Prepared for submission to JHEP

超共形杨-米尔斯局域化中错误的复苏

arXiv:2602.05733v1 [hep-th] 5 Feb 2026

Inˆes Aniceto[1,3] **James Ratcliffe**[2,3] **Itamar Yaakov**[1,3]

[1]南安普顿大学数学科学学院，海菲尔德，南安普顿 *SO17 1BJ*，英国[2]南安普顿大学物理与天文学系，海菲尔德，南安普顿 *SO17 1BJ*，英国[3]南安普顿大学 *STAG* 研究中心，海菲尔德，南安普顿 *SO17 1BJ*，英国电子邮箱：
I.Aniceto@soton.ac.uk，J.Ratcliffe@soton.ac.uk，
I.Yaakov@soton.ac.uk

Abstract: 我们为超共形 SU(2) 杨-米尔斯规范理论在四维球面上的配分函数解析延拓至任意杨-米尔斯耦合常数值提供了物理解释。我们证明，一种有充分动机的二维构造将二维不稳定瞬子与四维复鞍点联系起来；后者表现为超对称局域化表达式中被积函数的奇点。该构造以手征代数子扇区为基础，并与另一种希格斯支局域化相吻合。

目录

1 引言 1 **2 未经局域化的希格斯分支 3** **3 局域化错误频出 9** **4 关于手征代数与不稳定构型 13** 4.1 动机及与前人工作的联系 13 4.2 二维模型 16 **5 讨论 25** **A 留数 26**

1 引言

量子场论中的非微扰效应通常与运动方程非常明显、稳定且往往受拓扑保护的经典解相关联。尽管这些是最容易识别的构型，但其他构型在处理特定物理问题时可能同样重要。路径积分的复苏分析为研究量子场论可观测量对耦合常数依赖关系的解析结构提供了一种整体方法，同时纳入微扰效应与非微扰效应，并众所周知地将二者联系起来（详见 [1, 2]的详细综述）。事实上，重现是通过解析延拓研究所有非微扰效应的自然框架，常常会捕捉到被“物理”区域所忽略的项。在本文中，我们研究这样一种情形：标准微扰理论和受拓扑保护的经典解都无法为所涉及的物理提供良好指引。相反，我们将利用复苏分析来研究某一可观测量中较为微妙的非微扰贡献，并最终在超对称局域化的帮助下将其识别为不稳定构型。

我们分析的背景是四维 $\mathcal{N}=2$ 规范理论中超对称可观测量的精确表达式。我们将重点关注该理论以超对称方式耦合到圆形四维球面曲率时的配分函数。研究表明，该可观测量的路径积分经由超对称局域化，化为一个有限维积分；积分变量是取值于规范群 [3]，卡当子代数的玻色自由度，称为库仑支。被积函数（即一圈行列式）由多重伽马函数之比构成，是应用精确鞍点近似的结果。对于规范群 SU(2)，该被积函数中最重要的部分

为

$$Z^{\mathrm{SU}(2)}_{1-\mathrm{loop}}(a) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{4a^2}{n^2}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{8n}} \,. \tag{1.1}$$

此外，该表达式还包含对与超对称瞬子和反瞬子相关的非微扰贡献求和，它们也会对被积函数作出贡献。这些是上文提及的显而易见类型的经典构型，在我们的分析中不会发挥作用。相反，我们将从相关二维量子场论的经典构型出发，对式（1.1）中的极点作出物理解释。我们将借助 [4], 的手征代数构造，特别是借助其中在四维球面上的实现（见 [5]），阐明该理论的作用量和对称性。

定义库仑支表达式的积分是收敛的，但被积函数在复平面上有极点。从纯数学的角度看，这些积分的复苏分析可归结为留数定理。在这种情况下，整体复苏方法的价值在于帮助我们确定极点的物理意义，而非将其用作计算工具。正如我们将要证明的，对于物理取值的杨-米尔斯耦合，对这些极点求和并无意义；正确的解释是将配分函数解析延拓到耦合常数的复数取值。将该表达式视为博雷尔平面上的拉普拉斯积分来分析这些极点，也将使我们能够对其物理起源提出有依据的假设。我们注意到，我们遇到的博雷尔平面奇点类型类似于拓扑弦论背景下所观察到的孔雀模式的简化版本 [6, 7]。

研究博雷尔平面中的奇点，对于理解那些有助于量子场论或弦论可观测量解析表达式的非微扰效应至关重要；若将考察范围限定在某些“物理设定”中，这些效应便会被忽略。例如，在量子力学中，可通过将耦合常数解析延拓至负值来获得隧穿效应 [8, 9]。在量子场论中，存在重整子——微扰理论中圈积分产生的非微扰贡献，它们会促成其 $n!$ 增长。紫外中的重整子由沿负实轴分布的博雷尔平面奇点所标示 [10–13]。复苏分析还预言了其他额外构型，在量子场论和弦论可观测量中均有体现，例如例如 [14] （分形子）和 [15, 16] （负张力D膜）。在可局域化可观测量的背景下， [17–24]研究了博雷尔平面奇点及重求和方法的作用。

根据物质内容的不同，一些可进行局域化的超对称模型允许采用多种局域化方案。本工作特别关注“希格斯分支”和“库仑分支”局域化方案。由于局域化与选择何种局域化方式无关，因此通过这两种方案计算出的结果应当相同。事实上，在库仑分支计算中，希格斯分支模态往往表现为奇点。对于某些模型，这些奇点的起源可以通过涡旋和反涡旋场构型 [25–30] 得到充分理解。在 $\mathbb{S}^4$ 上的四维理论中， [31] 的作者成功得到了一个经希格斯分支局域化的表达式，但它与库仑分支的联系则

不那么清楚。在此背景下，沿着 [31], 的工作，我们将阐述希格斯支表达式与库仑分支积分奇点之间的关联方式，并最终将其与我们的二维模型联系起来。

结果总结：我们首先讨论研究复 $g_{\rm YM}$ 空间中非微扰对象的物理重要性，并在第2节介绍四维物理模型。通过识别在 $g_{\rm YM}$的虚数值处变得重要的磁单极子构型，我们将得到四维路径积分的一种希格斯分支形式，并证明它在解析上与配分函数的库仑分支形式相关。在第3节，我们运用复苏分析表明，库仑分支中的奇点可由一系列误差函数的非微扰数据描述，这强烈暗示了它与二维物理之间的联系。在第4节，我们将结果与手征代数子扇区联系起来，并利用二维超对称局域化复现四维表达式。最后，我们在第5节总结结果，并讨论如何将其推广到四维中一大类超共形模型。

2 无局域化的希格斯支

在本文中，我们将研究 $\mathcal{N}=2$SU(N_c)超杨-米尔斯（SYM）理论，该理论包含 N_f 个基本无质量超多重态，并以超对称方式与四维球面的曲率耦合。根据 [3], ，该理论的配分函数局域化为一个规范固定矩阵模型，其形式由积分[1]给出

$$\mathcal{Z} \propto \int \mathrm{d}^{N_c-1}\lambda \prod_{1\le i<j\le N_c} (\lambda_i-\lambda_j)^2\, \mathrm{e}^{-\frac{2}{g_{\rm YM}^2}\sum_{i=1}^{N_c}\lambda_i^2} Z_{1-\rm loop}(\lambda)\,|Z_{\rm inst}\,(g_{\rm YM},\lambda)|^2\,, \tag{2.1}$$

其中， λ_i 参数化卡当子代数，而 $Z_{\rm inst}$ 是 Nekrasov 瞬子配分函数 [32]。我们将此称为配分函数的库仑支表达式。

考虑 SU(2) 规范群这一最简单的情形。对于这一选择，矩阵模型（2.1）化为

$$\mathcal{Z} = \frac{128\pi^{5/2}}{g_{\rm YM}^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}a\, a^2\, \mathrm{e}^{-\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2}\, \frac{(G(1+2a\mathrm{i})G(1-2a\mathrm{i}))^2}{(G(1+a\mathrm{i})G(1-a\mathrm{i}))^{2N_f}}\,|Z_{\rm inst.}|^2\,, \tag{2.2}$$

其中我们引入了脚注 1中提到的归一化常数，并且$G(1+z)$ 是 Barnes–G 函数,

$$G(1+z) = (2\pi)^{z/2}\,\mathrm{e}^{-((1+\gamma z^2)+z)/2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+\frac{z^2}{2n}}\,. \tag{2.3}$$

我们将用以下简写表示上述 Barnes–G 函数组合

$$\mathcal{G}_{N_f}(a) \equiv \frac{(G(1+2a\mathrm{i})G(1-2a\mathrm{i}))^2}{(G(1+a\mathrm{i})G(1-a\mathrm{i}))^{2N_f}}\,. \tag{2.4}$$

[1] 比例符号表示积分之外的一个数值因子，我们稍后将引入该因子。这样对积分进行归一化后，在自由理论极限 $g_{\rm YM}\to 0$ 下其值为 1。这并不是配分函数通常采用的归一化方式，但对我们的目的而言最为方便。

正如 [17], 利用 Barnes–G 函数的乘积表示式（2.3）所详述的，可以看出，被积函数的奇点是位于虚 a轴上的极点。同样，SU(N_c) 理论的库仑分支局域化积分表达式，其被积函数也只有极点奇异性，且这些极点位于实轴之外。

此外，SU(2) 理论的配分函数也存在一种希格斯分支表达式，见 [31].[2] 希格斯分支定位方案中的物理构型部分由整数 n标记，该整数记录了光滑涡旋类构型的绕数以及奇异 Seiberg-Witten 单极子的陈类。[3]此类构型的经典贡献为

$$\mathrm{e}^{-S_{\text{classical}}} = \exp\left(\frac{16\pi^2 n^2}{g_{\text{YM}}^2}\right) . \tag{2.5}$$

与库仑分支表达式（2.2）相比，我们将看到，可以把这些构型的指数化作用量识别为库仑分支被积函数在极点处的留数的一部分。在关联这两种方案的表达式时，这是一种典型情形。因此，我们暂且将两者视为相同，并尝试通过对库仑分支积分进行留数计算，确定这些构型的贡献。

因此，我们的目标是将（ $\mathcal{Z}$ 2.2）中的配分函数 $\mathcal{Z}$ 完全用希格斯分支对象表示，并正确理解它们的作用。从（2.5）可以清楚看出，若不进行重求和，这些对象无法在实数 g_{YM} 范围内发挥作用，因为它们会呈指数增强。因此，直接对这些项求和所得的表达式，其收敛域将是复平面的一个真子区域。因此，我们必须确定在什么条件下， $\mathcal{Z}$ 可以写成希格斯分支对象之和，或者等价地，写成留数之和。为回答这一问题，我们将分析$|a|$中被积函数的大 $\mathcal{Z}$行为。

A渐近地，当 $|z| \to \infty$ 对于 $|\arg(z)| < \pi$,[4] 时，Barnes–G 函数的表现为 [3 3]

$$G(1+z) \approx \exp\left(\frac{3}{4}z^2 + \left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{12}\right)\log(z) + \frac{z}{2}\log(2\pi)\right) . \tag{2.6}$$

完整商式的渐近$|a|$ 行为 $\mathcal{G}_{N_f}(a)$ 在 (2.4) 中为

$$\mathcal{G}_{N_f}(a) \approx \exp\left((N_f - 2N_c)((2a^2 + 1/3)\log(a) - 3a^2) - \left(4a^2\right) N_c \log(2)\right) . \tag{2.7}$$

范德蒙行列式的贡献为 log(a)，因此不会影响我们的分析。被积函数在 (2.2) 中的渐近$|a|$性质因此由以下两者的

[2] [31]中的分析针对 U(N) 理论，并使用了 SU(N) 理论中不可用的 FI 参数。作者利用该参数抑制路径积分中的某些贡献。我们认为，在超共形情形下，即使没有这一参数，大多数相关结果仍然成立。具体而言，BPS 方程及其解出的构型仍然有效。[3]我们考虑圆四球极限，即压扁参数为零的情形；此时，用于标记 [31] 中 BPS 构型的两个整数退化为一个。[4]我们的相位约定使得 arg(z) 从 $-\pi$ 变化到 π。

竞争决定：(2.7) 与 $g_{\rm YM}$相关的贡献

$$\mathrm{e}^{-\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2}\mathcal{G}_{N_f}(a)\approx\exp\left(-\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2+(N_f-2N_c)(2a^2\log(a)-3a^2)-4a^2N_c\log(2)\right). \quad (2.8)$$

需要考虑三种情况。如果 $N_f > 2N_c$，那么（2.2）中的积分表达式会发散，因而没有良好定义。这类理论不是渐近自由的。反之，如果$N_f < 2N_c$，那么（2.8）在极点 $a = \mathrm{i}k$处取值后，对于较大的 k，其行为为

$$\exp\left(\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}k^2\right)\mathcal{G}_{N_f}(\mathrm{i}k)\approx\exp\left(2k^2(2N_c-N_f)\log(k)\right). \quad (2.9)$$

因此，对于任意取值，所有留数之和都会发散。最后一种情况是$N_f = 2N_c$，此时（2.8）中的问题项消失。回想一下，具有 ββ 函数的$\mathcal{N} = 2$ 理论中，若含有 N_f 超多重态，则其行为为

$$\beta_{\mathcal{N}=2}\sim -2N_c+N_f, \quad (2.10)$$

我们看到，对于这种物质内容，该理论是超共形的。由此得出结论：只有当理论为超共形理论时，原始积分（2.2）和留数之和才会同时有意义，尽管对应的 $g_{\rm YM}$取值可能不同。今后我们将采用这一判据，并将该理论称为超共形杨-米尔斯理论（ScYM），将配分函数记为 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM})$。

现在我们可以继续确定留数的精确形式。我们的分析仅限于零阶瞬子扇区。这里严格来说是指不包含瞬子或反瞬子贡献的扇区，而不是瞬子荷为零的扇区。高阶瞬子扇区的分析可依此类推：$Z_{\rm inst}$ 在 a 的虚轴上产生的极点，其阶数严格低于$\mathcal{G}_{N_f}(a)$的零点阶数，且位置不同，如 [17]中所述。因此，每个瞬子扇区的奇异性结构都相同，但留数会有所改变。

对于 $N_f = 2N_c = 4$，我们发现 $\mathcal{G}_4(a)$在 $a = \pm\mathrm{i}\,n$, $n \in \mathbb{Z}_+$ 处有 $4n$阶极点。为计算留数，我们按照 [17], 的做法，对

$$\mathcal{J}(a) := (a-a_n)^{4n}\mathcal{I}(a), \quad (2.11)$$

并取极限 $a \to a_n$，其中 $\mathcal{I}(a)$是被积函数，定义为在（ $N_f = 2N_c = 4$ ）的零阶瞬子扇区中取2.2）

$$\mathcal{Z}^{k=0}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},0) := \frac{1}{g^3_{\rm YM}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}a\,\mathcal{I}(a). \quad (2.12)$$

上述第二个参数的含义稍后将介绍。通常，我们会省略下标 $k = 0$，并默认我们按照上文所述，讨论的是零阶瞬子扇区。留数的推导见附录 A。其 $\mathcal{I}(a_n)$ 的洛朗级数的显式表达式很长，涉及

黎曼 ζ 函数值的多项式。对我们的目的而言，只需指出留数具有如下示意形式

$$\mathcal{R}(n) := \frac{1}{g_{\rm YM}^3}\text{Res}[\mathcal{I}(\pm \text{i}n)] = \frac{1}{2g_{\rm YM}^3}\exp\left(\frac{16\pi^2 n^2}{g_{\rm YM}}\right)\sum_{\ell=0}^{4n-1}\frac{(-1)^{4n-\ell-1}}{\Gamma(4n-\ell)\ell!}\,f_{n,\ell}\,g_{\rm YM}^{-2(4n-1-\ell)}\,, \tag{2.13}$$

其中 $f_{n,\,\ell}$ 是与 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$相关的博雷尔变换的系数，后文将在^第 3节中介绍。它们与 $f_{n,\,\ell}$ 的系数相关，这些系数出现在 $\mathcal{I}(a)$ 去掉指数因子后的洛朗级数中

$$128\pi^{5/2}a^2\frac{(G(1+2a\text{i})G(1-2a\text{i}))^2}{(G(1+a\text{i})G(1-a\text{i}))^8} \sim \frac{1}{(a-\text{i}n)^{4n}}\sum_{\ell=0}^{\infty}\hat{f}_{n,\ell}\,(a-\text{i}n)^{\ell}\,. \tag{2.14}$$

所有这些系数均在附录 A中推导并列出。不过，目前我们感兴趣的是计算留数求和（2.13），因此需要了解其收敛性质；这取决于当 $n\to\infty$时留数的n 渐近行为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(n\to\infty) &\sim \exp\left[\frac{16\pi^2n^2}{g_{\rm YM}^2} + \sum_{k=1}^{n}(12k-8n)\log(k) - \sum_{k=n+1}^{2n}(4k-8n)\log(k)\right]\\ &\sim \exp\left[\frac{16\pi^2n^2}{g_{\rm YM}^2} + 8n^2\log(2)\right]\,.\end{aligned} \tag{2.15}$$

将其与被积函数 a 的 $\mathcal{I}$（a）在（2.12）中的大

$$\mathcal{I}(a) \simeq \exp\left[-\left(\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2 + 8a^2\log(2)\right)\right]\,, \tag{2.16}$$

我们可以看到，对于实数 a，积分和留数无穷和在 $g_{\rm YM}$ 空间中的收敛区域互为补集，即当一个收敛时，另一个发散。这表明，如果原积分与留数求和之间存在关系，那么这种关系必然要通过解析延拓建立。

我们进一步详细说明这一点。尽管 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$与留数求和的收敛域彼此不相交，但定义 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的围道可以旋转，使旋转后的收敛域同时与留数求和及原始围道重叠。从这个意义上说，留数与原始围道在解析上彼此相关。为具体说明这一点，我们将考虑一个单参数围道族：其中 $a\in(-\infty,0)$ 和 $a\in(0,\infty)$ 以相位 ϕ旋转至复 a平面的上半平面，如图 1 所示。我们分别将这些围道称为负围道和正围道。相应的配分函数记为 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},\phi)$。原始围道对应于 $\phi=0$，其中 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},0)$ 先前已在式 (2.12) 中定义。由被积函数 (2.16) 在大 a 时的行为可知，对于 $\phi<\pi/4$，当 $\arg(a)<\pi/4$ 或 $\arg(a)>3\pi/4$ 时，$\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},\phi)$ 的积分表达式收敛

$$\mathfrak{Re}\left[\frac{a^2}{g_{\rm YM}^2}\right] \geq \mathfrak{Re}\left[-\frac{8\log(2)}{16\pi^2}a^2\right]\,. \tag{2.17}$$

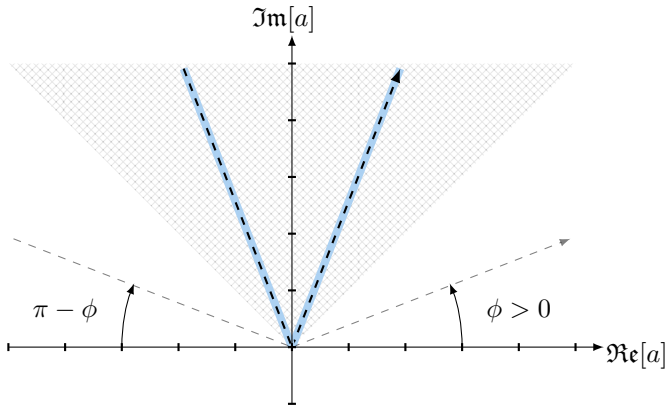

图1：将积分围道 $a \in (-\infty,\ \infty)$ 旋转的示意图。对于阴影区域内的围道，可以选择 $\pi/4 < \arg(a) < 3\pi/4$, $g_{\rm YM}$ ，使这些围道等于留数求和。蓝色标出了一个这样的围道。

对于 $\phi > \pi/4$，不等式方向相反。具体而言，取 $\arg(g_{\rm YM}) = \varphi$ 和$\phi > \pi/4$ ，我们得到

$$\frac{2\pi^2}{\log(2)}\frac{\cos(2(\varphi+\phi))}{\cos(2\phi)} + |g_{\rm YM}|^2 \geq 0\,. \tag{2.18}$$

对于给定的 ϕ，这划分出了整个复 $g_{\rm YM}$ 平面，但 8字形围成的区域除外；在该区域之外，$\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},\ \phi)$ 收敛。随着 ϕ 增大，对于正向围道，8字形逆时针旋转并扩大；对于负围道，则顺时针旋转并扩大。图 2 展示了正向围道的这一行为。发散区域标记为 I，收敛区域标记为 II。相比之下，在固定的8字形内，留数求和是收敛的，该区域在图 2a 中以粉色阴影表示。我们将这个8字形的内部记为 $\mathfrak{D}$。若要使旋转围道积分等于留数求和，则对于给定的 $g_{\rm YM} \in \mathfrak{D}$，围道的两半以及留数和必须同时收敛。

我们可以如下确定合适的围道。随着我们旋转，每个半围道的收敛区域开始与留数和的收敛区域重叠。不过，它们尚未彼此重叠。最终，在 $\phi = \pi/4$处达到一个临界点，此时，对于正向围道，发散区域充满复 $g_{\rm YM}$平面的第二和第四象限，如图 2b所示；而对于负向围道，则充满第一和第三象限。继续越过这一点后，发散区域 I 与收敛区域 II 互换：积分在图 2c所示的八字形图形所围成的区域内收敛。此外，两个半围道的收敛区域都与留数和的收敛区域彼此重叠：在此区域内，两个半围道上的积分均收敛，且对于 $g_{\rm YM} \in \mathfrak{D}$，它们都等于留数求和。在复 a平面中，该区域是图 1 中的灰色阴影区域，蓝色高亮显示了一个此类围道的示例。

从图2 中我们还可以看到，当 ϕ =$\pi/4$时的收敛域（如图2b所示）既与图2a 中原始围道的收敛区域重叠，也与上文提到的留数求和的收敛区域重叠。我们

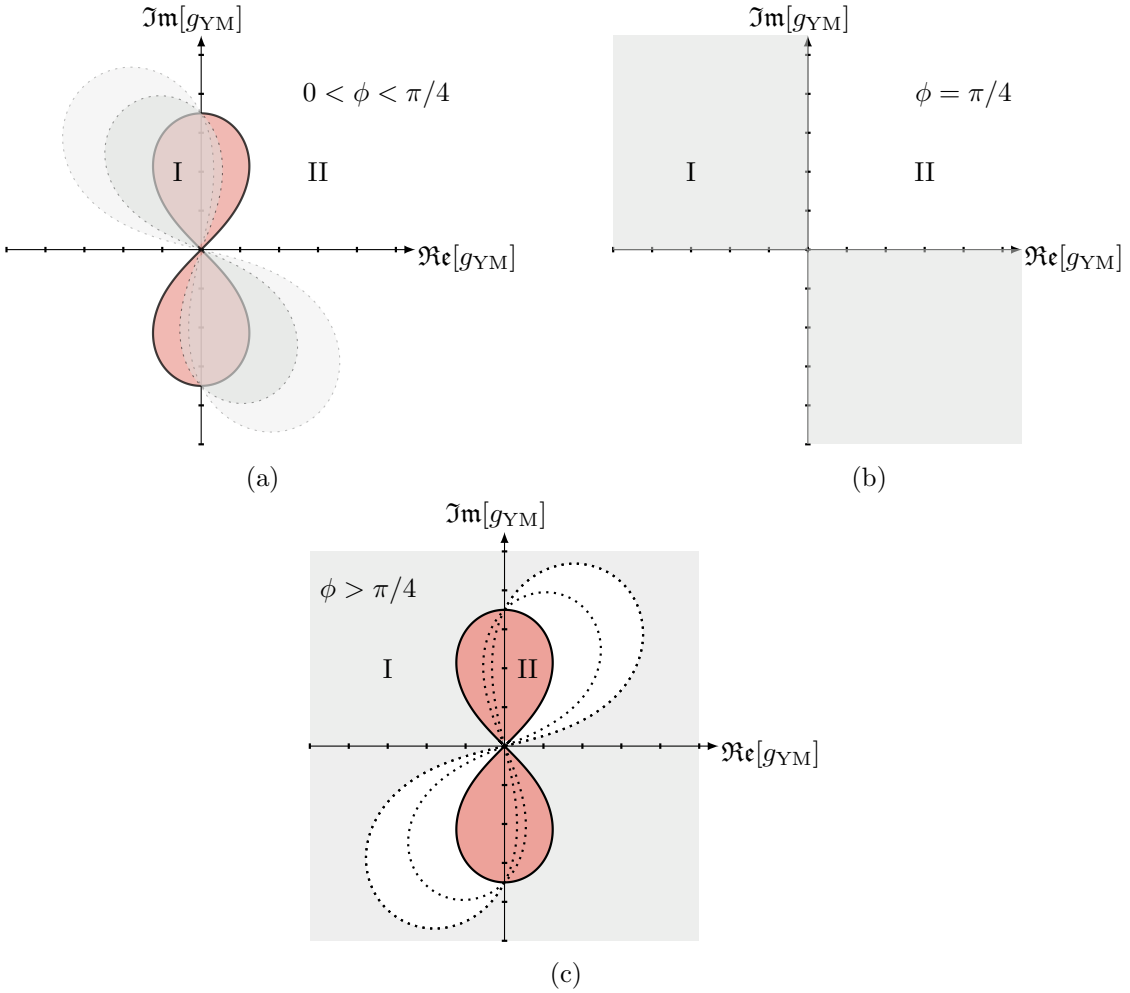

图2：描绘定义$\mathcal{Z}(g_{\rm YM},\phi)$的正向围道收敛行为的示意图。对应的旋转在 a–平面中示于图1。在2a 中，我们将围道旋转 ϕ，可以看到发散区域逆时针旋转并扩大。极限情形如2b所示，此时 $\phi = \pi/4$：发散区域是整个第二和第四象限平面。若继续旋转 $\arg(a) > \pi/4$，区域将翻转，此时积分在 8 字形内部收敛。红色阴影区域是留数形式和收敛的区域。定义$\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},\phi)$的负向围道的对应行为，可通过将这些示意图关于 y–轴反射得到。

已针对收敛域内的多个 $g_{\rm YM}$ 值，显式验证了这种收敛性以及积分与留数和之间的相等关系，验证范围达到留数和的三阶。例如，对于 $g_{\rm YM} = 4\mathrm{i}$，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(4\mathrm{i}) &= 3.98817\,\mathrm{i}\,;\\ \mathcal{Z}_{\rm ScYM}(4\mathrm{i}) - 2\pi i\,\mathcal{R}(1) &= 0.00199463\,\mathrm{i}\,;\\ \mathcal{Z}_{\rm ScYM}(4\mathrm{i}) - 2\pi i\,(\mathcal{R}(1)+\mathcal{R}(2)) &= -2.89333\times 10^{-11}\,\mathrm{i}\,,\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中留数 $\mathcal{R}(n)$ 在（2.13）中定义，其系数见附录 A。我们注意到

最后一个等式的阶数为第三个留数， $2\pi\mathrm{i}\,\mathcal{R}(3) = -2.93979 \times 10^{-11}$。

我们之所以反复强调这一点，是有充分理由的。路径积分一般并不等于留数求和，尽管希格斯分支局域化通常会如此推断。更确切地说，二者通过解析延拓相等。路径积分 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}(g_{\mathrm{YM}})$ 与 ϕ无关，并且是耦合常数的解析函数。积分和求和应被视为该函数的表示，每种表示都只在特定区域内成立。一种形式表达式成立而另一种不成立的区域，应被视为彼此的解析延拓。完整函数 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}(g_{\mathrm{YM}})$，如果能够显式计算出来，就应视为这些局部图景的完整重求和。在理想情况下，这一结果可以重新求和为一种形式，使得 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}$ 关于 g_{YM} 的解析性质一目了然。例如，回想等式$\sum_n x^n = 1/(1-x)$。这里，求和是该解析函数的一种表示，在$|x| < 1$时成立。因此，函数 $1/(1-x)$ 是几何级数的解析延拓。然而，在我们的情形中，由于各留数（2.13）的系数$f_{n,\,\ell}$ 形式复杂，且指数因子对呈二次依赖，显式重求和是一项艰巨的任务。 n 。

因此，四维配分函数的最终结果为

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{Z}^{k=0}_{\mathrm{ScYM}}(g_{\mathrm{YM}}) &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=0}\mathcal{R}(n)\\ &= \frac{\pi\mathrm{i}}{g^3_{\mathrm{YM}}}\sum_{n=0}\exp\left(\frac{16\pi^2n^2}{g_{\mathrm{YM}}}\right)\sum_{\ell=0}^{4n-1}\frac{(-1)^{4n-\ell-1}}{\Gamma(4n-\ell)\ell!}\,f_{n,\ell}\,g_{\mathrm{YM}}^{-2(4n-1-\ell)}\end{aligned}\right\}\quad g_{\mathrm{YM}}\in\mathfrak{D}\,. \tag{2.20}$$

总而言之，通过考察留数（2.13）的形式，并与 [31]的局域化结果进行比较，我们可以将指数项解释为 Seiberg-Witten 单极子的经典作用量。这符合这样一种预期：该结果可视为库仑支积分的希格斯分支形式。若能明确计算该理论的希格斯分支局域化，并观察其与留数之和的关系，将会很有意思：它是否恰好就是我们得到的结果，还是其解析延拓?本文不探讨这个问题。相反，我们希望了解希格斯分支结果（2.13）在其收敛区域内具有怎样的物理意义，并将 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}$ 的库仑支形式解释为它的解析延拓。为此，在下一节中，我们将从 [17, 34]的结果出发，运用复苏分析，深入理解这些复鞍点的含义。

3 局域化错误百出

我们希望为留数（2.13）提供一种物理解释。为此，我们以 [17, 34], 的结果为基础，将原始积分（2.2）识别为一系列拉普拉斯变换之和，从而可以应用复苏分析。我们首先回顾 [17]的相关结果。文中证明，库仑分支积分的正、负两半部分分别具有 g^2_{YM}中的发散渐近级数。我们可以如下明确地展示这一点。将 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}(g_{\mathrm{YM}},\ \phi)$ 的积分围道分为正半部分和

我们先前引入的负半部分，具体而言，有

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}(g_{\mathrm{YM}},\phi) &= \frac{128\pi^{5/2}}{g_{\mathrm{YM}}^3}\left[\int_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\phi)}\infty}^{0} \mathrm{d}a_-\; a_-^2\;\exp\left(\frac{-16\pi^2}{g_{\mathrm{YM}}^2}a_-^2\right)\mathcal{G}_4(a_-)\right.\\ &\qquad\left.+\int_0^{+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\infty}\mathrm{d}a_+\; a_+^2\;\exp\left(\frac{-16\pi^2}{g_{\mathrm{YM}}^2}a_+^2\right)\mathcal{G}_4(a_+)\right] \qquad (3.1)\\ &= \frac{1}{g_{\mathrm{YM}}^3}\left(\mathcal{W}(g_{\mathrm{YM}},\phi)-\mathcal{W}(g_{\mathrm{YM}},\pi-\phi)\right)\,,\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{G}_4(a)$ 由式 (2.4) 给出，并引入了半积分的简写符号

$$\mathcal{W}(g_{\mathrm{YM}},\phi) \coloneqq 128\pi^{5/2}\int_0^{+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\infty}\mathrm{d}a\,a^2\exp\left(\frac{-16\pi^2}{g_{\mathrm{YM}}^2}a^2\right)\mathcal{G}_4(a)\,. \qquad (3.2)$$

每个积分 $\mathcal{W}$ 都可以通过函数 $a=\frac{\sqrt{s}}{4\pi}$ 改写为拉普拉斯变换。该映射作用于 $\mathcal{W}$ 后的结果为

$$\mathcal{S}_\theta\mathcal{W}(g_{\mathrm{YM}},\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\infty}\mathrm{d}s\,\sqrt{s}\exp\left(-\frac{s}{g_{\mathrm{YM}}^2}\right)\mathcal{G}_4(\sqrt{s}/4\pi)\,, \qquad (3.3)$$

w这里 $\theta=2\phi$。正如 [17, 34]，中所示，这个积分具有发散渐近级数 es

$$2g_{\mathrm{YM}}^3\cdot\mathcal{W}(g_{\mathrm{YM}},0)\sim 1-\frac{45\,\zeta(3)}{256\pi^4}\,g_{\mathrm{YM}}^4+\frac{525\,\zeta(5)}{4096\pi^6}\,g_{\mathrm{YM}}^6+\mathcal{O}(g_{\mathrm{YM}}^8)\,. \qquad (3.4)$$

众所周知，可以利用3.4) 中的斯托克斯现象来理解式 (博雷尔重求和，并由此得到重求和结果。简而言之，一般来说，每当遇到如下类型的发散渐近级数时

$$\mathcal{W}(g)\simeq\sum_{k\geq 0}c_k\,g^{k+\beta}\,, \qquad (3.5)$$

其系数按 $c_k\sim\Gamma(k+\beta)$ 的形式发散，其中 β 为某个数，就可以进行博雷尔变换

$$\mathcal{B}[\mathcal{W}](s)\coloneqq\sum_{k\geq 0}\frac{c_k}{\Gamma(k+\beta)}\,s^{k+\beta-1}\,, \qquad (3.6)$$

位于博雷尔 s平面中，它有效地消除了系数的阶乘增长，并得到一个收敛半径有限的级数。随后，可以沿着特定方向 $\arg(s)=\theta$ 对该级数的重求和/解析延拓进行拉普拉斯积分，从而得到原发散级数有意义的重求和表达式

$$\mathcal{S}_\theta\mathcal{W}(g)=\int_0^{+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\infty}\mathrm{d}s\,\mathrm{e}^{-s/g}\,\mathcal{B}[\mathcal{W}](s)\,. \qquad (3.7)$$

然而，要使上述拉普拉斯变换有良好定义，积分围道不得经过博雷尔平面中的任何奇点。当围道经过奇点时——也就是沿着所谓的斯托克斯线 ——就必须考虑非微扰效应。具体来说，这意味着

在某个 $\arg(s) = \theta$ 处，斯托克斯线两侧的上述拉普拉斯变换相差一个非微扰差。这个差恰好对应于原始重新求和级数沿着 g 平面中相应方向的不连续性

$$\mathcal{S}_{\theta_+}\mathcal{W} - \mathcal{S}_{\theta_-}\mathcal{W} = -\mathcal{S}_\theta \,\mathrm{Disc}_\theta\, \mathcal{W}(g)\,, \tag{3.8}$$

如果后者也具有渐近性，则可能需要对不连续性进行拉普拉斯求和。关于斯托克斯现象的深入综述，请参阅例如，[1, 2]。

如 [17], 所示，与级数（3.4）相关的斯托克斯线位于 s的负实轴上，博雷尔平面上的极点位于 $-16\pi^2\, n^2$、 $n \in \mathbb{N}$，相应的不连续性可表示为以下形式的和

$$2g_{\rm YM}^3 \cdot \mathrm{Disc}_\pi \mathcal{W}(g_{\rm YM}, \theta) = 2\pi \mathrm{i} \sum_{n\in\mathbb{N}} \exp\left(\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2} n^2\right) \sum_{\ell=0}^{4n-1} \frac{(-1)^{4n-\ell-1}}{\Gamma(4n-\ell)\ell!}\, f_{n,\ell}\, g_{\rm YM}^{-2(4n-1-\ell)}\,. \tag{3.9}$$

我们看到，该级数中的各项与（2.13）中出现的留数相符，正如预期的那样。[5] 现在，我们可以正式将（2.13）中的系数引入为博雷尔变换的洛朗级数系数；该博雷尔变换定义于（3.3），最初见于 [17]

$$\mathcal{B}[\mathcal{W}](s)|_{s_n} = \frac{1}{(s-s_n)^{4n}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{f_{n,\ell}}{\ell!}\,(s-s_n)^\ell\,. \tag{3.10}$$

ˆ 它们与 a变量中相应系数$f_{n,\,\ell}$ 的关系定义于（2.14），见附录A。作为其形式的一个示例，领先阶系数$f_{n,\,0}$为

$$f_{n,0} = \mathrm{i}\cdot n^{1+4n} 2^{3+24n} \pi^{8n+1/2} \exp\left[\sum_{k=1}^{n}(12k-8n)\log(k) - \sum_{k=n+1}^{2n}(4k-8n)\log(k)\right]\,. \tag{3.11}$$

高阶系数涉及 g^{-2} YM 修正以及黎曼 ζ-函数中的多项式。

现在考虑用拉普拉斯变量定义的两个半围道，见公式 (3.1) le

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM},\theta) &= \frac{1}{g_{\rm YM}^3\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\infty} \mathrm{d}s\,\sqrt{s}\exp\left(-\frac{s}{g_{\rm YM}^2}\right)\mathcal{G}_4(\sqrt{s}/4\pi)\right.\\ &\qquad\left. - \int_0^{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\infty} \mathrm{d}s\,\sqrt{s}\exp\left(-\frac{s}{g_{\rm YM}^2}\right)\mathcal{G}_4(\sqrt{s}/4\pi)\right]\\ &= \frac{1}{g_{\rm YM}^3}\left(\mathcal{S}_\theta\mathcal{W}(g_{\rm YM},\theta) - \mathcal{S}_{-\theta}\mathcal{W}(g_{\rm YM},-\theta)\right)\\ &= \frac{1}{g_{\rm YM}^3}\mathrm{Disc}_\pi\mathcal{W}(g_{\rm YM},\theta)\,.\end{aligned} \tag{3.12}$$

根据第2节的讨论，这些等式对重求和量成立。当$\theta = \pi+\epsilon$ 且 $g_{\rm YM} \in \mathfrak{D}$时，重求和的Disc $_\pi\mathcal{W}(g_{\rm YM},\theta)$可以换成形式

[5]我们在第 2 节看到，这些非微扰项与 Seiberg-Witten 单极子有关。这回答了 [17] 中提出的开放问题，即对其分析所发现的复鞍点应如何作出物理解释。

留数求和，如式（3.9）所示。因此，我们看到式（3.1）中定义的围道积分对应于在$\arg(s) = \pi$处越过斯托克斯线时得到的不连续性。这等价于如下陈述：源自围道每一半的微扰级数相互抵消，只留下非微扰数据。等价地，映射 $a_- \to a_+$ 给出函数 $+\sqrt{s} \to -\sqrt{s}$ 在博雷尔平面上的非平凡单值化。因此，我们发现，虽然 $\mathcal{W}(g_{\rm YM}, \theta)$确实是可复苏的，但对路径积分的净贡献为

$$g_{\rm YM}^3 \cdot \mathcal{Z}_{\rm ScYM}(g_{\rm YM}) = \mathrm{Disc}_{\phi=\pi}\mathcal{W}(g_{\rm YM})\,, \tag{3.13}$$

这表明路径积分等于留数求和的解析延拓，正如第 2 节所推导的。

现在，通过注意到以下事实，我们找到了一条线索，可以理解这种不连续性的物理意义：仅包含极点的拉普拉斯变换的主分量可表示为一系列余误差函数 $\mathrm{erfc}(x)$ 之和。这些是简单的可复苏函数，其博雷尔平面中仅含一个简单极点。因此，我们可以用误差函数作为基底，构造在博雷尔平面中仅含极点的可复苏函数。为了解这一点，请注意，函数 $\mathrm{erfc}(x)$ 在 $\mathfrak{Re}[x] \to \infty$ [33] 时具有以下渐近级数：

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\,x} - \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{erfc}\,(x) \sim \frac{1}{x\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!!}{(2x^2)^{n+1}} =: \Phi(x)\,. \tag{3.14}$$

以 $z = x^2$ 作为自然的展开变量，我们可以写成

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{-n-3/2}\,, \quad a_n = \frac{(2n+1)!!}{\sqrt{\pi}(-2)^{n+1}}\,. \tag{3.15}$$

这是3.5式所示类型的渐近展开，其中 $\beta = 1/2$。系数中的阶乘发散十分明显，而级数足够简单，因此博雷尔变换可将其重求和为

$$\mathcal{B}[\Phi](s) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}\Gamma(n+3/2)}s^{n+1/2} = -\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{s}}{1+s}\,, \tag{3.16}$$

它在 $s = -1$处具有极点。博雷尔平面中的高阶极点可通过取导数得到，再经由拉普拉斯变换映射为物理平面中的多项式。用重现的语言来说，这是从卷积（博雷尔）模型到乘性（物理）模型的映射（详见 [2] 中的详细讨论）。一组系数经适当选取的误差函数之和，将在 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的博雷尔平面中产生正确的奇异性结构——一个同阶且具有相同留数的极点。因此， $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 中所包含的非微扰信息可以等价地视为一组误差函数的非微扰数据。

更明确地说，

$$\frac{g_{\rm YM}}{4\pi^{3/2}n} - \exp\left(\frac{16\pi^2n^2}{g_{\rm YM}^2}\right)\mathrm{erfc}\,\left(\frac{4\pi n}{g_{\rm YM}}\right) \longrightarrow \frac{1}{\pi}\int\exp\left(-\frac{16\pi^2n^2}{g_{\rm YM}^2}s\right)\frac{\sqrt{s}}{1+s}\,\mathrm{d}s\,. \tag{3.17}$$

进行变量替换 $s \to s/16\pi^2 n^2$后，我们在博雷尔平面的正确位置得到一个极点。随后对博雷尔变换求 $4n-1$阶导数，便会产生阶数正确的极点。正如我们所说，在卷积模型中求导数，在乘法模型中对应于相同幂次的单项式：

$$\frac{d^k}{ds^k}\mathcal{B}[\Phi](s) \longrightarrow g_{\rm YM}^{-2k}\Phi\,, \tag{3.18}$$

因此，我们可以通过将误差函数乘以 $g_{\rm YM}^{2k}$，在 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的被积函数中产生一个给定的 k 阶极点。最后，对于 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的被积函数中的给定主导阶数为 $4n$ 的极点，还存在直至简单极点的次级极点。这些极点的系数为 $f_{n,\,l}$，其中$f_{n,\,0}$乘以 $4n$ 阶极点，$f_{n,\,1}$乘以 $4n-1$ 阶极点，依此类推。因此，一般而言，必须将一个有限的 $4n-1$ 阶多项式乘以给定的误差函数，才能得到库仑分支积分的精确奇异性结构

$$-\mathrm{i}\pi\left[\frac{g_{\rm YM}}{4\pi^{3/2}n} - \exp\left(\frac{16\pi^2n^2}{g_{\rm YM}^2}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{4\pi n}{g_{\rm YM}}\right)\right]\sum_{\ell=0}^{4n-1}\frac{(-1)^{4n-1-\ell}f_{n,\ell}}{\Gamma(4n-\ell)\ell!}\,g_{\rm YM}^{-2(4n-1-\ell)}\,. \tag{3.19}$$

将此式与负向围道得到的等价表达式相加，并对所有整数 $n\in\mathbb{N}$ 求和，就会重现 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 在（3.9）中出现的完整不连续性，这需要无穷多个误差函数。

这种行为通常适用于任何仅含极点的局域化结果。此外，误差函数的出现暗示了留数和背后存在更深层的结构。正如 Witten 在 [35], 中所示，误差函数通过非阿贝尔局域化产生，作为二维杨-米尔斯规范理论弱耦合展开的精确公式。我们的发现与此类似：当 $g_{\rm YM}$ 的绝对值足够小时，误差函数无穷和所包含的非微扰数据是 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的一种有效表示。我们将此视为一种迹象，表明 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 的希格斯局域化形式可以用一种恰当的二维理论来解释。

4 手征代数与不稳定构型

本节将阐述一个有充分动机的猜想，探讨我们一直在研究的非微扰效应的物理起源。在4.1中，我们将回顾前文关于配分函数结果的要点，并简要综述相关文献中的成果，尤其是那些联系四维与二维理论的研究。在第4.2节中，我们将介绍二维模型，并将其配分函数与四维理论的配分函数进行比较。

4.1 研究动机及与既有工作的联系

我们已经看到，带物质场的四维 $\mathcal{N}=2$ SU(2)规范理论的 $\mathbb{S}^4$ 配分函数所对应的类Borel平面的局域化路径积分，在复平面上耦合常数的两个互斥区域内给出有限表达式。此外，这些表达式同时成立，即对单一理论为真，当且仅当所讨论的理论具有量子超共形不变性。第一个表达式由沿该理论玻色场的常规积分路径进行积分给出，并且是良定义的，对于

例如当 $g_{\rm YM}$ 为实数时，只要该理论是渐近自由的（或有限的）。或者，对于模较小且辐角位于 $\pi/2$（或 $-\pi/2$）附近区域的 $g_{\rm YM}$，对某些理论而言，该积分沿靠近虚轴的玻色标量围道是良定义的。沿后一围道的积分也可改写为对被积函数留数的无穷和，这些留数位于虚轴上。我们已论证，当两个表达式都成立时，第二个表达式可视为第一个表达式的解析延拓。

上文所描述的情形——一个仅含极点的 Borel平面积分——令人联想到利用局域化推导出的纯二维杨-米尔斯理论弱耦合展开的精确表达式，见 [35, 36]。本节将论证这两类理论之间存在直接联系。虽然纯二维杨-米尔斯理论并非超对称理论，但它可以表述为一个 A 扭曲的（2，2）二维规范理论，其部分可观测量——包括任意亏格黎曼曲面上的配分函数——可以通过超对称局域化计算 [35–37]。事实上，纯二维杨-米尔斯理论的配分函数可以通过多种方法精确计算，其中也包括格点方案 [38, 39]，以及一种特定类型的规范固定 [40]。除格点处理之外，在所有其他处理方法中，配分函数都由与满足二维杨-米尔斯方程的联络相关的不稳定瞬子位形所饱和。这类位形通常不受拓扑保护。关于这些位形的讨论，见 [35, 36, 41] 。

四维超对称规范理论与二维理论之间还存在多种已知联系。由于所提出的设定仅适用于超共形理论，我们将重点讨论适用于这一类理论的两种联系。

$\mathcal{N}=4$ SYM 与复二维杨-米尔斯理论。 第一种联系是将 $\mathcal{N}=4$ SYM 中的某些计算（例如 1/8 BPS 威尔逊环的期望值）化约为某种二维杨-米尔斯理论中的计算；这一猜想最初见于 [42–44]。该猜想意味着四维规范耦合常数 $g_{\rm YM}$ 与假定的二维理论的规范耦合常数$g_{\rm 2d}$ 之间存在一种不同寻常的关系，形式如下

$$g_{\rm 2d}^2 = -\frac{g_{\rm YM}^2}{4\pi}\,. \tag{4.1}$$

这意味着，当 $g_{\rm YM}$ 为实数时，二维理论具有虚耦合。我们在第 4.2 节的结果也暗示了类似的关系，但其解释有所不同：二维理论是普通规范理论，而在二维理论中计算的可观测量是四维理论中相应可观测量的解析延拓。 $\mathcal{N}=4$ SYM 是最简单的四维$\mathcal{N}=2$ 超共形理论；若能调和这两种观点将十分理想。我们不会对此作全面探讨，只指出，在存在 $\mathcal{N}=4$ 超对称性的情况下，局域化所产生的配分函数被积函数在复平面上不再有任何极点。在我们的分析框架下，这确实意味着二维理论中不存在瞬子贡献。

利用超对称局域化并纳入关于单圈贡献的一个合理猜想，文献 [45] 提出了一种推导这种关系的方法。文献 [45] 的分析声称，用于计算四维威尔逊环的二维模型是二维杨-米尔斯理论的一种形式，即 Hitchin/希格斯-杨-米尔斯理论，此外

还进一步局限于零瞬子扇区。这种局限是通过某些费米子零模的存在而动态实现的。虽然 [45] 中采用的确切方案并不适用于其他超共形 $\mathcal{N} = 2$ 理论，但可以合理地猜想，在这些情况下也能通过类似的局域化计算推导出相应的关系，或许需要采用更复杂的二维模型。在第 4.2节中，我们将提供初步证据，表明事实确实如此。

手征代数构造。在 [4], 中，作者推导出任意超共形四维 $\mathcal{N} = 2$ 理论与手征代数之间一种不同且更一般的关系。下面我们以拉格朗日理论这一简单情形为例，简要回顾这一关系。具体而言，作者找到了任意超共形四维$\mathcal{N} = 2$ 理论中一个特殊的局域算符子集，它们构成一个手征代数。尽管这些手征代数本身并非完整的量子场论，但它们可以构成某个二维共形场论的一部分。其构造如下：当这些算符被限制在 $\mathbb{R}^4$ 内的特定平面上时，四维超共形对称性保证，这些算符在平面平移中的一个子集在某个特定超荷作用下是恰当的。这里所说的超荷是一个庞加莱超荷与一个共形超荷的线性组合，在非共形理论中并不守恒。作者还证明，这些特定局域算符的算符乘积展开与平面上某些特定手征代数的算符乘积展开一致，并计算了这些代数的一些不变量。结果表明，这种构造得到的中心荷总是负的，因此相应的手征代数是非幺正的。

根据 [4], ，四维超共形 $\mathcal{N} = 2$ 理论中的自由超多重态给出辛玻色子的手征代数。相关算符是超多重态中玻色子的特定时空依赖线性组合。类似地，自由矢量多重态给出由规范微子组合构成的(b, c)鬼场系统。规范对称性的存在也会将代数的内容约化为规范不变算符。然而，手征代数构造与规范耦合无关，事实上与所有边缘参数都无关。更多细节请参阅 [4] 。

在 [5], 作者认为，如上所述，超共形四维理论与手征代数之间的关系，可用于给出该代数中算符期望值的另一种表达式；这些期望值是在四维球面上通过超对称局域化计算得到的。具体而言，该计算采用了与手征代数构造相容的另一种局域化超荷。手征代数中算符期望值的计算可归结为有效二维理论中的计算。关于这一二维理论的一些性质已在 [5], 中推导得出，推导过程紧密遵循 [45], 中的做法；但另一些性质则令人费解。例如，期望值确实依赖于边缘杨-米尔斯耦合。在第4.2节中，我们将论证，经过适当修改后，该理论的配分函数（即单位算符的期望值）确实可以通过这种方式计算。对于手征代数的其余部分，我们只会作简要评论。

4.2 二维模型

现在，我们对一个二维理论作出最小假设：在留数求和有效的参数范围内，该理论能够计算超共形 $\mathcal{N}=2$ 规范理论在四维球面上的配分函数。这个理论就是定义在圆二维球面上的二维杨-米尔斯理论，它与手征玻色子以及手征代数构造所要求的（b，c）鬼场系统以最小方式耦合。手征代数元素的存在已在 [5],中得到证明，而包括耦合常数在内的完整构造则是全新的。

我们理论中的物质场具有共形性，因此可以用一种规范的方式将其放到二维球面上，而不受球面半径的影响。类似地，二维杨-米尔斯理论在保面积微分同胚下保持不变，将其放到二维球面上只需确定杨-米尔斯耦合 $g_{2\mathrm{d}}$ 与球面半径的比值。为简单起见，我们取球面半径为 1，并继续用 $g_{2\mathrm{d}}$ 表示该比值。我们将看到，为使二维理论中的配分函数计算与四维结果相符，必须对耦合常数作解析延拓，使其取虚数值，即 $g_{2\mathrm{d}} = -\mathrm{i}\, g_{\mathrm{YM}}/2$。

提升为 (0,2) 理论。 为了计算我们二维理论的配分函数，我们将采用与 [35] 中纯二维杨-米尔斯理论所述类似的步骤。也就是说，我们将把该理论提升为一种扭曲超对称规范理论，并论证配分函数保持不变。对于纯二维杨-米尔斯理论，恰当的理论选择是一个没有额外物质场的 A 扭曲 (2,2) 规范理论。当然，也可以在这一框架中加入 (2,2) 物质场并重复计算，正如 [37] 中所做的那样。然而，在当前情形下，物质内容乃至局域化计算的结果都与 (2,2) 超对称性不相容。此外，[4] 中对手征代数的分析及其在四维球面上的实现 [5] 强烈表明，任何相关的二维理论都应具有手征超对称性。

因此，我们考虑一个二维 (0，2) 规范理论。我们将仅 考虑该理论的 A/2 扭曲版本。关于这类理论的多重态结构和扭曲的详细信息，请参阅 [46] 。由于该理论具有手征超对称性，扭曲并不会得到拓扑场论。相反，扭曲理论的配分函数依赖于度规，具体通过其共形类体现。[6] 此外，扭曲上同调中局域算符的期望值依赖于算符插入点，并且这种依赖在与该共形类相关的复结构下是亚纯的。这与含有手征算符插入的二维共形场论的度规依赖性相同。我们将只考虑该理论在二球面上的配分函数；在这种情况下，这两种依赖性都平凡。

我们提出的场内容见表 1。请注意，我们为反手征多重态和反费米多重态指定了略显非正统的量子数；通常情况下，它们的量子数应与其共轭多重态相反。这样做是为重现四维结果所必需的。这也表明，在这一设定中，实性条件颇为微妙。我们认为，包括

[6] 共形反常不会在我们的分析中发挥作用。

(0,2) 多重态类型	场内容	扭曲自旋	规范表示
矢量	$a_{\mathbf{1}}, a_{\bar{\mathbf{1}}}, \psi_{\mathbf{1}}, \psi_{\mathbf{0}}, D$	$(1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0)$	伴随
手征	$\phi, \mathcal{C}$	$(0, -1)$	伴随
反手征	$\bar{\phi}, \mathcal{B}$	$(1,\ 1)$	伴随
费米	$\lambda_{\mathbf{1}}, \mathcal{G}_0$	$(1,\ 0)$	伴随
费米	$\lambda_{\mathbf{0}}, \mathcal{G}_{\bar{1}}$	$(0,\ -1)$	伴随
反费米	$\bar{\lambda}_1, \bar{\mathcal{G}}_1$	$(1,\ 1)$	伴随
反费米	$\bar{\lambda}_0, \bar{\mathcal{G}}_0$	$(0,\ 0)$	伴随
手征	$q_A, \mathcal{C}_A$	$(1/2,\ -1/2)$	$\mathfrak{R} \oplus \bar{\mathfrak{R}}$
反手征	$\bar{q}_A, \bar{\mathcal{B}}_A$	$(1/2,\ 1/2)$	$\mathfrak{R} \oplus \bar{\mathfrak{R}}$
手征	$u, \mathcal{C}_u$	$(1/2,\ -1/2)$	伴随
反手征	$u, \mathcal{B}_{\bar{u}}$	$(1/2,\ 1/2)$	伴随
费米	$v, \mathcal{G}_v$	$(0,\ -1)$	伴随
反费米	$\bar{v}, \bar{\mathcal{G}}_v$	$(1,\ 1)$	伴随

表1：扭曲的 (0，2) 规范理论的场内容。

这些量子数在内的场内容，以及下文讨论的作用量，都可以从四维理论推导出来。事实上，其中一些内容已在 [5]中得到确认。

反常。不同于具有 (2，2) 超对称性的模型，二维 (0，2) 规范理论可能出现阿贝尔和非阿贝尔两种规范反常，也可能出现规范- R 对称性混合反常。由于我们的模型源自紫外完备的四维规范理论，规范群是半单的，因此只可能出现非阿贝尔规范反常。为简单起见，我们给出规范群为单群时的反常。按照 [46]，的记号，其中 i 标记手征多重态， I 标记费米多重态，反常正比于

$$\sum_i T_{\mathfrak{R}_i} - \sum_I T_{\mathfrak{R}_I} - T_{\rm adj}\,, \tag{4.2}$$

其中， T 表示表示 $\mathfrak{R}$ 的 Dynkin指标。对于表示矩阵 $t^a_{\mathfrak{R}}$，Dynkin指标可由下列关系定义：

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{R}}\left(t^a_{\mathfrak{R}} t^a_{\mathfrak{R}}\right) = T_{\mathfrak{R}}\delta^{ab}\,, \tag{4.3}$$

特别地， $T_{\rm adj} = h^\vee$ 是对偶Coxeter数。对于 SU(N)，有

$$T_{\rm fund} = T_{\text{anti-fund}} = \frac{1}{2}\,, \quad T_{\rm adj} = N\,. \tag{4.4}$$

因此，对于上述物质内容，消除非阿贝尔规范反常要求

$$T_{\mathfrak{R}} + T_{\bar{\mathfrak{R}}} - 2T_{\rm adj} = 0\,. \tag{4.5}$$

请注意，这恰好与保证四维 $\mathcal{N} = 2$ 规范理论的 β函数消失、从而实现四维超共形不变性的条件相同。[7]

[7] *c.f.* [47]中的公式 (3.1.6)。

因此，正如2中所讨论的，极点求和收敛以及二维规范理论的反常抵消，都要求四维 $\mathcal{N}=2$ 理论是超共形的。我们认为这是两个模型彼此相关的一个令人鼓舞的迹象。

配分函数。 为了与前几节的结果建立联系，我们现在主要将讨论限制在规范群 SU(2) 以及 N_f 个手征多重态的情形，这些多重态的底分量为 q_A，属于基本表示和反基本表示。反常抵消或共形不变性所施加的限制变为

$$N_f = 2N_c = 4\,. \tag{4.6}$$

我们用 δ 表示扭曲超对称的作用。我们的超对称作用量由若干个经典的 δ-闭项，以及稍后将讨论的任意 δ-恰当项组成。在任意黎曼曲面上，以超场的最低分量表示构成手征代数的场，其适当的经典作用量为

$$\int \left(\Omega^{AB}\, q_A \bar{\partial} q_B + \mathrm{tr}\left(\lambda_1 \bar{\partial}\lambda_0\right)\right) \tag{4.7}$$

其中 Ω^{AB} 是辛形式，它为超-¯多重态给出规范不变双线性形式； ∂ 是扭曲的（规范协变）Dolbeault 算子，在 [46] 中记为 $D_{\bar{1}}$。规范扇区的经典作用量取为

$$\int \mathrm{tr}\left(i\phi f_{1\bar{1}} + \frac{i}{2}\mathcal{C}\psi_1 - \epsilon\phi^2\right)\,, \tag{4.8}$$

其中 ϵ 是任意正数，我们最终将选择它，使结果与我们在四维中的结果一致。这与 [36, 37, 48] 中讨论的经典作用量相同。如其中所示，积掉底分量为 ϕ 的多重态后，我们便恢复了原来的非超对称作用量，其中手征物质与二维杨-米尔斯理论耦合。

现在，我们通过为其余多重态添加 δ-正合项来运用超对称局域化。我们不会试图追踪结果的整体归一化；无论如何，该归一化与标准值不同。我们只关注结果对杨–米尔斯耦合常数的依赖。

矢量多重态的相关局域化计算已在 [49] 中完成。根据这些作者的说法，矢量多重态的场局域化到一个库仑分支构型，其中场强的霍奇对偶 $f_{1\bar{1}}$ （以复坐标表示）满足

$$\frac{1}{\pi}\int \sqrt{g} f_{1\bar{1}} = \mathfrak{m}\,, \tag{4.9}$$

其中 $\mathfrak{m}$ 属于该规范群的 GNO 格。

其余物质内容不属于完整的 (2，2) 多重态，因此超出了 [49] 和 [46] 中分析的范围。具体而言，这些文献中考虑的局域化项并不适用。不过，这些场仍然允许

采用其他局域化项。给定一对共轭多重态——手征多重态与反-¯ ¯手征多重态，或费米多重态与反费米多重态——其分量分别为 X， Y和 X， Y，我们的局域化项将具有如下形式：

$$\delta \int \sqrt{g}\, \bar{X}\, Y = \int \sqrt{g}\, \left(\bar{Y} Y \pm 2i \bar{X} \bar{\partial} X\right) . \tag{4.10}$$

动能项中的符号分别对应手征多重态和费米多重态。例如，对于手征多重态 q_A，该项为

$$\delta \int \sqrt{g}\, \bar{q}^A\, \mathcal{C}_A = \int \sqrt{g}\, \left(\bar{\mathcal{B}}^A \mathcal{C}_A + 2i \bar{q}^A \bar{\partial} q_A\right) . \tag{4.11}$$

请注意，协变导数的全纯部分并未出现，而且顶分量没有动能项。这些差异意味着，在此情境下进行局域化所得到的结果，具体而言，积分掉这些场后得到的单圈有效作用量，与例如 [46]中所介绍的模型略有不同。

在场 ϕ的常数模中，那些取值于与 $\mathfrak{m}$ 相同的卡当子代数中的模，是局域化作用量的真正零模。像之前一样，将它们积分掉会得到经典杨-米尔斯作用量，此时其局域化形式为

$$S_{\text{classical}} = \frac{16\pi^2}{g_{2\text{d}}^2} \mathfrak{m}^2 , \tag{4.12}$$

这里我们对耦合常数作了特定选择。其余场将采用单圈近似处理。由于这些场带电，规范群下权为 ρ的分量的有效自旋会在其原始值的基础上偏移 $\rho(\mathfrak{m})/2$。例如，处于基本表示/反基本表示中的每个玻色子 q_A，其扭曲自旋分别为 $\mathfrak{m}/2 + 1/2$ 和 $-\mathfrak{m}/2 + 1/2$；而伴随费米子λ_0， λ_0 的分量具有扭曲自旋 $\pm\mathfrak{m}$ 和 0。

本征模和本征值 由这些局域化作用量得出的单圈行列式，可以利用自旋加权（单极）球谐函数以及自旋加权偏微分算子 $\eth$与 Dolbeault 算子之间的关系来计算。单极球谐函数 ${}_sY_{lm}$ 是复线丛在 $\mathbb{C}P^1$ 上的截面；对于所有 $|s| \leq l$ 和 $-l \leq m \leq l$，它们都不为零，并且满足

$$\int \sqrt{g}\, {}_sY_{lm}\, {}_{-s}Y_{l'-m'} = e^{i\alpha} \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \tag{4.13}$$

其中 α 是一个依赖于约定的相位。我们将需要以下关于¯该 ∂ 算子作用的结果

$$\bar{\partial}_s Y_{lm} = -\sqrt{(l+s)\,(l-s+1)}\, {}_{s-1}Y_{lm} . \tag{4.14}$$

¯选定 ∂所映射的空间之间的一个同构后（这与为场选择积分围道有关），便可利用这些广义本征函数和广义特征值计算该算符的行列式。[8] 关于相关正则化行列式的详细讨论见 [50], ，不过我们将给出一种自成一体的处理方法，从而把它们与四维结果联系起来。

[8]如前所述，本模型中的积分围道颇为微妙。我们将在讨论部分对此作进一步说明。另请参阅 [5]中关于实性条件的讨论。

计算局域化作用量的二次积分，会得到上述广义特征值的乘积。然而，由于某些场存在零模，例如场 q_A，这个乘积是无穷的。更糟的是，玻色子和费米子同时存在零模时，还会出现含义不明确的 $0/0$ 表达式。

在 [46], 中，存在一个针对 ϕ 的连续模量；它与这些场耦合，为带电模产生有效质量，从而避免了这一灾难。与含糊的表达式不同，人们在模空间的特定位置处得到针对 ϕ 的极点。然而，在我们的设定中并不存在这样的耦合常数，也无法为例如场 q_A 引入它。与 [46], 中的设定相比较，我们是在单圈行列式极点的确切位置上计算它们。

在更为标准的 [46, 49]，扭曲理论这一背景下，可以证明，对连续模量的积分要求在极点位置取由单圈行列式和经典项共同构成的有效作用量的留数 。事实上，这些设定中的配分函数是采用 JK留数处方 [51–53] 来计算的。我们并没有这样的连续模量。尽管如此，我们现在论证，通过以另一种方式对该情形加以正则化，取留数仍然是正确的做法。

截面 ${}_sY_{lm}$ 可以合理地延拓到 s 和 m 的非整数值，例如利用它们的超几何函数表达式。为保持一致，经典项和单圈项中的本征值应同时进行这种延拓。在本例中，适当的延拓是将 s, l 和 m 同时平移相同的负量 ϵ，由此得到：

1. 对于 $l < |s|$ ，特征函数不再为零，其广义特征值为纯虚数，并且在极限 $\epsilon \to 0$ 下不趋于零。2. 对于 $l = |s|$ 和 $s < 0$，原先为零模的特征函数现在具有纯虚数本征值，并且在极限 $\epsilon \to 0$ 下趋于零。3. 所有其他特征函数的本征值均非零，只是相较于原来的位置略有偏移；在极限 $\epsilon \to 0$ 下，其原始值会恢复。

我们将使用 ϵ 对配分函数的表达式进行正则化，这意味着纳入额外的特征函数，并在最后谨慎地取极限 $\epsilon \to 0$ 。

我们提出的正则化要求计算准零模的高斯积分；正则化后，这些零模具有与ϵ成正比的纯虚本征值。如 [36, 37, 48], 所示，在这种情况下，正确的做法是用一个依赖于 $\mathfrak{m}$ 和 ϵ 、奇异支集位于 $\epsilon = 0$的分布 来替代零模的贡献。适当的分布及其归一化取决于物质内容的具体细节。我们将采用 [48], 的结论。该文讨论了含有手征多重态的扭曲(2,2)理论，并将分布取为适当阶数的狄拉克δ函数导数。导数的阶数由玻色场的零模数与费米子场的相应零模数之差决定

费米子场，记作 $n(\mathfrak{m})$：这是固定 $\mathfrak{m}$时单圈行列式的整体发散。我们还将结果取为狄拉克δ函数所暗示的$\epsilon = 0$ 附近的无穷小积分，而非逐点极限 $\epsilon \to 0$。关于该分布及其与零模的有效数目的关系的推导，请参阅 [36]；关于含手征多重态的扭曲(2,2)规范理论中的一个密切相关结果，请参阅 [48] 。

将有效作用量的原始表达式记为 $Z(\mathfrak{m})$，因此我们的正则化表达式为

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(n(\mathfrak{m})-1)!} \frac{d^{n(\mathfrak{m})-1}}{d\epsilon^{n(\mathfrak{m})-1}} \left(\epsilon^{n(\mathfrak{m})} Z(\mathfrak{m}+\epsilon)\right) = \mathrm{Res}_{\epsilon\to 0} Z(\mathfrak{m}+\epsilon) \ . \tag{4.15}$$

尽管该表达式中的数值因子在分析 [36, 48], 时自然出现，我们并未尝试确定整体归一化。

单圈行列式 接下来，我们要计算本节开头引入的 δ–精确作用量的单圈行列式。为此，我们将物质多重态的场按解析延拓的单极球谐函数展开。由此可得以下关于有效扭曲自旋 $s = s_0 + \rho(\mathfrak{m})/2$ 的单圈行列式的一般形式

$$Z_s = \prod_{\rho\in\mathfrak{R}_i} \prod_{l=|s|}^{\infty} \left((l+s)(l-s+1)\right)^{l+1/2} \ . \tag{4.16}$$

裸自旋 s_0 定义为平凡背景中的自旋，此时 $\mathfrak{m} = 0$。辛玻色子的单圈行列式计算见 [5]。其中，通过对自由超多重态的四维理论相对于用于在 [4] 中识别相关手征代数的同一超荷进行局域化，直接推导了该计算。由于这是自由超多重态，该计算对应于处于平凡磁通 $\mathfrak{m} = 0$ 背景中的二维理论，因此，对于相应的二维手征玻色子，有 $s = s_0 = 1/2$。文献 [5], 的附录 B 还表明，在精心选定的四维规范场背景下，矢量多重态和规范化超多重态的四维行列式可由辛玻色子的动能作用量以及一个小的（b、c）鬼系统产生。本文将从纯二维视角出发，按照 [25, 46, 49] 中概述的方法，求出前几节讨论的完整四维表达式（2.2）的留数，以重现这些结果。

我们的分析完全基于我们对（4.16）中零模的处理方式。一圈行列式是在单极背景 $\mathfrak{m}$ 中计算的，其有效自旋为 $s = s_0 + \rho(\mathfrak{m})/2$。通过一个小的实参数 $\mathfrak{m} + \epsilon \equiv \mathfrak{a}$，使系统偏离BPS轨迹来抬升零模，这意味着我们将把有效自旋 $s = s_0 + \rho(\mathfrak{a})/2$视为围绕裸自旋 s_0 的延拓。如上所述，这包括放宽 $l \geq |s|$ 的限制，因此我们将取 $l = s_0 + n$， $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。严格来说，以下行列式应在不包含零模的情况下计算，并使用上述处方提取留数。为简化记号，我们将计算

包含零模的行列式，并将最终结果乘以 $\epsilon^{n(\mathfrak{m})}$，如（4.15）所示。

基本手征多重态：$\mathbf{s_0 = 1/2}$。 我们首先将（4.16）改写如下

$$Z^{\phi_{1/2}} = \prod_{\rho} \prod_{l=1/2}^{\infty} ((l+1/2)^2 - (s-1/2)^2)^{l+1/2} \,. \tag{4.17}$$

代入 $s = s_0 + \rho(\mathfrak{a})/2$，其中 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m} + \epsilon$，一圈行列式变为

$$Z^{\phi_{1/2}} = \prod_{l=1/2}^{\infty} ((l+1/2)^2 - \mathfrak{a}^2/4)^{2l+1} \,. \tag{4.18}$$

该乘积是发散的，因此我们将采用ζ函数正则化来得到有限结果。引入参数为 $a \in \mathbb{C}$,$w = (w_1, w_2, \ldots, w_r) > 0$，且 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_r) \geq 0$，$n_i \in \mathbb{Z}$ 的多重赫尔维茨ζ函数

—

$$\zeta_r(s, a, \underline{w}) \coloneqq \sum_{\mathbf{n} \geq 0} (\mathbf{n} \cdot \underline{w} + a)^{-s} \,, \tag{4.19}$$

我们可以通过以下ζ函数正则化定义多重伽马函数 $\Gamma_r(a, w)$ [54]

$$\Gamma_r(a, \underline{w}) \coloneqq \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_r(s, a, \underline{w}) \Big|_{s=0} \right) . \tag{4.20}$$

因此，为了计算物质场的一圈行列式，我们需要对以下乘积进行ζ函数正则化

$$\begin{aligned} \prod_{n=0}^{\infty} (n+a) &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_1(s, a, 1) \Big|_{s=0} \right) \coloneqq \Gamma_1(a,1)^{-1} \,, \\ \prod_{n=0}^{\infty} (n+a)^{n+1} &= \exp\left(\frac{\partial}{\partial s} \zeta_2(s, a, 1, 1) \Big|_{s=0} \right) \coloneqq \Gamma_2(a,1,1)^{-1} \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

因此，简并度为 $bn + c$ 的乘积正则化如下

$$\prod_{n=0}^{\infty} (n+a)^{bn+c} = \Gamma_2(a,1,1)^{-b} \, \Gamma_1(a,1)^{b-c} = (2\pi)^{(c-b)/2} \, G(1+a)^b \, \Gamma(a)^{-c} \,, \tag{4.22}$$

其中我们利用了如下事实：$\Gamma_1(z,1) = (2\pi)^{-1/2}\Gamma(a)$，且 $G(1+a)$ 是 Barnes–G 函数，该函数在第 2 [55] 节中引入

$$G(1+a) = \Gamma(a) \, \Gamma_2(a,1,1)^{-1} \,. \tag{4.23}$$

利用这一点，行列式（4.18）正则化为

$$\prod_{n=0}^{\infty} ((n+1)^2 - \mathfrak{a}^2/4)^{2n+2} = \left(\frac{G(2+\mathfrak{a}/2) G(2-\mathfrak{a}/2)}{\Gamma(1+\mathfrak{a}/2)\Gamma(1-\mathfrak{a}/2)} \right)^2 = (G(1+\mathfrak{a}/2) G(1-\mathfrak{a}/2))^2 \,. \tag{4.24}$$

随后将该因子提升至 N_f 次方，其中 N_f 是手征多重态对的数量；我们可以看出，这与四维超多重态产生的贡献相同。

伴随费米多重态：$\mathbf{s_0 = 0}$。 对于费米多重态 Λ 的最低分量的二次项，其扭曲自旋为 $s_0 = 0$。在这种情况下，行列式等价于

$$Z^{\Lambda_0} = \prod_{l=0}^{\infty}(l+1)^{2l+1}\prod_{l=0}^{\infty}(l^2-\mathfrak{a}^2)^{l+1/2}((l+1)^2-\mathfrak{a}^2)^{l+1/2}\,. \tag{4.25}$$

利用一般公式（4.22），我们可以如下计算这些发散乘积

$$\begin{aligned}\prod_{l=0}^{\infty}(l+1)^{2l+1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,;\\ \prod_{l=0}^{\infty}(l^2-\mathfrak{a}^2)^{l+1/2} &= \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}\frac{G(1+\mathfrak{a})G(1-\mathfrak{a})}{\sqrt{\Gamma(\mathfrak{a})G(-\mathfrak{a})}}\,;\\ \prod_{l=0}^{\infty}((l+1)^2-\mathfrak{a}^2)^{l+1/2} &= \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}\sqrt{\Gamma(1+\mathfrak{a})\Gamma(1-\mathfrak{a})}G(1+\mathfrak{a})G(1-\mathfrak{a})\,.\end{aligned} \tag{4.26}$$

综上可得，伴随费米多重态的一圈行列式为

$$Z^{\Lambda_0} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathfrak{a}(G(1+\mathfrak{a})G(1-\mathfrak{a}))^2\,. \tag{4.27}$$

因子 $\mathfrak{a}$几乎就是范德蒙行列式。为了得到完整的范德蒙行列式，我们需要引入额外的费米／反费米对和手征／反手征对，它们的扭曲自旋分别为 $0/1$和 $\frac{1}{2}/\frac{1}{2}$。

伴随手征多重态：$\mathbf{s_0 = 1/2}$。 这一计算在本质上与基本表示的手征多重态相同，区别仅在于规范群的表示不同。在这种情况下，乘积（4.16）为

$$Z^{\Lambda_{1/2}} = \prod_{l=0}^{\infty}(l+1)^{2l+2}\prod_{l=0}^{\infty}((l+1)^2-\mathfrak{a}^2)^{2l+2} = (G(1+\mathfrak{a})G(1-\mathfrak{a}))^2\,. \tag{4.28}$$

因此，这恰好与 $s_0 = 0$ 费米多重态相抵消，从而不会引入任何额外的零模。因此，额外的费米和手征多重态对的总贡献仅为因子 $\mathrm{i}\mathfrak{a}/2\pi$。

总而言之，对所选的（0,2）物质多重态的二次涨落进行积分后得到的净一圈行列式为

$$Z_{\text{matter 1-loop}} = -\frac{\mathfrak{a}^2}{4\pi^2}\frac{(G(1+\mathfrak{a})(G(1-\mathfrak{a}))^2}{(G(1+\mathfrak{a}/2)G(1-\mathfrak{a}/2))^8}\,. \tag{4.29}$$

这恰好是（2.2）中出现的 Barnes-G函数组合，适用于 $N_f = 4$。此外，尽管二维规范场的 BPS轨迹包含所有杨-米尔斯联络，$\mathfrak{m} \in \mathbb{Z}$ 我们发现，只有偶整数会对留数计算作出贡献。这是因为 Barnes-G函数 $G(1+\mathfrak{a})$ 在 0 和负整数处有零点；如果$2\mathfrak{a}_{\epsilon\to 0} \in 2\mathbb{Z}+1$（4.29）的分子将有零点，而分母则没有。

因此，这些模在留数计算中的结果为零。因此，我们作如下认定： $\mathfrak{m} = 2n$ 其中 n 是磁单极子构型的四维陈类。重新纳入零模的影响，并加上范德蒙行列式和经典作用量后，我们得到

$$Z_{2d} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{(n(\mathfrak{m})-1)!} \frac{d^{n(\mathfrak{m})-1}}{d\epsilon^{n(\mathfrak{m})-1}} \epsilon^{n(\mathfrak{m})} e^{-\frac{16\pi^2}{g_{2d}^2}(\mathfrak{m}+\epsilon)^2} (\mathfrak{m}+\epsilon)^2 \frac{(G(1+\mathfrak{m}+\epsilon)G(1-\mathfrak{m}-\epsilon))^2}{(G(1+\frac{\mathfrak{m}}{2}+\epsilon)G(1-\frac{\mathfrak{m}}{2}-\epsilon))^8} \,. \tag{4.30}$$

注意到 $\epsilon = \mathfrak{a} - \mathfrak{m}$，我们看到，这一结果与原四维理论中获得留数的方式完全一致，详见附录 A。当时是通过手工计算四维库仑支积分被积函数的洛朗展开来完成计算的。令人感兴趣的是，这一结果自然地源自我们所选取的二维局域化过程。因此，我们可以直接将式（4.30）与第 2 节中的结果相等，该结果见式（2.13）。总之，我们的最终结果为

$$\left.\begin{aligned} Z_{2d} &= \sum_{\mathfrak{m}=0} \mathrm{Res}_{\epsilon=0} \left[\mathrm{e}^{-\frac{16\pi^2}{g_{2d}^2}(\mathfrak{m}+\epsilon)^2} (\mathfrak{m}+\epsilon)^2 \frac{(G(1+\mathfrak{m}+\epsilon)G(1-\mathfrak{m}-\epsilon))^2}{(G(1+\frac{\mathfrak{m}}{2}+\epsilon)G(1-\frac{\mathfrak{m}}{2}-\epsilon))^8} \right] \\ &= \frac{1}{2g_{\mathrm{YM}}^3} \sum_{n=0} \exp\left(\frac{16\pi^2 n^2}{g_{\mathrm{YM}}^2}\right) \sum_{\ell=0}^{4n-1} \frac{(-1)^{4n-\ell-1}}{\Gamma(4n-\ell)\ell!} f_{n,\ell}\, g_{\mathrm{YM}}^{-2(4n-1-\ell)} \\ &= \mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}^{k=0} \,. \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & g_{2d} \in -\mathrm{i}\mathfrak{D} \,, \\ & g_{2d} = -\mathrm{i}\,\frac{g_{\mathrm{YM}}}{2} \,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

误差函数的作用 我们在第 3 节指出，四维表达式也可以等价地由无穷个误差函数组成的无穷级数的非微扰数据得到。这正是我们猜想留数求和存在二维解释的部分动机，这一猜想源于 [35] 关于误差函数在任意黎曼曲面上的二维杨-米尔斯理论弱耦合展开中作用的观察。我们希望讨论所得到的二维理论与第 3 节中出现的误差函数之间的关系。

文献 [36] 明确表明，在任意黎曼曲面上对二维杨-米尔斯理论进行非阿贝尔局域化，并利用海特勒函数，可以得到误差函数。在分布意义下，海特勒函数定义了以下这类积分

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \exp\left(\mp 2\pi\mathrm{i}\, p\, x\right) = \pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \mathrm{pv}\frac{1}{p} + \frac{\delta(p)}{2} \,. \tag{4.32}$$

特别地，正是主值项导致了误差函数的微扰分量。作者们在 [36]中表明，此类积分的乘积给出了（4.32）右端关于 p的导数。此类结果也曾用于 [37, 48]。在我们的情形中，我们得到了类似的结果，不同之处在于我们的结果仅给出（4.32）中狄拉克 δ 函数的导数。表出

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}x \exp\left(2\pi\mathrm{i}\, p\, x\right) + \int_0^\infty \mathrm{d}x \exp\left(2\pi\mathrm{i}\, p\, x\right) = \delta(p) \,, \tag{4.33}$$

我们注意到与第3节的结果有明显的类比，特别是方程（3.1）和（3.12），它们表明微扰贡献之间相互抵消。从局域化的角度来看，我们猜想正是由于这一原因，我们的结果仅从误差函数中提取非微扰数据。因此，我们通过复苏分析得到的关于误差函数的作用的直觉似乎是有充分根据的，并且对于它们在构建4维和2维路径积分中的作用，存在一幅自洽的图景。

5 讨论

在这项工作中，我们探讨了在 $\mathbb{S}^4$ 上、针对 SU(2) 规范群并耦合 $N_f = 2N_c = 4$个基本超多重态的超杨–米尔斯理论局域化表达式中所发现极点的物理诠释；这种耦合使理论成为超共形理论。具体而言，通过审慎的复苏分析，我们推导出库仑分支积分仅通过解析延拓才等于与这些极点相关的留数之和。我们分别从四维和二维视角阐释了其中的物理。从四维视角看，我们将这些极点识别为源自希格斯分支局域化方案的 Seiberg-Witten 单极子。从二维视角看，这些极点对应于具有 (0,2) 超对称的理论中的不稳定瞬子。我们证明这两种视角彼此相容：在不包含四维瞬子贡献的情况下，重现了四维模型的配分函数，其中二维瞬子在该扇区中扮演神秘非微扰对象的角色。我们进一步发现，只有当四维理论为超共形理论时，这样的二维理论才作为定义良好的量子理论存在。

我们尚未讨论四维瞬子，也未讨论手征代数组成部分的构成要素的插入。这些插入虽然与模型的超对称性相容，但似乎不会在经典层面产生贡献，并且可能会影响正则化单圈行列式的具体形式。若能了解需要进行哪些修改以将这些问题纳入考虑，将会非常有意义。具体而言，[5]的作者推测，这两项修改应当通过 [56]的结果彼此关联。

我们还注意到，[4] 的作者在推导的中间阶段借助了与二维 (0，4) 超对称代数的关系。该超代数并不是手征代数理论的对称性。可以推测，至少在我们的语境下，相关关系在于：手征代数可以被视为源自一个具有 (0，4) 超对称性的理论所进行的、类似于 A/2 扭曲的扭曲。将所得理论限制在扭曲所保留的超荷对应的算符上，可以运用类似于 [4]中的论证证明其具有共形性。然而，与许多扭曲理论一样，它并不具有幺正性。

我们可以证明，这样的理论确实与我们提出的物质内容相容。我们模型的场内容包括 N_f (0，4) 个基本超多重态、一个 (0，4) 矢量多重态、一个 (0，4) 伴随超多重态，以及一个 (0，4) 伴随费米多重态。前文介绍的 (0，2) 理论配分函数的正则化方案多少有些临时性。(0，4) 版本或许能够为采用该方案提供依据，这类似于在某些 (2，2) 和 (0，2) 计算中采用 JK 留数的依据。我们希望今后借助更具体的工具继续探讨这些问题。

在这里所述假设下，超共形 $\mathcal{N}=2$ 理论配分函数的局域化表达式中，被积函数的极点对应于嵌入的二维规范理论中的不稳定瞬子。在四维球面上进行局域化计算时，库仑分支版本的局域化也确实如此。正如我们在第2节所讨论的，另一种称为希格斯分支局域化的局域化方案，也可应用于这一类理论 [31]。希格斯分支局域化也可应用于二维 [25]模型，并使局域化落在涡旋构型上。这些构型的大小由局域化作用量中的一个参数控制；当该参数趋于零时，便恢复库仑分支局域化。我们认为，四维希格斯分支局域化与我们的二维模型之间的关系，或许也可通过类似的二维希格斯分支局域化建立起来；我们已将前者的结果与留数联系起来。此外，若对我们的规范群进行四维希格斯分支局域化，看看其结果与我们的结果有何异同，并研究希格斯分支手征环与手征代数手征环之间的关系，也会很有意思，正如 [4, 5]中所讨论的。

我们的结果不局限于 SU(2) 规范群，而是适用于四维中的所有超共形规范理论。具体而言，我们已经证明，这些理论定义的二维模型不存在规范反常。将这一结果应用于研究箭图规范理论、全息模型、(0,4) 理论，或超共形理论的形变（例如 $\mathcal{N}=2^*$ sYM），将会很有意思。我们希望在未来的工作中探讨其中一些联系。

最后，探究能在多大程度上从这些结果中提取出重求和结构，将会很有启发性。特别是，我们可以始终将局域化表达式中出现的极点视为误差函数存在的信号，并进一步探究这些表达式在何时具有微扰性，从而真正具有可复苏性。另一个值得研究的问题是，能否引入对称性破缺形变，以恢复微扰计算中的渐近行为 [21, 57] ；例如，在 [3]中计算的 1/2-BPS Wilson 环。

致谢

本研究由英国研究与创新署科学技术设施委员会综合资助项目 ST/X000583/1“粒子物理学、宇宙学与引力的新前沿”提供支持。I.A. 部分获得了英国研究与创新署工程与物理科学研究委员会早期职业研究员奖学金 EP/S004076/1 的资助。J.R 感谢 A. Ferrari、M. Lemos 和 A. Ratcliffe 的宝贵讨论。I.Y 感谢 E. Lundberg 和 R. Panerai 的有益通信。J.R. 感谢艾萨克·牛顿数学科学研究所（剑桥）在“具有边界、杂质和缺陷的量子场论”项目期间提供的支持与热情接待；本文的相关研究正是在此期间开展的。

留数

在本附录中，我们推导出 $\mathcal{Z}_{\mathrm{ScYM}}$的零阶瞬子扇区留数的显式形式。具体而言，将（2.2）中的Barnes–G函数表示为其乘积表示-

式

$$\frac{g_{\rm YM}^3}{128\pi^{5/2}}\mathcal{Z}_{\rm ScYM}=\int_{-\infty}^{\infty}da\ a^2\ \exp\left(\frac{-16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2\right)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{4a^2}{n^2}\right)^{2n}}{\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{8n}}|Z_{\rm inst.}|^2. \tag{A.1}$$

接下来，我们对零阶瞬子扇区中的被积函数取指数

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(a)&=\exp\left[-\frac{16\pi^2}{g_{\rm YM}^2}a^2+2\ \log(\mathrm{a})+\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n\ \log\left(1+\frac{4a^2}{n^2}\right)-8n\ \log\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)\right)\right]\\&=\exp[f(a)].\end{aligned} \tag{A.2}$$

从指数形式（A.2）可知，极点由 –log(0) 项产生。然而，看起来也存在一些发散，它们源自无穷和中形如 $\sim n\log(n)$ 的项。事实上，我们将看到这些发散会相互抵消，留下一个可用于计算完整留数的有限项。这种抵消是因为我们选择了超共形物质内容。与极点对应的发散对数项将被消去，正如我们将看到的，只需乘以 $(a\pm \mathrm{i}k)^{4k}$。求和中剩余的部分为

$$\begin{aligned}(a\pm \mathrm{i}k)^{4k}\mathcal{I}(a)|_{a=\mp \mathrm{i}k}=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n\ \log\left(1+\frac{2k}{n}\right)-8n\ \log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)\\&+\sum_{n=0}^{2k-1}2n\ \log\left(1-\frac{2k}{n}\right)+\sum_{n=2k+1}^{\infty}2n\ \log\left(1-\frac{2k}{n}\right)\\&-\sum_{n=0}^{k-1}8n\ \log\left(1-\frac{k}{n}\right)-\sum_{n=k+1}^{\infty}8n\ \log\left(1-\frac{k}{n}\right)\\&+8k\ \log(k)-4k\ \log(2k)+4k\ \log(2),\end{aligned} \tag{A.3}$$

其中，最后一行中的前两项来自未被抵消的发散对数中的项，第三项则来自对 $n=2k$ 处的极点进行归一化。通过重新排列各个求和项，我们可以将（A.3）化简为

$$(a\pm \mathrm{i}k)^{4k}\mathcal{I}(a)|_{a=\mp \mathrm{i}k}=\sum_{n=1}^{k}(12n-8k)\log(n)-\sum_{n=k+1}^{2k}(4n-8k)\log(n)+2k\pi i. \tag{A.4}$$

因此可以得出，对于 $a=\pm ik$ 处的极点，指数的计算结果为

$$\kappa(k):=-2^{4k}k^2\exp\left[\frac{16\pi^2k^2}{g_{\rm YM}}+\sum_{n=1}^{k}(12n-8k)\log(n)-\sum_{n=k+1}^{2k}(4n-8k)\log(n)\right], \tag{A.5}$$

这里我们省略了 $2k\pi i$ 项，因为其指数为 1。

为确定 $4k$ 阶极点的留数，我们对以下量求 $4k-1$ 阶导数

$$\mathcal{J}(a)=(a\mathrm{i}\pm k)^{4k}\mathcal{I}(a)\big|_{a=\pm \mathrm{i}k}=u^{4k}\mathcal{I}(u)|_{u=0}, \tag{A.6}$$

这里引入变量 $u = a\mathrm{i} \pm k$，将所有极点移至原点，并将它们改写为统一形式。这样便消除了极点奇异性，且该表达式在 $u = 0$ 的邻域内是正则的。因此，$(4k-1)^{th}$ 阶导数的首项将是 $\pm \mathrm{i}k$ 处极点的留数。为确定 $\mathcal{J}^{(p)}(u)$，我们再次从指数化开始

$$\mathcal{J}(u) = \exp\left[4k\log(u) + f(u)\right] = \exp\left[f_{\text{reg.}}(u)\right]. \tag{A.7}$$

其中 $f_{\text{reg.}}(u)$ 是 $f(u)$ 的正则部分（如上所述，$4k\log(u)$ 对 $f(u)$ 的奇异部分进行正则化）。因此，p^{th} 导数一般由 Fa`a di Bruno 公式给出

$$\frac{d^p}{dx^p} f(g(x)) = \sum_{l=0}^{p} f^{(p)}(g(x)) \cdot B_{p,l}\left(g'(x), g''(x), \ldots, g^{(p-l+1)}(x)\right), \tag{A.8}$$

其中 $B_{p,\,l}(x_1, \ldots, x_{p-l+1})$ 是贝尔多项式。在我们的情形中，我们令

$$f(g(u)) = \mathcal{J}(u) = \exp(g(u)), \quad g(u) = f_{\text{reg.}}(u). \tag{A.9}$$

此外，由于 $\mathcal{J}^{(p)}(u) = \mathcal{J}(u)$，我们有

$$\mathcal{J}^{(p)}(u) = \mathcal{J}(u) \cdot B_p\left(f'_{\text{reg.}}(u), f''_{\text{reg.}}(u), \ldots, f^{(p)}_{\text{reg.}}(u)\right) \tag{A.10}$$

其中 B_p 现在是完全贝尔多项式。接下来我们要计算 $f^{(i)}_{\text{reg.}}(u)$，从一阶导数开始，

$$\begin{aligned}\frac{df(u)}{du} =& \mathrm{i}\frac{32\pi^2}{g_{\text{YM}}^2}(u+k) + \frac{2\mathrm{i}}{u+k} \\ &- 8\mathrm{i}(u+k)\left[\zeta_1(2(u+k)) + \zeta_1(-2(u+k)) - \zeta_1(-(u+k)) - \zeta_1(u+k)\right],\end{aligned} \tag{A.11}$$

其中 ζ_1 是赫尔维茨ζ函数，定义为：

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}; \quad \zeta(1,a) \coloneqq \zeta_1(a). \tag{A.12}$$

虽然赫尔维茨ζ函数在 $s=1$ 处有一个极点，但（A.11）中出现的组合却没有。为说明这一点，注意到 $\zeta(s,\ a)$ 的洛朗级数为

$$\zeta(s,a) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\gamma_n(a)(s-1)^n. \tag{A.13}$$

我们对 zeta 函数求和进行正则化，即在 (A.11) 中取 $s = 1+\epsilon$ 作为 $\epsilon \ll 1$。在极限 $\epsilon \to 0$ 下，其结果为

$$\psi(u+k) + \psi(-(u+k)) - \psi(2(u+k)) - \psi(-2(u+k)) \equiv \psi_k + \psi_{-k} - \psi_{2k} - \psi_{-2k}, \tag{A.14}$$

其中 $\gamma_0(z) = -\psi(z)$ 和 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ 是双伽马函数。最终，我们得到（A.11）：

$$f'(u) = \mathrm{i}\frac{32\pi^2}{g_{\text{YM}}^2}(u+k) + \frac{2\mathrm{i}}{u+k} - 8\mathrm{i}(u+k)\left[\psi_k + \psi_{-k} - \psi_{2k} - \psi_{-2k}\right]. \tag{A.15}$$

在 $f_{\text{reg.}}(u)$ 处的高阶导数 $u=0$ 将对应于（A.15）的洛朗级数系数：

$$f'(u)=\frac{b_{k,-1}}{u}+\sum_{n=0}^{\infty}b_{k,n}u^n\,, \tag{A.16}$$

其中，指标 k，n 分别表示极点的位置和展开的阶数。例如，$f''_{\text{reg}}(0)=2b_{k,\,1}$。利用双伽马函数的以下展开式

$$\begin{aligned}\psi_k+\psi_{-k}-\psi_{2k}-\psi_{-2k}=&\frac{1}{2u}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big[2(2^n-1)\left(\zeta(n+1)\delta_{n\bmod 2,0}-(-1)^nH_{k,n+1}\right)\\&+\frac{3}{2}\frac{1}{(-k)^{n+1}}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(-2)^{n+1}}{(2k-j)^{n+1}}\Big]u^n\\\equiv&\frac{1}{2u}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{k,n}u^n\,,\end{aligned} \tag{A.17}$$

其中，$H_{a,\,b}$ 是 b 阶广义调和数，定义为

$$H_{a,b}=\sum_{j=1}^{a}\frac{1}{j^b}, \tag{A.18}$$

并采用记号上的一种滥用，将 $\zeta(1)=\gamma$ 记作欧拉常数，我们得到

$$f'(u)=\left(\frac{b_{-1}}{u}+b_0+b_1u+\sum_{n=2}^{\infty}b_nu^n\right). \tag{A.19}$$

在上式中，系数 b_n 由下式给出

$$\begin{aligned}b_{-1}&=-4\mathrm{i}k\\b_0&=\mathrm{i}\frac{32\pi^2}{g_{\text{YM}}^2}k+\sum_{j=k+1}^{2k}\frac{16\mathrm{i}\,k}{j}+\frac{4\mathrm{i}}{2k}\\b_1&=\mathrm{i}\frac{32\pi^2}{g_{\text{YM}}^2}-8\mathrm{i}\,ka_1-2a_0-\frac{4\mathrm{i}}{2k^2}\\b_n&=-8\mathrm{i}\,ka_n-8\mathrm{i}\,a_{n-1}+2\mathrm{i}\frac{(-1)^n}{k^{n+1}},\ n>1.\end{aligned} \tag{A.20}$$

现在，我们已经掌握了计算留数所需的全部数据。为此，必须在 $u=0$ 处计算 A.10。

$$\text{Res}[u=0,k]=128\pi^{5/2}\frac{\kappa(k)}{(4k-1)!}\cdot B_{4k-1}(0!b_0,1!b_1,\dots(4k-1)!b_{4k-1})\,, \tag{A.21}$$

其中 $\kappa(k)$ 定义见 (A.5)。其余系数为

$$\hat{f}_{k,l}(g_{\text{YM}})=128\pi^{5/2}\,\frac{\kappa(k)}{l!}\cdot B_l(0!\,b_{k,0},1!\,b_{k,1},\dots,l!\,b_{k,l}). \tag{A.22}$$

需要注意的是，这些系数对应于 (2.11) 的完整洛朗展开，应与 (2.14) 中出现的系数区分开来；后者是去除指数部分后的被积函数的洛朗级数系数。对前者取 $g_{\rm YM} \to \infty$ 即可得到后者，这相当于将 ˆ (A.1) 中的指数项设为 1。我们将系数的这一极限记为 $f_{k,\ \ell}$，其不依赖于 $g_{\rm YM}$。

转换为拉普拉斯变量 为了将 $\mathcal{Z}_{\rm ScYM}$ 写成误差函数的形式，我们需要 $\mathcal{I}$ 关于博雷尔变量 s的洛朗级数系数。在这个变量下，结果为

$$f_{k,l}(g_{\rm YM}) = -\mathrm{i}\frac{2(32\pi^2 k)^{4k-1-l}}{k^l}\sum_{n=0}^{l}\left(-\frac{1}{2}\right)^n B_{l,n}\left(-1!!, 1!!, 3!!, \ldots, (2(l-n)-1)!!\right) \times\left(\sum_{j=0}^{n}(-2)^j (n)_j (4k)_{n-j}\sum_{m=0}^{j}(-ik)^m \hat{f}_{k,m}(g_{\rm YM})\right) \tag{A.23}$$

ˆ 其中 $(i)_j$ 是下降阶乘 $i!/(i-j)!$，系数 $f_{k,l}(g_{\rm YM})$在（A.22）中定义。与之前一样，（A.21）中的系数可通过取$g_{\rm YM} \to \infty$，从（A.23）中得到。我们仍用 $f_{k,\ell}$表示此极限下的系数。

对于 $\ell = 0$，表达式（A.23）可简化为

$$f_{k,0} = \mathrm{i}\cdot k^{1+4k} 2^{3+24k}\pi^{8k+1/2}\exp\left[\sum_{n=1}^{k}(12n-8k)\log(n) - \sum_{n=k+1}^{2k}(4n-8k)\log(n)\right]. \tag{A.24}$$

也可以很容易地看出，这些结果与 [17]中的表2一致。

参考文献

[1] *D. Sauzin*，《*1*-可和性与重求和导论》，*2014*年。[2] *I. Aniceto*、*G. Ba¸sar* 和 *R. Schiappa*，《重求和超渐近级数及其渐近行为入门》，《物理学报告》*809*（*2019*年）*1–135*。[3] *V. Pestun*，《四维球面上的规范理论局域化与超对称威尔逊环》，《数学物理通讯》*313*（*2012*年） 71 [0712。2824]。[4] *C. Beem*、*M. Lemos*、*P. Liendo*、*W. Peelaers*、*L. Rastelli* 和 *B.C. van Rees*，《四维中的无限手征对称性》，《数学物理通讯》*336*（*2015*年）*1359–1433*。[5] *Y. Pan* 和 *W. Peelaers*，《手征代数、局域化与表面缺陷》，《高能物理学报》*02*（*2018*年）138 [1710。04306]。[6] *S. Garoufalidis*、*J. Gu* 和 *M. Marino*，《复陈-西蒙斯理论中的孔雀模式与重求和》，《数学科学研究》*10*（*2023*年） 29 [2012。00062]。[7] *V. Fantini* 和 *C. Rella*，《局部 $\mathbb{P}^2$上的重求和拓扑弦的强弱对偶对称性与量子模性》，《通讯：数论物理》*19*（*2025*年） 1 [2404。10695]。[8] *C.M. Bender* 和 *T.T. Wu*，《非谐振子》，《物理评论》*184*（*1969*年）*1231*。

[9] *C.M. Bender* 和 *T.T. Wu*，《非谐振子。*2*：大阶微扰理论研究》，《物理评论》*D7*（*1973*年）*1620*。[10] *G. Parisi*，《可重整化理论中博雷尔变换的奇点》，*Phys. Lett. 76B*（*1978*年）*65*。[11] *G. Parisi*，《关于红外发散》，*Nucl. Phys. B150*（*1979*年）*163*。[12] *B.E. Lautrup*，《关于量子电动力学中的高阶估算》，*Phys. Lett. 69B*（*1977*年）*109*。[13] *G. 't Hooft*，《我们能否理解量子色动力学？》，*Subnucl. Ser. 15*（*1979*年）*943*。.[14] *A. Cherman*、*D. Dorigoni*、*G.V. Dunne* 和 *M. Unsal*，《量子场论中的重现：主手征模型中的非微扰效应》，《物理评论快报》*112*（*2014*年）*021601*[1308。0127]。[15] *M. Marino*、*R. Schiappa* 和 *M. Schwick*，《矩阵模型的新瞬子》，*2210.13479*。[16] *R. Schiappa*、*M. Schwick* 和 *N. Tamarin*，《重现中的所有*D*膜》，*2301.05214*。[17] *I. Aniceto*、*J.G. Russo* 和 *R. Schiappa*，《超对称规范理论中可局域化可观测量的复苏分析》，《高能物理学报》*03*（*2015*年） 172 [1410。5834]。[18] *M. Honda*，《如何重求和三维 *N*=*2* 陈-西蒙斯物质理论中的微扰级数》，《物理评论》*D 94*（*2016*年） 025039 [1604。08653]。[19] *S. Gukov*、*M. Marino* 和 *P. Putrov*，《复陈-西蒙斯理论中的重现》，*1605.07615*。[20] *M. Honda* 和 *D. Yokoyama*，《在存在单极子冒泡效应时重求和微扰级数》，《物理评论》*D 100*（*2019*年） 025012 [1711。10799]。[21] *D. Dorigoni* 和 *P. Glass*，《超对称局域化中的柴郡猫重求和之笑》，*SciPost Phys. 4*（*2018*年） 012 [1711。04802]。[22] *D. Gang* 和 *Y. Hatsuda*，《*SL(2)*陈-西蒙斯理论中的 *S*对偶重现》，《高能物理学报》*07*（*2018*年） 053 [1710。09994]。[23] *T. Fujimori*、*M. Honda*、*S. Kamata*、*T. Misumi*、*N. Sakai* 和 *T. Yoda*，《量子相变与重现：来自三维 $\mathcal{N}=4$ 超对称量子电动力学的启示》，*PTEP 2021*（*2021*年）*103B*04 [2103。13654]。[24] *D. Dorigoni*、*M.B. Green* 和 *C. Wen*，《$\mathcal{N}=4$*SU(N)*超杨-米尔斯理论中积分关联函数的精确性质》，《高能物理学报》*05*（*2021*年） 089 [2102。09537]。[25] *F. Benini* 和 *S. Cremonesi*，《$\mathcal{N}=$*(2, 2)*规范理论在 $\mathbb{S}^2$ 上的配分函数与涡旋》，《数学物理通讯》*334*（*2014*年）*1483–1527*。[26] *F. Benini* 和 *W. Peelaers*，《三维希格斯支局域化》，《高能物理学杂志》*2014*（*2014*年）。[27] *M. Bullimore*、*A. Ferrari* 和 *H. Kim*，《三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的扭曲指标与拟映射的枚举几何》，《高能物理学杂志》*2019*（*2019*年）。[28] *M. Bullimore*、*A.E.V. Ferrari*、*H. Kim* 和 *G. Xu*，《扭曲指标与拓扑鞍点》，*2023*年。[29] *M. Fujitsuka*、*M. Honda* 和 *Y. Yoshida*，《三维 $n=2$ 理论的希格斯支局域化》，《理论与实验物理进展》*2014*（*2014*年）*123B02*。

[30] *W. Peelaers*，$\mathcal{N}=1$ 理论在 $S^3\times S^1$上的希格斯支局域化，《高能物理学杂志》*2014*年（*2014*年）。[31] *Y. Pan* 和 *W. Peelaers*，基于 *Seiberg-Witten* 单极子的椭球分配函数，《高能物理学杂志》*2015*年（*2015*年）。[32] *N.A. Nekrasov*，基于瞬子计数的 *Seiberg-Witten* 预势，《理论与数学物理进展》*7*（*2003*年） 831 [*hep-th*/0206161].[33] *“NIST* 数学函数数字图书馆。”*https://dlmf.nist.gov/*，*2025-12-15* 发布的 *1.2.5* 版。[34] *J.G. Russo*，关于超对称规范理论中微扰级数的一则注记，《高能物理学杂志》*2012*年（*2012*年）。[35] *E. Witten*，重新审视二维规范理论，《几何物理杂志》*9*（*1992*年）*303*[*hep-th*/9204083].[36] *L. Griguolo*、*R. Panerai*、*J. Papalini*、*D. Seminara* 和 *I. Yaakov*，二维杨-米尔斯理论中不稳定瞬子的局域化与重求和，《高能物理学报》*06*（*2024*年） 188 [2403.00053].[37] *E.H. Leeb-Lundberg*，*A* 模型局域化中的不稳定瞬子，《高能物理学报》*09*（*2024*年）*190*[2312.11347].[38] *A.A. Migdal*，规范场论中的递推方程，《苏联物理学报：*JETP*》*42*（*1975*年）*413*。[39] *E. Witten*，关于二维量子规范理论，《数学物理通讯》*141*（*1991*年）*153*。[40] *M. Blau* 和 *G. Thompson*，二维规范理论讲义：拓扑方面与路径积分技术，载于《高能物理与宇宙学暑期学校》（包括“弦、引力及相关主题”研讨会，*1993*年*7*月*29—30*日），第*0175–244*页，*10*，*1993*年[*hep-th*/9310144].[41] *M.F. Atiyah* 和 *R. Bott*，黎曼曲面上的杨-米尔斯方程，《伦敦皇家学会哲学汇刊 *A* 辑》*308*（*1982*年）*523*。[42] *N. Drukker*、*S. Giombi*、*R. Ricci* 和 *D. Trancanelli*，*s3* 上的超对称威尔逊环，《高能物理学杂志》*2008*年（*2008*年）*017–017*。[43] *N. Drukker*、*S. Giombi*、*R. Ricci* 和 *D. Trancanelli*，更多超对称威尔逊环，《物理评论 *D*》*76*（*2007*年）。[44] *N. Drukker*、*S. Giombi*、*R. Ricci* 和 *D. Trancanelli*，威尔逊环：从四维超对称杨-米尔斯理论到二维杨-米尔斯理论，《物理评论 *D*》*77*（*2008*年）。[45] *V. Pestun*，四维 $\mathcal{N}=4$ 超对称杨-米尔斯理论局域化到二球面及 *1/8 BPS* 威尔逊环，《高能物理学杂志》*2012*年（*2012*年）。[46] *C. Closset*、*W. Gu*、*B. Jia* 和 *E. Sharpe*，二维 $\mathcal{N}=$*(0, 2)* 规范线性σ模型的扭曲局域化，《高能物理学杂志》*2016*年（*2016*年）。[47] *Y. Tachikawa*，面向初学者的 $N=2$ 超对称动力学，第*890*卷，””（*12*，*2013*年），*10.1007/978-3-319-08822-*8, [1312.2684].[48] *E.H. Leeb-Lundberg*，A模型局域化中的超函数，”” （*2025*年） [2509.25976].[49] *C. Closset*、*S. Cremonesi* 和 *D.S. Park*，二球面上的等变 a 扭曲与规范线性σ模型，《高能物理学杂志》*2015*年（*2015*年）。

[50] *C. B¨ar* 和 *S. Schopka*，球面空间形式的狄拉克行列式，载于《几何分析与非线性偏微分方程》，第*39–67*页，施普林格（*2003*年）。[51] *F. Benini*、*R. Eager*、*K. Hori* 和 *Y. Tachikawa*，带秩一规范群的二维 $N{=}2$规范理论的椭圆亏格，《数学物理快报》*104*（*2014*年）465 [1305.0533].[52] *F. Benini*、*R. Eager*、*K. Hori* 和 *Y. Tachikawa*，二维 $\mathcal{N} = 2$ 规范理论的椭圆亏格，《数学物理通讯》*333*（*2015*年） 1241 [1308.4896].[53] *L.C. Jeffrey* 和 *F.C. Kirwan*，非阿贝尔群作用的局域化，*1994*年。[54] *N. Kurokawa* 和 *S. Koyama*，多重正弦函数，《数学论坛》*15*（*2003*年）。[55] *M. Spreafico*，关于 *Barnes* 双重ζ函数与伽马函数，《数论杂志》*129*（*2009*年）*2035*。[56] *N. Nekrasov* 和 *A. Okounkov*，*Seiberg-Witten* 理论与随机分拆，*2003*年。.[57] *C. Koz.caz*、*T. Sulejmanpasic*、*Y. Tanizaki* 和*M. Unsal*，柴郡猫重求和、自重求和与准精确可解系统，《数学物理通讯》*364*（*2018*年）*835*[1609.06198]。