arXiv:2602.05756v1 [math.DS] 5 Feb 2026

Stone 空间上的极小等度连续作用

´MARIA ISABEL CORTEZ 和 TILL HAUSER

ABSTRACT. 本文研究 Stone 空间上的极小等度连续作用，并将其称为 子里程表。我们既不假设空间可度量化，也不对作用群作任何假设。我们证明，特征值集合是子里程表的完备不变量。此外，我们通过其特征值集合的交稳定性刻画 Stone 空间上的极小旋转，并将其称为里程表。我们证明，任意非空的里程表族都存在一个最小公共扩张 和一个最大公共因子，且二者都是里程表，并且在共轭意义下唯一。我们还给出例子，说明类似结论对子里程表并不成立。

我们证明，子里程表可表示为极小有限作用的逆极限，里程表可表示为极小有限旋转的逆极限，并说明如何将非空里程表族的最小公共扩张和最大公共因子表示为逆极限。

我们证明，极小作用 X 是子里程表，当且仅当其 Ellis 半群 $E(X)$ 是一个里程表，并说明如何根据 X 的表示推导出 $E(X)$ 的逆极限表示。此外，我们证明存在一个万有里程计，使所有子里程表都是它的因子；还证明了给定极小作用的最大子万花筒因子和极大里程计因子的存在性。

关键词：作用、子里程表、里程表、旋转、斯通空间、特征值、Ellis半群。

2020 年数学主题分类。主类 37B05；次类 54H15、20E18。

1. INTRODUCTION

群在紧豪斯多夫空间 G 上的极小等度连续作用是拓扑动力系统理论的重要组成部分。Auslander 在 [Aus88] 中将其刻画为 G 在商空间 K/F上通过平移定义的作用K，其中 G 是 F的一个闭子群 K。当 G 是阿贝尔群时，每个极小等度连续系统都是群旋转。然而，当 G 是非阿贝尔群时，可能出现并非群旋转的极小等度连续系统。

对于 $G = \mathbb{Z}$ 一类自然的极小旋转，可由里程表给出；里程表定义为沿有限极小旋转序列的逆极限 [Dow05]。

本文由德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，项目编号为 530703788。

众所周知，里程表（X， $\mathbb{Z}$）是 $\mathbb{Z}$ 在可度量化的斯通[1] 空间 [HR79、Dow05] 上极小旋转的（在共轭意义下）全部形式；对于有限生成群的作用，也有类似的结论，例如 $\mathbb{Z}^d$ [Cor06、CP08]。

若 G 是有限生成的，但不一定是阿贝尔群，则 G 在斯通空间上的极小等度连续作用不一定是旋转。根据 [CP08、CM16]，可度量化斯通空间上的极小等度连续作用可表示为沿有限极小作用序列的逆极限。这类作用称为子里程表，见 [CP08]。我们将在第 6 节看到，剩余有限群在斯通空间上的任意极小等度连续作用都是可度量化的。这一观察使我们能够将 [CP08] 中的定义扩展如下。

定义 1.1。 设 G 是一个群。斯通空间上的极小作用 (X, G) 称为

(i) 里程表，若 (X, G) 是群旋转。(ii) 子里程表，若 (X, G) 是等度连续的，

请注意，与以往的研究不同，例如 [CP08、CM16、GPS19、HL21、HL23], ，我们不局限于相空间可度量化的情形，也不局限于作用群可数的情形。事实上，正如我们将在第 6 节看到的，群 G 存在非可度量化子里程表，当且仅当 G 的有限指数子群集合不可数。此类群的例子包括非平凡有限群的不可数乘积，或具有无限多个生成元的自由群。

在第 4 节和6节中，我们证明子里程表是沿着有限极小作用的网取逆极限得到的，而可度量化子里程表则可表示为沿着有限极小作用的序列取逆极限。正如我们将在第7节看到的，类似结论也适用于里程表和有限极小旋转。因此，里程表是原有限群 [RZ00]上的作用。值得注意的是，两个里程表可以具有相同的原有限群作为相空间，但作为作用却截然不同。详情请见下文的例 7.1 。

为了证明这些结论，我们在第 3节根据一致性建立子里程表的刻画。为了从拓扑角度刻画子里程表（X， G），我们接下来考察以下概念。开子集 $B \subseteq X$ 称为一个 G-瓦片，当且仅当 $\{g.B;\ g \in G\}$ 是X的一个划分。接着我们证明，极小作用（X， G）是子里程表，当且仅当 X 的拓扑有一个由 G-瓦片构成的基。

自然会想到寻找一个完备的共轭不变量，以简化对子里程表范畴及其相应因子映射的研究。下面给出这样一个不变量。对于作用（X， G），我们用 $\mathrm{Eig}(X, G)$ 表示所有有限指数子群 Γ 中满足以下条件的子群的集合：存在一个因子映射π： $X \to G/\Gamma$。在第 5 节中，我们证明以下结果。

定理 （命题5.1 和定理5.5）。

- 子里程表的任意因子也是子里程表。

[1]若一个紧豪斯多夫空间全不连通，则称其为斯通空间。若（X， G）是一个极小作用，则 X 是可度量化斯通空间，当且仅当它是有限空间或康托尔空间。

- 设(X,G) 是一个极小作用。当且仅当(X,G) 的(Y,G) 是其因子时，$\mathrm{Eig}(Y,G) \subseteq \mathrm{Eig}(X,G)$。
- 两个子里程表共轭，当且仅当它们具有相同的特征值。

我们将看到，Eig 自然地反映了子里程表的性质。在第 6 节，我们证明子里程表（X， G）可度量化，当且仅当 Eig(X， G) 可数。此外，在第 7 节，我们证明子里程表（X， G）是里程表，当且仅当 Eig(X， G) 对有限交封闭。这些观察将使我们能够在第 8 节证明以下结论。

定理 1.2。设 $\mathfrak{X}$ 是一个非空的里程表族。存在极小作用 $\bigvee\mathfrak{X}$ 和 $\bigwedge\mathfrak{X}$，使得

(a_1) $\bigvee\mathfrak{X}$ 是所有 $(X,\ G) \in \mathfrak{X}$ 的扩张。*(a_2)* $\bigwedge\mathfrak{X}$ 是所有 $(X,\ G) \in \mathfrak{X}$ 的因子。*(b_1)* 任何极小作用 $(Y,\ G)$ 若是所有 $(X,\ G) \in \mathfrak{X}$ 的扩张，则它是 $\bigvee\mathfrak{X}$ 的扩张。*(b_2)* 任何极小作用 $(Y,\ G)$ 若是所有 $(X,\ G) \in \mathfrak{X}$ 的因子，则它是 $\bigwedge\mathfrak{X}$ 的因子。

关于所指定的性质，$\bigvee\mathfrak{X}$ 和 $\bigwedge\mathfrak{X}$ 在共轭意义下唯一，且二者都是里程表。

定义 1.3. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个非空的里程表族。 $\bigvee\mathfrak{X}$ 称为 $\mathfrak{X}$ 的最小公共扩张（也称上确界），而 $\bigwedge\mathfrak{X}$ 称为 $\mathfrak{X}$的最大公共因子（也称下确界）。对于里程表 X, X'，我们将 $X\vee X' := \bigvee\{X, X'\}$ 和 $X \wedge X' := \bigwedge\{X, X'\}$简记为。

注 1.4. 我们将在例8.6 中看到，定理1.2 中的类似结论对于非空的子里程表族并不成立。

众所周知，正规子群满足模律，我们将在第8.5 小节中详细讨论这一点。我们将证明，里程表也继承了这一模律，即如下结论。

定理 1.5. 对于满足 X_1 是 X_2 的因子的里程表 X_1、X_2 和 X，有

$$(X_1 \vee X) \wedge X_2 = X_1 \vee (X \wedge X_2).$$

显然，可度量里程表（非空）族的最大公共因子是可度量化的。关于最小公共扩张，我们将在小节 8.6 中证明以下结果。

定理 1.6. 对于可度量里程表的可数非空族 $\mathfrak{X}$，其最小公共扩张 $\bigvee\mathfrak{X}$ 也是可度量化的。

作为所发展理论的一个应用，我们在第9 节中（对于给定的群 G），证明了存在一个万有里程计，它以所有子里程表为因子。此外，我们证明了任意极小作用都有一个极大子里程表因子和一个极大里程计因子，并讨论了如何导出相应的逆极限表示。我们证明，极小作用是

子里程表，当且仅当其 Ellis 半群是一个里程表。此外，我们证明，定义为所有里程表扩张的下确界的包络里程表，与某个子里程表的 Ellis 半群共轭（X, G）。利用后者，我们说明了如何从（X, G）的逆极限表示导出子里程表（X, G）的 Ellis 半群的逆极限表示，并证明子里程表是可度量化的，当且仅当其 Ellis 半群是可度量化的。

Con约定： 若无特别说明， G表示一个（离散）群 .

2. 预备知识

当 R 是集合 X 上的一个关系时，对于 $x \in X$，我们记

$$R[x] := \{x' \in X;\, (x', x) \in R\} \quad \text{and} \quad R^{-1} := \{(x', x);\, (x, x') \in R\}.$$

对于 X 上的关系 R 和 R'，我们用 RR' 表示所有满足以下条件的(x, x')的集合：存在 $y \in X$，使得$(x, y) \in R$且$(y, x') \in R'$。注意，这一运算满足结合律。

2.1. 格。偏序集是一个二元组$(P, \leq)$，其中 P 是一个集合， $\leq$是 P 上的二元关系，且满足自反性、反对称性和传递性。设$(P, \leq)$是一个偏序集。如果P 中的每一对元素都有上确界[2] 和下确界，则称$(P, \leq)$为格。如果任意子集都有上确界和下确界，则称$(P, \leq)$为完备格。若对于任意 $A \subseteq L$，上确界和下确界都存在于$(P, \leq)$中，且属于 L，则称子集 $L \subseteq P$ 为 P 的完备子格。

2.2. **拓扑**。 拓扑空间的一个子集称为既开又闭 集，当且仅当它既闭又开。拓扑空间上的一个关系 X 称为闭/开/既开又闭 的，当且仅当它作为赋予乘积拓扑的 X^2 的子集是闭/开/既开又闭的。

2.2.1. 紧豪斯多夫空间的均匀结构。设 X 为一个紧豪斯多夫空间。我们将 $\mathbb{U}_X$ 记作 X的一致结构，即所有包含对角线 Δ_X 的邻域 ϵ的集合：$= \{(x, x);\ x \in X\}$ 在 X^2 内。 $\mathbb{U}_X$ 的元素称为围邻。围邻 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$ 称为对称的，如果 $\epsilon = \epsilon^{-1}$。对于所有 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$，存在一个对称的 $\delta \in \mathbb{U}_X$，使得 $\delta\delta \subseteq \epsilon$。有关一致结构的参考资料和详细内容，参见 [Kel17，第 6]章。
对于 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$，我们记 $B_\epsilon(x)$：$= \epsilon[x]$。如果对于每个 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$ 都存在 $\delta \in \mathbb{B}$ 使得 $\delta \subseteq \epsilon$，则称子集 $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{U}_X$ 为 $\mathbb{U}_X$的基。每当 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{U}_X$的基时，对于 $x \in X$，集合 $\{B_\epsilon(x);\ \epsilon \in \mathbb{B}\}$ 是 x [的（拓扑）邻域基，Kel17，推论 30]。这使得我们可以从 $\mathbb{U}_X$恢复 X的拓扑。

[2]对于 $A \subseteq P$，元素 $x \in P$是 A 的上界，如果对于所有 $a \in A$都有 $a \leq x$。A 的上确界 是一个上界 x，并且对于 A的每个上界 y 都有 $x \leq y$。注意，如果上确界存在，则它是唯一的。同样地，我们定义下界和下确界。

2.2.2. 斯通空间。 一个非空拓扑空间 X 称为 全不连通的，如果其唯一的连通子集是单点集 [IN99，第 101]页。称其为零维的，当且仅当其拓扑存在一个既开又闭集基 [IN99，第 64]页。紧豪斯多夫空间是全不连通的，当且仅当它是零维的 [IN99，定理 12。11]。 斯通空间是全不连通的紧豪斯多夫空间。注意，斯通空间的非空闭子集也是斯通空间。

2.3. 群。令 G 为一个群。对于子集 $M \subseteq G$，我们用 $\langle M\rangle$ 表示由 M 生成的子群。对于 G 的子群 Γ 和 Λ，当 Γ 是 Λ 的子群时，我们记 $\Gamma \leq \Lambda$。对于群同态 $\phi\colon G \to H$，我们记 $\ker(\phi) := \{g \in G;\ \phi(g) = e_H\}$ 表示其核。

若划分 $G/\Gamma{:=}\{g\Gamma;\ g \in G\}$ 为有限，则称子群 $\Gamma \leq G$ 为有限指数子群。我们用 $[G\colon \Gamma] := |G/\Gamma|$ 表示其指数（在 G中）。我们用 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 表示 G 的所有有限指数子群组成的集合。注意，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是向上封闭的，即对于 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 和满足 $\Gamma \leq \Lambda$ 的 $\Lambda \leq G$，有 $\Lambda \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。
对于 $\Gamma \leq G$，子集 $F \subseteq G$ 称为基本域，若每个 $g \in G$都能唯一表示为乘积 $g = h\gamma$，其中 $(h,\ \gamma) \in F \times \Gamma$。注意，$F$ 可以选为包含单位元 e_G。若 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，则有 $|F| = [G\colon\ \Gamma] < \infty$。

注记 2.1。 若 F 是 $\Lambda \leq G$ 的基本域，且 F' 是 $\Gamma \leq \Lambda$的基本域，则 $F'F$ 是 $\Gamma \leq G$ 的基本域。因此，对于 $\Gamma,\ \Lambda \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 且满足 $\Gamma \leq \Lambda$ 的情形，有 $[G\colon\ \Lambda][\Lambda\colon\ \Gamma] = [G\colon\ \Gamma]$。特别地，若 Γ 和 Λ 在 G 中的指数相同，则有 $[\Lambda\colon\ \Gamma] = 1$，即 $\Gamma = \Lambda$。

对于 $\Gamma \leq G$ 和 $g \in G$，我们记[3] $\Gamma^g := g\Gamma g^{-1}$ 为 Γ 在 g作用下的共轭。注意，$\Gamma^g \leq G$，并且对于 g、$h \in G$，有 $(\Gamma^g)^h = \Gamma^{(hg)}$。若存在 $g \in G$ 使得 $\Gamma = \Lambda^g$，则称两个子群 Γ 和 Λ 共轭。若子群 $\Gamma \leq G$ 满足对所有 $g \in G$都有 $\Gamma^g = \Gamma$，则称其为（ G中的）正规子群。 $\Gamma \leq G$ 的正规核定义为$\Gamma_G := \bigcap_{g\in G} \Gamma^g$。它是 Γ 中包含于 G且为正规子群的最大子群。更多细节请参阅 [RZ00]。

注记 2.2. 令 $\Gamma \leq G$ 和 F 为 Γ的基本域。对于 $g \in G$，存在 $h \in F$ 使得 $g\Gamma = h\Gamma$，并且我们注意到 $\Gamma^g = (g\Gamma)(g\Gamma)^{-1} = (h\Gamma)(h\Gamma)^{-1} = \Gamma^h$.因此 $\{\Gamma^g;\ g \in G\}$ 是有限的，并且我们注意到正规核是一个有限指数子群。

2.4. 作用。设 G 是一个群，X 是一个紧豪斯多夫空间。G 在 X 上的作用是一个群同态 α，它从 G 映入 $X \to X$ 的同胚群。对于 $g \in G$ 和 $x \in X$，我们省略作用符号，直接写作 $g.x := \alpha(g)(x)$。这样我们就可以直接称 (X, G) 为一个作用。关于以下内容及作用的更多细节，请参见 [Aus88] 。

[3]注意，我们对 Γ^g 的定义不同于 [RZ00], 中的定义， Γ^g 表示 $g^{-1}\Gamma g$。我们的约定经过选择，使其与左作用的配合更加自然。这一点将在后续讨论中显而易见。

设 (X,G) 是一个作用。对于 $x\in X$，我们记 $G.x:=\{g.x;\ g\in G\}$ 表示 x 的轨道。如果所有 $x\in X$ 都有稠密轨道，则称作用 (X,G) 为极小。对于 $x\in X$，我们记 $G_0(x):=\{g\in G;\ g.x=x\}$ 表示 x 的稳定子。注意，对所有 $g\in G$，$G_0(g.x)=G_0(x)^g$ 均成立。

若 $(X_i,\ G)_{i\in I}$ 是一族作用，则其乘积 $\prod_{i\in I}X_i$ 也是一个紧豪斯多夫空间。在 $\prod_{i\in I}X_i$ 上，我们考虑由 $g.(x_i)_{i\in I}:=(g.x_i)_{i\in I}$给出的作用。对于子集 $M\subseteq X$ 和 $g\in G$，记 $g.M:=\{g.x;\ x\in M\}$。若子集 $M\subseteq X$满足 $g.M=M$ 对所有 $g\in G$都成立，则称其为不变 子集。若 X^2 的子集相对于$(X^2,\ G)$是不变的，则称其为不变 子集。

2.4.1. 等变映射。 作用$(X,\ G)$与$(Y,\ G)$之间的连续映射 $\pi\colon\ X\to Y$，若对所有 $g\in G$和 $x\in X$都满足 $\pi(g.x)=g.\pi(x)$，则称为等变 映射。等变同胚称为共轭。若两个作用之间存在共轭，则称它们共轭 。等变满射称为因子映射。若存在因子映射 $\pi\colon\ X\to Y$，则称$(X,\ G)$是$(Y,\ G)$的扩张，而称$(Y,\ G)$是$(X,\ G)$的因子 。任何因子映射都是闭映射，即闭集的像仍为闭集。极小作用之间的任何等变映射都是因子映射。

若 $R\subseteq X$ 是一个不变闭等价关系，则 $g.R[x]:=R[g.x]$ 在 X/R 上诱导一个作用，且商映射 $x\mapsto R[x]$ 是一个因子映射。此外，对于因子映射 $\pi\colon\ X\to Y$，我们将 $R(\pi):=\{(x,x')\in X^2;\ \pi(x)=\pi(x')\}$记作纤维关系。 $R(\pi)$ 是一个不变闭等价关系，且 (Y,G) 共轭于 $(X/R(\pi)\ G)$。

2.4.2. 等连续性。称作用 (X,G) 为等度连续的，如果对任意 $\epsilon\in\mathbb{U}_X$ 存在 $\delta\in\mathbb{U}_X$，使得对所有 $(x,x')\in\delta$ 以及 $g\in G$，都有 $(g.x,g.x')\in\epsilon$。注意，(X,G) 是等度连续的，当且仅当 $\mathbb{U}_X$ 允许一个由不变 entourages 构成的基。极小等度连续作用 (X,G) 是可合并的，即任意因子映射 $\pi\colon\ X\to X$ 都是一个共轭 [Aus88，第 81]页。特别地，极小等度连续作用 (X,G) 与 (Y,G) 共轭，当且仅当存在因子映射 $X\to Y$ 与 $Y\to X$。称极小等度连续作用 (X,G) 为正则的[4],，当对 $x,x'\in X$存在共轭$\iota\colon\ X\to X$，使得 $\iota(x)=x'$。

2.4.3. 旋转。 设 G 为一个群，X 为一个紧致（豪斯多夫）群。一个（群）旋转是形如 $g.x=\phi(g)x$的作用（X,G），其中 $\phi\colon\ G\to X$是一个群同态。任何旋转都是等度连续的。一个旋转是极小的，当且仅当 $\phi(G)$在 X中稠密。注意，对于极小旋转，ϕ 由 $\phi(g)=g.e_X$唯一确定，其中 e_X 表示 X的单位元。任何极小旋转（$X,\ G$）都是正则的，因为对 $x,x'\in X$，我们有 $y\mapsto yx^{-1}x'$给出一个共轭 $\iota\colon\ X\to X$，且 $\iota(x)=x'$。

[4]注意，对于极小等度连续作用（$X,\ G$）而言，（$X^2,\ G$）也是等度连续的。因此，对于极小等度连续作用，[Aus88，第 147]页中给出的正则性概念可以按照我们所采用的方式等价地表述。

2.4.4. 最大等度连续因子。对任意作用 (X, G) 都存在一个最大等度连续因子，即一个因子映射 π_{MEF}: $X \to X_{\mathrm{MEF}}$ 映到一个等度连续作用 (X_{MEF}, G)，使得对任何因子映射 π: $X \to Y$ 映到一个等度连续作用 (Y, G)，都存在一个因子映射 ψ: $X_{\mathrm{MEF}} \to Y$ 使得 $\pi = \psi \circ \pi_{\mathrm{MEF}}$。最大等度连续因子在共轭意义下是唯一的。详见[Aus88]。

2.4.5. 有限子里程表。若作用 (X, G) 满足 X 为有限，则称其为有限。注意，有限极小作用恰好就是有限子里程表。接下来我们总结一些关于有限子里程表的众所周知的结论。对于有限作用 (X, G)，有 $G_0(x) \in \mathsf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。

设 (X, G) 和 (Y, G) 是有限子里程表，且 $(x, y) \in X \times Y$。容易证明，存在因子映射 π: $X \to Y$，满足 $\pi(x) = y$，当且仅当 $G_0(x) \subseteq G_0(y)$。此外，存在共轭映射 ι: $X \to Y$，满足$\iota(x) = y$，当且仅当 $G_0(x) = G_0(y)$。

对于 $\Gamma \in \mathsf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们用 G/Γ 表示有限划分 $\{h\Gamma;\ h \in G\}$，并考虑由 $g.(h\Gamma) := gh\Gamma$ 给出的诱导作用 $(G/\Gamma, G)$，其中 $g \in G$ 且 $h\Gamma \in G/\Gamma$。显然，有 $G_0(\Gamma) = \Gamma$。因此，只要 (X, G) 是有限子里程表且$x \in X$，则 (X, G) 与 $(G/G_0(x), G)$ 共轭，并且可以选择共轭使得 $x \mapsto G_0(x)$。

注意，对于 $\Gamma, \Lambda \in \mathsf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 和 $g \in G$，存在因子映射[5] π: $G/\Lambda \to G/\Gamma$，且 $\pi(\Lambda) = g\Gamma$，当且仅当 $\Lambda \subseteq \Gamma^g$。此外，存在共轭 ι: $G/\Lambda \to G/\Gamma$，且 $\iota(\Lambda) = g\Gamma$，当且仅当 $\Lambda = \Gamma^g$。特别地，Γ 和 Λ 共轭，当且仅当 G/Γ 和 G/Λ共轭。回顾一下，任意旋转都是正则的。因此，$\Gamma \in \mathsf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是正规的，当且仅当 $(G/\Gamma, G)$ 是旋转，即一个有限奥多计量器。

3. Entourages, equivalence relations and G-tiles

3.1. **斯通空间上等度连续作用的一致性**。为了通过各自一致性的性质刻画子里程表，我们关注作为等价关系的围邻。下面的引理概述了这类围邻的相关性质。

引理 3.1。设 X 是一个紧豪斯多夫空间，$\rho \in \mathbb{U}_X$ 是一个等价关系。

(i) ρ 确立了一个有限划分。*(ii)* $B_\rho(x)$ 对所有 $x \in X$ 都是既开又闭的。

(iii) ρ 是既开又闭的（在 X^2 中）。

证明。我们首先证明，对于所有 $x \in X$，$B_\rho(x)$ 都是开集。考虑 $x' \in B_\rho(x)$。由 $\rho \in \mathbb{U}_X$ 可知，$B_\rho(x')$ 是 x' 的一个邻域。此外，ρ 是一个等价关系，因此 $B_\rho(x') = B_\rho(x)$。这表明 $B_\rho(x)$ 是开集。

(i): 由于 $\{B_\rho(x);\ x \in X\}$ 是 X 的一个开覆盖，且 X 是紧致的，因此存在一个有限的 $F \subseteq X$，使得 $X = \bigcup_{x \in F} B_\rho(x) = \bigcup_{x \in F} \rho[x]$。特别地，有限集 $\{\rho[x];\ x \in F\}$ 是由 ρ 诱导的划分。

[5]因子映射由 $h\Lambda \mapsto hg\Gamma = (hgh^{-1})h\Gamma$ 给出。

(ii)：对于 $x \in X$，我们已经知道 $B_\rho(x)$ 是开集。此外，它是其他开等价类的有限并，因此也是闭集。

(iii)：由 (i) 和 (ii)，$\rho = \bigcup_{x\in X} \rho[x]^2$ 是 X^2的有限个既开又闭子集的并，因此是既开又闭的。□

下面通过相应一致性结构的性质刻画子里程表。

命题 3.2. 设 (X, G) 是一个作用。

(i) X 是一个斯通空间，当且仅当 $\mathbb{U}_X$ 允许存在一个由等价关系组成的基。*(ii)* (X, G) 是在斯通空间上的等度连续作用，当且仅当 $\mathbb{U}_X$允许存在一个由不变等价关系组成的基。

证明。(i)：首先，假设 $\mathbb{U}_X$ 允许存在一个由等价关系组成的基。考察 $x \in X$ 及其一个邻域 U。取 x的一个邻域，则存在 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$ 使得 $B_\epsilon(x) \subseteq U$。由假设可知，存在一个等价关系 $\rho \in \mathbb{U}_X$ 满足 $\rho \subseteq \epsilon$。显然，$B_\rho(x) \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U$。此外，由引理 3.1 可知 $B_\rho(x)$ 是既开又闭的。这说明 X 是零维的，即为一个斯通空间。

反过来，假设 X 是一个斯通空间，并考虑 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$。令$\delta \in \mathbb{U}_X$ 为对称的，且满足 $\delta\delta \subseteq \epsilon$。由于 X 是$x \in X$ 的斯通空间，存在一个 A_x 既开又闭，使得 $x \in A_x \subseteq B_\delta(x)$。我们有 $X = \bigcup_{x\in X} A_x$，而 X 的紧致性推出，对于某个有限子集 $F \subseteq X$，有 $X = \bigcup_{x\in F} A_x$。将 $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 枚举，并记 $A_1 := A_{x_1}$ 以及 $A_k := A_{x_k} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$，其中 $k \in \{2, \ldots, n\}$，由此得到 $\{A_1, \ldots, A_n\}$，它是 X的一个划分，由既开又闭集组成。因此，$\rho := \bigcup_{k=1}^{n} A_k^2$ 是一个既开又闭等价关系。特别地，我们有 $\rho \in \mathbb{U}_X$。对于 $(y,\ y') \in \rho$，存在 $k \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $(y,\ y') \in A_k^2 \subseteq A_{x_k}^2 \subseteq B_\delta(x_k)^2 \subseteq \delta\delta \subseteq \epsilon$。这表明 $\rho \subseteq \epsilon$。

(ii)：回顾一下，当且仅当 $\mathbb{U}_X$ 允许存在一个由不变 entourages 构成的基时，作用是等度连续的。因此，由 (i) 可知，只要$\mathbb{U}_X$ 允许存在一个由不变等价关系构成的基，那么 $(X,\ G)$ 就是等度连续作用，且 X 是一个 Stone空间。

反过来，假设 $(X,\ G)$ 是 Stone空间上的等度连续作用，并考虑 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$。由 (i)，存在一个等价关系 $\rho' \in \mathbb{U}_X$，满足$\rho' \subseteq \epsilon$。记 $\rho := \bigcap_{g\in G} g.\rho'$，并注意到 ρ 是不变等价关系，且 $\rho \subseteq \rho' \subseteq \epsilon$。由于 $(X,\ G)$ 是等度连续的，存在一个不变的 $\delta \in \mathbb{U}_X$，满足 $\delta \subseteq \rho'$；由 $\delta = \bigcap_{g\in G} g.\delta \subseteq \rho$ 可得 $\rho \in \mathbb{U}_X$。□

3.2. G-**片**。以下概念将成为研究子里程表的重要工具。

定义 3.3。设 (X, G) 是一个作用。开子集 $A \subseteq X$ 称为一个 G- 瓦片，若 $\{g.A;\ g \in G\}$ 是 X 的一个划分。我们将此划分称为由 A 诱导的划分，并将相应的等价关系称为由 A诱导的等价关系。

注 3.4. 由于 X 是紧致的，一个 G-贴片的诱导划分是有限的，因而任意 G-贴片都是既开又闭的。

对于极小作用，G-贴片与作为围邻的不变等价关系密切相关。

引理 3.5. 设 (X, G) 是一个极小作用。

(i) 由 *G-tile* A 诱导的等价关系 ρ 是一个不变的既开又闭环绕，并满足 $B_\rho(x) = A$，对所有 $x \in A$ 均成立。*(ii)* 若 $\rho \in \mathbb{U}_X$ 是一个不变等价关系，则对任意 $x \in X$，$B_\rho(x)$ 都是一个 *G-tile*。

证明. (i)：由 $A \in \{g.A;\ g \in G\}$ 可知，对所有 $x \in A$，$B_\rho(x) = \rho[x] = A$ 均成立。取有限的 $F \subseteq X$，使得 $\{g.A;\ g \in F\} = \{g.A;\ g \in G\}$，并注意到 $\rho = \bigcup_{g\in F} g.A^2$ 是有限个既开又闭集的并，因此也是既开又闭的。由于 ρ 是自反的，我们看到 ρ 是一个 entourages。对于 $g \in G$ 和 $(x, x') \in \rho$，存在 $h \in G$ 使得 $(x, x') \in h.A^2$。由此可得 $(g.x, g.x') \in (gh).A^2 \subseteq \rho$，这表明 ρ 是不变的。
(ii)：令 $x \in X$。由引理 3.1 可知，对于所有 $x' \in X$，$B_\rho(x')$ 都是开集。因此，由 (X, G) 的极小性可得，对于 $x' \in X$，存在 $g \in G$，使得 $g.x \in B_\rho(x')$。由于 ρ 是不变等价关系，我们注意到 $x' \in B_\rho(g.x) = g.B_\rho(x)$。这表明 $\bigcup_{g\in G} g.B_\rho(x) = X$，并由此得到 $\{g.B_\rho(x);\ g \in G\} = \{\rho[g.x];\ g \in G\}$ 是由等价关系 ρ 给出的划分。□

3.3. 通过 G-瓦片刻画子里程表。

定理 3.6. 极小作用 (X, G) 是子里程表，当且仅当 X 的拓扑具有一个由 G-瓦片构成的基。

证明。 若 (X, G) 是子里程表，则由引理 3.1 和命题3.2 可知，$\mathbb{U}_X$ 具有一个基 $\mathbb{B}$，其元素是不变闭等价关系。由引理 3.5 我们注意到 $\{B_\epsilon(x); (x, \epsilon) \in X \times \mathbb{B}\}$ 是X 的一个拓扑基，且其元素由 G-瓦片组成。
反过来，假设 X 的拓扑有一个由 G-瓦片构成的基。根据命题 3.2，只需证明 $\mathbb{U}_X$ 有一个由不变等价关系构成的基。令 $\epsilon \in \mathbb{U}_X$。取一个满足 $\delta\delta \subseteq \epsilon$ 的对称环绕 $\delta \in \mathbb{U}_X$。对于 $x \in X$，选取一个 G-瓦片，使得 $x \in A_x \subseteq B_\delta(x)$，并回忆一下，$G$-瓦片是开集。由于 X 是紧致的，我们注意到存在一个有限子集 $F \subseteq X$，使得 $\bigcup_{x\in F} A_x = X$。对于 $x \in F$，记 ρ_x 为由 A_x 诱导的等价关系。由引理 3.5 可知，$\rho_x \in \mathbb{U}_X$ 是一个既开又闭的不变等价关系。由于 F 是有限的，$\rho := \bigcap_{x\in F} \rho_x$ 也是一个既开又闭的不变等价关系。特别地，我们有 $\rho \in \mathbb{U}_X$。为证明 $\rho \subseteq \epsilon$，考虑 $(x_1, x_2) \in \rho$。存在 $x \in F$，使得 $x_1 \in A_x = \rho_x[x]$。由 $(x_1, x_2) \in \rho \subseteq \rho_x$，我们注意到 $x_2 \in \rho_x[x_1] = \rho_x[x] = A_x$，因此 $(x_1, x_2) \in A_x^2 \subseteq B_\delta(x)^2 \subseteq \delta\delta \subseteq \epsilon$。□

4. Subodometers generated by scales

接下来，我们证明任意子里程表都共轭于有限极小作用的逆极限。为此，我们需要以下概念。回顾一下，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 表示所有有限指数子群 $\Gamma \leq G$ 的集合。

定义 4.1。 称子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为

- 尺度，如果 S 非空，且对于 $\Gamma, \Gamma' \in S$，存在 $\Lambda \in S$ 使得$\Lambda \subseteq \Gamma \cap \Gamma'$。
- 向上封闭，如果对于所有 $\Gamma \in S$ 和 $\Lambda \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，若 $\Gamma \subseteq \Lambda$，则有$\Lambda \in S$。
- 滤子，如果它是向上封闭尺度。

注4.2。我们的尺度定义与 [CP08], 中所考虑的尺度定义不同，那里尺度由 $\mathrm{Sub}\Gamma_n$中的序列 $(_{n\in\mathbb{N}})_{\mathrm{fin}}(G)$ 给出，其中 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。我们将在下文第 6节看到，这些序列可用于刻画可度量化子里程表。

注 4.3。若子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 满足：对于所有 $\Gamma, \Gamma' \in S$，都有 $\Gamma \cap \Gamma' \in S$，则称其为交封闭（也称交稳定）。$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的任何交封闭子集都是一个尺度。此外，任何滤子都是交封闭的。

设 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为一个尺度。注意，对于满足 $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ 的 Γ_1、$\Gamma_2 \in S$，存在唯一的因子映射 $\pi^{\Gamma_1}_{\Gamma_2}\colon G/\Gamma_1 \to G/\Gamma_2$，且满足 $\Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$。对于满足 $\Gamma_1 \leq \Gamma_2 \leq \Gamma_3$ 的 Γ_1、Γ_2、$\Gamma_3 \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们有 $\pi^{\Gamma_1}_{\Gamma_3} = \pi^{\Gamma_2}_{\Gamma_3} \circ \pi^{\Gamma_1}_{\Gamma_2}$。因此，任意尺度 S 诱导一个由因子映射构成的逆系统 $(\pi^{\Gamma}_{\Lambda})_{(\Gamma,\Lambda)\in S^2_*}$，其中我们将 $S^2_* := \{(\Gamma, \Lambda) \in S^2$ 简记为 $\Gamma \leq \Lambda\}$。关于逆系统与逆极限的更多细节，见 [RZ00 第 1 节1] 。

定义 4.4. 设 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为一个尺度。 S-子里程表 由逆极限给出

$$\varprojlim_{\Gamma\in S} G/\Gamma := \left\{(x_\Gamma)_{\Gamma\in S} \in \prod_{\Gamma\in S} G/\Gamma;\ \pi^{\Gamma}_{\Lambda}(x_\Gamma) = x_\Lambda \text{ for all } (\Gamma, \Lambda) \in S^2_*\right\}.$$

对于尺度 S，如果子里程表 $(X,\ G)$ 与 S-子里程表共轭，我们就称它是由 S生成的。

注 4.5。 注意， S-子里程表是 G 在 $\prod_{\Gamma\in S} G/\Gamma$ 上的等度连续作用的极小分支，其中包含 $(\Gamma)_{\Gamma\in S}$。由于 $\prod_{\Gamma\in S} G/\Gamma$是一个斯通空间，我们注意到 $(\varprojlim_{\Gamma\in S} G/\Gamma,\ G)$ 是一个子里程表，这也说明了该术语的合理性。

接下来我们将证明，任意子里程表都由某个尺度生成。为此，我们需要以下内容。

定义 4.6。 设 $(X,\ G)$ 是一个极小作用。对于 $x \in X$，我们用 $\mathrm{Eig}_x(X,\ G)$ 表示所有满足以下条件的 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的集合：存在一个因子映射 $\pi\colon X \to G/\Gamma$，使得 $\pi(x) = \Gamma$。

定理 4.7. 设 (X, G) 为极小作用，且 $x \in X$。

(i) $\mathrm{Eig}_x(X, G)$ 是一个滤子。*(ii)* 若 (X, G) 是子里程表，则 (X, G) 由 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$生成。

为证明定理4.7，我们首先研究命中时间。令（X，G）为一个极小作用。对于 $x \in X$ 和 $B \subseteq X$，我们记

$$G(x, B) := \{g \in G;\ g.x \in B\}$$

x到 B的命中时间集合。

引理 4.8. 设 (X, G) 是一个极小作用，且 $x \in X$。对于任意 $x \in X$，都有 $\mathrm{Eig}_x(X, G) = \{G(x, B);\ B\ G\text{-块，且 } x \in B\}$。

证明。'$\subseteq$': 考虑 $\Gamma \in \mathrm{Eig}_x(X, G)$ 和因子映射 $\pi\colon X \to G/\Gamma$，其中 $\pi(x) = \Gamma$。记纤维关系为 $\rho := R(\pi)$，并注意到 ρ 是一个不变闭等价关系。由于 G/Γ 是有限的，它确定了有限多个等价类，这些等价类显然是既开又闭的。因此，ρ 是既开又闭集的有限并，故也是既开又闭的。特别地，ρ 是一个 entourage，由引理 3.5 可得 $B := B_\rho(x)$ 是一个 G-块，其中包含 x，并满足 $G(x, B) = G(\pi(x)\ \pi(B)) = G(\Gamma, \{\Gamma\}) = G_0(\Gamma) = \Gamma$.

'$\supseteq$': 考虑一个 G-平铺 B，其中 $x \in B$。记 ρ 为诱导的等价关系，并回顾引理 3.5，可知 ρ 是一个不变的既开又闭的 entourage。特别地，它是一个不变闭等价关系。考虑因子映射$\pi\colon X \to G/\rho$，并注意到 G/ρ 是有限的。因此我们有

$$\Gamma := G(x, B) = G(\pi(x), \pi(B)) = G(\pi(x), \{\pi(x)\}) = G_0(\pi(x)) \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G).$$

由 $G_0(\pi(x)) = \Gamma$ 可知，存在一个共轭 $\iota\colon X/\rho \to G/\Gamma$，满足$\iota(\pi(x)) = \Gamma$。这表明 $G(x, B) = \Gamma \in \mathrm{Eig}_x(X, G)$。□

要证明 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$ 是一个尺度，先证明以下结果会比较方便。

引理 4.9。 设 (X, G) 是一个极小作用，且 $x \in X$。对于包含 x 的 G-平铺 B 和 B'，存在一个 G-平铺 B''，使得 $x \in B'' \subseteq B \cap B'$。

证明。记 ρ 和 ρ' 分别为由 B 和 B'所诱导的等价关系。记 $\xi := \rho \cap \rho'$ 并注意到 ξ 是一个等价关系。由引理3.5可知，ρ 和 ρ' 是不变的既开又闭的环绕，因此 ξ也是不变的既开又闭的环绕。因此，根据引理3.5 $B'' := B_\xi(x) \subseteq B \cap B'$ 是一个 G-瓦片，且包含 x。□

我们还需要以下结果。

引理 4.10。 设 (X, G) 和 (Y, G) 是等度连续极小作用，并考虑 $x \in X$ 和 $y \in Y$。存在一个因子映射 $\pi\colon X \to Y$，满足 $\pi(x) = y$，当且仅当对于 y 的任意邻域 V，都存在 x 的一个邻域 U，使得 $G(x, U) \subseteq G(y, V)$。

证明。由于 π 连续，第一个性质蕴含第二个性质。反过来，注意第二个性质蕴含 $G_0(x) \subseteq G_0(y)$。这一观察使我们可以考虑由 $g.x \mapsto g.y$给出的映射 $\phi\colon G.x \to Y$。由极小性可知，$G.x$ 在 X 中稠密，且 ϕ 的像稠密。接下来我们证明 ϕ 在 $G.x$上一致连续，即对于任意 $\epsilon \in \mathbb{U}_Y$，存在 $\delta \in \mathbb{U}_X$，使得对于所有满足$(x_1, x_2) \in \delta$的 x_1、$x_2 \in G.x$，都有$(\phi(x_1)\ \phi(x_2)) \in \epsilon$。这样便可根据 Kel17 定理 6.26]，将 ϕ 延拓为连续映射 $\pi\colon X \to Y$ [。容易验证，此时 π 是满足 $\pi(x) = y$的因子映射。

为证明 ϕ 在 $G.x$ 上的一致连续性，考虑 $\epsilon \in \mathbb{U}_Y$。由于 X 等度连续，不妨假设 ϵ 不变。我们注意到 $V := B_\epsilon(y)$ 是 y 的一个邻域，并且根据假设，存在一个邻域 U

x，使得 $G(x,U) \subseteq G(y,V)$。选取一个不变的 $\delta \in \mathbb{U}_X$，使得$B_\delta(x) \subseteq U$。对于满足 $(x_1, x_2) \in \delta$ 的 $x_1, x_2 \in G.x$，存在 $g_1, g_2 \in G$ 使得$g_i.x = x_i$。由于 δ 不变，我们有 $g_2^{-1}g_1.x \in B_\delta(x) \subseteq U$，因此$g_2^{-1}g_1 \in G(x,U) \subseteq G(y,V)$。由此可得 $g_2^{-1}g_1.y \in V = B_\epsilon(y)$，而 ϵ 的不变性推出 $(\phi(x_1)\ \phi(x_2)) = (g_1.y, g_2.y) \in \epsilon$. □

定理的证明 4.7: （i）：设（X，G）为一个极小作用，且 $x \in X$。显然，Eig$_x$（X，G）是向上封闭的。由于 $B \mapsto G(x, B)$ 关于集合包含是单调的，我们观察到Eig$_x$（X，G）是一个尺度，这由引理4.8 和4.9得出。

（ii）：设（X，G）为一个子里程表，且 $x \in X$。将 $S := \text{Eig}_x(X, G)$ 简记，并用（X'，G）表示 S-里程表以及 $x' := (\Gamma)_{\Gamma \in S}$。由于极小等度连续作用是可合并的，只需证明（$X$，$G$）与（$X'$，$G$）互为因子。

对每个 $\Gamma \in S$，记 π_Γ: $X \to G/\Gamma$ 为满足 $\pi_\Gamma(x) = \Gamma$的因子映射。考虑映射$\hat{}\pi$: $X \to \prod_{\Gamma \in S} G/\Gamma$，其由 $y \mapsto (\pi_\Gamma(y))_{\Gamma \in S}$ 给出，并注意$\hat{}\pi$是一个等变嵌入，满足$\hat{}\pi(x) = x'$。特别地，$\hat{}\pi$ 的像由 X' 给出，且$\hat{}\pi$ 的限制确立了一个因子映射 π: $X \to X'$。

为证明 (X, G) 是 (X', G) 的因子，我们使用引理 4.10。设 V 是 x 的一个邻域。由定理 3.6，存在一个 G-瓦片 B，使得 $x \in B \subseteq V$。由引理 4.8 可知，$\Lambda := G(x, B) \in \text{Eig}_x(X, G) = S$。记 ϕ_Λ: $X' \to G/\Lambda$ 为投影 $\prod_{\Gamma \in S} G/\Gamma \to G/\Lambda$ 的限制，并注意到 ϕ_Λ 是一个因子映射，且 $\phi_\Lambda(x') = \Lambda$。因此，$U := \phi_\Lambda^{-1}(\Lambda)$ 是 x' 的一个开邻域，满足

$$\begin{aligned} G(x', U) &= G(\phi_\Lambda(x'), \phi_\Lambda(U)) = G(\Lambda, \{\Lambda\}) = G_0(\Lambda) \\ &= \Lambda = G(x, B) \subseteq G(x, V). \end{aligned}$$

这表明 (X, G) 是 (X', G) 的一个因子 □

5. Factors and eigenvalues

5.1. 子里程表的因子。

命题 5.1. 子里程表的任意因子也是子里程表。

证明。设 (X, G) 是一个子里程表，并考虑因子映射 π: $X \to Y$。由于 (X, G) 是极小且等度连续的，因此 (Y, G) 也是如此。为证明 Y 是一个斯通空间，设 $\mathcal{B}$ 是 X 的拓扑的闭开基。因子映射 π 是闭映射。此外，极小等度连续作用之间的因子映射是开映射 [Aus88，定理 7.3]。因此，$\mathcal{B}' := \{\pi(B);\ B \in \mathcal{B}\}$ 由既开又闭集组成。为证明 $\mathcal{B}'$ 是 Y 拓扑的一个基，考虑 $y \in Y$ 以及 y 的一个开邻域 U。取 $x \in \pi^{-1}(y)$。由于 $\pi^{-1}(U)$ 是开集，我们可找到 $B \in \mathcal{B}$，使得 $x \in B \subseteq \pi^{-1}(U)$。于是我们有 $y = \pi(x) \in \pi(B) \subseteq \pi(\pi^{-1}(U)) = U$。这就证明了 $\mathcal{B}'$ 是 Y 拓扑的一个基。□

5.2. 极小作用的特征值。

定义 5.2。设 (X, G) 是一个极小作用。有限指数子群 $\Gamma \leq G$ 称为 (X, G) 的一个特征值，如果存在一个因子映射 π: $X \to G/\Gamma$。我们用 Eig(X, G) 表示 (X, G) 的所有特征值的集合。

注5.3。对于 $\mathbb{Z}$-作用，通常将一个特征值定义为实数 α ，使得存在一个因子映射，将系统（X，$\mathbb{Z}$）映到角度为 α的圆周旋转。当 $\alpha \in \mathbb{Q}$时，我们称 α 为有理特征值。在这种设定下，本文所称的特征值对应于形如 $p\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ 的子群，其中 $1/p$ 是有理特征值。关于极小 [Orm97] 作用在康托尔集上的有理特征值相关结果，参见$\mathbb{Z}$。

注意，只要 (Y, G) 是 (X, G) 的一个因子，那么 $\mathbf{Eig}(Y, G)$ 就包含于 $\mathbf{Eig}(X, G)$。特别地，共轭的极小作用具有相同的特征值。一般而言，Eig 并非完备的共轭不变量，下面的例子便说明了这一点。

例 5.4. 设 (X, G) 是一个作用，且 X 是连通的。它的任意因子X 都是连通的，因此 $\mathbf{Eig}(X, G) = \{G\}$。于是， X 与单点上的平凡作用具有相同的特征值。

接下来我们证明，对于子里程表，Eig 是完备的共轭不变量。

定理 5.5. ***(i)*** 设 (X, G) 是一个极小作用。子里程表 (Y, G) 是 (X, G) 的一个因子，当且仅当 $\mathrm{Eig}(Y, G) \subseteq \mathrm{Eig}(X, G)$。***(ii)*** 两个子里程表共轭，当且仅当它们具有相同的特征值。

证明首先注意以下事实。

引理 5.6。设 $\pi\colon X \to Y$ 是一个因子映射。如果 Y 是有限的，那么至多存在 $|Y|$ 个因子映射 $X \to Y$。

证明。固定 $x_0 \in X$。由于 X 是极小的，任意因子映射 $\pi\colon X \to Y$ 都由 $\pi(x_0)$ 决定。对于后者，至多有 $|Y|$ 种选择。□

定理 5.5 的证明：注意到 (ii) 由 (i) 推出，因为极小等连续作用是可合并的。为了证明 (i)，还需证明 $\mathbf{Eig}(Y, G) \subseteq \mathbf{Eig}(X, G)$ 蕴含 (Y, G) 是 (X, G) 的一个因子。根据定理 4.7，不妨设 (Y, G) 是某个尺度 $S \subseteq \mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的 S-子里程表。对于 $\Gamma \in S$ ，记 A_Γ 为所有满足以下条件的 $x \in X$ 的集合：存在一个因子映射 $\pi\colon X \to G/\Gamma$ ，使得 $\pi(x) = \Gamma$。由于 $\Gamma \in \mathbf{Eig}(X, G)$，我们注意到 A_Γ 非空。由引理 5.6 可知，因子映射 $X \to G/\Gamma$ 只有有限多个。因此，对所有此类因子映射 π 取并集 $A_\Gamma = \bigcup_\pi \pi^{-1}(\Gamma)$，这是 X 的闭子集的有限并，因而是闭的。这表明 $\mathcal{A}\colon = \{A_\Gamma;\ \Gamma \in S\}$ 由 X 的非空闭子集组成。

考虑 Γ、$\Lambda \in S$ 以及 $\Gamma \subseteq \Lambda$。典范因子映射 $\pi_\Lambda^\Gamma\colon G/\Gamma \to G/\Lambda$满足 $\pi_\Lambda^\Gamma(\Gamma) = \Lambda$ ，并且我们注意到 $A_\Gamma \subseteq A_\Lambda$。这表明映射$S \ni \Gamma \mapsto A_\Gamma \in \mathcal{A}$ 是单调的。由于 S 是一个尺度，因此不难看出 $\mathcal{A}$ 具有有限交性质，即任意有限子集 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ 都满足 $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A \neq \emptyset$。由于 X 是紧致的，我们注意到 $A\colon = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ 非空 [Mun00，第 26 定理。9]

固定 $x_0 \in A$。对于 $\Gamma \in S$ ，我们有 $x_0 \in A_\Gamma$ ，因此存在一个因子映射$\pi_\Gamma\colon X \to G/\Gamma$，满足 $\pi_\Gamma(x_0) = \Gamma$。我们注意到，$\hat{}\pi\colon X \to \prod_{\Gamma\in S} G/\Gamma$ 定义为

$x \mapsto (\pi_\Gamma(x))$ 的像中包含 $\hat{\pi}(x_0) = (\Gamma)_{\Gamma\in S}$，因此可将其限制为一个因子映射$\pi\colon X \to Y$。□

5.3. **从尺度到特征值**。给定一个尺度 S，自然会问，如何从 S 推导出 S-子里程表的特征值。为了详细回答这个问题，我们引入以下概念。

定义 5.7。设 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为一个子集。

- S 的上闭包 S^{u} 定义为所有满足以下条件的 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的集合：存在 $\Lambda \in S$，使得 $\Lambda \subseteq \Gamma$。

  S 的共轭闭包 S^{c} 定义为所有满足以下条件的 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的集合：存在 $g \in G$，使得 $\Gamma^g \in S$。

  S 的上共轭包 $[\![S]\!]$ 定义为所有满足以下条件的 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的集合：存在 $(g, \Lambda) \in G \times S$，使得 $\Lambda \subseteq \Gamma^g$，即由$[\![S]\!] := (S^{\mathrm{u}})^{\mathrm{c}}$给出。

注 5.8. 对于尺度 S，上闭包 S^{u} 是一个滤子。

注 5.9. 容易证明，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的一族向上封闭子集 $\mathcal{S}$ 的交 $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ 与并 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ 也是向上封闭的。对于非空子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，上闭包 S^{u} 是包含 S 的 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的最小向上封闭子集。

定义 5.10. 子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 称为共轭不变，每当对于 $\Gamma \in S$ 与 $g \in G$ 我们有 $\Gamma^g \in S$。

注 5.11. 容易证明，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的一族共轭不变子集 $\mathcal{S}$ 的交 $\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ 与并 $\bigcup_{S\in\mathcal{S}} S$ 也是共轭不变的。对于非空子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，共轭闭包 S^{c} 是包含 S 的 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的最小共轭不变子集。

注记 5.12。设 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。每当 S 是共轭不变的，S^{u} 也共轭不变。每当 S 向上封闭时，S^{c} 也向上封闭。这说明，$[\![S]\!] = (S^{\mathrm{c}})^{\mathrm{u}} = (S^{\mathrm{u}})^{\mathrm{c}}$ 是 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 中包含 S 的最小向上封闭且共轭不变子集。

命题 5.13。设 (X, G) 是一个极小作用。$\mathrm{Eig}(X, G)$ 向上封闭且共轭不变。对于 $x \in X$，我们有

$$\mathrm{Eig}(X, G) = \mathrm{Eig}_x(X, G)^{\mathrm{c}}.$$

证明。不难看出，$\mathrm{Eig}(X, G)$ 向上封闭且共轭不变。因此，由 $\mathrm{Eig}_x(X, G) \subseteq \mathrm{Eig}(X, G)$，可得 $\mathrm{Eig}_x(X, G)^{\mathrm{c}} \subseteq \mathrm{Eig}(X, G)$。

反过来，考虑 $\Gamma \in \mathrm{Eig}(X, G)$ 以及一个因子映射 $\pi\colon X \to G/\Gamma$。设 $g \in G$ 满足 $\pi(x) = g\Gamma$。如第 2.4 小节所述，存在一个共轭$\iota\colon G/\Gamma \to G/\Gamma^g$，使得 $\iota(g\Gamma) = \Gamma^g$。因此，因子映射 $\phi\colon = \iota \circ \pi\colon X \to G/\Gamma^g$ 满足 $\phi(x) = \Gamma^g$。这表明 $\Gamma^g \in \mathrm{Eig}_x(X, G)$，从而 $\Gamma \in \mathrm{Eig}_x(X, G)^{\mathrm{c}}$。□

从一个尺度过渡到相应子里程表的特征值，可以描述如下。

命题 5.14。 设 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是一个尺度，并将 (X, G) 记作 S-里程表。记 $x := (\Gamma)_{\Gamma \in S}$，并注意到 $x \in X$。我们有

(i) $\mathrm{Eig}_x(X, G) = S^{\mathrm{u}}$ *and*

(ii) $\mathrm{Eig}(X, G) = [\![S]\!]$.

ˆ 证明。**(i)**：回忆一下， X 是包含 x的 $X := \prod_{\Gamma \in S} G/\Gamma$ˆ的极小分支。记ˆ$\pi_\Gamma$: $X \to G/\Gamma$ 为相应的投影。限制映射 π_Γ: $X \to G/\Gamma$ 是一个因子映射，且 $\pi_\Gamma(x) = \Gamma$。因此，我们有 $\Gamma \in \mathbf{Eig}_x(X, G)$，并注意到 $S \subseteq \mathbf{Eig}_x(X, G)$。由定理 4.7可知，$\mathbf{Eig}_x(X, G)$是一个滤子。由于滤子向上封闭，我们注意到 $S^{\mathrm{u}} \subseteq \mathbf{Eig}_x(X, G)$。

反过来，考虑 $\Gamma \in \mathbf{Eig}_x(X, G)$以及一个因子映射 π: $X \to G/\Gamma$，其中$\pi(x) = \Gamma$。由 [RZ00，引理 1.1.16] 可知，存在 $\Lambda \in S$ 以及一个连续满射 ϕ: $G/\Lambda \to G/\Gamma$，使得 $\pi = \phi \circ \pi_\Lambda$。为了证明 ϕ 继承了 π 和 π_Λ 的等变性，考虑 $g \in G$ 和 $y \in G/\Lambda$。对于$x' \in \pi_\Lambda^{-1}(y)$，我们有

$$\phi(g.y) = \phi(g.\pi_\Lambda(x')) = \phi(\pi_\Lambda(g.x')) = \pi(g.x') = g.\pi(x') = g.\phi(y).$$

这就确立了 ϕ 是一个因子映射。此外，我们有

$$\phi(\Lambda) = \phi(\pi_\Lambda(x)) = \pi(x) = \Gamma$$

因此， $\Lambda = G_0(\Lambda) \subseteq G_0(\phi(\Lambda)) = G_0(\Gamma) = \Gamma$. 这表明 $\Gamma \in S^{\mathrm{u}}$。

(ii)：由 **(i)** 和命题 5.13 可知

$$\mathrm{Eig}(X, G) = \mathrm{Eig}_x(X, G)^{\mathfrak{c}} = (S^{\mathrm{u}})^{\mathfrak{c}} = [\![S]\!]. \qquad \square$$

若 S是一个尺度，且 (X, G) 是一个子里程表，并且 $\mathbf{Eig}(X, G) = [\![S]\!]$，则 S-子里程表 (X', G) 满足 $\mathbf{Eig}(X', G) = [\![S]\!] = \mathrm{Eig}(X, G)$，且定理 5.5表明 (X, G) 与 (X', G) 共轭。这表明如下结论。

推论 5.15。 子里程表 (X, G) 由尺度 S 生成，当且仅当$\mathrm{Eig}(X, G) = [\![S]\!]$。

5.4. **等价尺度**。 结合定理 5.5 和命题 5.14还可得到如下结论。

推论 5.16。 设 S 和 S' 是分别生成 (X, G) 和 (X', G) 的尺度。

(i) (X, G) 是 (X', G) 的因子，当且仅当 $[\![S]\!] \subseteq [\![S']\!]$。*(ii)* (X, G) 和 (X', G) 共轭，当且仅当 $[\![S]\!] = [\![S']\!]$。

为了获得 $[\![S]\!] = [\![S']\!]$ 的一个充分条件，我们引入如下 .

定义 5.17。 考虑子集 $S, S' \subseteq \mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。若对于 $\Gamma \in S$ 存在 $\Gamma' \in S'$ 使得 $\Gamma' \subseteq \Gamma$，则称 S' 支配S 。若 S 和 S' 满足 S 支配 S' 且 S' 支配 S，则称二者等价。

注 5.18. S' 支配 S 当且仅当 $S^{\mathrm{u}} \subseteq (S')^{\mathrm{u}}$。特别地，如果一个尺度$S'$ 支配一个尺度 S，则 $[\![S]\!] \subseteq [\![S']\!]$，从而 S-子里程表是 S'-子里程表的一个因子。

由此还可知，S 与 S' 等价当且仅当 $S^{\mathrm{u}} = (S')^{\mathrm{u}}$。因此，对于等价尺度 S 与 S'，我们有 $[\![S]\!] = [\![S']\!]$，从而相应的子里程表是共轭的。

请注意，尺度的等价性对于诱导共轭子里程表并非必要，如下一个例子所示。

例 5.19. 设 G为一个群，且 $\Gamma \leq G$ 为一个非正规有限指数子群。设 $g \in G$ 满足 $\Gamma^g \neq \Gamma$。注意 $S := \{\Gamma\}$ 与 $S' := \{\Gamma^g\}$是不等价的尺度。尽管如此，我们有 $S^{\mathrm{c}} = (S')^{\mathrm{c}}$，从而 $[\![S]\!] = (S^{\mathrm{c}})^{\mathrm{u}} = ((S')^{\mathrm{c}})^{\mathrm{u}} = [\![S]\!]$。因此，相应的子里程表是共轭的。

6. Metrizable subodometers

6.1. **有限子奥多计量器。** 为了刻画可度量化子里程表，我们首先研究有限子奥多计量器。

Lemma 6.1. 子里程表 (X, G) 是有限的，当且仅当 $\mathrm{Eig}(X, G)$ 是有限的。

证明。 不失一般性，我们假设 (X, G) 是某个尺度 S 的 S-子里程表。显然，只要 $\mathbf{Eig}(X, G)$ 是有限的，则 S 也是有限的，因而 X 作为有限空间 $\prod_{\Gamma\in S} G/\Gamma$ 的子集也是有限的。

反之，假设 X 是有限的，并选取 $x \in X$。由此可得，X 仅包含有限多个 G-瓦片，且由引理 4.8 可知 $\mathbf{Eig}_x(X, G)$ 是有限的。由于任一有限指数子群仅有有限多个共轭子群，由命题 5.13 可知 $\mathbf{Eig}(X, G) = \mathrm{Eig}_x(X, G)^{\mathrm{c}}$ 是有限的。 □

由命题 5.14 与引理 6.1 我们得到如下结论。

推论 6.2. 对任意 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们有 $[\![\{\Gamma\}]\!]$ 是有限的。

6.2. **链。** 在关于子里程表的文献中，例如 [CP08] 仅考虑 $\mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 中形如 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 且满足 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$ 的尺度。我们将在下文定理 6.6 中证明，沿此类特定尺度的逆极限恰好给出可度量化子里程表。我们从如下定义开始讨论。

定义 6.3. 非空子集 $S \subseteq \mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 称为链，如果对于任意$\Gamma, \Lambda \in S$，都有 $\Gamma \subseteq \Lambda$ 或 $\Lambda \subseteq \Gamma$。

显然，任意链都是一个尺度。链恰好是文献中所考虑的那类尺度，下面将对此进行介绍。

引理 6.4. 任意链 S 都是可数的，并且可以写成 $S = \{\Gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。

证明. 设 S 是一条链，并考虑 $i\colon S \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ 由 $\Gamma \mapsto [G\colon \Gamma]$给出。考虑 $\Gamma, \Lambda \in S$ 其中 $i(\Gamma) = i(\Lambda)$。由于 S 是一条链，因此有 $\Gamma \subseteq \Lambda$ 或 $\Lambda \subseteq \Gamma$。由注记 2.1 可知 $\Gamma = \Lambda$。这表明 i 是单射的，因此 S继承了 $\mathbb{N} \cup \{0\}$的可数性。

显然，当 S 为有限时，S 可写成 $S = \{\Gamma_n$ 的形式；$n \in \mathbb{N}\}$，其中对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。若 S 为无限，则令 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个严格递增的

序列，取自 $\mathbb{N}$，满足 $i(S) = \{k_n;\ n \in \mathbb{N}\}$。对于 $n \in \mathbb{N}$，记 Γ_n 为 k_n 在 i下的唯一原像。显然，我们有 $S = \{\Gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$。由于 i 是单调的，我们观察到 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。□

以下观察将使我们能够证明，可数尺度和链给出同一类型的子里程表。

引理 6.5. 对于任意可数尺度，都存在一个与之等价的链。

证明. 设 S 是一个可数尺度，并将 $S = \{\Gamma_n; n \in \mathbb{N}\}$枚举。对于 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\Lambda_n := \bigcap_{k=1}^{n} \Gamma_k$，并注意到 $S' := \{\Lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ 是一个链。由 $\Lambda_n \subseteq \Gamma_n$可知，$S'$ 支配 S。此外，由于 S 是一个尺度，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们可以找到 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\Gamma_m \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} \Gamma_k = \Lambda_n$。这表明 S 支配 S'。□

6.3. **可度量化子里程表的刻画。**

定理 6.6. 设 (X, G) 是一个子里程表。以下陈述等价。

> ***(i)*** X 可度量化。***(ii)*** (X, G) 由一条链生成。***(iii)*** (X, G) 由一个可数尺度生成。***(iv)*** $\mathrm{Eig}(X, G)$ 是可数的。***(v)*** X 的拓扑有一个由 G-瓦片构成的可数基。***(vi)*** $\mathbb{U}_X$ 有一个由不变等价关系构成的可数基。

为证明定理6.6，我们需要以下引理。

引理 6.7。对于任意可数子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，$[\![S]\!]$ 也是可数的。

证明。对于 $\Gamma \in S$，由推论6.2 可知 $[\![\{\Gamma\}]\!]$ 是有限的。此外，根据上共轭包的定义可知 $[\![S]\!] = \bigcup_{\Gamma \in S} [\![\{\Gamma\}]\!]$。因此我们注意到 $[\![S]\!]$是有限集的可数并，从而是可数的。□

定理的证明 *6.6*: 注意，紧豪斯多夫空间可度量化，当且仅当其一致结构存在可数基 [Kel17，定理 6。13]。因此，从命题 3.2 可以看出 (i) 与 (vi) 等价。

(i)⇒(v): 如果 X 可度量化，则其拓扑存在可数基 $\mathcal{B}$。由定理 3.6 可知 $\mathcal{B}$ 可以选为由 G-瓦片组成。

(v)⇒(iii): 设 $x \in X$ 和 $\mathcal{B}_x$ 是由G-瓦片组成的可数邻域基。记 $S := \{G(x, B);\ B \in \mathcal{B}_x\}$。显然，$S$ 是可数的。根据引理 4.8，我们知道 $S \subseteq \mathrm{Eig}_x(X, G) \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。此外，对于 $B, B' \in \mathcal{B}_x$，有 $B \cap B'$ 是 x 的一个开邻域，因此存在 $B'' \in \mathcal{B}_x$ 使得$B'' \subseteq B \cap B'$。由此可得 $G(x, B'') \subseteq G(x, B) \cap G(x, B')$，并且我们注意到$S$ 是一个可数尺度。还需证明 S 生成 (X, G)。为此，我们证明 S 和 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$ 等价。

我们已经知道 $S \subseteq \mathrm{Eig}_x(X, G)$，接下来只需证明 S 支配 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$。由引理 4.8 可知，对于任意 $\Gamma \in \mathrm{Eig}_x(X, G)$，存在一个 G-瓦片 A，满足 $x \in A$ 和 $\Gamma = G(x, A)$。由于 $\mathcal{B}_x$ 是一个邻域基，且G-瓦片是开集，我们可以找到 $B \in \mathcal{B}_x$，使得 $B \subseteq A$。由 $S \ni G(x, B) \subseteq G(x, A) = \Gamma$，我们观察到 S 支配 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$。

(iii)⇒(i)：设 S 是一个生成 (X,G) 的可数尺度。作为可度量化空间的可数乘积的子空间，我们观察到 S-子里程表是可度量化的。因此，共轭子里程表 (X,G) 也可度量化。

这就证明了 (i)、(iii)、(v) 和 (vi) 的等价性。
(iii)⇒(ii)：如果 S 是生成（X，G）的可数尺度，那么根据引理 6.5，存在一个等价链 S'。由注记5.18可知，S' 也生成（X，G）。

(ii)⇒(iv)：如果 S 是生成（X，G）的可数链，那么推论 5.15和引理 6.7 推出 Eig(X，G) $=[\![S]\!]$ 是可数的。
(iv)⇒(iii)：如果 Eig(X，G) 是可数的，那么任何生成 (X，G) 的尺度都包含于 Eig(X，G) 中，因而是可数的。□

推论 6.8。设 G 为一个群。所有子里程表 (X,G) 都是可度量化的，当且仅当$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$是可数的。

证明。注意，$S:=$ 子群$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是一个滤子。该 S-子里程表 (X,G) 满足 Eig(X,G) $=[\![S]\!]=$子群$_{\mathrm{fin}}(G)$。如果 (X,G) 可度量化，那么定理 6.6 推出 Sub$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的。

反过来，假设 Sub$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的。对于任意子里程表 (X,G)，我们有 Eig(X,G) $\subseteq$ 子群$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的，因此定理 6.6 推出 (X,G) 可度量化。□

自然会想知道，对于哪些群，Sub$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的。下面我们给出一些例子和反例。

例 6.9。对于有限生成群 G，任意有限指数子群也是有限生成群 [Hal59，推论 7.2。1] 因此 Sub$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的。特别地，对于 $d\in\mathbb{N}$，Sub$_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Z}^d)$ 是可数的。

例 6.10. 阿贝尔群 $(\mathbb{Q},+)$ 的有限指数子群只有其自身，即 Sub$_{\mathrm{fin}}(\mathbb{Q})=\{\mathbb{Q}\}$。因此，所有（子）里程表 $(X,\mathbb{Q})$ 都是平凡的。

例 6.11. 对于有限非平凡群的不可数乘积 $G=\prod_i G_i$，Sub$_{\mathrm{fin}}(G)$ 是不可数的，因为它包含所有 $\Gamma_i:=\prod_j G_{j,i}$，其中 $G_{i,i}=\{e_{G_i}\}$ 且 $G_{j,i}:=G_j$ 对于 $i\neq j$。

例 6.12. 自由群 F_∞ 具有可数多个生成元，因此是可数的，而 Sub$_{\mathrm{fin}}(F_\infty)$ 是不可数的。详情请见下文的例7.1 。

7. Odometers

注意，全不连通紧豪斯多夫群是有限群逆极限 [RZ00]。因此，里程表是原有限群上的群旋转。读者或许会疑惑，里程表理论是否不过是原有限群理论的翻版。以下例子将说明事实并非如此。

例 7.1. 令 F_∞ 为由可数无穷多个生成元 $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 生成的自由群，并注意到 F_∞ 是一个可数群。考虑有限群 $X:=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并记 $I:=X^{\mathbb{N}}\setminus\{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$。对于一个序列 $h=(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\in I$，我们考虑群同态 $\phi_h\colon F_\infty\to X$，定义为 $\phi_h(g_n)=h_n$，对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立，并将相应的群旋转记为 α_h。注意到 ϕ_h 是

满射，因此 α_h 是一个有限奥多计量器。此外，关于此作用，$G_0(x)$ =ker(ϕ_h) 对所有 $x \in X$均成立。因此，为了证明对于不同的h，$h' \in I$ 里程表 α_h 和 $\alpha_{h'}$ 不共轭，只需证明 ker(ϕ_h) ≠ker($\phi_{h'}$)。

对于 $h, h' \in I$，当 $h \neq h'$ 时，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $h_n \neq h'_n$，并且我们观察到 g_n 恰好包含于正规集 ker(ϕ_h) 与 ker($\phi_{h'}$) 中的一个。因此，确实 ker(ϕ_h) ≠ ker($\phi_{h'}$)，并且我们观察到 α_h 与 $\alpha_{h'}$ 不共轭。由于 I 不可数，这表明存在不可数多个非共轭的里程表 (X, F_∞)，且满足 $|X| = 2$。相比之下，在群同构意义下，仅存在一个具有两个元素的群。

例 7.2. 存在有限生成群 G 与 H，其中 G 顺从而 H 非顺从，它们的投射有限完备化同构 [KS23]。因此，若 X_1 与 X_2 分别表示 G 与 H 的投射有限完备化，则 X_1 与 X_2 作为拓扑群同构 [NS07，定理 1.1]。然而，里程表 (X_1, G) 与 (X_2, H) 作为动力系统不同构，甚至也不连续轨道等价（见 [CM16]）。

接下来，我们旨在通过里程表的特征值集合的性质，以及生成这些集合的尺度的性质，刻画里程表。为此，我们引入以下概念。

7.1. **正规性与核稳定性**。

定义 7.3。 子集 $S \subseteq$Sub$_{\text{fin}}(G)$ 称为

- 正规，如果所有 $\Gamma \in S$ 都是正规的。
- 核稳定，如果对于 $\Gamma \in S$，核 Γ_G 也包含于 S 中。

自然会想知道这些概念与共轭不变性之间有何关系。我们在以下命题中概述这些关系，并省略直接明了的证明。

命题 7.4。 *(i)* 任意正规尺度都是核稳定且共轭不变的。*(ii)* 链是正规的，当且仅当它是共轭不变的。任何共轭不变的链都是核稳定的。*(iii)* 滤子是核稳定的，当且仅当它是共轭不变的。

例 7.5。 设 G 是一个允许存在非正规有限指数子群 $\Lambda \leq \Gamma \leq G$ （满足 $\Lambda \neq \Gamma$）的群。

(i) 链 $S := \{\Gamma, \Gamma_G\}$ 是核稳定的，但不是正规的。(ii) 滤子 $S := \{\Gamma_G\}^{\text{u}}$ 是共轭不变的，即核稳定的。它包含 Γ，因此不是正规的。(iii) 尺度 $S := \{\Gamma, \Lambda, \Lambda_G\}^{\text{c}}$ 是共轭不变的，但不是核稳定的。

7.2. **里程表的刻画**。

定理 7.6。 设 (X, G) 是一个子里程表。以下陈述等价。

(i) (X, G) 是一个里程表。

(ii) (X,G) 由正规尺度生成。*(iii)* (X,G) 由共轭不变尺度生成。*(iv)* (X,G) 由核稳定尺度生成。*(v)* $Eig(X,G)$ 是一个滤子。*(vi)* $Eig(X,G)$ 是核稳定的。*(vii)* 对于某个 $x\in X$，我们有 $Eig(X,G)=Eig_x(X,G)$。*(viii)* 对于所有 $x\in X$，我们有 $Eig(X,G)=Eig_x(X,G)$。

证明。(i)⇒(viii)：由于里程表是群旋转，因此它们是正则的。因此，$\mathrm{Eig}_x(X,G)$ 与 $x\in X$ 无关，我们观察到

$$\mathrm{Eig}(X,G)=\bigcup_{x'\in X}\mathrm{Eig}_{x'}(X,G)=\mathrm{Eig}_x(X,G)$$

对所有 $x\in X$均成立。

(viii)⇒(vii)：显然。

(vii)⇒(v)：假设存在 $x\in X$，使得 $\mathrm{Eig}(X,G)=\mathrm{Eig}_x(X,G)$。由定理4.7 可知，$\mathrm{Eig}(X,G)$是一个滤子。

(v)⇒(vi)：假设 $\mathrm{Eig}(X,G)$是一个滤子，并回顾命题5.13 指出 $\mathrm{Eig}(X,G)$是共轭不变的。由命题7.4 可知 $\mathrm{Eig}(X,G)$是核稳定的。

(vi)⇒(ii)：设 S 是生成 (X,G) 的尺度。考虑

$$S':=\{\Gamma_G;\ \Gamma\in S\}$$

并注意到 S' 由 G 的正规子群组成。由 $\Gamma\mapsto\Gamma_G$ 的单调性可知，S' 是正规尺度。显然，S' 支配 S，因此 $\mathrm{Eig}(X,G)=[\![S]\!]\subseteq[\![S']\!]$。此外，$\mathrm{Eig}(X,G)$ 的核稳定性意味着$S'\subseteq\mathrm{Eig}(X,G)$。由于 S' 共轭不变，且 $\mathrm{Eig}(X,G)$ 向上封闭，我们有 $[\![S']\!]=(S')^{\mathrm{u}}\subseteq\mathrm{Eig}(X,G)$。这表明 $\mathrm{Eig}(X,G)=[\![S']\!]$，因此 S' 生成 (X,G)。

(ii)⇒(i)：若 S 是生成 (X,G) 的正规尺度，则 S-子里程表是群旋转的逆极限，因而也是群旋转。因此我们观察到 (X,G) 是一个里程表。

这表明 (i)、(ii)、(v)、(vi)、(vii) 和 (viii) 是等价的。

(ii)⇒(iv)：显然。

(iv)⇒(iii)：设 S 是生成 (X,G) 的核稳定尺度。由于 S 是一个尺度，S^{u} 是一个滤子。对于 $\Gamma\in S^{\mathrm{u}}$ 和 $g\in G$，我们找到 $\Lambda\in S$，使得 $\Lambda\subseteq\Gamma$，且由于 S 是核稳定的，我们有 $S\ni\Lambda_G\subseteq\Gamma^g$。由此可得 $\Gamma^g\in S^{\mathrm{u}}$。这表明 S^{u} 是共轭不变的。由于 S 生成 (X,G)，我们有 $\mathrm{Eig}(X,G)=[\![S]\!]=(S^{\mathrm{u}})^{\mathrm{c}}=[\![S^{\mathrm{u}}]\!]$。因此，核稳定尺度 S^{u} 生成 (X,G)。

(iii)⇒(v)：设 S 是一个生成 (X,G)的共轭不变尺度。注意到 $S=S^{\mathrm{c}}$。因此，由命题 5.14 可知，$\mathrm{Eig}(X,G)=[\![S]\!]=(S^{\mathrm{c}})^{\mathrm{u}}=S^{\mathrm{u}}$。由于 S 是一个尺度，$S^{\mathrm{u}}=\mathrm{Eig}(X,G)$ 是一个滤子。□

推论 7.7。对于子里程表 (X,G)，以下陈述等价。

(i) (X,G) 是一个可度量里程表系统。

(ii) (X,G) 由一个正规链生成。

(iii) $\mathrm{Eig}(X,G)$ 是一个可数滤子。

证明。 结合定理 6.6和 7.6 可知，(ii) 蕴含 (i)，且 (i) 蕴含 (iii)。

为证明 (iii) 推出 (ii)，假设 $\mathbf{Eig}(X,G)$ 是一个可数滤子。由定理 7.6 可知 (X,G) 具有一个正规尺度 S。从 $S\subseteq\mathrm{Eig}(X,G)$ 可见 S 是可数的。注意，有限个正规子群的交仍是正规子群。因此，利用引理 6.5 证明中给出的构造，可得到一个等价的正规链 S'，它也生成 (X,G)。□

注 7.8。显然，只要 G 是阿贝尔群，那么它的任意子群 G 都是正规子群，因此任何子里程表都是里程表。注意，确实存在所有子群均为正规的非阿贝尔群，这类群称为哈密顿群。哈密顿群的刻画可见 [Hal59，定理 12.5。6]。

8. 特征集

我们在定理 5.5 中看到，子里程表（X， G）完全由 $\mathbf{Eig}(X$， G刻画（在共轭意义下）。此外，在命题 5.14 中我们看到，对于尺度 S 以及 S-里程表（X，G），有 $\mathbf{Eig}(X$， $G)=[\![S]\!]$。由此引出以下纯代数定义，它们使子里程表范畴的研究得以简化，并特别使定理 1.2、1.5和 1.6的证明更为简洁。

定义 8.1。 若存在一个尺度 $S\subseteq\mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 使得 $E=[\![S]\!]$，则称子集 $E\subseteq\mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为特征集。若尺度 S 满足$E=[\![S]\!]$，则称其生成 E 。若特征集是一个滤子，则称其为滤过的。我们分别用 $\mathfrak{E}(G)$ 和 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 表示所有特征集和所有滤过特征集组成的集合。我们在 $\mathfrak{E}(G)$ 和 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 上赋予由集合包含给出的偏序。

注 8.2。对于任意极小作用 (X,G)，集合 $\mathbf{Eig}(X,G)$ 是一个特征集。事实上，由定理 4.7 可知，$\mathbf{Eig}_x(X,G)$ 是一个滤子，而命题 5.13 得出 $\mathbf{Eig}(X,G)=\mathbf{Eig}_x(X,G)^{\mathfrak{c}}=[\![\mathbf{Eig}_x(X,G)]\!]$。

由第 5 节的讨论可知，对于每个特征集 E，都存在唯一的子里程表（在共轭意义下），使得 $E=\mathrm{Eig}(X,G)$。我们将这个子里程表称为与 E相关联的子里程表。对于 $E,E'\in\mathfrak{E}(G)$，当且仅当与 $E\subseteq E'$ 相关联的子里程表是与 E 相关联的子里程表的因子时，才有 E'（定理 5.5）。此外，特征集由尺度 S 生成，当且仅当相关联的子里程表由 S 生成（推论 5.15）。特征集是滤过的，当且仅当它与一个里程表相关联（定理 7.6）。特征集是可数的，当且仅当相关联的子里程表可度量化（定理 7.6）。

注 8.3. G 的子集 $E\subseteq\mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}$ 是滤过特征集，当且仅当它是共轭不变滤子。因此，里程表（模共轭）可与共轭不变滤子对应起来。

注意， $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 与 $\mathfrak{E}(G)$ 以 $\mathbf{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为极大元，并以 $\{G\}$ 为极小元。接下来我们将进一步研究这些偏序集的性质

以便分别深入了解里程表与子里程表的范畴。

8.1. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ **作为完备格**。接下来，我们证明 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 是一个完备格。首先给出以下结果，它说明任意非空的里程表族都存在一个最大公共因子。

命题 8.4。*(i)* 对于任意滤子族 $\mathcal{S}$，$\bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ 也是一个滤子。*(ii)* 对于任意滤过特征集族 $\mathcal{E}$，$\bigwedge\mathcal{E} := \bigcap_{E\in\mathcal{E}} E$ 也是一个滤过特征集。

证明。(i)：$\check{}S := \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ 非空，因为每个滤子都包含 G。此外，$\check{}$ 作为向上封闭集的交，S 是向上封闭的。为了 $\check{}\check{}$ 证明 S 是一个尺度，考虑 Γ，$\Gamma' \in S$。对于 $S \in \mathcal{S}$，有 Γ，$\Gamma' \in S$，因此存在 $\Lambda_S \in S$ 使得 $\Lambda_S \subseteq \Gamma \cap \Gamma'$。考虑 $\Lambda := \langle \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \Lambda_S \rangle$，并注意到 $\Lambda \leq G$ 的指数有限。对于 $S \in \mathcal{S}$，有 $\Lambda_S \subseteq \Lambda$，因此由 S 的向上封闭性可得 $\Lambda \in S$。由此我们看到 $\Lambda \in S$。此外，还有 $\Lambda = \langle \bigcup_{S\in\mathcal{S}} \Lambda_S \rangle \subseteq \Gamma \cap \Gamma'$。这表明 $\check{}S$ 是一个向上封闭尺度，即一个滤子。

(ii)：由 (i) 可知，$\bigwedge\mathcal{E} = \bigcap_{E\in\mathcal{E}} E$ 是一个滤子。此外，由于它是共轭不变集的交，因此也是共轭不变的。由此可知，$\bigwedge\mathcal{E}$ 是一个共轭不变且向上封闭的尺度，并且可见$\bigwedge\mathcal{E} = [\![\bigwedge\mathcal{E}]\!]$ 是一个特征集。□

推论 8.5. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 是一个完备格。

证明. 由命题 8.4 可知，$\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 中任意一个族都有下确界。对于 $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$，我们考虑包含 $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ 的所有滤过特征集构成的族 $\mathcal{E}'$。显然，$\bigwedge\mathcal{E}'$是 $\mathcal{E}$ 的上确界。□

8.2. $\mathfrak{E}(G)$ **作为偏序集**。考虑到推论 8.5，自然会问 $\mathfrak{E}(G)$ 是否也为完备格。事实未必如此，下一例将对此加以说明。请注意，该例还说明，对于一对$\diamondsuit$子里程表，未必存在最小公共扩张／最大公共因子。

例 8.6. 令 S_5 为 $\{1,2,3,4,5\}$上所有置换构成的群。记

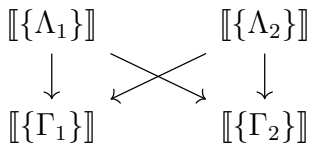
$$\Lambda_1 := \langle (12)(34) \rangle \quad \text{and} \quad \Lambda_2 := \langle (123) \rangle .$$

此外，考虑

$$\Gamma_1 := \langle (123), (23)(45) \rangle \quad \text{and} \quad \Gamma_2 := \langle (123), (12)(34), (13)(24) \rangle .$$

接下来我们将证明，$[\![\{\Lambda_1\}]\!]$ 和 $[\![\{\Lambda_2\}]\!]$ 没有上确界，并且$[\![\{\Gamma_1\}]\!]$和 $[\![\{\Gamma_2\}]\!]$在 $\mathfrak{E}(S_5)$ 中没有下确界。
显然，我们有 $\Lambda_1 \subseteq \Gamma_2$ 和 $\Lambda_2 \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2$。此外，对于 $g = (54321)$，我们观察到 $\Lambda_1^g = \langle (23)(45) \rangle$，因此有 $\Lambda_1^g \subseteq \Gamma_1$。将集合

特征集之间的包含关系用箭头表示，由此得到下图。



Λ_1 与 Λ_2 的共轭子群分别是阶为 2 和 3 的循环群。由于 2 和 3 互素，我们观察到，对于所有 $g \in S_5$，$\Lambda_1 \not\subseteq \Lambda_2^g$ 与 $\Lambda_2 \not\subseteq \Lambda_1^g$。由此可得 $[\![\{\Lambda_1\}]\!] \not\subseteq [\![\{\Lambda_2\}]\!]$ 与 $[\![\{\Lambda_2\}]\!] \not\subseteq [\![\{\Lambda_1\}]\!]$。

所有 $g \in \Gamma_2$ 都固定 5。因此，如果 Γ_1 包含于 Γ_2 的某个共轭子群中，那么就会有 $l \in \{1,\dots,5\}$ 被 Γ_1 中的所有置换固定，特别是被 (123) 和 (23)(45) 固定，这就产生了矛盾。因此，对于所有 $g \in S_5$，我们都有$\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma_2^g$。此外，我们有 $|\Gamma_1| = 6$ 与 $|\Gamma_2| = 12$。因此，对于所有$g \in S_5$，我们都有 $\Gamma_2 \not\subseteq \Gamma_1^g$。由此可得 $[\![\{\Gamma_1\}]\!] \not\subseteq [\![\{\Gamma_2\}]\!]$，且 $[\![\{\Gamma_2\}]\!] \not\subseteq [\![\{\Gamma_1\}]\!]$。类似地，对于 $i,j \in \{1,2\}$，我们观察到 $[\![\{\Lambda_i\}]\!] \not\subseteq [\![\{\Gamma_j\}]\!]$。综上所述，我们已经证明，上图展示了所考虑的特征集之间的所有集合包含关系。

为了观察到 $\{[\![\{\Lambda_1\}]\!], [\![\{\Lambda_2\}]\!]\}$ 没有下确界，且 $\{[\![\{\Gamma_1\}]\!], [\![\{\Gamma_2\}]\!]\}$ 在 $\mathfrak{C}(S_5)$ 中没有上确界，我们证明不存在满足 $[\![\{\Gamma_i\}]\!] \subseteq E \subseteq [\![\{\Lambda_j\}]\!]$ 的中间特征集E，其中 $i,j \in \{1,2\}$。为导出矛盾，假设存在这样的 E。由于 S_5 是有限的，任何生成 E 的尺度都有一个极小元，因此我们得到 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(S_5)$，满足 $E = [\![\{\Gamma\}]\!]$。由于 $\Gamma \in E \subseteq [\![\{\Lambda_1\}]\!] \cap [\![\{\Lambda_2\}]\!]$，我们观察到存在 $g_1, g_2 \in S_5$，满足$\Lambda_1^{g_1} \cup \Lambda_2^{g_2} \subseteq \Gamma$。由于 $\Lambda_1^{g_1}$和 $\Lambda_2^{g_2}$分别是阶为 2 和 3 的循环群，我们观察到 $|\Gamma| \geq 6$。此外，由 $[\![\{\Gamma_1\}]\!] \cup [\![\{\Gamma_2\}]\!] \subseteq E = [\![\{\Gamma\}]\!]$我们观察到 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in [\![\{\Gamma\}]\!]$。这意味着存在 $h_1, h_2 \in S_5$，使得$\Gamma \subseteq \Gamma_1^{h_1} \cap \Gamma_2^{h_2}$。特别地，记 $h \coloneqq h_2 h_1^{-1}$，则有 $\Gamma^{h_1^{-1}} \subseteq \Gamma_1 \cap \Gamma_2^h$。回顾一下，我们已经观察到，对于所有 $g \in S_5$，都有 $\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma_2^g$。因此我们有 $\Gamma_1 \not\subseteq \Gamma_2^h$，进而得到 $|\Gamma| = |\Gamma^{h_1^{-1}}| \leq |\Gamma_1 \cap \Gamma_2^h| < |\Gamma_1| = 6$，矛盾。这表明，不存在如所考虑的那样的中间 E。

8.3. **滤包**。 由推论8.5可知，任意一族里程表在里程表范畴中都有一个最小公共扩张。为了证明这个最小公共扩张实际上也是所有子里程表范畴中的最小公共扩张，接下来我们将给出滤过特征集上确界的显式公式。为此，我们将使用滤包这一概念。回顾命题 8.4 可知，一族滤子的交集仍是滤子。这使我们可以作如下定义。

定义 8.7。 对于子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们用 $S^{\mathfrak{f}}$ 表示 S的滤包，即包含 S的最小滤子。

注 8.8。 由于任意滤子都向上封闭，因此我们有 $S \subseteq S^{\mathfrak{u}} \subseteq S^{\mathfrak{f}}$。若 S 是一个尺度，则 $S^{\mathfrak{u}}$ 是一个滤子，因此 $S^{\mathfrak{f}} = S^{\mathfrak{u}}$。

下面的引理给出了滤包的显式公式。注意，对于任意有限子集 $J \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们有 $\bigcap_{\Gamma \in J} \Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。

引理 8.9. 对于子集 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们有

$$S^{\mathfrak{f}} = \left\{ \bigcap_{\Gamma\in J} \Gamma;\ J \subseteq S \text{ finite} \right\}^{\mathfrak{u}}.$$

证明。记 $S' := \left\{\bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma;\ \ J \subseteq S \text{ 有限}\right\}^{\mathfrak{u}}$。不难验证，$S'$ 是一个滤子。由 $S \subseteq S'$，我们因此得到 $S^{\mathfrak{f}} \subseteq S'$。

反过来，考虑 $\Gamma \in S'$。存在一个有限子集 $J \subseteq S$，使得 $\widehat{\ }\widehat{\ }\bigcap_{\Gamma'\in J}\Gamma' \subseteq \Gamma$。对于任意包含 S 的滤子 S，我们有 $J \subseteq S \subseteq S$。由于 $S^{\widehat{\ }\widehat{\ }}$ 是一个尺度且 J 是有限的，因此存在 $\Lambda \in S$，使得 $\Lambda \subseteq \bigcap_{\Gamma'\in J}\Gamma' \subseteq \Gamma$。由于 S 是 $\widehat{\ }\widehat{\ }$ 向上封闭的，我们有 $\Lambda \in S$。这说明 Λ 包含于所有包含 S 的滤子 S中，因而 $\Lambda \in S^{\mathfrak{f}}$。□

引理 8.10. 令 $S \subseteq \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 为一个子集。

(i) 若 S 是有限的，则 $S^{\mathfrak{f}}$ 是有限的。*(ii)* 若 S 是可数的，则 $S^{\mathfrak{f}}$ 是可数的。*(iii)* 若 S 是共轭不变的，则 $S^{\mathfrak{f}}$ 是一个滤过特征集。*(iv)* 若 S 是一个尺度，且 E 是一个满足 $E \subseteq [\![S]\!]$的滤过特征集，则 $E \subseteq S^{\mathfrak{f}}$。

证明。(i/ii)：对于 $J \subseteq S$ 有限时，我们有 $\bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$。注意到 $\{\bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma\}^{\mathfrak{u}}$由推论 6.2 可知是有限的。因此，只要 S 有限/可数，我们就有

$$S^{\mathfrak{f}} = \left\{ \bigcap_{\Gamma\in J} \Gamma;\ J \subseteq S \text{ finite} \right\}^{\mathfrak{u}} = \bigcup_{J\subseteq S \text{ finite}} \left\{ \bigcap_{\Gamma\in J} \Gamma \right\}^{\mathfrak{u}}$$

是有限个/可数个有限集的并，因此是有限的/可数的。

(iii)：假设 S 是共轭不变的。对于 $J \subseteq S$ 有限且 $g \in G$ 时，我们有 $J' := \{\Gamma^g;\ \ \Gamma \in J\} \subseteq S$并且 $(\bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma)^g = \bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma^g = \bigcap_{\Gamma\in J'}\Gamma$。这说明 $\{\bigcap_{\Gamma\in J}\Gamma;\ J \subseteq S \text{ 有限}\}$ 是共轭不变的。由于共轭不变集的上闭包也是共轭不变的，由引理 8.9可知 $S^{\mathfrak{f}}$ 是共轭不变的。

由于 $S^{\mathfrak{f}}$ 是共轭不变且向上封闭的尺度，我们有 $S^{\mathfrak{f}} = [\![S^{\mathfrak{f}}]\!]$，因此 $S^{\mathfrak{f}}$ 是一个特征集。

(iv)：令 $\Gamma \in E$，并注意到 Γ 只有有限个共轭子群。由于 E 是共轭不变的尺度，我们得到 $\Gamma' \in E$，且 $\Gamma' \subseteq \bigcap_{g\in G}\Gamma^g = \Gamma_G$。由于 E 向上封闭，我们观察到 $\Gamma_G \in E \subseteq [\![S]\!]$。因此，存在 $g \in G$ 和 $\Lambda \in S$，使得 $\Lambda \subseteq \Gamma_G^g = \Gamma_G \subseteq \Gamma$。于是，$\Gamma \in S^{\mathfrak{u}} = S^{\mathfrak{f}}$。□

8.4. $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ **作为** $\mathfrak{E}(G)$ **的完备子格**。接下来，我们给出滤过特征集上确界的显式公式。

命题 8.11。令 $\mathcal{E}$ 为一族滤过特征集，并记

$$\bigvee \mathcal{E} := \left(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E \right)^{\mathfrak{f}}.$$

(i) $\bigvee\mathcal{E}$ 是一个滤过特征集。

(ii) 所有包含 $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ 的特征集 E 也包含 $\bigvee\mathcal{E}$。

证明。 (i)：由于共轭不变集的并仍是共轭不变集，我们观察到 $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ 是共轭不变的。由引理 8.10 可知$\bigvee\mathcal{E}$ 是一个滤过特征集。

(ii)：设 E 是一个包含 $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E$ 的特征集，并选取一个尺度 S 使得 $E=[\![S]\!]$。由引理 8.10 可知，对于 $E\in\mathcal{E}$，有 $E\subseteq S^{\mathfrak{f}}$，即 $\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E\subseteq S^{\mathfrak{f}}$。因此 $\bigvee\mathcal{E}=(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E)^{\mathfrak{f}}\subseteq S^{\mathfrak{f}}$。由于 S 是一个尺度，因此有 $S^{\mathfrak{f}}=S^{\mathfrak{u}}$，从而 $\bigvee\mathcal{E}\subseteq S^{\mathfrak{f}}\subseteq(S^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{c}}=[\![S]\!]=\hat{}E$。□

现在我们可以加强推论8.5的结论。

定理8.12。 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 是 $\mathfrak{E}(G)$的完备子格，即对于任意一族滤过特征集 $\mathcal{E}$，在 $\mathfrak{E}(G)$中都存在上确界 $\bigvee\mathcal{E}$和下确界 $\bigwedge\mathcal{E}$，且二者都属于 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$。

注记8.13。上确界和下确界的公式为 $\bigvee\mathcal{E}:=(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E)^{\mathfrak{f}}$ 和 $\bigwedge\mathcal{E}:=\bigcap_{E\in\mathcal{E}} E$。

定理*8.12*的证明。由命题8.4 可知， $\bigwedge\mathcal{E}:=\bigcap_{E\in\mathcal{E}} E$ 是一个滤过特征集。显然，它不仅是 $\mathcal{E}$ 在 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$中的下确界，而且也属于$\mathfrak{E}(G)$。

由命题8.11 可知， $\bigvee\mathcal{E}:=(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E)^{\mathfrak{f}}$ 是一个滤过特征集，并且是 $\mathcal{E}$ 在 $\mathfrak{E}(G)$中的上确界。□

定理 1.2 的证明：设 $\mathfrak{X}$ 是一个非空的里程表族。记 $\bigvee\mathfrak{X}$为与 $\bigvee\{\mathrm{Eig}(X,G);\,(X,G)\in\mathfrak{X}\}$ 相关联的里程表，并记 $\bigwedge\mathfrak{X}$ 为与 $\bigwedge\{\mathrm{Eig}(X,G);\,(X,G)\in\mathfrak{X}\}$ 相关联的里程表。由本节开头的讨论可知， $\bigvee\mathfrak{X}$和 $\bigwedge\mathfrak{X}$满足 (a_1) 和 (a_2)。此外，由于 $\mathfrak{X}$非空，且子里程表的因子仍是子里程表，我们注意到 $\bigwedge\mathfrak{X}$ 满足定理8.12中的 (b_2)。

为证明 $\bigvee\mathfrak{X}$满足 (b_1)，考虑一个极小作用 (Y,G)，它是所有 $(X,G)\in\mathfrak{X}$的扩张。由定理 5.5 可知，对于所有 $(X,G)\subseteq\mathrm{Eig}(Y,G)$，均有 $\mathrm{Eig}(X,G)$。由于 $\mathrm{Eig}(\in\mathfrak{X},Y)$ 是一个特征集（注 8.2 ），因此可得

$$\mathrm{Eig}\left(\bigvee\mathfrak{X},G\right)=\bigvee\{\mathrm{Eig}(X,G);\,(X,G)\in\mathfrak{X}\}\subseteq\mathrm{Eig}(Y,G).$$

因此，定理 5.5 表明 $\bigvee\mathfrak{X}$ 是 (Y,G) 的一个因子。
为证明 $\bigvee\mathfrak{X}$ 是满足 (a_1) 和 (b_1) 的唯一极小作用（在共轭意义下），考虑一个同样满足 (a_1) 和 (b_1) 的极小作用 (Z,G)。由此可知，(Z,G) 是 $\bigvee\mathfrak{X}$的一个扩张和因子。作为 $\bigvee\mathfrak{X}$ 的一个因子，它是一个子里程表；极小等度连续作用的凝聚性表明，$\bigvee\mathfrak{X}$ 与 (Z,G) 共轭。同理可证明， $\bigwedge\mathfrak{X}$是满足 (a_2) 和 (b_2) 的唯一极小作用（在共轭意义下）。□

8.5. **模性**。 众所周知，所有正规有限指数子群的集合 $\mathrm{Sub}^{\lhd}_{\mathrm{fin}}(G)$ 在集合包含关系下构成一个格，其上确界和下确界分别为 $\langle\Gamma\cup\Lambda\rangle=\Gamma\Lambda$和 $\Gamma\cap\Lambda$ [Bir67，第 1]章。作为一个格，$\mathrm{Sub}^{\lhd}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是 模的，即对于 Γ_1， Γ_2， $\Gamma\in\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，若满足 $\Gamma_1\supseteq\Gamma_2$，则满足 模律

$$(\Gamma_1\cap\Gamma)\Gamma_2=\Gamma_1\cap(\Gamma\Gamma_2)$$

该性质成立。将 $\mathrm{Sub}^{\lhd}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的序反转后，它可通过 $\Gamma \mapsto [\![\{\Gamma\}]\!]$嵌入完备格 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$。接下来我们将证明 $\mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 继承了 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 的模性，即证明定理 1.5。

命题 8.14 (模律)。 对于 E_1， E_2， $E \in \mathfrak{E}_{\mathfrak{F}}(G)$ 满足 $E_1 \subseteq E_2$ ，有 $(E_1 \vee E) \wedge E_2 = E_1 \vee (E \wedge E_2)$。

证明。 显然，我们有 $E_1 \cup (E \cap E_2) \subseteq (E_1 \cup E) \cap E_2 \subseteq (E_1 \cup E)^{\mathfrak{f}} \cap E_2$。后者是滤子的交，因此也是滤子。因此，我们有

$$E_1 \vee (E \wedge E_2) = (E_1 \cup (E \cap E_2))^{\mathfrak{f}} \subseteq (E_1 \cup E)^{\mathfrak{f}} \cap E_2 = (E_1 \vee E) \wedge E_2.$$

反过来，考虑 $\Lambda \in (E_1 \vee E) \wedge E_2 = (E_1 \cup E)^{\mathfrak{f}} \cap E_2$。由引理 8.9，存在一个有限子集 $J \subseteq E_1 \cup E$ 满足 $\bigcap_{\Gamma \in J} \Gamma \subseteq \Lambda$。由于 E_1 和 E 是滤过特征集，因此它们是尺度且核稳定的（定理 7.6）。不失一般性，我们可以假设 $J = \{\Gamma_1, \Gamma\}$ ，其中 $\Gamma_1 \in E_1$ 和 $\Gamma \in E$是正规子群。注意 $\Gamma_1 \cap \Gamma \subseteq \Lambda$。
此外，由于 $\Gamma_1 \in E_1 \subseteq E_2$ ，我们有 Γ_1， $\Lambda \in E_2$。由于 E_2 是一个核稳定尺度，我们可以选取一个正规 $\Gamma_2 \in E_2$ ，使得 $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_1 \cap \Lambda$。我们有 $\Gamma\Gamma_2 \supseteq \Gamma \in E$和 $\Gamma\Gamma_2 \supseteq \Gamma_2 \in E_2$，因此 $\Gamma\Gamma_2 \in E \cap E_2$。记 $J' := \{\Gamma_1, \Gamma\Gamma_2\}$，并注意到 $J' \subseteq E_1 \cup (E \cap E_2)$。此外，考察 $\Gamma_1 \supseteq \Gamma_2$的模律，我们有

$$\bigcap_{\Gamma' \in J'} \Gamma' = \Gamma_1 \cap (\Gamma\Gamma_2) = (\Gamma_1 \cap \Gamma)\Gamma_2 \subseteq \Lambda\Lambda = \Lambda.$$

由引理8.9 中给出的滤包公式，我们得出$\Lambda \in (E_1 \cup (E \cap E_2))^{\mathfrak{f}} = E_1 \vee (E \wedge E_2)$。 □

8.6. **可度量化里程表系统的上确界**。 回顾一下，子里程表的可度量化性体现为相应特征集的可数性。若$\mathfrak{X}$ 是一个非空的可度量化里程表系统族，则显然其因子 $\bigwedge \mathfrak{X}$也可度量。一般而言，非空可度量化里程表系统族 $\mathfrak{X}$ 的最小公共扩张 $\bigvee \mathfrak{X}$ 未必可度量，以下例子便说明了这一点。

例 8.15。 设 G 是一个群，使得 $S := \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 不可数（例如 $G = F_\infty$），并注意 S 是一个尺度。显然， S- 子里程表（ X， G ）不可度量化。不过，不难看出，(X， G) 是所有有限里程表的最小公共扩张，而这些里程表显然都是可度量化的。

将以下内容转换回里程表范畴，可得定理 1.6。

命题 8.16。 如果 $\mathcal{E}$ 是一个由可数的滤过特征集组成的可数族，那么$\bigvee \mathcal{E}$ 也是可数的。
证明。 注意，$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ 是可数的，因为它是可数个可数集的可数并。由引理 8.9 和8.10 可知， $\bigvee \mathcal{E} = (\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E)^{\mathfrak{f}}$ 也是可数的。□

8.7. **最小公共扩张和最大公共因子的尺度。**

命题 8.17. 设 $\mathfrak{X}$ 是一个非空的里程表族。对于 $X \in \mathfrak{X}$，令 S_X 为生成 X 的尺度。

(i) 最小公共扩张 $\bigvee \mathfrak{X}$ 由以下尺度生成

$$S := \left\{ \bigcap_{\Gamma \in J} \Gamma;\ J \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} S_X \text{ finite} \right\}$$

(ii) 最大公共因子 $\bigwedge \mathfrak{X}$ 由以下尺度生成

$$S := \left\{ \left\langle \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Gamma_X \right\rangle ;\ (\Gamma_X)_{X \in \mathfrak{X}} \in \prod_{X \in \mathfrak{X}} S_X \right\}$$

证明。(i)：显然，S 是一个尺度。对于 $X \in \mathfrak{X}$，我们有 $S_X \subseteq S$，因此 $[\![S_X]\!] \subseteq [\![S]\!]$。由此可得

$$\bigvee \{\mathrm{Eig}(X, G);\ X \in \mathfrak{X}\} = \bigvee \{[\![S_X]\!];\ X \in \mathfrak{X}\} \subseteq [\![S]\!].$$

此外，由引理 8.9 以及 $\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} S_X \subseteq \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} [\![S_X]\!]$ 可得

$$S^{\mathfrak{u}} = S^{\mathfrak{f}} \subseteq \left(\bigcup_{X \in \mathfrak{X}} [\![S_X]\!] \right)^{\mathfrak{f}} = \bigvee \{[\![S_X]\!];\ X \in \mathfrak{X}\}.$$

由于 $\bigvee \{[\![S_X]\!];\ X \in \mathfrak{X}\}$ 是共轭不变的，我们观察到

$$[\![S]\!] = (S^{\mathfrak{u}})^{\mathfrak{c}} \subseteq \bigvee \{[\![S_X]\!];\ X \in \mathfrak{X}\} = \bigvee \{\mathrm{Eig}(X, G);\ X \in \mathfrak{X}\}.$$

这表明 $[\![S]\!] = \bigvee \{\mathbf{Eig}(X,\ G);\ X \in \mathfrak{X}\}$ 并且我们得出结论：S 生成 $\bigvee \mathfrak{X}$。(ii)：为证明 S 是一个尺度，考虑 $(\Gamma_X)_X$，$(\Gamma'_X)_X \in \prod_{X \in \mathfrak{X}} S_X$。对于 $X \in \mathfrak{X}$，存在 $\Lambda_X \in S_X$ 使得 $\Lambda_X \subseteq \Gamma_X \cap \Gamma'_X$。显然，我们有 $S \ni \langle \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Lambda_X \rangle \subseteq \langle \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Gamma_X \rangle \cap \langle \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Gamma'_X \rangle$。这表明 S 是一个尺度。

对于 $X \in \mathfrak{X}$ 很容易看出，S_X 支配 S。由此可得

$$[\![S]\!] \subseteq \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} [\![S_X]\!] = \bigwedge \{\mathrm{Eig}(X, G);\ X \in \mathfrak{X}\}.$$

反过来，考虑 $\Gamma \in \bigwedge \{\mathrm{Eig}(X,\ G);\ X \in \mathfrak{X}\} = \bigcap_{X \in \mathfrak{X}} [\![S_X]\!]$。设 $X \in \mathfrak{X}$。由于 $[\![S_X]\!]$ 是一个滤过特征集，而 S_X 是一个尺度，由引理 8.10可知 $\Gamma \in [\![S_X]\!] \subseteq S_X^{\mathfrak{f}} = S_X^{\mathfrak{u}}$。因此存在 $\Gamma_X \in X$ 使得 $\Gamma_X \subseteq \Gamma$。于是我们有 $S \ni \langle \bigcup_{X \in \mathfrak{X}} \Gamma_X \rangle \subseteq \Gamma$，从而 $\Gamma \in S^{\mathfrak{u}} \subseteq [\![S]\!]$。

这表明 $[\![S]\!] = \bigwedge \{\mathbf{Eig}(X,\ G);\ X \in \mathfrak{X}\}$ 并且我们得出结论：S 生成$\bigwedge \mathfrak{X}$。□

回顾一下，可度量里程表系统由正规链生成，并且任意链都可以表示为一个序列 $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$，其中 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。下文中，每当我们将链表示为序列时，都默认满足 $\Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma_n$。

命题 8.18。 设 $\mathfrak{X}=(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 为一个里程表序列。对于 $i\in\mathbb{N}$，令$(\Gamma_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ 为生成 X_i 的链，并记

$$\Gamma_n := \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_n^{(i)}$$

对于 $n\in\mathbb{N}$。链 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 生成最小公共扩张 $\bigvee\mathfrak{X}$。

注记 8.19。 注意，若所有 $(\Gamma_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ 都是正规链，则 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$也是正规链。

注记 8.20。 由此可知，对于正规链 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其生成的里程表系统的最小公共扩张由 $(\Gamma_n\cap\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$生成。

命题 *8.18* 的证明： 显然，$(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一条链。记 S 为命题 8.17中给出的尺度，并注意到对所有 $n\in\mathbb{N}$， $\Gamma_n\in S$ 都成立。为了证明 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 支配 S，考虑 $\Gamma\in S$ 并选取一个有限子集$J\subseteq\bigcap_{i,\ n\in\mathbb{N}}\Gamma_n^{(i)}$，使得 $\Gamma=\bigcap_{\Lambda\in J}\Lambda$。对于 $\Lambda\in J$，存在 i_Λ， $n_\Lambda\in\mathbb{N}$，使得$_{\Lambda=\Gamma^{(i_\Lambda)n_\Lambda}}$。令 $n:=\max\{i_\Lambda,n_\Lambda;\ \Lambda\in J\}$，并注意到

$$\Gamma_n=\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_n^{(i)}=\bigcap_{i=1}^{n}\bigcap_{k=1}^{n}\Gamma_k^{(i)}\subseteq\bigcap_{\Lambda\in J}\Gamma_{n_\Lambda}^{(i_\Lambda)}=\bigcap_{\Lambda\in J}\Lambda=\Gamma.$$

这表明 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 与 S 是等价尺度，而命题8.17 推出二者都生成 $\bigvee\mathfrak{X}$。 □

对于一个可数（非空）的正规链族，命题 8.17 中的公式是否能像命题 8.18那样得到简化，目前仍未解决。不过，对于成对的可度量里程表系统，我们有如下结论。

命题 8.21。 设 (X,G) 和 (Y,G) 是由链$(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和$(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$生成的子里程表。最大公共因子 $X\wedge Y$ 由链$(\langle\Gamma_n\cup\Lambda_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$生成。

注记 8.22。如果 $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是正规链，那么 $(\Gamma_n\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}=(\langle\Gamma_n\cup\Lambda_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ 是生成 $X\wedge Y$ 的正规链。

证明。 记 S 为命题 8.17中所考察的尺度，并注意到 $\Gamma_n\in S$对所有 $n\in\mathbb{N}$均成立。因此 S 支配（Γ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$。
为证明反向结论，考虑 $\Gamma\in S$。存在（n， m）$\in\mathbb{N}^2$ 满足 $\Gamma=\Gamma_n\Lambda_m$。不失一般性，假设 $n\geq m$ 并注意到 $S\ni\Gamma_n\Lambda_n\subseteq\Gamma_n\Lambda_m=\Gamma$。这表明（$\Gamma_n$）$_{n\in\mathbb{N}}$ 支配 S。因此， S 和（Γ_n）$_{n\in\mathbb{N}}$ 是等价尺度，命题 8.17 说明二者均生成 $X\wedge Y$。 □

9. Universal subodometers

9.1. **万有里程计**。 注意，$\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是一个滤过特征集。考察与之关联的里程表，可得如下结论。

ˆ**命题 9.1**。 存在一个里程表(X,G) ， 它以所有子里程表ˆ(X,G) 为因子。它在共轭意义下唯一。里程表(X,G) 称为万有里程计（相对于 G）。

备注 9.2。 万有里程计可度量化，当且仅当 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$ 是可数的，正如推论6.8中已经讨论的那样。

注记 9.3. 所有正规 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$构成的集合 S 是交封闭的，因而为一个尺度。对于 $\Lambda \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们有 $\Lambda_G \leq \Lambda$。因此， S 支配 $\mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，并且我们观察到 S 生成万能里程表。

9.2. **最大子万花筒因子。** 设(X, G)为极小作用。如注记8.2， $\mathrm{Eig}(X, G)$是一个特征集。考虑相应的子里程表，定理5.5给出如下结论。

命题 9.4. 设(X, G) 为极小作用。存在一个子里程表(X_{MSF}, G) 使得

(a) (X_{MSF}, G) 是(X, G)的因子。*(b)* 每当(Y, G) 是子里程表且为(X, G)的因子时，则(Y, G) 是(X_{MSF}, G)的因子。

满足 *(a)* 和 *(b)* 的子万花筒在共轭意义下是唯一的，称为（X, G）的最大子万花筒因子。它满足

$$\mathrm{Eig}(X, G) = \mathrm{Eig}(X_{\mathrm{MSF}}, G).$$

注 9.5。 X 的最大子万花筒因子不一定是里程表。当且仅当 $\mathrm{Eig}(X, G)$ 是一个滤子时，它才是里程表。

注 9.6。 如果 (X, G) 是可度量化的，那么最大子万花筒因子也是可度量化的，并且我们注意到 $\mathrm{Eig}(X, G)$ 是可数的。这表明，可度量化的作用在共轭意义下至多只有可数多个有限因子。

注 9.7。 泛子万花筒是泛极小流 [Aus88，定理 81]的最大子万花筒因子。极小作用（X, G）的最大子万花筒因子与最大等度连续因子（X, G）的最大子万花筒因子共轭 [Hau25，注 94]。

备注9.8. 任意生成 $\mathrm{Eig}(S$ 的尺度$X, G)$ 的尺度，也生成 (X, G) 的最大子万花筒因子。特别地，由定理4.7 可知，对于$x \in X$ 滤子 $\mathrm{Eig}_x(X, G)$ 生成 (X_{MSF}, G)。

9.3. **极大里程表因子。** 对于极小作用 (X, G)，记 $\mathfrak{X}$为所有作为 (X, G) 的因子的里程表的集合。由于平凡作用是一个里程表，我们注意到 $\mathfrak{X}$非空。考虑最小公共扩张 $\bigvee \mathfrak{X}$ ，可得如下结论。

命题9.9。 设 (X, G) 是一个极小作用。存在一个里程表(X_{MOF}, G) ，使得

(a) (X_{MOF}, G) 是(X, G)的一个因子。*(b)* 每当(Y, G) 是一个里程表，且是(X, G)的一个因子时，(Y, G) 便是(X_{MOF}, G)的一个因子。

满足 *(a)* 和 *(b)* 的里程表在共轭意义下唯一，称为(,) 的极大里程计因子。

注 9.10. 请注意，对于一个并非里程表的子里程表 (,)，其最大子万花筒因子为 (,)，且不同于极大里程计因子。由 [Hau25，注 9。4] 可知，极小作用 (,) 的极大里程计因子就是其最大子万花筒因子的极大里程计因子。

回顾一下，极小作用 (X, G) 的最大子万花筒因子与 (X, G) 具有相同的特征值。接下来，我们将说明如何计算极大里程计因子的特征值。

命题 9.11. 设(X, G) 是一个极小作用，且(X_{MOF}, G) 是其极大里程计因子。则 $\mathrm{Eig}(X_{\mathrm{MOF}}, G) = \bigcap_{x\in X} \mathrm{Eig}_x(X, G)$。

证明。根据定理 4.7，$\mathrm{Eig}_x(X, G)$ 是 $x \in X$ 的一个滤子。此外，根据命题 8.4，我们知道滤子的交仍是滤子。因此，$E := \bigcap_{x\in X} \mathrm{Eig}_x(X, G)$ 是一个滤子。容易验证，E是共轭不变的。因此我们注意到，E 是一个滤过特征集。记 (X', G) 为 E-里程表。由 $E \subseteq \mathrm{Eig}(X, G)$，我们注意到 (X', G) 是 (X, G) 的一个因子，因此 $E = \mathrm{Eig}(X', G) \subseteq \mathrm{Eig}(X_{\mathrm{MOF}}, G)$。

对于逆向结论，考虑一个正规尺度 S，满足 $[\![S]\!] = \mathrm{Eig}(X_{\mathrm{MOF}}, G)$。对于 $\Gamma \in S$，存在一个因子映射 $X \to G/\Gamma$。由于 (X_{MOF}, G) 是 (X, G) 的因子，存在一个因子映射 $\pi\colon X \to G/\Gamma$；并且根据 Γ 对 $x \in X$ 的正规性，我们可以修改 π，使 $\pi(x) = \Gamma$。因此我们有 $\Gamma \in \bigcap_{x\in X} \mathrm{Eig}_x(X, G) = E$。这表明 $S \subseteq E$。由于 E 是一个滤过特征集，我们有 $\mathrm{Eig}(X_{\mathrm{MOF}}, G) = [\![S]\!] \subseteq E$。□

每当 (X, G) 是由尺度 S 生成的子里程表时，自然会问如何修改 S，以获得 (X, G) 的极大里程表因子的尺度。对于 $\Gamma \in \mathrm{Sub}_{\mathrm{fin}}(G)$，我们记

$$\Gamma^G := \left\langle \bigcup_{g\in G} \Gamma^g \right\rangle$$

Γ的正规包。注意，正规包是 G中包含 Γ的最小正规子群。

命题 9.12。 若(X, G) 是一个子里程表，且 S 是生成(X, G)的尺度，那么 $S^G := \{\Gamma^G;\ \Gamma \in S\}$ 是生成(X_{MOF}, G)的正规尺度。

证明。显然，S^G 是正规子群。由于映射 $S \ni \Gamma \mapsto \Gamma^G$ 关于集合包含是单调的，我们注意到 S^G 是一个尺度。将由 S^G生成的里程表记为（X^G, G）。

由 $\Gamma \subseteq \Gamma^G$ 可知，对所有 $\Gamma \in S$，S 支配 S^G。因此，（X^G, G）是（X, G）的一个因子。

考虑（Y，G）是（X，G）的一个因子，且它是一个里程表。由于 $\mathrm{Eig}(Y, G)$ 是包含于 $\mathrm{Eig}(X, G)$ 中的滤过特征集，$= [\![S]\!]$ 由引理 8.10 可知，$\mathrm{Eig}(Y, G) \subseteq S^{\mathrm{f}} = S^{\mathrm{u}}$。对于 $\Gamma \in \mathrm{Eig}(Y, G)$，由 $\mathrm{Eig}(Y, G)$ 的核稳定性可知，$\Gamma_G \in \mathrm{Eig}(Y, G) \subseteq S^{\mathrm{u}}$。因此，存在 $\Lambda \in S$ 使得 $\Lambda \subseteq \Gamma_G$。由于 Γ_G 是正规群，可得 $\Lambda^G \subseteq (\Gamma_G)^G = \Gamma_G \subseteq \Gamma$。于是有$\Gamma \in [\![S^G]\!] = \mathrm{Eig}(X^G, G)$。这表明 $\mathrm{Eig}(Y, G) \subseteq \mathrm{Eig}(X^G, G)$，从而（$Y$，$G$）是（$X^G$，$G$）的一个因子。

因此（X^G， G）满足命题9.9 的性质（a）和（b），并确立（X^G， G）为（X， G）的极大里程计因子。□

9.4. **包络里程表**。 考虑一个子里程表（X， G），并用 $\mathfrak{X}$表示所有作为（X，G）的扩张的里程表所构成的族。 $\mathfrak{X}$ 非空，因为其中包含万有里程计。考察 $\bigwedge \mathfrak{X}$ ，由定理 1.2可得如下结论。

命题 9.13。 设 (X, G) 是一个子里程表。存在一个里程表$(\mathcal{O}(X)\ G)$ 使得

(a) (X, G) 是$(\mathcal{O}(X)\ G)$ 的因子；且 *(b)* 任何作为(X, G) 扩张的里程表(X', G) ，也都是 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 的扩张。

满足 *(a)* 和 *(b)* 的里程表在共轭意义下唯一，称为包络里程表。

包络里程表的一种尺度如下所示。

命题 9.14。 若(X, G) 是一个子里程表，且 S 是生成(X, G)的尺度，那么 $S_G := \{\Gamma_G;\ \Gamma \in S\}$ 是生成$(\mathcal{O}(X)\ G)$的正规尺度。

证明。 显然， S_G 是正规的。由于映射 $S \ni \Gamma \mapsto \Gamma_G$ 关于集合包含是单调的，我们注意到 S_G 是一个尺度。记 (X_G, G) 为 S_G-里程表。对所有 $\Gamma \in S$ ，都有 $\Gamma_G \subseteq \Gamma$ ，因此 S_G 支配 S。于是，(X, G) 是 (X_G, G) 的一个因子。

设 (X', G) 是 (X, G) 的一个扩张，且它是一个里程表。由定理 5.5 可知， $S \subseteq \mathrm{Eig}(X, G) \subseteq \mathrm{Eig}(X', G)$。由定理 7.6 可知，$\mathrm{Eig}(X', G)$ 是一个核稳定滤子，因此我们有 $S_G \subseteq \mathrm{Eig}(X', G)$。由于 $\mathrm{Eig}(X', G)$ 是共轭不变且向上封闭的，我们有 $[\![S_G]\!] \subseteq \mathrm{Eig}(X', G)$；由命题 5.14 可得 $\mathrm{Eig}(\mathcal{O}(X)\ G) \subseteq \mathrm{Eig}(X', G)$。由定理 5.5 可知，$(X', G)$ 是 (X, G) 的一个扩张。

这表明 (X_G, G) 满足命题 9.13 的 (a) 和 (b)，因此与包络里程表共轭。 □

命题 9.15. 子里程表 (X, G) 可度量化，当且仅当其包络里程表 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 可度量化。

证明。显然，若 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 可度量化，则其因子 (X, G) 也可度量化。反过来，假设 (X, G) 可度量化。由定理 6.6 可知，(X, G) 由一个可数尺度 S 生成，因此 S_G 也是可数的。由于 S_G 生成 $(\mathcal{O}(X)\ G)$，由定理 6.6 可得，$(\mathcal{O}(X)\ G)$ 可度量化。 □

接下来，我们将介绍极小作用的包络里程表与 Ellis 半$E(X)\ G$群之间的相互关系。关于 Ellis 半群的定义和各种性质，参见 [Aus88，第 3]节。

命题 9.16。 设(X, G) 是一个极小作用。

(i) (X, G) 是子里程表，当且仅当 $(E(X)\ G)$ 是里程表。*(ii)* 若 (X, G) 是子里程表，则 $(E(X)\ G)$ 与 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 共轭。

证明。 (i)：假设 $(E(X)\ G)$ 是里程表。由 [Aus88，定理 3.6]存在因子映射 $E(X) \to X$ 并且由命题 5.1 可知 (X, G) 是子里程表。

反之，假设 (X, G) 是一个子里程表。由于 (X, G) 是一个极小等度连续作用，由 [Aus88 第 3] 节可知 $(E(X)\ G)$ 是一个极小旋转。考虑因子映射 π: $\mathcal{O}(X) \to X$。由 [Aus88 定理 3.7] 可知，存在因子映射 $(E(\mathcal{O}(X))\ G) \to (E(X)\ G)$。由于 $\mathcal{O}(X)$ 是一个群旋转，我们观察到 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 与 $(E(\mathcal{O}(X))\ G)$ 共轭，因而存在因子映射 $\mathcal{O}(X) \to E(X)$。由于子里程表的因子仍是子里程表，由命题 5.1 可知 $(E(X)\ G)$ 是一个子里程表。又因为它是一个旋转，所以它是一个里程表。

(ii)：设 (X, G) 是一个子里程表。根据 (i) 的证明，存在一个因子映射 $\mathcal{O}(X) \to E(X)$。此外，由 (i) 可知，$E(X)$ 是一个里程表。由于 (X, G) 是 $(E(X)\ G)$ 的因子，因此存在一个因子映射 $E(X) \to \mathcal{O}(X)$。根据极小等度连续作用的凝聚性可知，$(E(X)\ G)$ 和 $(\mathcal{O}(X)\ G)$ 共轭。□

References

[Aus88] Joseph Auslander. 极小流及其扩张，North-Holland 数学研究丛书第 153 卷。阿姆斯特丹等地：North-Holland，1988 年。[Bir67] Garrett Birkhoff. 格论。第三版（新版），美国数学会 Colloquium Publications 第 25 卷。美国数学会（AMS），普罗维登斯，罗得岛州，1967 年。[CM16] Mar´ía Isabel Cortez 和 Konstantin Medynets. 等连续系统的轨道等价刚性。J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 94(2):545–556, 2016.[Cor06] Mar´ía Isabel Cortez. $\mathbb{Z}^d$ Toeplitz阵列。Discrete Contin. Dyn. Syst., 15(3):859–881, 2006.[CP08] Mar´ía Isabel Cortez 和 Samuel Petite. G有理数群-里程表及其几乎一一扩张。J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 78(1):1–20, 2008.[Dow05] Tomasz Downarowicz. 里程表与Toeplitz流综述。载于《代数与拓扑动力学》，Contemp. Math. 第 385 卷，第 7–37 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005 年。[GPS19] Thierry Giordano、Ian F. Putnam 和 Christian F. Skau. 有理数群-里程表与上同调。Groups Geom. Dyn., 13(3):909–938, 2019.[Hal59] Marshall jun. Hall. 群论。纽约：The Macmillan Company。xiii，434 页（1959 年），1959 年。[Hau25] Till Hauser. 平均直径、正则性与直径-平均等度连续性。预印本，arXiv:2510.22484 [math.DS]（2025），2025 年。[HL21] Steven Hurder 和 Olga Lukina. 非自由Cantor作用的极限群不变量。Ergodic Theory Dynam. Systems, 41(6):1751–1794, 2021.[HL23] Steven Hurder 和 Olga Lukina. 幂零Cantor作用的素谱与动力学。Pacific J. Math., 327(1):107–128, 2023.[HR79] Edwin Hewitt 和 Kenneth A. Ross. 抽象调和分析。第 1 卷：拓扑群的结构；积分论；群表示。第 2 版，数学科学基础丛书第 115 卷。Springer，Cham，1979 年。[IN99] Alejandro Illanes 和 Sam B. jun. Nadler. 超空间：基础与最新进展，Pure and Applied Mathematics 第 216 卷，Marcel Dekker。纽约，纽约州：Marcel Dekker，1999 年。[Kel17] John L. Kelley. 一般拓扑学。纽约州米尼奥拉：Dover Publications，重印 van Nostrand 于 1955 年出版的原版，2017 年。

[KS23] Steffen Kionke 和 Eduard Schesler. 有限生成群的可和性与投射有限完备化。*Groups Geom. Dyn.*, 17(4):1235–1258, 2023.[Mun00] James R. Munkres. 拓扑。Upper Saddle River，NJ：Prentice Hall，第 2 版，2000 年。[NS07] Nikolay Nikolov 和 Dan Segal. 关于有限生成原有限群。I. 强完备性与一致界。*Ann. of Math. (2)*, 165(1):171–238, 2007.[Orm97] Nicholas S. Ormes. 极小同胚的强轨道实现。*J. Anal.Math.*, 71:103–133, 1997.[RZ00] LuisRibes 和 Pavel Zalesskii. 原有限群，Ergeb. Math. Grenzgeb. 第 40 卷，第 3 系列。柏林：Springer，2000。

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Edificio Rolando Chuaqui, Campus San Joaquín. Avda. Vicuña Mackenna 4860, Macul, Chile.电子邮箱地址：maria
·cortez@uc .cl

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile. Edificio Rolando Chuaqui, Campus San Joaquín. Avda. Vicuña Mackenna 4860, Macul, Chile.电子邮箱地址：hauser.math@mail.de