arXiv:2602.05761v1 [math.AC] 5 Feb 2026

行列式与 Pfaffian 的对角 F-阈值

BARBARA BETTI、CLAUDIU RAICU、FRANCESCO ROMEO 和 JYOTI SINGH

Abstract. 我们计算由一般矩阵和一般对称矩阵产生的行列式超曲面的对角 F-阈值，以及由偶数阶一般斜对称矩阵产生的 Pfaffian 超曲面的对角 F-阈值。其主要工具是特征 p下旗簇上某些线丛的上同调消失定理。对于一般矩阵和一般斜对称矩阵的情形，我们证明对角 F-阈值达到其可能的最小值，即 a-不变量的负值。对称情形更为微妙，除其他方法外，还依赖于关于由上同调给出的表示的多项式性结果；该结果建立在第二作者与 VandeBogert 的工作之上。

1. Introduction

在特征零下，GL_n 的表示论有两种卓越的体现：从几何角度看，体现为 Borel–Weil–Bott 定理 [Ser95，Bot57], ；该定理将不可约表示实现为旗簇上线丛的上同调；从代数角度看，则体现为标准单项式理论和行列式簇的交换代数，正如 De Concini–Eisenbud–Procesi [DCEP80]的经典发展所示。在特征 $p > 0$下，上同调的结构和行列式环的结构都远未得到充分理解，这反映出 Frobenius 端同态与取行列式操作之间相互作用的微妙方式。本文的目标是通过刻画由行列式和 Pfaffian 定义的超曲面环的对角 F-阈值，开始对这种相互作用进行精确描述。对于正特征诺特环 R ， **F- 阈值** 是重要的不变量，用于度量其中理想的正规幂与 Frobenius 幂之间的渐近包含关系 R。这些不变量源于 Huneke、Mustaţă、Takagi、Watanabe [MTW05、HMTW08] 在正则情形下的工作，后来在 [DSNBP18]中被证明在一般情形下都存在。然而，在许多重要背景下，它们仍然难以计算；我们通过在旗簇上建立新的上同调消失性结果，并运用模表示论和多项式函子理论中的基本结果，说明了如何计算行列式环的这些不变量。

我们在特征为 $p > 0$ 的代数闭域$\mathbf{k}$上工作，并用 R 表示一个标准分次$\mathbf{k}$-代数，其极大齐次理想为 $\mathfrak{m}$。我们考虑**Frobenius 幂**$\mathfrak{m}^{[q]} = \langle f^q : \ f \in \mathfrak{m}\rangle$，其中 $q = p^s$。Frobenius 幂提供了一种理解 Frobenius 端同态在 R上的作用的方式，它们与 $\mathfrak{m}$ 的常规幂之间的关系由

$$v_R(q) = \max\{d \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^d \not\subseteq \mathfrak{m}^{[q]}\}$$

我们可以将 $v_R(q)$ 视为有限长度代数 $R/\mathfrak{m}^{[q]}$ 的 **底（socle）次数**，也就是分次分量 $R/\mathfrak{m}^{[q]}$ 非零时所对应的最大次数。为简化记号，对于 R 的 **（对角） F-阈值**，我们记作 $c(R)$，而不采用更常见的记号 $c^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$；其定义为以下极限

$$c(R) = \lim_{q\to\infty} \frac{v_R(q)}{q}. \tag{1.1}$$

Date：2026年2月6日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类13A35、14M12、14M15、20G05、20G10。*Key words and phrases.*F-阈值、行列式环、普法夫式、上同调、多项式函子与表示。

主定理。令 $S=\mathbf{k}[x_{ij}]$ 为一个以 $n\times n$ 矩阵的元素为变量的多项式环。超曲面环 $R=S/\langle f\rangle$ 的对角 F-阈值计算如下。

(1) 如果 (x_{ij}) 是一个一般矩阵且 $f=\det(x_{ij})$，那么 $c(R)=n^2-n$。*(2)* 如果 (x_{ij}) 是一个一般对称矩阵且 $f=\det(x_{ij})$，那么 $c(R)=(n^2-1)/2$。*(3)* 如果 (x_{ij}) 是一个偶数阶的一般斜对称矩阵且 $f=\mathrm{Pf}(x_{ij})$，那么 $c(R)=(n^2-2n)/2$。

主定理的情形 (1) 证实了 [BMRS25、猜想 29], ；该猜想已在 [BMRS25，推论 28]中验证了 $n\leq 4$ 。正如 [BMRS25，定理 6], 中所指出的， F-阈值的公式可以推广到非方阵，而我们在第 4 节中给出的论证适用于这一更一般的情形。在主定理的情形 (1) 和 (3) 中， $c(R)$ 的公式与 $-a(R)$ 一致，即 R 的 a- 不变量的负值（定义见第 2.1 节）； [DSNB18，定理 4.9] 表明，该值始终给出对角 F-阈值的一个下界；因此，困难在于从上方界定 $c(R)$。相比之下，对于对称行列式，我们有 $-a(R)=(n^2-n)/2$，所以该下界不再是最优的。正如第 5 节所述，我们的方法同时从上方和下方界定 $c(R)$。对于 Pfaffian 超曲面，我们对 $c(R)$ 上界的估计通过一个退化论证归约为关于一个尺寸减半的一般矩阵的行列式的相应陈述，具体说明见第 6 节。

我们通过给出 R 的分次分量的上同调解释，并通过上同调消失刻画 $v_q(R)$，得到了一般行列式和一般对称行列式的 $c(R)$ 上界。对于每个次数 d，我们构造一个（非正合的）Koszul复形 $\mathcal{K}^\bullet$，其各项都没有高阶上同调，且其零次超上同调 $\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet)$ 衡量 $\left(R/\mathfrak{m}^{[q]}\right)_d$。从重言层出发，利用标准的多重线性代数构造和 Frobenius扭转，可以明确描述 $\mathcal{K}^\bullet$ 的同调层。剩下的挑战是确定每个同调层的上同调消失范围，而下文将介绍解决这一问题的关键工具。

我们考虑由子空间的完全旗参数化的**（完全）旗簇** Fl_n

$$V_\bullet:\qquad 0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{n-1}\subset\mathbf{k}^n,\qquad \text{where } \dim(V_i)=i.$$

上的线丛 Fl_n 由元组（权） $y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{Z}^n$参数化，我们将$\mathcal{O}_{Fl_n}(y$记作对应于 y 的线丛（另见第2.4节）。利用格拉斯曼流形和旗簇上的上回调方法研究行列式簇，可追溯至 Lascoux 关于合冲的工作 [Las78], ，并在 [Wey03]中有详尽阐述。这些工作中的大多数结果都要求特征零，因为它们依赖于 Borel–Weil–Bott 定理。尽管如此，这一一般框架仍可在任意域$\mathbf{k}$上建立；若要在特征p下获得结果，就必须找到对特征零情形的 Borel–Weil–Bott 结论的恰当修正（具体示例见[BCRV22，第 9.5、9.6 节及第 10] 章）。下面给出估计 F-阈值所需的主要消失定理。

旗簇上的上同调消失。 假设 $\mathrm{char}(\mathbf{k})=p>0$ ， 并令 $q=p^s$ 对某个 $s\geq 0$。若 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})$ 是大小为 $|\lambda|\leq(n-1-j)q-1$ 的分拆，且 $e\geq(1+j)q$ 则

$$H^k\left(Fl_n,\mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},e)\right)=0\quad \textit{for } k\leq j. \tag{1.2}$$

在情形 $j=0$下，上述假设蕴含 $e>\lambda_{n-1}$，因此权 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},e)$ 不是主导的。于是 H^0 的消失是 Borel–Weil 定理在任意特征下的一个广为流传的推广（见 [BCRV22，定理 9.8.5]）。情形 $j=1$ 由 Andersen 刻画 H^1 [And79之（非）消失的一个经典结果得出，定理 3.6]。一般情形在第 3节中说明。

例 1.1. 为 请注意，上同调消失陈述（1.2）是最优的，考虑线丛 e

$$\mathcal{L}=\mathcal{O}_{Fl_n}(1^{n-1-j},0^j,1+j).$$

它只有一个非消失的上同调群，即 $H^j(Fl_n,\ \mathcal{L}) = \bigwedge^n \mathbf{k}^n \simeq \mathbf{k}$，这表明当 $q = 1$时，我们的结果是最优的。利用 Fl_n 整体上 F-分裂这一事实，我们得到一个包含（另见 [And80a，命题 3。3]）

$$H^j(Fl_n, \mathcal{L}) \hookrightarrow H^j(Fl_n, \mathcal{L}^q) \text{ for all } q = p^s.$$

由于 $\mathcal{L}^q = \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ e)$，其中 $e = (1+j)q$ 且 $|\lambda| = (n-1-j)q$，我们得出结论：假设 $|\lambda| \leq (n-1-j)q - 1$ 是获得消失的最优条件。

完全旗簇上线丛的上同调结果，往往可以与格拉斯曼流形或射影空间等部分旗簇上高秩向量丛的上同调结果联系起来（参见[BCRV22，第 9] 章，以及 [RV23] 中的一些例子）。令 $\mathbf{P}$ 表示参数化 $\mathbf{k}^n$ 的一维子空间的射影空间，则 $\mathbf{P}$ 配有一个典范短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}^{\oplus n} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

其中 $\mathcal{Q}$ 是典范的秩（$n-1$）商丛。若记 $\mathbb{S}_\lambda$ 为与分拆 λ相对应的 Schur 函子，则线丛 $\mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ e)$ 的上同调与向量丛 $\mathbb{S}_\lambda\mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)$ 在 $\mathbf{P}$上的上同调一致。因此，我们可以将以下结果视为对先前旗簇上同调消失结果的推广；我们也将在第 3 节验证该结果。

射影空间上的上同调消失。 假设 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = p > 0$ 且令 $q = p^s, s \geq 0$。若 $\mathcal{P}$ 是次数至多为 $(n-1-j)q - 1$ 的多项式函子，且若 $e \geq (1+j)q$，则

$$H^k\left(\mathbf{P}, \mathcal{P}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right) = 0 \quad \textit{for } k \leq j. \tag{1.4}$$

当 $j \geq n-1$ 时，结果显然成立，因为该假设迫使 $\mathcal{P}$ 的次数为负；然而，当 $j = n-2$ 时，结果已经很有意义。为说明这一情形，我们令 Ω 表示 $\mathbf{P}$ 上的余切层，并利用 $\bigwedge^{n-1}\mathcal{Q} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ 以及以下同一关系

$$\Omega = \mathcal{Q}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1), \quad \text{and} \quad \mathcal{Q} = \left(\bigwedge^{n-2} \mathcal{Q}^\vee\right) \otimes \bigwedge^{n-1} \mathcal{Q} = \bigwedge^{n-2} \Omega \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-1).$$

令 d 表示 $\mathcal{P}$ 的次数，并令 $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \circ \bigwedge^{n-2}$，可得

$$\mathcal{P}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e) = \tilde{\mathcal{P}}(\Omega) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}((n-1)d - e),$$

取 $j = n-2$，则有 $d < q$ 且 $e \geq (n-1)q$，因此 $(n-1)d - e < 0$，所需的消失 (1.4) 是 [RV23定理 4.1(3)]的一个特例。一般情形需要更多工作，我们将通过归纳论证，并结合旗簇上的消失结果来证明。

结构安排。第2 节汇集了关于 F-阈值和 a-不变量、上同调、多项式函子以及 GL_n的模表示论所需的背景知识。在第3节中，我们介绍上同调的主要消失性结果，以及为在对称情形下从下方估计 $c(R)$ 所需的上同调多项式性结果。第4、5、6 节分别计算主定理中情形（1）、（2）、（3）下的 $c(R)$。

2. Preliminaries

全文中我们都在特征为 $p > 0$ 的代数闭域 $\mathbf{k}$ 上讨论。我们用字母 q 表示 $\mathbf{k}$ 的特征的一个幂 $q = p^s$。我们常将元素 $y \in \mathbb{Z}^n$称为**权**，并称 y为**主导**的，当它属于子集 $\mathbb{Z}^n_{dom}$且 $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ 时。若进一步有 $y_n \geq 0$，则称 y为一个**分拆**。权 y的**大小**为 $|y| = y_1 + \cdots + y_n$。

2.1. **超曲面环与对偶** [BH93]。设 $S=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_r]$，设 $0\neq f\in S$ 表示次数为 $k>0$ 的齐次多项式，并令 $R=S/\langle f\rangle$。我们滥用记号，将 $\mathfrak{m}$ 同时表示 S 和 R 的极大齐次理想。对于 $q=p^s$，我们令 $\underline{S}=S/\mathfrak{m}^{[q]}$ 并且 $\underline{R}=R/\mathfrak{m}^{[q]}$。给定一个分次模 M，我们将 M 的初始次数和末次数定义为：

$$\operatorname{indeg}(M)=\inf\{i:M_i\neq 0\},\qquad \operatorname{endeg}(M)=\sup\{i:M_i\neq 0\}.$$

记 ω_A 为 Cohen–Macaulay 分次代数 A 的典范模，则有

$$a(A)=\operatorname{indeg}(\omega_A),$$

其中 $a(A)$ 是 a-不变量，而 A。此外，由 [BH93] 中的定理 3.3.7 可得

$$\omega_S=S(-r)\text{ and }\omega_R=\operatorname{Ext}^1_S(R,\omega_S)=R(k-r),$$

由此可知，$-a(R)=r-k$ 为对角 F-阈值提供了一个下界

$$c(R)\geq r-k. \tag{2.1}$$

事实证明，这个界对一般行列式和普法夫式是紧的，但对称行列式的情形则不然。对于后者，我们采用另一种方法来给出下界

$$v_R(q)=\operatorname{endeg}(\overline{R})=-\operatorname{indeg}(\omega_{\overline{R}}).$$

利用 S 是 Artinian Gorenstein 环，其底位于次数 $(q-1)r$，且 $\overline{R}=\overline{S}/\langle f\rangle$，可得

$$\omega_{\overline{S}}=\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(\overline{S},\mathbf{k})=\overline{S}((q-1)r)\quad\text{and}\quad\omega_{\overline{R}}=\operatorname{Hom}_S(\overline{R},\omega_S)=(0:_{\overline{S}}f)((q-1)r).$$

若令 $t=\operatorname{indeg}(0:_S f)$，则 $\operatorname{indeg}(\omega_R)=t-(q-1)r$，因此

$$v_R(q)=(q-1)r-\operatorname{indeg}(0:_{\overline{S}}f). \tag{2.2}$$

求出的 $v_R(q)$ 的最优下界等价于求 f 在 S 中的最小次数湮灭子；对于特征 2 下的对称行列式，我们将在第 5.2 节确定这些湮灭子。

2.2. **表示论基础** [Gre80，Jan03]。**给定群** G 和一个有限维 G-表示 W，如果 W 不含真子表示，**则称其为简单**（或**不可约**）$0\subsetneq W'\subsetneq W$。每个有限维表示 W 都有一个（Jordan–Hölder）滤过

$$0=W_0\subset W_1\subset\cdots\subset W_r=W \tag{2.3}$$

使得商（合成因子）W_{i+1}/W_i 都是简单的。尽管滤过本身并不唯一，但计重数并视同构（以及重排）为同一的简单合成因子，却由 W 唯一确定。给定一个简单 G-表示 L，记 $[W:\ L]$ 表示**的重数**，即 L 在 W 中的与 W_{i+1}/W_i 同构的商 L 在一个滤过（2.3）中的个数。若 L **在**中出现（或为 W 的合成因子），则 $[W:\ L]>0$。

下面考虑代数群 $G=\mathrm{GL}_n(\mathbf{k})$，并回顾有限维 G-表示的一些性质。简单 G-表示由**支配权**的集合标记

$$\mathbb{Z}^n_{dom}=\{\lambda\in\mathbb{Z}^n:\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\}.$$

我们用 L_λ 表示与 λ 对应的简单表示。令 ω_i 表示第 i 个**基本权** $(1^i,\ 0^{n-i})=(1,\dots,1,0,\dots,0)$，其中 1 和 0 分别出现 i 次和 $(n-i)$ 次，那么

$$L_{\omega_i}=\bigwedge^i\mathbf{k}^n\quad\text{for } i=1,\dots,n.$$

每个支配权 λ 都可以唯一地表示为

$$\lambda=a_1\omega_1+\cdots+a_n\omega_n,\quad\text{where } a_1,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0},\ a_n\in\mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

更精确地说，对于 $i=1$、……、$n-1$，且 $a_n=\lambda_n$，我们有 $a_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$。我们将 $L_{\omega_1}=\mathbf{k}^n$ 称为**标准表示**，将 $L_{\omega_n}=\det(\mathbf{k}^n)$ 称为**行列式表示**。我们知道 L_{ω_n} 是一维的，并且具有如下性质：

$$L_\lambda \otimes L_{\omega_n} = L_{\lambda+\omega_n} \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{Z}^n_{dom}.$$

这意味着

$$L_{-\omega_n} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}\left(\bigwedge^n \mathbf{k}^n, \mathbf{k}\right) = L_{\omega_n}^\vee, \quad \text{and} \quad L_{-a\omega_n} = \left(L_{\omega_n}^\vee\right)^{\otimes a} \text{ for } a \geq 0.$$

若 L_λ 满足 $\lambda_n \geq 0$（也就是说，若 λ是一个分拆），则称 L_λ 为**多项式表示**。更一般地，如果一个 G-表示 W 的所有合成因子 L_λ 都是多项式表示，则称其为多项式表示。

若 $p=\mathrm{char}(\mathbf{k})$，则 Frobenius（的迭代）会在表示范畴上诱导出自然运算。记 $\phi^{(i)}: G \longrightarrow G$ 为将 $\phi^{(i)}(g)=g^{p^i}$ 映至自身的自同态，那么对每个 G-表示 W，沿着 $\phi^{(i)}$ 作限制，就得到一个新的（扭曲）表示，记作$W^{(i)}$。一般而言，我们有 $W^{(0)}=W$、$(W^{(i)})^{(j)}=W^{(i+j)}$；对于简单表示，我们有$L_\lambda^{(i)}=L_{p^i\cdot\lambda}$。我们注意到，扭曲是一种与张量积相容的正合运算，并且保持多项式表示子范畴不变。

我们称一个权 λ 如（2.4）中所示，是 p**-限制的，**如果 $0\leq a_i<p$ 对所有 i 成立（特别地，λ 是一个分拆，且 L_λ 是多项式）。利用 p-进展开式 $a_i=\sum_j a_i^{(j)}\cdot p^j$，$0\leq a_i^{(j)}<p$，我们可以定义 $\lambda^j=\sum_i a_i^{(j)}\cdot\omega_i$，并将每个分拆 λ 唯一地表示为

$$\lambda = \lambda^0 + p\lambda^1 + \cdots + p^s\lambda^s, \quad \text{where } \lambda^i \text{ is } p\text{-restricted for all } i. \tag{2.5}$$

根据 Steinberg 张量积定理 [Jan03，推论 II.3，17], 分解（2.5）导出一个同构

$$L_\lambda = L_{\lambda^0}\otimes L_{\lambda^1}^{(1)}\otimes\cdots\otimes L_{\lambda^s}^{(s)}. \tag{2.6}$$

我们将 **次数** 定义为 L_λ，并称表示 $|\lambda|=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$为次数 W的齐次表示，d 如果它的所有合成因子 L_λ 都具有 $|\lambda|=d$。由于次数相对于表示的张量积具有可加性，因此若 L_λ 出现在张量积 $L_\mu\otimes L_\nu$ 中，则 $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$。结合（2.6），我们得到以下推论，该推论将在第 5.3 节中用到。

引理 2.1. 设 μ 是 p-受限的，且 $\lambda=\lambda^0+p\lambda^1+\cdots+p^s\lambda^s$，其中每个 λ^i 都是p-受限的。若对某个分拆 ν，L_λ 出现在张量积 $L_{p^s\mu}\otimes L_\nu$ 中，则 $|\lambda^s|\geq|\mu|$。

证明. 写作 $\nu=\nu^0+p\nu^1+\cdots+p^s\nu^s$，其中 $\nu^0,\ldots,\nu^{s-1}$ 均为 p-受限的，且 ν^s 是一个分拆，则

$$L_{p^s\mu}\otimes L_\nu = L_{\nu^0}\otimes L_{\nu^1}^{(1)}\otimes\cdots L_{\nu^{s-1}}^{(s-1)}\otimes\left(L_\mu\otimes L_{\nu^s}\right)^{(s)}.$$

由此可知，若 $\lambda^i=\nu^i$ 是 $L_{p^s\mu}\otimes L_\nu$ 的一个合成因子，则对于 $i<s$ 有 $\lambda^i=\nu^i$，并且 L_{λ^s} 是 $L_\mu\otimes L_{\nu^s}$的一个合成因子，这意味着 $|\lambda^s|=|\mu|+|\nu^s|\geq|\mu|$，证毕。□

2.3. 多项式函子 [Gre80、FS97]。我们考虑域 $\mathbf{k}$ 上次数为 d 的（严格）多项式函子范畴 $\mathfrak{Pol}_d$（参见 [RV23 的 2] 节，其中对相关背景作了简要总结）。多项式函子的主要例子与 d 的一个分拆 λ 相关，由 Schur 函子 $\mathbb{S}_\lambda$ 和韦伊函子 $\mathbb{W}_\lambda$ 给出。当 $\lambda=(d)$ 时，我们有 $\mathbb{S}_\lambda=\mathrm{Sym}^d$，它是通常的 d 次对称幂函子，而 $\mathbb{W}_\lambda=\mathrm{D}^d$ 是 d 次除幂函子。当 $\lambda=(1^d)$ 时，有 $\mathbb{S}_\lambda=\mathbb{W}_\lambda$ 与外幂函子 $\bigwedge^d$ 重合。$\mathfrak{Pol}_d$ 是一个有限长度范畴，其单对象 $\mathbb{L}_\lambda$ 由 d 的分拆参数化。我们有 $\mathbb{L}_\lambda$ 可实现为 $\mathbb{S}_\lambda$ 的唯一单子函子，以及 $\mathbb{W}_\lambda$ 的唯一单商对象。$\mathbb{S}_\lambda$ 和 $\mathbb{W}_\lambda$ 的所有其他合成因子都具有 L_μ 的形式，其中 $\mu<\lambda$ 按支配序排列。

Frobenius q-幂函子 F^q 对于单元素分拆 $\lambda=(q)$，作为特殊情形 $F^q=\mathbb{L}_\lambda$ 出现，因此它是 Sym^q 的一个子函子。我们将 **q-截断对称幂** 定义为

$$T_q\,\mathrm{Sym}^d=\operatorname{coker}\left(F^q\otimes\mathrm{Sym}^{d-q}\xrightarrow{\phi}\mathrm{Sym}^d\right),\tag{2.7}$$

其中，自然变换 ϕ 由包含 $F^q\hookrightarrow\mathrm{Sym}^q$ 诱导，随后施以对称幂上的乘法映射。

给定多项式函子 $\mathcal{P}\in\mathfrak{Pol}_d$，在 $\mathbf{k}^n$ 上的取值给出 GL_n 的一个次数为 d的多项式表示 $\mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$。最熟悉的次数为 d 的表示例子包括对称幂 $\mathrm{Sym}^d\mathbf{k}^n$、外幂 $\bigwedge^d\mathbf{k}^n=L_{\omega_d}$、张量幂 $T^d\mathbf{k}^n=(\mathbf{k}^n)^{\otimes d}$ 以及除幂 $D^d\mathbf{k}^n$。一般而言，若 $\lambda_{n+1}=0$（即若 λ 至多有 n 个部分），则有 $\mathbb{L}_\lambda(\mathbf{k}^n)=L_\lambda$；并且若 $\lambda_{n+1}>0$，则有 $\mathbb{L}_\lambda(\mathbf{k}^n)=\mathbb{S}_\lambda(\mathbf{k}^n)=\mathbb{W}_\lambda(\mathbf{k}^n)=0$。注意，若 $n\geq d$，则每个 d 的分拆 λ 都满足 $\lambda_{n+1}=0$。特别地，赋值 $\mathcal{P}\mapsto\mathcal{P}(\mathbf{k}^n)$ 给出 $\mathfrak{Pol}_d$ 与 GL_n 的次数为 d的多项式表示范畴之间的范畴等价。

2.4. **旗簇与旗丛** [BCRV22]。本节回顾 [BCRV22第 9], 节中的一些形式体系和记号，这些内容将用于第3节的论证。设$\mathbf{B}$ 为一个代数簇，并设 $\mathcal{E}$ 为$\mathbf{B}$上的有限秩局部自由层。我们将 $\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})$记作**相对旗丛**，其结构态射为 $\pi:\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})\longrightarrow\mathbf{B}$，典范线丛为

$$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(\underline{y}),\quad \underline{y}\in\mathbb{Z}^n.$$

按照这些约定，若指标权重 y 是主导的，则将直接像写作

$$\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(\underline{y})\right)=\mathbb{S}_{\underline{y}}\mathcal{E},\quad R^j\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(\underline{y})\right)=0\text{ for }j\neq 0.$$

我们考虑 $\mathbf{p}$ 射影丛 $\mathbf{P}=\mathbb{P}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})=\mathbf{Proj}(\text{对称幂}_{\mathcal{O}_{\mathbf{B}}}\mathcal{E})$，其典范正合列为

$$0\longrightarrow\mathcal{R}\longrightarrow\pi^*\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0,$$

其中 $\mathcal{Q}=\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$。根据 [BCRV22第 9 节6], 中的讨论，我们可以将 π 分解为

$$\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})\xrightarrow[f]{}\mathbf{P}\xrightarrow[g]{}\mathbf{B}\qquad(\pi=g\circ f)\tag{2.8}$$

并将 f 视为旗丛 $\mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})$的结构映射，从而得到 $\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})=\mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})$的识别。于是我们得到一个识别

$$\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(y_1,y_2,\ldots,y_n)=f^*(\mathcal{Q}^{y_1})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})}(y_2,\ldots,y_n)$$

和投影公式 [Stacks，标签01E8] 推出

$$R^qf_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right)=\mathcal{Q}^{y_1}\otimes R^qf_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})}(y_2,\ldots,y_n)\right)\text{ for all }q.$$

我们可以结合 这一识别与相对 Leray 谱序列 [Stacks，标签01F6]

$$E_2^{p,q}=R^pg_*\left(R^qf_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right)\right)\Longrightarrow R^{p+q}\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right)$$

从而得到推论

$$\text{如果 }R^kf_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})}(y_2,\ldots,y_n)\right)=0\text{ for }k\leq j\text{ then }R^k\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})}(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right)=0\text{ for }k\leq j.\tag{2.9}$$

3. Cohomology vanishing and polynomiality

本节的目标是验证旗簇与射影空间上同调的主要消失性结果和多项式性结果。对于消失性结果，证明结构使得利用第2.4 节的设定、在相对情形下表述论证更为方便——我们在第3.1节中对此加以说明。我们在第3.2节中证明多项式性结果，紧密遵循 [RV23第 3]节的策略。

3.1. 旗丛上的上同调消失。 我们首先在旗丛这一更一般的背景下，表述旗簇上的上同调消失。

定理 3.1. 设 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mathbf{B}}(\mathcal{E})$ 表示一个旗丛，其结构态射为 $\pi\colon \mathbb{F} \longrightarrow \mathbf{B}$ 如第 *2.4* 节所述，并设 秩$(\mathcal{E}) = n$。若 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ 是大小为 $|\lambda| \leq (n-1-j)q - 1$ 的分拆，且 $e \geq (1+j)q$，则

$$R^k\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \quad \textit{for } k \leq j.$$

We w我们将把定理 3.1 证明为以下相关消失结果的推论 t.

定理 3.2. 考虑一个旗丛 $\pi\colon \mathbb{F} \longrightarrow \mathbf{B}$ 如定理 *3.1*所述。设 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ 是一个满足 $q - 1 \geq \lambda_1$ 的分拆；若 $j \leq n-2$ 且 $e \geq (1+j)q$，则

$$R^k\pi_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \quad \textit{for } k \leq j.$$

证明。 我们对 n进行归纳法。利用分解（2.8），我们识别出 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})$，并考虑分拆 $\mu = (\lambda_2, \dots\dots, \lambda_{n-1})$。如果 $j \leq n-3$，由于 $\lambda_2 \leq q-1$，根据 n 的归纳法，我们有

$$R^k f_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \text{ for } k \leq j.$$

所需的消失结论随后由蕴含式（2.9）在 $y_i = \lambda_i$对 $i \leq n-1$时，以及 $y_n = e$得到。剩下的是 $j = n-2$ 的情形；此时可以应用上述论证，从而得到

$$R^k f_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \text{ for } k \leq n-3.$$

此外，由 [RV23，定理 3.1] 可知，存在一个次数为 $\mathcal{P}$ 的多项式函子，其次数为$d = \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + e$，使得

$$R^{n-2} f_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = \mathcal{P}(\mathcal{R}).$$

为了证明 $R^{n-2}\pi_*(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_1, \dots\dots, \lambda_{n-1}, e)) = 0$，根据投影公式，只需证明

$$g_*\left(\mathcal{Q}^{\lambda_1} \otimes \mathcal{P}(\mathcal{R})\right) = 0.$$

我们可以假设 $\mathcal{P} = \mathbb{L}_\mu$是简单的，因为 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ 是 d的一个分拆。利用包含关系$\mathbb{L}_\mu \hookrightarrow \mathbb{S}_\mu$ 以及 g_* 是左正合的这一事实，我们也可以假设 $\mathcal{P} = \mathbb{S}_\mu$。根据 [BCRV22，定理 9.8，5] 我们有

$$\mathcal{P}(\mathcal{R}) = \mathbb{S}_\mu(\mathcal{R}) = f_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\mu)\right)$$

由投影公式可得

$$g_*\left(\mathcal{Q}^{\lambda_1} \otimes \mathcal{P}(\mathcal{R})\right) = \pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}). \tag{3.1}$$

由于 $d \geq e \geq (n-1)q$，我们有 $\mu_1 \geq q$。由此可知 $\lambda_1 \leq q-1 < \mu_1$，因此权重 $(\lambda_1, \mu_1, \dots, \mu_{n-1})$ 并非主导的。再次利用 [BCRV22，定理 9.8，5] 我们得到 (3.1) 中各层的消失，从而完成证明。□

定理 *3.1* 的证明。 若 $j \geq n-1$，则无需证明，因为不存在大小为 $|\lambda| \leq (n-1-j)q - 1 < 0$ 的分拆。因此，我们可以假设 $0 \leq j \leq n-2$。

如果 $\lambda_1 \leq q-1$ 则所需结论由定理3.2得出。否则，我们有 $\lambda_1 \geq q$且假设 $|\lambda| \leq (n-1-j)q - 1$ 迫使 $j \leq n-3$。利用分解（2.8），我们识别$\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\mathbf{P}}(\mathcal{R})$并考虑分拆 $\mu = (\lambda_2, \dots\dots, \lambda_{n-1})$。由于

$$|\mu| = \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} = |\lambda| - \lambda_1 \leq (n-2-j)q - 1,$$

我们可通过对 n 的归纳法得出

$$R^k f_*\left(\mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \text{ for } k \leq j.$$

我们得到所需 由蕴含关系得出红色消失式（2.9），其中 $y_i = \lambda_i$对于 $i \leq n-1$，且 $y_n = e$。 □

我们的旗簇上上同调消失结果现在可由定理3.1 的特殊情形推出，其中$\mathbf{B} = \mathrm{Spec}(\mathbf{k})$ 且 $\mathcal{E} = \mathbf{k}^n$。它在确立相应的射影空间上的上同调消失方面发挥关键作用，接下来我们将对此加以说明。

((1.4)) 的证明。先考虑特殊情形： $\mathcal{P} = \mathbb{S}_\lambda$ 对于某个分拆 λ。若 $\lambda_n > 0$ 则$\mathbb{S}_\lambda \mathcal{Q} = 0$，因为 $\mathcal{Q}$的秩为 $n-1$。否则，我们可以写成 $\lambda = (\lambda_1, .., \lambda_{n-1})$，并且有

$$H^k\left(\mathbf{P}, \mathbb{S}_\lambda(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right) = H^k\left(Fl_n, \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, e)\right) = 0 \quad \text{for } k \leq j, \tag{3.2}$$

其中第一个等式由 [BCRV22 定理 9.85] 以及投影公式得出，而第二个等式则由（1.2）得出。

我们通过对 1.4）进行归纳法证明（ k，平凡的基础情形为 $k = -1$。不失一般性，只需考虑 $\mathcal{P} = \mathbb{L}_\lambda$ 为简单对象的情形。令 $\mathcal{P}' = \mathbb{S}_\lambda / \mathbb{L}_\lambda$ ，得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{L}_\lambda(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e) \longrightarrow \mathbb{S}_\lambda(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e) \longrightarrow \mathcal{P}'(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e) \longrightarrow 0. \tag{3.3}$$

我们假设 $k \leq j$ ，并对 k 使用归纳法，假设

$$H^{k'}\left(\mathbf{P}, \mathbb{L}_\lambda(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right) = H^{k'}\left(\mathbf{P}, \mathcal{P}'(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right) = 0 \text{ for } k' < k.$$

考虑与（3.3）相关联的上同调长正合列，并利用（3.2），可得$H^k\left(\mathbf{P}\ \mathbb{L}_\lambda(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right) = 0$，从而完成归纳步骤和证明。□

3.2. **上同调作为多项式表示。** 正如 [RV23], 所示，射影空间（更一般地说，旗簇）上等变向量丛的上同调群通常具有多项式表示的结构。在第 5.3 节中，我们将运用以下强化的多项式性结果。

定理 3.3. 设 $\mathcal{Q}$ 表示射影空间上的典范商丛 $\mathbf{P}$ $=\mathbf{P}^{n-1}$ ，如 (1.3) 中所示。若 $\mathcal{P}$ 是次数为 d 的多项式函子，且 $e \geq 1$，那么对每个 $j \geq 0$ ，都存在一个次数为 $d+e-n$ 的多项式表示，使得

$$H^j\left(\mathbf{P}, \mathcal{P}(\mathcal{Q}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(e)\right) = L_{\omega_n} \otimes W_j.$$

特别地，若 $d+e<n$ ，则上述上同调群恒为零。

与上同调消失的情形一样，为证明定理 3.3 ，建立完全旗簇上的相关命题将有所帮助。该命题是对[RV23，定理 3.1], 的稍作修改后得到的，我们的证明也基本沿用了 [RV23]中的论证。

定理 3.4。 假设 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ 满足以下条件

$$\lambda_i > i - n \text{ for all } i = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

那么，对于每个 h $j \geq 0$，存在一个次数为 $|\lambda| - j$ 的多项式表示 W_j，使得

$$H^j\left(Fl_n, \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda)\right) = L_{\omega_n} \otimes W_j.$$

特别地，若 (3.4) 中的条件成立，且 $|\lambda| < n$，则 $H^j(Fl_n, \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda)) = 0$ 对所有 j均成立。

证明。为证明该定理，我们验证：若 L_μ是 $H^j(Fl_n, \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda))$ 的一个简单合成因子，则 $\mu_n \geq 1$。反设 $\mu_n \leq 0$ ，并令 $\chi \in \mathbb{Z}^n_{dom} - \rho$ 和 $w \in \mathfrak{S}_n$ 满足$\lambda = w \bullet \chi$，其中 $\mathfrak{S}_n$ 表示对称群， $\bullet$ 表示权上的点作用，其定义为 $\sigma \bullet \lambda = \sigma(\lambda + \rho) - \rho$，其中 $\rho = (n-1, n-2, .., 0)$。由此可得这些序列

$$(\lambda_1 - 1, \ldots, \lambda_n - n) \quad \text{and} \quad (\chi_1 - 1, \ldots, \chi_n - n)$$

只差一个元素置换。根据 [And80b，定理 1], 可知 $\chi_n \leq \mu_n$。由于$\mu_n \leq 0$，因此 $\chi_n - n \leq -n$ 我们必有

$$\lambda_i - i = \chi_n - n \leq -n \quad \text{for some } i = 1, \ldots, n.$$

这与（3.4）矛盾，由此完成了多项式性的证明。由于 $H^j(Fl_n,\ \mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda)$ 是一个次数为 $|\lambda|$ 的表示，而 L_{ω_n} 的次数为 n，因此 W_j 的次数为 $|\lambda|-n$，所以它只有在 $|\lambda|\geq n$时才可能是非零多项式表示。□

现在我们可以验证定理 3.3，采用的策略与上一节证明射影空间上的上同调消失时所用的策略类似（另见 [RV23，定理 41]的证明）。

定理 *3.3* 的证明。与（1.4）的证明一样，我们首先考虑 $\mathcal{P}=\mathbb{S}_\lambda$ 为 Schur 函子的特殊情形，并且可以假设 $\lambda_n=0$，从而 $\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{Q})\neq 0$。如（3.2）所示，我们有

$$H^j\left(\mathbf{P},\mathbb{S}_\lambda(\mathcal{Q})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right)=H^j\left(Fl_n,\mathcal{O}_{Fl_n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},e)\right).$$

关于 $\mathcal{P}=\mathbb{S}_\lambda$，所需结论现在由定理 3.4 得出，其中令 $\lambda_n=e$：事实上，假设（3.4）适用，因为 $\lambda_i\geq 0>i-n$ 对 $i\leq n-1$成立，且 $\lambda_n=e\geq 1>n-n$。

为了一般地证明该定理，我们可以不失一般性地假设 $\mathcal{P}=\mathbb{L}_\lambda$ 是一个简单多项式函子，并相对于支配序对分拆 λ使用归纳法。我们记 $\mathcal{P}'=\mathbb{S}_\lambda/\mathbb{L}_\lambda$，并考虑相应的短正合列(3.3)。利用先前已确立的舒尔函子情形，我们将 $H^j(\mathbf{P}\ \mathbb{S}_\lambda(\mathcal{Q})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e))=L_{\omega_n}\otimes W_j'$记为某些多项式表示 W_j'。由于 $\mathcal{P}'$ 具有满足 $\mu<\lambda$的合成因子 $\mathbb{L}_\mu$，我们由归纳法得到 $H^j(\mathbf{P}\ \mathcal{P}'(\mathcal{Q})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e))=L_{\omega_n}\otimes W_j''$为某些多项式表示 W_j''。关于 $\mathcal{P}=\mathbb{L}_\lambda$ 的结论由与(3.3)相关联的上同调长正合列得出。□

4. Generic determinantal rings

本节的目标是验证我们主定理的第(1)部分，即描述一般行列式超曲面的对角 F-阈值。事实上，我们更一般地计算由一般 $m\times n$ 矩阵的极大子式所定义的行列式环的对角 F-阈值。

定理 4.1. 设 $\mathbf{k}$ 表示特征为 $p>0$ 的域，并设 $S=\mathbf{k}[x_{ij}]$ 表示一般 $m\times n$ 矩阵的元素 (x_{ij}) 上的多项式代数，其中 $m\geq n\geq 1$。若我们令

$$I_n=\langle n\times n\ minors\ of\ (x_{ij})\rangle,$$

并令 $R=S/I_n$ 为相应的行列式环，则 R 的 F-阈值由下式给出

$$c(R)=m(n-1).$$

证明. 我们记 $V=\mathbf{k}^n$、$W=\mathbf{k}^m$，并将多项式环 $S=\mathbf{k}[x_{ij}]$ 等同于对称代数 对称幂$(V\otimes W)$。我们对某个 $s\geq 0$ 令 $q=p^s$，并研究该映射的余核

$$F^q(V\otimes W)\otimes R_{d-q}\longrightarrow R_d, \tag{4.1}$$

以刻画它何时为零。其想法是从上同调角度实现映射（4.1）。我们记 $\mathbf{P}$ 为参数化 V 中直线的射影空间，并考虑典范正合列

$$0\longrightarrow\mathcal{R}\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\longrightarrow\mathcal{Q}\longrightarrow 0, \tag{4.2}$$

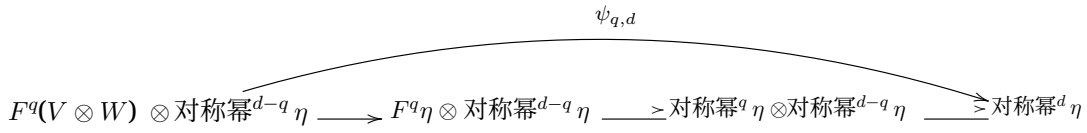
其中 $\mathcal{Q}$ 是泛秩 $n-1$ 商丛，而 $\mathcal{R}=\mathcal{O}(-1)$ 是泛秩 1 子丛。若将典范正合列与 W 作张量积，则得到

$$0\longrightarrow\xi\longrightarrow(V\otimes W)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\longrightarrow\eta\longrightarrow 0, \tag{4.3}$$

其中 $\xi=\mathcal{R}\otimes\ W\simeq\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)^{\oplus m}$ 和 $\eta=\mathcal{Q}\otimes W\simeq\mathcal{Q}^{\oplus m}$。我们有以下自然映射

$$F^q(V\otimes W)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\longrightarrow F^q\eta\subset\operatorname{Sym}^q\eta,\quad \operatorname{Sym}^q\eta\otimes\operatorname{Sym}^{d-q}\eta\longrightarrow\operatorname{Sym}^d\eta.$$

此外，我们有 $R_d = H^0(\mathbf{P}$，对称幂$^d\,\eta)$（例如参见 [BCRV22，引理 10.8。4]），且映射 (4.1) 是由自然态射的复合 $\psi_{q,\ d}$ 在整体截面上诱导的映射



ψ_q的余核，$_d$ 是截断幂 T_q 对称幂$^d\,\eta$，当且仅当以下情况为零

$$d > (q-1)\cdot \operatorname{rank}(\eta) = (q-1)\cdot m\cdot (n-1). \tag{4.4}$$

为了证明 $H^0(\mathbf{P}\psi_{q,d})$ 的满射性，我们考虑 Koszul复形 $\mathcal{K}^\bullet$（使用上同调记号，并用 $\mathcal{K}^{-i}$ 代替 $\mathcal{K}_i$），其分量为

$$\mathcal{K}^{-i} = \bigwedge^i (F^q(V\otimes W))\otimes \operatorname{Sym}^{d-iq}\eta \quad \text{for } i\geq 0.$$

这一约定使我们可以扩展映射 $\psi_{q,d}:\mathcal{K}^{-1}\longrightarrow \mathcal{K}^0$。层 $\mathcal{K}^{-i}$ 的高阶上同调消失（例如参见 [BCRV22，引理 10.8。4]），因此 $\mathcal{K}^\bullet$的超上同调可由整体截面复形 $H^0\,(\mathbf{P}\ \mathcal{K}^\bullet$计算。特别地，我们得到

$$\operatorname{coker} H^0(\mathbf{P},\psi_{q,d}) = \mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet). \tag{4.5}$$

令 $\mathcal{H}^{-i}$ 为 $\mathcal{K}^\bullet$ 在次数 $-i$ 上的上同调，并考虑超上同调谱序列

$$E_2^{-i,j} = H^j\left(\mathbf{P},\mathcal{H}^{-i}\right) \Longrightarrow \mathbb{H}^{j-i}\left(\mathcal{K}^\bullet\right).$$

条件（4.4) 意味着 $E^0{}_{,2}{}^0 = 0$，因此，要证明消失 $\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet) = 0$，只需证明

$$H^i(\mathbf{P},\mathcal{H}^{-i}) = 0 \quad \text{for } i\geq 1. \tag{4.6}$$

此外，利用（4.3）和记号（2.7），我们得到对于每个 i，都有

$$\mathcal{H}^{-i} = F^q\left(\bigwedge^i \xi\right)\otimes T_q\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta = \bigoplus (T_q\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta)\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-iq),$$

其中右侧有 $\binom{m}{i}$ 个同构的直和项，它们由 $F^q\left(\bigwedge^i W\right)$的某个基的选择来索引 $N = (q-1)\cdot$秩 $(\eta) = (q-1)\cdot m\cdot (n-1)$，于是我们得到一个完美配对（见 [GR24，第 2 节2]）

$$T_q\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta\times T_q\operatorname{Sym}^{N-d+iq}\eta\longrightarrow \det(\eta)^{q-1}\simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}}((q-1)m).$$

由 Serre 对偶，我们得到

$$\begin{aligned} H^i\left(\mathbf{P},\mathcal{H}^{-i}\right)^\vee &= \bigoplus H^{n-1-i}\left(\mathbf{P},T_q\operatorname{Sym}^{N-d+iq}\eta\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(iq-(q-1)m-n)\right)\\ &= H^{n-1-i}\left(\mathbf{P},\mathcal{P}(\mathcal{Q})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{P}$是一个次数为 $N-d+iq<iq$的多项式函子（利用（4.4））， 而 $e=(q-1)\ m+n-iq$。若令 $j=n-1-i$ 则有

$$e-(1+j)q = (q-1)\cdot m+n-iq-(n-i)\cdot q = (m-n)\cdot(q-1)\geq 0.$$

因此，我们可以应用（1.4）来推出（4.7）中的上同调群消失。由此可得，映射（4.1）对于 $d>N$是满射的，因此 $v_R(q)\leq N$。除以 q 得到

$$\frac{v_R(q)}{q}\leq \frac{(q-1)\cdot m\cdot(n-1)}{q}.$$

取极限，当 $q\longrightarrow\infty$给出了所需的界 $c(R)\leq m\cdot(n-1)$，等式由此成立。 □

5. Generic symmetric determinant

本节的目标是证明主定理的第 (2) 部分，计算一般对称矩阵的行列式的对角F-阈值。我们证明如下结论。

定理 5.1。 设 $\mathbf{k}$ 表示一个特征为 $p>0$ 的域，并设 $S=\mathbf{k}[x_{ij}]$ 表示由一般对称 $n\times n$ 矩阵的各项(x_{ij})生成的多项式代数。若以 $f=\det(x_{ij})$ 表示对称行列式，且 $R=S/\langle f\rangle$，则 R 的对角 F-阈值为

$$c(R)=\frac{n^2-1}{2}.$$

为证明上界 $c(R)\le(n^2-1)/2$，我们采用一般矩阵情形中的策略：首先在上同调意义下实现 R 的分次分量，然后根据第 3 节的上同调消失性结果，得到 $v_R(q)$ 的上界。这将在第 5.1 节中完成。按照第 2.1 节中的讨论，我们得到 $-a(R)=\binom{n+1}{2}-n=\binom{n}{2}$，这表明下界 (2.1) 不再是最优的。在第 5.2 节中，我们利用对偶理论，在特征 2 下为 $v_R(q)$ 找到一个最优下界。在特征 $p>2$ 下，我们则在第 5.3 节中基于表示论论证并仔细分析上同调，得到该下界。

5.1. 上界。

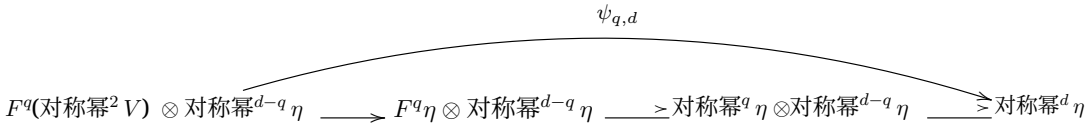
设 $V=\mathbf{k}^n$ 并注意到 (4.2) 给出了一个短正合列

$$0\longrightarrow\xi\longrightarrow\operatorname{Sym}^2V\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\longrightarrow\eta\longrightarrow 0, \tag{5.1}$$

其中 $\xi=V\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-1)$ 且 $\eta=$对称幂$^2\mathcal{Q}$。根据 [Wey03第 6 节，3], 我们可以将 R的分次分量描述为 $R_d=H^0(\mathbf{P},$对称幂$^d\eta)$。因此，求出上界 $d>v_R(q)$（对$q=p^s$）等价于证明下面这个自然乘法映射是满射

$$F^q(\operatorname{Sym}^2V)\otimes R_{d-q}\longrightarrow R_d. \tag{5.2}$$

与一般矩阵的情形一样，我们将 (5.2) 实现为由以下复合映射在整体截面上诱导的映射



注意到

$$\operatorname{rank}(\eta)=\binom{n}{2}\quad\text{and}\quad\det(\eta)=\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n).$$

特别地，对于 $d>N=(q-1)\binom{n}{2}$，我们有 T_q对称幂$^d\eta=\operatorname{coker}(\psi_{q,\,d})=0$。我们考虑由态射 F^q(对称幂^2V) $\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}\longrightarrow$对称幂$^q\eta$诱导的 Koszul复形 $\mathcal{K}^\bullet$，其分量为

$$\mathcal{K}^{-i}=\bigwedge^i(F^q(\operatorname{Sym}^2V))\otimes\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta\quad\text{for } i\ge 0, \tag{5.3}$$

以及$\psi_{q,\,d}$ 是第一个微分 $\mathcal{K}^{-1}\longrightarrow\mathcal{K}^0$。由 [Bof91] 可知，每个对称幂$^m\eta$ 都有一个滤过，其合成因子为 $\mathbb{S}_{2\lambda}\mathcal{Q}$ 其中 λ 是 m的一个分拆，且每个这样的因子 $\mathbb{S}_{2\lambda}\mathcal{Q}$都没有高阶上同调（[BCRV22，推论 9.8。6]）。因此，每个 $\mathcal{K}^{-i}$ 都没有高阶上同调，故（4.5）的类比成立。$\mathcal{K}^\bullet$ 的同调层由下式计算

$$\mathcal{H}^{-i}=F^q\left(\bigwedge^i\xi\right)\otimes T_q\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta\simeq\bigoplus(T_q\operatorname{Sym}^{d-iq}\eta)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-iq)\quad\text{for all } i,$$

其中各直和项由 $F^q\left(\bigwedge^i V\right)$的一组基进行指标化。按照（4.7）中的方法使用 Serre 对偶，我们得到

$$H^i\left(\mathbf{P},\mathcal{H}^{-i}\right)^\vee \simeq \bigoplus H^{n-1-i}\left(\mathbf{P},T_q\operatorname{Sym}^{N-d+iq}\eta\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(iq-nq)\right)=H^{n-1-i}\left(\mathbf{P},\mathcal{P}(\mathcal{Q})\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)\right), \tag{5.4}$$

其中 $\mathcal{P}$ 是次数为 2（$N-d+iq$）的多项式函子，且 $e=$（$n-i$）q。如果我们取

$$d=N+\frac{q(n-1)}{2}+1=\frac{q(n^2-1)}{2}-\binom{n}{2}+1,$$

那么可得

$$2(N-d+iq)=(2i-n+1)q-2<iq \text{ for all } i\le n-1.$$

若 $j=n-1-i$，则 $e=(1+j)q$，因此可以应用（1.4）推出（5.4）中的上同调群消失。由此可得余核 $H^0(\mathbf{P}\psi_{q,\ d)}=\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet)=0$，因此（5.2）是满射，并且

$$v_R(q)\le d-1=q\cdot\frac{n^2-1}{2}-\binom{n}{2}. \tag{5.5}$$

除以 q 并令 $q\longrightarrow\infty$ 趋于极限，我们得出 c（R）$\le{}^{n^2-1}_{2}$，如所求。——

5.2. **特征 $p=2$ 中的下界**。令 $\mathfrak{m}=\langle x_{ij}\rangle$ 表示极大齐次理想，并首先证明对称行列式 $f=$det(x_{ij}) 满足

$$f\equiv x_{11}\cdots x_{nn}\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}^{[2]}) \tag{5.6}$$

事实上，我们注意到对称性 $x_{ij}=x_{ji}$ 意味着，对于每个置换 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，我们都有

$$x_{1\sigma(1)}\cdots x_{i\sigma(i)}\cdots x_{n\sigma(n)}=x_{\sigma(1)1}\cdots x_{\sigma(i)i}\cdots x_{\sigma(n)n}=x_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots x_{i\sigma^{-1}(i)}\cdots x_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

由于 char(k) $=2$，由行列式公式可知

$$f=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{1\sigma(1)}\cdots x_{i\sigma(i)}\cdots x_{n\sigma(n)}$$

对应于 σ 和 σ^{-1} 的项在 $\sigma\neq\sigma^{-1}$时相互抵消。其余项对应于 $\mathfrak{S}_n$中的对合。若 σ是恒等置换，则对应项为 $x_{11}\cdots x_{nn}$。否则，存在 $i\neq j$ 使得 $\sigma(i)=j$ 且 $\sigma(j)=i$，并且对应项可被 x_{ij}^2 整除，从而证明了 (5.6)。

由 (5.6) 可知 $f\cdot x_{11}\in\mathfrak{m}^{[2]}$。这意味着对每个 $q=2^s,\ \ s\ge1$，我们都有

$$g=f^{q/2-1}\cdot x_{11}^{q/2}\in(\mathfrak{m}^{[q]}:f).$$

此外，将 g 按单项式基展开，可得 $g\notin\mathfrak{m}^{[q]}$，因为其支集包含

$$x_{11}^{q-1}x_{22}^{q/2-1}\cdots\ x_{nn}^{q/2-1}\notin\mathfrak{m}^{[q]}.$$

根据第2.1节中的记号，我们将 g 视为 $(0:_S f)$ 中的非零元素，因此由 (2.2) 可得

$$v_R(q)\ge(q-1)\binom{n+1}{2}-\deg(g)=(q-1)\binom{n+1}{2}-n(q/2-1)-q/2=q\cdot\frac{n^2-1}{2}-\binom{n}{2}. \tag{5.7}$$

两边除以 q a 并令 $q\longrightarrow\infty$ 取极限，即得所需的下界 $c(R)\ge{}^{n^2-1}_{2}$ ——.

注记 5.2. 将 (5.7) 与 (5.5) 结合可得 $v_R(q)=q\cdot{}^{n^2-1}_{2}-\binom{n}{2}$ 在特征 $p=2$.

5.3. **通过上同调与表示论得到的下界。** 现在假设 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = p > 2$，令 $q = p^s$ 并设 $d = (n^2-1)\cdot(q-1)/2$。我们的目标是证明 $v_R(q) \geq d$。为此，我们构造 Koszul复形 (5.3)，并考虑相应的超上同调谱序列

$$E_2^{-i,j} = H^j\left(\mathbf{P}, \mathcal{H}^{-i}\right) \Longrightarrow \mathbb{H}^{j-i}\left(\mathcal{K}^\bullet\right),$$

其中第 $r \geq 2$ 页上的微分记作 $d^{-i,\,j}_r\colon E^{-i,\,j}_r \longrightarrow E^{-i-r+1,\,j+r}_r$。利用第 5.1 节中对称矩阵情形下的（4.5）的类似结果，可知要证明$v_R(q) \geq d$，我们需要验证 $\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet) \neq 0$。具体分以下步骤完成：

（1）我们确定一个出现在 $E^{-(n-1),\,n-1}_2$ 中的不可约表示 L。（2）我们证明，对于任意 $i \leq n-2$，L 都不会出现在 $E^{-i,\,i-1}_2$ 中。（3）涉及 $E^{-(n-1),\,n-1}_r$的唯一可能非平凡微分，是源为$E^{-i,\,(i-1)}_r$的映射（当 $r = n-i$ 时），由此证明对于所有 r，L 都出现在 $E^{-(n-1),\,n-1}_r$ 中。特别地$E^{-(n-1),\,n-1}_\infty \neq 0$，并且由于它是 $\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet)$ 的子商，我们得出 $\mathbb{H}^0(\mathcal{K}^\bullet) \neq 0$。

引理 5.3。 如果 $q = p^s > 1$、$N = (q-1)$秩为（η），且 $d = (n^2-1)\cdot(q-1)/2$，则存在一个自然嵌入

$$(\det \mathcal{Q})^{\otimes(q+1)} \hookrightarrow T_q \operatorname{Sym}^{N-d+(n-1)q}\eta.$$

证明。由 [Bof91] 可知，存在一个自然嵌入 ι：$(\det \mathcal{Q})^{\otimes 2} = \mathbb{S}_{(2^{n-1})}\mathcal{Q} \hookrightarrow$对称幂$^{n-1}\eta$：在一个 $\mathcal{Q}$ 为秩（$n-1$）的自由模的局部图表中，我们可以选择相应的局部基 $\{y_{ij}:$ $1 \leq i \leq j \leq n-1\}$ 作为 $\eta =$对称幂$^2\,\mathcal{Q}$的基，随后 ι 的像由 $\det(y_{ij})$ 局部张成。将行列式提升到幂（$q+1$）/2，并考虑到截断幂的自然投影，我们得到一个映射

$$(\det \mathcal{Q})^{\otimes(q+1)} \longrightarrow \operatorname{Sym}^{(n-1)(q+1)/2}\eta \longrightarrow T_q \operatorname{Sym}^{(n-1)(q+1)/2}\eta. \tag{5.8}$$

由于（$q+1$）/2 < q，我们有

$$\det(y_{ij})^{(q+1)/2} = y_{11}^{(q+1)/2}\cdots\, y_{n-1,n-1}^{(q+1)/2} + \cdots \notin \langle y_{ij}^q \rangle,$$

因此（5.8）是一个包含。结论由 $N-d+(n-1)q = (n-1)(q+1)/2$得出。 □

为证明步骤 (1)，我们先考虑自然同构

$$\begin{aligned} E_2^{-(n-1),n-1} &= F^q\left(\bigwedge^{n-1} V\right) \otimes H^{n-1}\left(\mathbf{P}, (T_q \operatorname{Sym}^{d-(n-1)q}\eta) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-(n-1)q)\right) \\ &= F^q\left(\bigwedge^{n-1} V\right) \otimes H^0\left(\mathbf{P}, (T_q \operatorname{Sym}^{N-d+(n-1)q}\eta) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-q)\right)^\vee \otimes (\det V)^{(q-1)n+1}. \end{aligned}$$

即 $H^0\left(\mathbf{P}, (T_q$对称幂$^{N-d+(n-1)q}\eta) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-q)\right)$ 包含为子表示

引理5.3 蕴含 n

$$H^0\left(\mathbf{P}, (\det \mathcal{Q})^{\otimes(q+1)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-q)\right) = H^0\left(Fl_n, \mathcal{O}_{Fl_n}(q+1,\ldots,q+1,q)\right) = (\det V)^{q+1} \otimes V^\vee$$

这可由 [BCRV22，定理 9.8.5] 得出。这意味着 $E^{-(n-1),n-1}_2$ 包含

$$L = F^q\left(\bigwedge^{n-1} V\right) \otimes V \otimes (\det V)^{qn-q-n} = L_\mu, \text{ where } \mu = \omega_1 + q\omega_{n-1} + (qn-q-n)\omega_n. \tag{5.9}$$

接下来我们验证步骤 (2)，这等价于证明对于 $i \leq n-2$，表示

$$L^\vee = F^q V \otimes \bigwedge^{n-1} V \otimes (\det V)^{-qn+n-1}$$

不会出现在

$$\begin{aligned}\left(E_2^{-i,i-1}\right)^\vee &= F^q\left(\bigwedge^i V\right)^\vee \otimes H^i\left(\mathbf{P}, (T_q \operatorname{Sym}^{d-iq}\eta)\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-iq)\right)^\vee \\ &= F^q\left(\bigwedge^{n-i} V\right)\otimes H^{n-1-i}\left(\mathbf{P}, (T_q \operatorname{Sym}^{N-d+iq}\eta)\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-(n-i)q)\right)\otimes (\det V)^{-qn+n-1-q}\end{aligned}$$

由于 $(n-i)q \geq 1$，且 $\det(V) = L_{\omega_n}$，由定理 3.3 可知

$$H^{n-1-i}\left(\mathbf{P}, (T_q \operatorname{Sym}^{N-d+iq}\eta)\otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-(n-i)q)\right) = W\otimes \det(V)$$

对于某个多项式表示 W。因此，为了完成步骤 (2)，我们必须验证

$$F^qV\otimes \bigwedge^{n-1} V\otimes (\det V)^{q-1} = F^qV\otimes L_{\omega_{n-1}+(q-1)\omega_n} = L_{q\omega_1}\otimes L_{\omega_{n-1}+(q-1)\omega_n}$$

不会出现在任何张量积 $F^q\left(\bigwedge^{n-i}V\right)\otimes W = L_{q\omega_{n-i}}\otimes W$ 中，其中 $i \leq n-2$ 且 W 是一个多项式表示。由于 $|\omega_{n-i}| = n-i > 1 = |\omega_1|$ 且 $\omega_{n-1}+(q-1)\omega_n$ 是 q-受限的，由引理 2.1即可得出此结论。

由于步骤 (3) 可由 (1)、(2) 推出，因此我们得到 $v_R(q) \geq d$。我们除以 q 并令 $q \longrightarrow \infty$ 趋于极限，得到 $c(R) \geq (n^2-1)/2$，从而完成定理 5.1的证明。

6. Generic Pfaffian

本节的目标是快速推导偶数阶一般斜对称矩阵的普法夫式的对角 F-阈值。我们证明如下结论。

定理 6.1. 设$\mathbf{k}$ 是特征为 $p > 0$ 的域，并设 $S = \mathbf{k}[x_{ij}]$ 是由一般斜对称(x_{ij}) $n\times n$ 矩阵的元素构成的多项式代数，其中 $n = 2m$ 为偶数。设$f = \operatorname{Pf}(x_{ij})$ 为(x_{ij}) 的普法夫式，且 $R = S/\langle f\rangle$，则 R 的对角 F-阈值为

$$c(R) = \frac{n^2-2n}{2}.$$

证明。 为了从下方估计对角 F-阈值，我们使用一般估计 $c(R) \geq -a(R)$：沿用第 2.1 节的记号，有 $r = \dim(S) = \binom{n}{2}$ 且 $k = \deg(f) = n/2$，因此

$$c(R) \overset{(2.1)}{\geq} \binom{n}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2-2n}{2}.$$

最后，我们需要证明这个上界。

$$c(R) \leq \frac{n^2-2n}{2} = 2(m^2-m). \tag{6.1}$$

我们通过将超曲面 $f = \operatorname{Pf}(x_{ij})$ 退化为一般 $m\times m$矩阵的行列式，并利用第 4节的结果来证明这一点。为此，我们对 $t \in \mathbf{k}$

$$x_{ij}(t) = \begin{cases} tx_{ij} & \text{if } 1\leq i,j\leq m \text{ or } m+1\leq i,j\leq n,\\ x_{ij} & \text{otherwise.}\end{cases}$$

令 $f_t = \operatorname{Pf}(x_{ij}(t))$ 和 ${}^tR = S/\langle f_t\rangle$。对于 $t\neq 0$，乘以 t 是一个可逆变换，因此作为分次 $\mathbf{k}$-代数，${}^tR \simeq R$、$c({}^tR) = c(R)$ 和 $v_q({}^tR) = v_q(R)$，其中 $t\neq 0$ 和 $q = p^s$。注意，对于给定的 d，条件 $v_q({}^tR) < d$ 等价于线性映射的满射性

$$\left(S/\mathfrak{m}^{[q]}\right)_{d-m} \xrightarrow{\cdot f_t} \left(S/\mathfrak{m}^{[q]}\right)_d$$

并且，由于半连续性，这个变换的秩在 $t=0$ 处只能下降。这意味着

$$v_q(R) \le v_q({}^0R), \quad \text{and therefore} \quad c(R) \le c({}^0R).$$

现在只需验证界（6.1）对 $c({}^0R)$ 成立。矩阵（$x_{ij}(0)$）具有分块结构

$$(x_{ij}(0)) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{where} \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,m+1} & x_{1,m+2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,m+1} & x_{2,m+2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m,m+1} & x_{m,m+2} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix}.$$

我们有， X 是一个由变量构成的通用 $m \times m$ 矩阵，并且

$$f_0 = \mathrm{Pf}(x_{ij}(0)) = \det(X).$$

于是，我们可以根据变量是否出现在 $x_{ij}(0)$ 中，对 S 中的变量进行相应的分拆，得到

$$S = S_1 \otimes_{\mathbf{k}} S_2,$$

其中 $S_1 = \mathbf{k}[x_{ij} \colon 1 \le i, \ j \le m \text{ 或 } m+1 \le i, \ j \le 2m]$, $S_2 = \mathbf{k}[x_{ij} \colon 1 \le i \le m \text{ 且 } m+1 \le j \le n]$。由于 $f_0 = \det(X) \in S_2$，因此可得

$${}^0R = S_1 \otimes_{\mathbf{k}} R_2, \text{ where } R_2 = S_2/\det(X).$$

底（socle）次数为 关于基域$\mathbf{k}$上的张量积具有可加性，因此可得 s

$$v_q({}^0R) = v_q(S_1) + v_q(R_2) \text{ and therefore } c({}^0R) = c(S_1) + c(R_2).$$

由于 S_1 是一个维数为 $m(m-1)$ 的多项式环，我们得到 $c(S_1) = m(m-1)$，并且由于 R_2 是一个一般行列式环，由定理 4.1 可知 $c(R_2) = m(m-1)$。由此可得

$$c(R) \le c({}^0R) = c(S_1) + c(R_2) = 2(m^2 - m),$$

这就是所需的不等式（6.1），从而完成定理6.1的证明。 □

Acknowledgements

我们感谢 Francesco Russo 和 2023 年 6 月在卡塔尼亚举办的 P.R.A.G.MAT.I.C. 研究班的组织者，让我们有机会相识。作者还感谢 INDAM 提供支持。我们感谢 Luis Nu˜nez-Betancourt 提出这个问题。使用 Macaulay2 [GS]进行的实验带来了许多宝贵的见解。Raicu 感谢美国国家科学基金会 DMS-2302341 号资助的支持。Singh 感谢国家高等数学委员会、原子能部、印度政府的支持（资助编号：02011/24/2024/NBHM(R.P)/R&D II/9826）。

References

[并79] Henning Haahr Andersen, *The first cohomology group of a line bundle on G/B*, 《数学发明》**51** (1979), 第 3 期，287–296 页。[And80a] , *The Frobenius morphism on the cohomology of homogeneous vector bundles on G/B*, 《数学年刊》~~(2)112~~ (1980), 第 1 期，113–121 页。[And80b] , *The strong linkage principle*, 《纯粹与应用数学杂志》**315** (1980), 53–59 页。[BMRS25] Barbara Betti、Alessio Moscariello、Francesco Romeo 和 Jyoti Singh, *F-threshold of determinantal rings* **53** 2025 6, 2278 2291 , 《代数通讯》( ), 第 – 期。[Bof91] Giandomenico Boffi, *On some plethysms*, 《数学进展》**89** (1991), 第 2 期，107–126 页。[Bot57] Raoul Bott, *Homogeneous vector bundles*, 《数学年刊》(2)**66** (1957), 203–248 页。[BCRV22] Winfried Bruns、Aldo Conca、Claudiu Raicu 和 Matteo Varbaro, *Determinants Gröbner bases and cohomology* , , Springer 数学专著，Springer，Cham，2022。[BH93] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog, *Cohen-Macaulay rings*，剑桥高等数学研究丛书，第 39 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。[DCEP80] C. De Concini、David Eisenbud 和 C. Procesi, *Young diagrams and determinantal varieties*, 《数学发明》**56** (1980)，第 2 期，129–165 页。

[DSNB18] Alessandro De Stefani 和 Luis N´u˜nez-Betancourt, *F-thresholds of graded rings*, 名古屋数学 . J. 229（2018）, 141–168。[DSNBP18] Alessandro De Stefani、Luis N´˜ ´ *On the existence of F-thresholds and related limits* **370** 2018 9, 6629 6650

unez-Betancourt 与 Felipe Perez, , 《美国数学会汇刊》（）, 第 – 期。[FS97] Eric M. Friedlander 与 Andrei Suslin, *Cohomology of finite group schemes over a field*, 《数学发明》127（1997）, 第2期, 209–270。[GR24] Zhao Gao 与 Claudiu Raicu, *Cohomology of line bundles on the incidence correspondence*, 《美国数学会汇刊》B辑 11（2024）, 64–97。[GS] Daniel R. Grayson 与 Michael E. Stillman, *Macaulay 2 a software system for research in algebraic* , , 可于 *geometry* 2 http://www.math.uiuc.edu/Macaulay / 获取。[Gre80] James A. Green, *Polynomial representations of* GL_n, 数学讲义, 第830卷, Springer-Verlag, 柏林-纽约, 1980。[HMTW08] Craig Huneke、Mircea Mustaţ˘a、Shunsuke Takagi 与 Kei-ichi Watanabe, *F-thresholds, tight closure, integral closure and multiplicity bounds* **57** 2008 463 483 , , 《密歇根数学杂志》（）, –。纪念 Melvin Hochster 的特刊。[Jan03] Jens Carsten Jantzen, *Representations of algebraic groups*, 第2版, 数学综述与专著, 第107卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2003。[Las78] Alain Lascoux, *Syzygies des variétés déterminantales*, 《数学进展》30（1978）, 第3期, 202–237（法文）。[MTW05] Mircea Mustat˘a、Shunsuke Takagi 与 Kei-ichi Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials*, 欧洲数学家大会, 欧洲数学会, Z¨urich, 2005, 第341–364页。[RV23] Claudiu Raicu 与 Keller VandeBogert, *Stable sheaf cohomology on flag varieties*, arXiv 2306.14282 (2023)。[Ser95] 让-皮埃尔·塞尔, *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts (d'après Armand Borel et André Weil)* ´ 2, 1995, , 布尔巴基讨论班, 卷, 法国数学会, 巴黎, 第447–454页, 报告编号100（法文）。[Stacks] Stacks Project 作者, *Stacks Project*, https://stacks.math.columbia.edu/。[Wey03] Jerzy Weyman, *Cohomology of vector bundles and syzygies*, 剑桥数学丛书, 第149卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2003。

Otto-von-Guericke-University Magdeburg, Universitätsplatz 2, Magdeburg, Germany
Email address: barbara.betti@ovgu.de

Department of Mathematics, University of Notre Dame, 255 Hurley, Notre Dame, IN 46556
Institute of Mathematics "Simion Stoilow" of the Romanian Academy*Email address*: craicu@nd.edu

University of Cassino and Southern Lazio, DIEI, Department of Electrical and Information Engineering*Email address*: francesco.romeo@unicas.itDepartment of Mathematics, Visvesvaraya National Institute of Technology, Nagpur, India*Email address*: jyotisingh@mth.vnit.ac.in