\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{\mathrm{i}t}{2},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)n^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}. \tag{11}$$

下不完全伽马函数有如下展开式（由 E. E. 库默尔给出）:

$$\gamma(w,m)=m^w\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(w+k)}m^k. \tag{12}$$

假设

$$\frac{1}{w+k}=\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l-1}\frac{k^{l-1}}{w^l}, \tag{13}$$

我们有

$$\gamma(w,m) = m^w\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+l-1}k^{l-1}}{k!w^l}m^k \tag{14}$$
$$= m^w\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l-1}}{w^l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k^{l-1}}{k!}m^k \tag{15}$$

（在（13）–（15）中以及下文中，我们假设 $0^0=1$）。此外，我们有:

$$k^l=\sum_{j=0}^{l}\left\{\begin{array}{c} l \\ j \end{array}\right\}k^{\underline{j}}, \tag{16}$$

其中 $\left\{ \begin{array}{c} l \\ j \end{array} \right\}$ 是第二类斯特林数，而 k^j 是下降阶乘，

$$k^{\underline{j}} = k(k-1)\dots(k-j+1) \tag{17}$$

（我们采用 [2]中的记号）。

将(16)代入(15)，我们得到：

$$\begin{aligned}
\gamma(w,m) &= m^w \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{w^l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m^k \sum_{j=0}^{l-1} \left\{ \begin{array}{c} l-1 \\ j \end{array} \right\} k^{\underline{j}} && (18)\\
&= m^w \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{w^l} \sum_{j=0}^{l-1} \left\{ \begin{array}{c} l-1 \\ j \end{array} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{\underline{j}}}{k!} m^k && (19)\\
&= m^w \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{w^l} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \left\{ \begin{array}{c} l-1 \\ j \end{array} \right\} m^j \sum_{k=j}^{\infty} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} m^{k-j} && (20)\\
&= m^w \mathrm{e}^{-m} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} T_{l-1}(-m)}{w^l}, && (21)
\end{aligned}$$

其中

$$T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right\} x^j. \tag{22}$$

多项式(22)被称为图沙尔多多项式 （以 [8]命名）。它们已被广泛研究，但作者尚未在文献中发现等式(21)。该等式可以从不同角度来看：

- 作为下不完全伽马函数在无穷远处的泰勒展开；
- 作为图沙尔多多项式的一种定义，其中 $m^{-w}\mathrm{e}^m\gamma(w,m)$起着生成函数的作用。

在（21）中用 w 替换 $a+\mathrm{i}b$，得到

$$\gamma(a+\mathrm{i}b,m) = m^{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-m} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1} T_{l-1}(-m)}{(a+\mathrm{i}b)^l}. \tag{23}$$

假设

$$\frac{1}{(a+\mathrm{i}b)^l} = (-\mathrm{i})^l \sum_{j=0}^{\infty} \binom{l+j-1}{j} \frac{(\mathrm{i}a)^j}{b^{l+j}}, \tag{24}$$

我们得到

$$\gamma(a+\mathrm{i}b,m) = -m^{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-m}\sum_{l=1}^{\infty}\mathrm{i}^{l}T_{l-1}(-m)\sum_{j=0}^{\infty}\binom{l+j-1}{j}\frac{(\mathrm{i}a)^{j}}{b^{l+j}} \tag{25}$$

$$= m^{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(a,m)}{b^{k}}, \tag{26}$$

其中

$$U_k(a,m) = -\mathrm{i}^{k}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}a^{j}T_{k-j-1}(-m). \tag{27}$$

令 $a=\frac{3}{4}$ 和 $b=\pm\frac{t}{2}$ 取为 (26) 中的值。将 (26) 中相应的右端代入 (11), 可得

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)n\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}2^{k}U_k(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\left(\tfrac{1}{t^{k}}+\tfrac{1}{(-t)^{k}}\right) \tag{28}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)n\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}\sum_{k=1}^{\infty}U_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\tfrac{2^{2k+1}}{t^{2k}} \tag{29}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k+1}}{t^{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)nU_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}. \tag{30}$$

我们处理 Lindel¨of 猜想的方法基于以下

关键发现。对于每个 k

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)nU_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} = 0. \tag{31}$$

等式 (31) 本质上等价于函数方程（见第4节）。 (8)

由(30) **和**(31)**得到的推论**。对于每个实数 t

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) = 0. \tag{32}$$

所需的等式 (7) 由悖论恒等式 (32) 得出。然而，后者当然是不正确的。尽管如此，上述对 (32) 的形式推导为 Lindel¨of 假设提供了一种途径（见下一节）。

2 Lindel¨of 猜想的研究方法

这里我们考虑一些假想的途径，借此可将上一节中的考量转化为对 $|\xi_3(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)|$ 的严格估计。

我们的第一个错误出现在 (13) 中。该等式仅当 $k<|w|$ 时成立。后来，我们没有证明在 (14)–(15)、(18)–(19)、(25)–(26) 和 (28)–(30) 中交换求和次序是合理的。尽管如此，(21) 和 (26) 是下不完全伽马函数的渐近表示，即

$$\gamma(w,m) \;=\; m^{w}\mathrm{e}^{-m}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{(-1)^{l-1}T_{l-1}(-m)}{w^{l}}+O_{m,L}\left(\tfrac{1}{w^{L+1}}\right)\right) \tag{33}$$

and

$$\gamma(a+\mathrm{i}b,m) \;=\; m^{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{-m}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{U_k(a,m)}{b^{k}}+O_{a,m,K}\left(\tfrac{1}{b^{K+1}}\right)\right). \tag{34}$$

为了改进我们的“公式证明”，一个自然的尝试是引入两个界，T 和 K（取决于 t、$N=N(t)$、$K=K(t)$），用它们替换 (11) 和 (28)–(30) 中求和的上限（原为无穷大），并尝试估计由此产生的误差。

令（参见 (11)）

$$\xi_{3,N}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)=\sum_{n=1}^{N}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}t}{2}}\gamma\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{\mathrm{i}t}{2},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t}+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}t}{2}}\gamma\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{\mathrm{i}t}{2},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)n^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}t} \tag{35}$$

以及（参见 (29)–(30)）

$$\xi_{3,N,K}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) \;=\; \sum_{n=1}^{N}\chi_3(n)n\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}\sum_{k=1}^{K}U_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\tfrac{2^{2k+1}}{t^{2k}} \tag{36}$$
$$\;=\; \sum_{k=1}^{K}\tfrac{2^{2k+1}}{t^{2k}}\sum_{n=1}^{N}\chi_3(n)nU_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}. \tag{37}$$

我们有：

$$|\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)|\le$$
$$|\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)-\xi_{3,N}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)|+ \tag{38}$$
$$+|\xi_{3,N}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)-\xi_{3,N,K}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)|+ \tag{39}$$
$$+|\xi_{3,N,K}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)|. \tag{40}$$

由于（11）中的级数收敛，（38）的值可以任意小。然而，这需要选择一个足够大的 N。

由（31）可知，当 $N \to \infty$ 时，（37）中的每个内和都趋于零。因此，对于固定的 K，通过选取足够大的 N，可以使（40）的值任意小。

K 的选取更为棘手。我们有：

$$\xi_{3,N,K}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) = \sum_{n=1}^{N} \chi_3(n) n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \sum_{k=1}^{2K} U_k(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \tfrac{2^{2k}}{t^k} + \\ + \sum_{n=1}^{N} \chi_3(n) n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \sum_{k=1}^{2K} U_k(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \tfrac{2^{2k}}{(-t)^k}, \quad (41)$$

thus

$$\xi_{3,N}\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right) - \xi_{3,N,K}\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t\right) = \sum_{n=1}^{N} \chi_3(n) \times \\ \times \left(\pi^{-\left(\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}t}{2}\right)} \gamma\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \textstyle\sum_{k=1}^{2K} \frac{2^k n U_k\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi n^2}{3}\right)}{t^k} + \right. \\ \left. + \pi^{-\left(\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}t}{2}\right)} \gamma\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-(\frac{1}{2}-\mathrm{i}t)} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \textstyle\sum_{k=1}^{2K} \frac{2^k n U_k\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi n^2}{3}\right)}{(-t)^k} \right). \quad (42)$$

根据（34）（其中 $a = \frac{3}{4}$、 $b = \pm\frac{t}{2}$ 和 $m = \frac{\pi n^2}{3}$）——

$$\pi^{-\left(\frac{3}{4}\pm\frac{\mathrm{i}t}{2}\right)} \gamma\left(\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-(\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}t)} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \sum_{k=1}^{K} \frac{2^k n U_k\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi n^2}{3}\right)}{(\pm t)^k} = O_{n,K}\left(\frac{1}{t^{K+1}}\right). \quad (43)$$

利用显式界（隐藏在（43）中的 $O_{n,K}$ 记号里），我们可以估计（39）。然而，尚不清楚这是否（连同对（38）的估计）能够得到所需的估计（7）。 (40))

下面的方法看起来更有希望。

已有许多方法可以加速慢收敛级数，甚至为发散级数求得“正确”值。其中许多方法是线性的：一个无穷和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (44)$$

当 N 相对较小时，可以用一个有限和很好地近似

$$\sum_{n=1}^{N} \nu_n(N) a_n \quad (45)$$

其中权重 $\nu_n(N)$ 适当。我们可以选取两个权重序列 $\nu_n(N)$ 和$\kappa_k(K)$，并将 (35)、(36) 和 (37) 重新定义为加权有限和：

$$\xi_{3,N}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) = \sum_{n=1}^{N} \nu_n(N)\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}-\frac{\mathrm{i}t}{2}} \gamma\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}t} + \\ + \sum_{n=1}^{N} \nu_n(N)\chi_3(n)\left(\tfrac{\pi}{3}\right)^{-\frac{3}{4}+\frac{\mathrm{i}t}{2}} \gamma\left(\tfrac{3}{4}-\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}t}, \quad (46)$$

$$\xi_{3,N,K}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) = \sum_{n=1}^{N} \nu_n(N)\chi_3(n) n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \sum_{k=1}^{K} \kappa_k(K) U_{2k}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \tfrac{2^{2k+1}}{t^{2k}} \quad (47)$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \kappa_k(K) \tfrac{2^{2k+1}}{t^{2k}} \sum_{n=1}^{N} \nu_n(N)\chi_3(n) n U_{2k}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}. \quad (48)$$

权重 $\kappa_k(K)$ 应通过加权有限和对下不完全伽马函数给出良好的近似（参见 (43)：

$$\pi^{-\left(\frac{3}{4}\pm\frac{\mathrm{i}t}{2}\right)} \gamma\left(\tfrac{3}{4}\pm\tfrac{\mathrm{i}t}{2}, \tfrac{\pi n^2}{3}\right) n^{-\left(\frac{1}{2}\pm\mathrm{i}t\right)} \approx \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \sum_{k=1}^{K} \kappa_k(K) \frac{2^k n U_k\left(\frac{3}{4}, \frac{\pi n^2}{3}\right)}{(\pm t)^k}. \quad (49)$$

权重 $\nu_n(N)$ 应满足两个条件。首先，(46) 中的有限和应能很好地近似 $\xi_3(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t)$（参见 (11)：

$$\xi_3(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t) \approx \xi_{3,N}(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t). \quad (50)$$

其次，(48) 中的内和应足够小（参见 (31)：

$$\sum_{n=1}^{N} \nu_n(N)\chi_3(n) n U_{2k}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \approx 0. \quad (51)$$

可以期待，通过恰当选择权重，能够使用数值不太大的 N 和 K，并由 (38)–(40) 推导出 (7)（在重新定义 (46)–(48) 之后）。

存在高效的非线性方法可以加速收敛。然而，线性对我们而言至关重要：我们需要表示（47）和（48）。

3 通过不完全伽马函数表示 L-函数

（11）的前身早已出现在 B. Rie-mann [6] 的开创性论文中。自然地，它给出了 ζ函数的一个表达式。对于狄利克雷L函数，A. F. Lavrik 得到了如下的一般表示。

设 $\chi(n)$ 是模某个 q 的本原特征， $q>1$,

$$\xi_\chi(s)=g_\chi(s)L_\chi(s), \tag{52}$$

其中

$$L_\chi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}, \tag{53}$$

$$g_\chi(s)=\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right), \tag{54}$$

$$\delta=\begin{cases}0, & \text{if } \chi(-1)=1,\\ 1, & \text{if } \chi(-1)=-1.\end{cases} \tag{55}$$

函数 $\xi_\chi(s)$ 满足函数方程

$$\xi_\chi(s)=\omega\xi_{\bar\chi}(1-s), \tag{56}$$

其中

$$\bar\chi(n)=\overline{\chi(n)} \tag{57}$$

and

$$\omega=\frac{\sum_{k=1}^{q}\chi(k)\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}k}{q}}}{\mathrm{i}^{\delta}\sqrt{q}}. \tag{58}$$

A. F. Lavrik 在 $[9,$ 定理 $1]$ 中证明，对所有 s

$$\xi_\chi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\tfrac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma\left(\tfrac{s+\delta}{2},\tfrac{\pi n^2\tau}{q}\right)n^{-s}+$$
$$+\omega\sum_{n=1}^{\infty}\bar\chi(n)\left(\tfrac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1-s+\delta}{2}}\Gamma\left(\tfrac{1-s+\delta}{2},\tfrac{\pi n^2}{q\tau}\right)n^{-(1-s)}, \tag{59}$$

其中， τ 是一个实部为正的任意复数。

由（10）和众所周知的恒等式

$$\Gamma(a)=\gamma(a,z)+\Gamma(a,z) \tag{60}$$

我们得到一个对偶表示，其中上不完全伽马函数被下不完全伽马函数取代:

$$\xi_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s+\delta}{2}} \gamma\left(\frac{s+\delta}{2}, \frac{\pi n^2 \tau}{q}\right) n^{-s} + \\ + \omega \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\chi}(n) \left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{1-s+\delta}{2}} \gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}, \frac{\pi n^2}{q\tau}\right) n^{-(1-s)}. \quad (61)$$

表示式 (11) 是 (61) 的一个特例，其中 $q = 3$, $\chi = \chi_3$ （由 (2) 定义）, $\delta = 1$, $\bar{\chi} = \chi_3$, $\omega = 1$ 和 $\tau = 1$。

从计算角度来看，表示式 (59) 比 (61) 更高效。这是因为当第二个参数的虚部趋于无穷时，上不完全伽马函数会迅速衰减；而在这种情况下，下不完全伽马函数趋于一个非零极限。不过，就我们的目的而言，下不完全伽马函数的情形更有意思，因为表示式 (26) 中的多项式 $U_k(a,\ m)$ 满足恒等式 (31)。

表示式 (59) 经多种方式得到了推广。A. F. Lavrik [12]和 M. Alzergani [1] 给出了涉及欧拉乘积中有限个因子的（不同）表示式。关于另一种推广，例如可参阅 M. O. Rubinstein [7] 的综述。

4 ξ3 的函数方程的推论

函数方程（8）有许多种证明方法。一种标准技术（例如参见 [10, 第 1 章第 4 节，定理 1]）基于狄利克雷 θ-函数的性质。我们如下定义 $\theta_3(\tau)$（ $\Re(\tau) > 0$ ）：

$$\theta_3(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_3(n) n \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}\tau}. \quad (62)$$

T该函数满足（[10, 第 1 章第 4 节，引理 2]）函数方程 n

$$\theta_3(\tau^{-1}) = \tau^{\frac{3}{2}} \theta_3(\tau). \quad (63)$$

函数方程（8）可以由（63）推出。A. F. Lavrik 在 [11] 中指出，反之，（63）也可以由（8）推出。

我们将 (63) 改写如下。这个函数等式（ τ 中的恒等式）蕴含数值等式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m} \left(\theta_3(\tau^{-1}) - \tau^{\frac{3}{2}} \theta_3(\tau)\right)\Big|_{\tau=1} = 0, \qquad m = 1, 2, \dots \ . \quad (64)$$

反过来，数值等式 (64) 合在一起又蕴含函数等式 (63)。

(64) 式的左边可以写成

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m}\left(\theta_3(\tau^{-1})-\tau^{\frac{3}{2}}\theta_3(\tau)\right)\Big|_{\tau=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)G_m(n)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}} \tag{65}$$

其中 $G_m(n)$ 是某些多项式。其中一些列于表2。 $G_m(n)$ 的显式表示由 (81)、(76) 和 (78) 给出。

一般而言，多项式 $G_m(n)$ 只包含 n 的奇次幂。 $G_m(n)$ 的次数在 m 为奇数时等于 $2m+1$，在 m 为偶数时等于 $2m-1$。

采用新的记号后，等式 (64) 可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)G_m(n)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}=0. \tag{66}$$

这些等式并非彼此独立。例如， $G_2(n)=2G_1(n)$。

设 $\mathcal{G}_3(m)$ 是由多项式 $G_1(n)\ldots,G_m(n)$ 线性张成的空间。对于偶数 m，空间 $\mathcal{G}_3(m)$ 的维数等于 $m/2$，并且

$$\mathcal{G}_3(m)=\mathcal{G}_3(m-1). \tag{67}$$

$\mathcal{G}_3(m)$的一组基可以通过多种方式选取。例如，对于偶 m多项式

$$G_1(n),G_3,\ldots,G_{m-1}(n) \tag{68}$$

以及多项式

$$G_2(n),G_4,\ldots,G_m(n) \tag{69}$$

张成（67）。

显然，若 $P(n)\in\mathcal{G}_3(m)$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_3(n)P(n)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{3}}=0. \tag{70}$$

恒等式（31）是以下内容的推论

关键发现（更强形式）。对于每个 k

$$nU_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3})\in\mathcal{G}_3(2k). \tag{71}$$

表 3 和表 4 分别列出了一些对应于基和 (69) 的线性关系。 (68)

表3和表4中的关系可以求逆；表5列出了一些逆关系。

在一般情形下，多项式

$$nU_2(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}),\ nU_4(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}),\ \ldots,\ nU_{2k}(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}) \tag{72}$$

张成 $\mathcal{G}_3(2k)$。因此，等式 (31) 蕴含等式 (66)；后者与 (64) 相同，故蕴含函数方程 (63) 和 (8)。

5 一般情形下函数方程的推论

如上一节所述，函数恒等式 (8) 等价于 (66)。这一观察可以推广到任意狄利克雷本原特征 χ，其模为某个 q，其中 $q>1$。

在第4节中，我们讨论由 (2) 定义的特征 χ_3。它有两个特殊性质：

- χ_3 是实特征，即 $\chi_3=\bar{\chi}_3$；
- χ_3 是奇特征，即 $\chi_3(-1)=-1$。

一般情形下，(63)–(66) 的对应式同时涉及 χ 和 $\bar{\chi}$，以及 δ，后者是 χ 奇偶性的指示量（由 (55) 定义）。

更确切地说，函数方程具有以下形式（参见 (63)）：

$$\theta_\chi(\tau^{-1})=\omega\tau^{\delta+\frac{1}{2}}\theta_{\bar{\chi}}(\tau), \tag{73}$$

其中（参见 (62)）

$$\theta_\chi(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\chi(n)n^\delta \mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{q}\tau} \tag{74}$$

并且 ω 由 (58) 定义（参见第 1 章第 4 节引理 2]）。

Inst不再使用单个多项式级数 $G_m(n)$，而是引入两个级数：

$$E_m(l) = \mathrm{e}^l\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m}\mathrm{e}^{-\frac{l}{\tau}}\bigg|_{\tau=1} \tag{75}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}m!k!\binom{m-1}{k-1}l^k, \tag{76}$$

$$F_{d,m}(l) \;=\; \mathrm{e}^{l}\,\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m}\tau^{d+\frac12}\mathrm{e}^{-l\tau}\Big|_{\tau=1} \tag{77}$$

$$\;=\; \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\left(d+\tfrac12\right)^{\underline{m-k}}\,l^k, \tag{78}$$

其中 $d=0$ 或 $d=1$。函数方程 (73) 等价于（参见 (64)）以下无限多个数值等式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m}\left(\theta_\chi(\tau^{-1})-\omega\tau^{\delta+\frac12}\theta_{\bar\chi}(\tau)\right)\Big|_{\tau=1}=0,\qquad m=0,1,\dots\ . \tag{79}$$

在记号 (75)–(77) 下，等式 (79) 可以写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\chi(n)n^\delta E_m\!\left(\tfrac{\pi n^2}{q}\right)-\omega\bar\chi(n)n^\delta F_{\delta,m}\!\left(\tfrac{\pi n^2}{q}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{q}}=0. \tag{80}$$

等式 (66) 是 (80) 的一个特例：若 $\chi=\chi_3$，则 $q=3$、$\bar\chi=\chi$、$\delta=1$、$\omega=1$，并且

$$G_m(n)=nE_m\!\left(\tfrac{\pi n^2}{3}\right)-nF_{1,m}\!\left(\tfrac{\pi n^2}{3}\right). \tag{81}$$

设 $\mathcal{F}_d(m)$ 为多项式对的线性张成

$$\langle E_0(l),F_{d,0}(l)\rangle,\langle E_1(l),F_{d,1}(l)\rangle,\dots,\langle E_m(l),F_{d,m}(l)\rangle. \tag{82}$$

$\mathcal{F}_d(m)$ 的维数等于 $m+1$。

显然，若 $\langle P(l)\ Q(l)\rangle\in\mathcal{F}_\delta(m)$，则（参见 (70)）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\chi(n)n^\delta P\!\left(\tfrac{\pi n^2}{q}\right)-\omega\bar\chi(n)n^\delta Q\!\left(\tfrac{\pi n^2}{q}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{q}}=0. \tag{83}$$

从一般表示 (61) 出发，我们可以（类比于 (30)）推出

$$\xi_\chi(\tfrac12+\mathrm{i}t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{t^k}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\chi(n)n^\delta U_k(\tfrac{\delta}{2}+\tfrac14,\tfrac{\pi n^2}{q})+$$
$$+(-1)^k\omega\bar\chi(n)n^\delta U_k(\tfrac{\delta}{2}+\tfrac14,\tfrac{\pi n^2}{q})\Big)\mathrm{e}^{-\frac{\pi n^2}{q}}. \tag{84}$$

关键发现（一般情形）。对于 $d=0$ 并且对于 $d=1$ 对每个 k

$$\langle U_k(\tfrac{d}{2}+\tfrac14,l),\ -(-1)^kU_k(\tfrac{d}{2}+\tfrac14,l)\rangle\in\mathcal{F}_d(k). \tag{85}$$

由 (84) 和 (85) 可得对（错误的）等式 (32) 的推广：对每个本原狄利克雷特征 χ 模 q $(q>1)$，对每个实数 t

$$\xi_\chi(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t)=0. \tag{86}$$

因此，第2节中的推测也可以推广到任意的 χ。

参考文献

[1] M. Alzergani. 狄利克雷 LL 函数的近似族。2023年。arXiv: 2311.18816 [math.NT].[2] Ronald L. Graham、Donald E. Knuth 和 Oren Patashnik。《具体数学：计算机科学基础》。第2版。阿姆斯特丹：Addison-Wesley Publishing Group，1994年。isbn: 0-201-55802-5。[3] A. A. Karatsuba 和 S. M. Voronin。《黎曼ζ函数》。第5卷。De Gruyter Expo. Math. 柏林等地：W. de Gruyter，1992年。isbn: 3-11-013170-6。译自 [10]。[4] A. F. Lavrik。“狄利克雷 LL 函数的方程及其欧拉乘积关于素数的区间”。载于：《俄罗斯数学调查》47.2 (1992)，第226–228页。issn: 0036-0279。网址：www.mathnet.ru/php/getFT. phtml ? jrnid =rm & paperid =4501& what=fullteng &option _lang=eng。译自 [12]。[5] A. F. Lavrik。“黎曼型函数方程的算术等价”。载于：数论、代数、数学分析及其应用。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，1993年，第237–245页。isbn: 0-8218-3150-X。译自 [11]。.[6] B. Riemann。“给定范围内素数的数量”。载于：《柏林科学院月报》（1859年）。收录于：Riemann, B. 《全集》。Teubner，莱比锡，1892年；Dover Books 于1953年在纽约再版。http://www.claymath.org/publications/riemanns- 1859-manuscript，英文译文：http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf。[7] M. O. Rubinstein。解析数论中的计算方法与实验。2004年。doi: 10.48550/arXiv.math/0412181。[8] Jacques Touchard。“关于置换的循环”。载于：《数学学报》70 (1939)，第243–297页。issn: 0001-5962。doi: 10.1007/BF02547349。

[9] A. Ф. 拉夫里克。“狄利克雷 LL 函数的函数方程以及算术级数中除数问题”。载于：苏联科学院通报。数学系列30 (2 1966年)，第433–448页。网址：http : // mi .mathnet . ru / im2836。[10] C. M. 沃罗宁 和 A. A. 卡拉楚巴。黎曼ζ函数。莫斯科：Физ-матлит，1994年。译为 [3]。[11] A. Ф. 拉夫里克。“黎曼型函数方程的算术等价”。载于：斯捷克洛夫数学研究所论文集200 (1991年)，第213–221页。网址：http://mi.mathnet.ru/tm1425。译为 [5]。[12] A. Ф. 拉夫里克。“狄利克雷 LL 函数的方程及其欧拉乘积关于素数的区间”。载于：俄罗斯数学科学进展47 (2(284) 1992年)，第199–200页。网址：http://mi.mathnet.ru/rm4501。译为 [4]。

$$
\begin{aligned}
U_2\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= -\tfrac{\pi}{3}n^2+\tfrac{3}{4}\\
U_4\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= \tfrac{\pi^3}{27}n^6-\tfrac{7\pi^2}{12}n^4+\tfrac{79\pi}{48}n^2-\tfrac{27}{64}\\
U_6\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= -\tfrac{\pi^5}{243}n^{10}+\tfrac{55\pi^4}{324}n^8-\tfrac{425\pi^3}{216}n^6+\tfrac{665\pi^2}{96}n^4-\tfrac{4141\pi}{768}n^2+\tfrac{243}{1024}\\
U_8\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= \tfrac{\pi^7}{2187}n^{14}-\tfrac{35\pi^6}{972}n^{12}+\tfrac{3689\pi^5}{3888}n^{10}-\tfrac{52745\pi^4}{5184}n^8+\tfrac{299131\pi^3}{6912}n^6-\\
&\quad -\tfrac{185857\pi^2}{3072}n^4+\tfrac{205339\pi}{12288}n^2-\tfrac{2187}{16384}\\
U_{10}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= -\tfrac{\pi^9}{19683}n^{18}+\tfrac{19\pi^8}{2916}n^{16}-\tfrac{895\pi^7}{2916}n^{14}+\tfrac{2905\pi^6}{432}n^{12}-\tfrac{744317\pi^5}{10368}n^{10}+\\
&\quad +\tfrac{4961495\pi^4}{13824}n^8-\tfrac{20501665\pi^3}{27648}n^6+\tfrac{5930365\pi^2}{12288}n^4-\tfrac{10083481\pi}{196608}n^2+\tfrac{19683}{262144}\\
U_{12}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= \tfrac{\pi^{11}}{177147}n^{22}-\tfrac{253\pi^{10}}{236196}n^{20}+\tfrac{8305\pi^9}{104976}n^{18}-\tfrac{136895\pi^8}{46656}n^{16}+\tfrac{5497327\pi^7}{93312}n^{14}-\\
&\quad -\tfrac{26765585\pi^6}{41472}n^{12}+\tfrac{1847382779\pi^5}{497664}n^{10}-\tfrac{6802994495\pi^4}{663552}n^8+\\
&\quad +\tfrac{20311855861\pi^3}{1769472}n^6-\tfrac{2930804107\pi^2}{786432}n^4+\tfrac{494287399\pi}{3145728}n^2-\tfrac{177147}{4194304}\\
U_{14}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= -\tfrac{\pi^{13}}{1594323}n^{26}+\tfrac{13\pi^{12}}{78732}n^{24}-\tfrac{24947\pi^{11}}{1417176}n^{22}+\tfrac{1871441\pi^{10}}{1889568}n^{20}-\tfrac{54017249\pi^9}{1679616}n^{18}+\\
&\quad +\tfrac{463109933\pi^8}{746496}n^{16}-\tfrac{15833905945\pi^7}{2239488}n^{14}+\tfrac{45796856105\pi^6}{995328}n^{12}-\\
&\quad -\tfrac{2546294373623\pi^5}{15925248}n^{10}+\tfrac{5611157536985\pi^4}{21233664}n^8-\tfrac{2399632288235\pi^3}{14155776}n^6+\\
&\quad +\tfrac{178796540195\pi^2}{6291456}n^4-\tfrac{24221854021\pi}{50331648}n^2+\tfrac{1594323}{67108864}\\
U_{16}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= \tfrac{\pi^{15}}{14348907}n^{30}-\tfrac{155\pi^{14}}{6377292}n^{28}+\tfrac{90125\pi^{13}}{25509168}n^{26}-\tfrac{117845\pi^{12}}{419904}n^{24}+\\
&\quad +\tfrac{609126973\pi^{11}}{45349632}n^{22}-\tfrac{24376821469\pi^{10}}{60466176}n^{20}+\tfrac{618247546345\pi^9}{80621568}n^{18}-\\
&\quad -\tfrac{364277794595\pi^8}{3981312}n^{16}+\tfrac{31762146891761\pi^7}{47775744}n^{14}-\tfrac{59284085936075\pi^6}{21233664}n^{12}+\\
&\quad +\tfrac{5291525349254 69\pi^5}{84934656}n^{10}-\tfrac{729958548564245\pi^4}{113246208}n^8+\tfrac{1107751011830191\pi^3}{452984832}n^6-\\
&\quad -\tfrac{43414094382757\pi^2}{201326592}n^4+\tfrac{1186886790259\pi}{805306368}n^2-\tfrac{14348907}{1073741824}\\
U_{18}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) &= -\tfrac{\pi^{17}}{129140163}n^{34}+\tfrac{595\pi^{16}}{172186884}n^{32}-\tfrac{18853\pi^{15}}{28697814}n^{30}+\tfrac{297755\pi^{14}}{4251528}n^{28}-\\
&\quad -\tfrac{157797689\pi^{13}}{34012224}n^{26}+\tfrac{1008323771\pi^{12}}{5038848}n^{24}-\tfrac{519715370239\pi^{11}}{90699264}n^{22}+\\
&\quad +\tfrac{13200567768817\pi^{10}}{120932352}n^{20}-\tfrac{293911332044473\pi^9}{214990848}n^{18}+\tfrac{1048386106345721\pi^8}{95551488}n^{16}-\\
&\quad -\tfrac{5171000831348105\pi^7}{95551488}n^{14}+\tfrac{6535078384876405\pi^6}{42467328}n^{12}-\\
&\quad -\tfrac{2332119002644110 91\pi^5}{1019215872}n^{10}+\tfrac{207084721195113025\pi^4}{1358954496}n^8-\\
&\quad -\tfrac{31578932988804785\pi^3}{905969664}n^6+\tfrac{657528343229765\pi^2}{402653184}n^4-\tfrac{58157596211761\pi}{12884901888}n^2+\\
&\quad +\tfrac{129140163}{17179869184}
\end{aligned}
$$

表1：由（27）定义的多项式 $U_k(a,m)$。

$$G_1(n) = \frac{2\pi}{3}n^3 - \frac{3}{2}n$$
$$G_2(n) = \frac{\pi}{3}n^3 - \frac{3}{4}n$$
$$G_3(n) = \frac{2\pi^3}{27}n^7 - \frac{7\pi^2}{6}n^5 + \frac{11\pi}{4}n^3 + \frac{3}{8}n$$
$$G_4(n) = -\frac{2\pi^3}{9}n^7 + \frac{7\pi^2}{2}n^5 - \frac{17\pi}{2}n^3 - \frac{9}{16}n$$
$$G_5(n) = \frac{2\pi^5}{243}n^{11} - \frac{55\pi^4}{162}n^9 + \frac{85\pi^3}{18}n^7 - \frac{105\pi^2}{4}n^5 + \frac{655\pi}{16}n^3 + \frac{45}{32}n$$
$$G_6(n) = -\frac{7\pi^5}{81}n^{11} + \frac{385\pi^4}{108}n^9 - \frac{805\pi^3}{18}n^7 + \frac{3185\pi^2}{16}n^5 - \frac{3885\pi}{16}n^3 - \frac{315}{64}n$$
$$G_7(n) = \frac{2\pi^7}{2187}n^{15} - \frac{35\pi^6}{486}n^{13} + \frac{287\pi^5}{108}n^{11} - \frac{11165\pi^4}{216}n^9 + \frac{22435\pi^3}{48}n^7 - \frac{53655\pi^2}{32}n^5 + \\ + \frac{108255\pi}{64}n^3 + \frac{2835}{128}n$$
$$G_8(n) = -\frac{44\pi^7}{2187}n^{15} + \frac{385\pi^6}{243}n^{13} - \frac{1309\pi^5}{27}n^{11} + \frac{156695\pi^4}{216}n^9 - \frac{62755\pi^3}{12}n^7 + \frac{250635\pi^2}{16}n^5 - \\ - \frac{215985\pi}{16}n^3 - \frac{31185}{256}n$$
$$G_9(n) = \frac{2\pi^9}{19683}n^{19} - \frac{19\pi^8}{1458}n^{17} + \frac{227\pi^7}{243}n^{15} - \frac{6265\pi^6}{162}n^{13} + \frac{62741\pi^5}{72}n^{11} - \frac{501655\pi^4}{48}n^9 + \\ + \frac{1003765\pi^3}{16}n^7 - \frac{5158125\pi^2}{32}n^5 + \frac{31059315\pi}{256}n^3 + \frac{405405}{512}n$$
$$G_{10}(n) = -\frac{25\pi^9}{6561}n^{19} + \frac{475\pi^8}{972}n^{17} - \frac{6725\pi^7}{243}n^{15} + \frac{188125\pi^6}{216}n^{13} - \frac{376355\pi^5}{24}n^{11} + \\ + \frac{15051575\pi^4}{96}n^9 - \frac{12903975\pi^3}{16}n^7 + \frac{464330475\pi^2}{256}n^5 - \frac{310333275\pi}{256}n^3 - \frac{6081075}{1024}n$$
$$G_{11}(n) = \frac{2\pi^{11}}{177147}n^{23} - \frac{253\pi^{10}}{118098}n^{21} + \frac{6655\pi^9}{26244}n^{19} - \frac{105545\pi^8}{5832}n^{17} + \frac{164285\pi^7}{216}n^{15} - \\ - \frac{8278655\pi^6}{432}n^{13} + \frac{82793095\pi^5}{288}n^{11} - \frac{157690225\pi^4}{64}n^9 + \frac{2838718575\pi^3}{256}n^7 - \\ - \frac{11351634525\pi^2}{512}n^5 + \frac{13647231675\pi}{1024}n^3 + \frac{103378275}{2048}n$$
$$G_{12}(n) = -\frac{38\pi^{11}}{59049}n^{23} + \frac{4807\pi^{10}}{39366}n^{21} - \frac{145255\pi^9}{13122}n^{19} + \frac{258115\pi^8}{432}n^{17} - \frac{2168375\pi^7}{108}n^{15} + \\ + \frac{182136185\pi^6}{432}n^{13} - \frac{86733955\pi^5}{16}n^{11} + \frac{10407745425\pi^4}{256}n^9 - \frac{20816697825\pi^3}{128}n^7 + \\ + \frac{149851981125\pi^2}{512}n^5 - \frac{81852984675\pi}{512}n^3 - \frac{1964187225}{4096}n$$
$$G_{13}(n) = \frac{2\pi^{13}}{1594323}n^{27} - \frac{13\pi^{12}}{39366}n^{25} + \frac{767\pi^{11}}{13122}n^{23} - \frac{55913\pi^{10}}{8748}n^{21} + \frac{15101515\pi^9}{34992}n^{19} - \\ - \frac{48321845\pi^8}{2592}n^{17} + \frac{676520845\pi^7}{1296}n^{15} - \frac{902016115\pi^6}{96}n^{13} + \frac{27060798765\pi^5}{256}n^{11} - \\ - \frac{360804869425\pi^4}{512}n^9 + \frac{1298942619975\pi^3}{512}n^7 - \frac{4250531560275\pi^2}{1024}n^5 + \\ + \frac{8510470543575\pi}{4096}n^3 + \frac{41247931725}{8192}n$$

Table 2: Polynomials $G_n(n)$ defined by (65)

$$nU_2\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = -\tfrac{1}{2}G_1(n)$$

$$nU_4\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = -\tfrac{13}{32}G_1(n) + \tfrac{1}{2}G_3(n)$$

$$nU_6\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = \tfrac{359}{512}G_1(n) + \tfrac{85}{16}G_3(n) - \tfrac{1}{2}G_5(n)$$

$$nU_8\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = \tfrac{468133}{8192}G_1(n) + \tfrac{190351}{512}G_3(n) - \tfrac{1477}{32}G_5(n) + \tfrac{1}{2}G_7(n)$$

$$\begin{aligned} nU_{10}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{1881623759}{131072}G_1(n) + \tfrac{193261745}{2048}G_3(n) - \tfrac{3156027}{256}G_5(n) + \\ & + \tfrac{1401}{8}G_7(n) - \tfrac{1}{2}G_9(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{12}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{20907034805053}{2097152}G_1(n) + \tfrac{8596877726701}{131072}G_3(n) - \tfrac{35325623707}{4096}G_5(n) \\ & + \tfrac{32737881}{256}G_7(n) - \tfrac{15015}{32}G_9(n) + \tfrac{1}{2}G_{11}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{14}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{519432419559176759}{33554432}G_1(n) + \tfrac{106803035312049895}{1048576}G_3(n) - \\ & - \tfrac{1756698214958687}{131072}G_5(n) + \tfrac{409249074377}{2048}G_7(n) - \tfrac{390116727}{512}G_9(n) + \\ & + \tfrac{16471}{16}G_{11}(n) - \tfrac{1}{2}G_{13}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{16}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{25147259164376391074773}{536870912}G_1(n) + \tfrac{10341386238841675249051}{33554432}G_3(n) - \\ & - \tfrac{85053788112176057811}{2097152}G_5(n) + \tfrac{79307042206189083}{131072}G_7(n) - \\ & - \tfrac{18993638637545}{8192}G_9(n) + \tfrac{1662115273}{512}G_{11}(n) - \tfrac{63385}{32}G_{13}(n) + \tfrac{1}{2}G_{15}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{18}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{215327964272541609583867535 9}{8589934592}G_1(n) + \tfrac{11068758434664319077448682 5}{67108864}G_3(n) - \\ & - \tfrac{18207362100678484387537 75}{8388608}G_5(n) + \tfrac{848913796088552235639}{262144}G_7(n) - \\ & - \tfrac{813701365343805939}{65536}G_9(n) + \tfrac{17883551790767}{1024}G_{11}(n) - \\ & - \tfrac{1410882207}{128}G_{13}(n) + \tfrac{13889}{4}G_{15}(n) - \tfrac{1}{2}G_{17}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{20}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{3034431637320576254277629526052 93}{137438953472}G_1(n) + \\ & + \tfrac{1247859980782480421671344514614 01}{8589934592}G_3(n) - \\ & - \tfrac{2565809007285260555089603449 67}{134217728}G_5(n) + \\ & + \tfrac{2392620854491399016865170 41}{8388608}G_7(n) - \tfrac{1146758357802014547858 45}{1048576}G_9(n) + \\ & + \tfrac{10086732814021533943}{65536}G_{11}(n) - \tfrac{199809728486035}{2048}G_{13}(n) + \\ & + \tfrac{4063696269}{128}G_{15}(n) - \tfrac{181659}{32}G_{17}(n) + \tfrac{1}{2}G_{19}(n) \end{aligned}$$

表 3：通过基 (68) 得到的多项式 $nU_m\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)$。

$$nU_2\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = -G_2(n)$$

$$nU_4\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = \tfrac{11}{16}G_2(n) - \tfrac{1}{6}G_4(n)$$

$$nU_6\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = -\tfrac{21}{256}G_2(n) - \tfrac{35}{48}G_4(n) + \tfrac{1}{24}G_6(n)$$

$$nU_8\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = \tfrac{18271}{4096}G_2(n) - \tfrac{8337}{512}G_4(n) + \tfrac{85}{48}G_6(n) - \tfrac{1}{44}G_8(n)$$

$$nU_{10}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = \tfrac{16180951}{65536}G_2(n) - \tfrac{6422435}{6144}G_4(n) + \tfrac{90943}{640}G_6(n) - \tfrac{543}{176}G_8(n) + \tfrac{1}{75}G_{10}(n)$$

$$\begin{aligned} nU_{12}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{41997202611}{1048576}G_2(n) - \tfrac{68523014021}{393216}G_4(n) + \tfrac{1097088289}{43008}G_6(n) - \\ & - \tfrac{342111}{512}G_8(n) + \tfrac{1133}{240}G_{10}(n) - \tfrac{1}{114}G_{12}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{14}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{248669854673603}{16777216}G_2(n) - \tfrac{68052696874435}{1048576}G_4(n) + \tfrac{9532351392421}{983040}G_6(n) - \\ & - \tfrac{1105778401}{4096}G_8(n) + \tfrac{43310267}{19200}G_{10}(n) - \tfrac{6097}{912}G_{12}(n) + \tfrac{1}{161}G_{14}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{16}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{2909419346984333831}{268435456}G_2(n) - \tfrac{4783910393581167031}{100663296}G_4(n) + \\ & + \tfrac{7483065768091849}{1048576}G_6(n) - \tfrac{52982924993193}{262144}G_8(n) + \tfrac{36494379493}{20480}G_{10}(n) - \\ & - \tfrac{179981893}{29184}G_{12}(n) + \tfrac{3305}{368}G_{14}(n) - \tfrac{1}{216}G_{16}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{18}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{60744738617214376444335}{4294967296}G_2(n) - \tfrac{12489018115953506248835}{201326592}G_4(n) + \\ & + \tfrac{4107272868321959300807}{440401920}G_6(n) - \tfrac{1529918964315664377}{5767168}G_8(n) + \\ & + \tfrac{5835930414241499}{2457600}G_{10}(n) - \tfrac{503828721149}{58368}G_{12}(n) + \tfrac{21420901}{1472}G_{14}(n) - \\ & - \tfrac{5015}{432}G_{16}(n) + \tfrac{1}{279}G_{18}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} nU_{20}\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right) = {} & \tfrac{2099543857253492320406595931}{68719476736}G_2(n) - \tfrac{1151179945136215796266665347}{8589934592}G_4(n) + \\ & + \tfrac{4057413215226496747266091}{201326592}G_6(n) - \tfrac{1059049402077805190 5061}{184549376}G_8(n) + \\ & + \tfrac{40556259310967555519}{7864320}G_{10}(n) - \tfrac{3737235414418597}{196608}G_{12}(n) + \\ & + \tfrac{790217331055}{23552}G_{14}(n) - \tfrac{709418143}{23040}G_{16}(n) + \tfrac{21679}{1488}G_{18}(n) - \tfrac{1}{350}G_{20}(n) \end{aligned}$$

表 4：通过基 (69) 得到的多项式 $nU_m\left(\tfrac{3}{4},\tfrac{\pi n^2}{3}\right)$。

$$G_1(n) = -2nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_2(n) = -nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_3(n) = -\tfrac{13}{8}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + 2nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_4(n) = -\tfrac{33}{8}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - 6nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_5(n) = -\tfrac{1851}{128}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{85}{4}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - 2nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_6(n) = -\tfrac{16611}{256}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{735}{8}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + 21nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$G_7(n) = -\tfrac{727497}{2048}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{60739}{128}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{1477}{8}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + 2nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3})$$

$$\begin{aligned} G_8(n) = &-\tfrac{2351745}{1024}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{183029}{64}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{6545}{4}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \\ &-44nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_9(n) = &-\tfrac{561268215}{32768}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{10094789}{512}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{982527}{64}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \\ &+\tfrac{1401}{2}nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - 2nU_{10}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{10}(n) = &-\tfrac{9488044485}{65536}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{156659325}{1024}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{19815705}{128}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \\ &-\tfrac{40725}{4}nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + 75nU_{10}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{11}(n) = &-\tfrac{717105141765}{524288}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \tfrac{43195052901}{32768}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{1724416375}{1024}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \\ &+\tfrac{9334149}{64}nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{15015}{8}nU_{10}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + 2nU_{12}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12}(n) = &-\tfrac{7488983814435}{524288}nU_2(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{408626277477}{32768}nU_4(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \\ &+\tfrac{20218928565}{1024}nU_6(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - \tfrac{136171233}{64}nU_8(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) + \\ &+\tfrac{322905}{8}nU_{10}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) - 114nU_{12}(\tfrac{3}{4}, \tfrac{\pi n^2}{3}) \end{aligned}$$

Table 5: Polynomials $G_m(n)$ via basis (72).