arXiv:2602.05773v1 [cs.DS] 5 Feb 2026

对称旅行商问题与约束群斯坦纳树问题的结构等价性

Yılmaz Arslanoğlu

独立研究者，德国汉堡

摘要

我们简要介绍对称旅行商问题与定义在单纯关联图上的约束群斯坦纳树问题（cGSTP）之间的结构等价性。给定城市集合 V 上的完全加权图，我们构造三角形与边之间的二部关联图。选取一个可容许且类似圆盘的三角形集合，会诱导出唯一的边界圈。在满足全局连通性和局部正则性约束的条件下，最大化 cGSTP 的净权重，与最小化 TSP 环游长度完全等价。

关键词：旅行商问题，斯坦纳树，计算拓扑，单纯复形，欧拉示性数

1. 引言与几何视角

设 V 为由 $n \geq 3$ 个城市组成的集合， $G = (V, E)$ 为边长对称的完全无向图 $L_e > 0$。对称旅行商问题（*TSP*）要求在 V [1] 上求一条长度最短的哈密顿圈。

本文将说明对称 TSP 与约束群斯坦纳树问题（GSTP）之间存在精确的结构等价性 [2]。该构造运用了基础组合拓扑 [3]，将回路视为二维单纯曲面的边界，而非一维圈。选取一组构成拓扑圆盘的三角形后，两个选定三角形共享的边（内部边）会相互抵消，留下唯一的边界圈。图1展示了一个小型对称实例中的同一曲面—边界视角：一组连通的三角形选择构成一个抽象圆盘，其诱导边界是一个单独的圈（即回路）。

2. 约束群斯坦纳树问题的等价性

我们在二部关联图 $B = (U \cup W,\ A)$ 上定义约束群斯坦纳树问题（参见图2）。 $U = \binom{V}{3}$是三角形节点（圆形）的集合， $W = E$ 是原始边节点（方形）的集合，而$(t,\ e) \in A$ 表示关联。对于每个城市 $v \in V$，我们定义一个群 $U(v) = \{t \in U :\ v \in t\}$。

三角形节点充当群终端（成本为 0），而边节点和关联的权重经过设置，以确保边界抵消：

1. 每个边节点 $e \in W$ 的成本为 $c(e) = 2L_e$。 2. 每条关联弧 $(t,\ e) \in A$ 的收益为 $p(t,\ e) = L_e$。

电子邮件地址：yilmaz@hoketo.com(Yılmaz Arslanoğlu，ORCID：0009-0004-3236-9811)

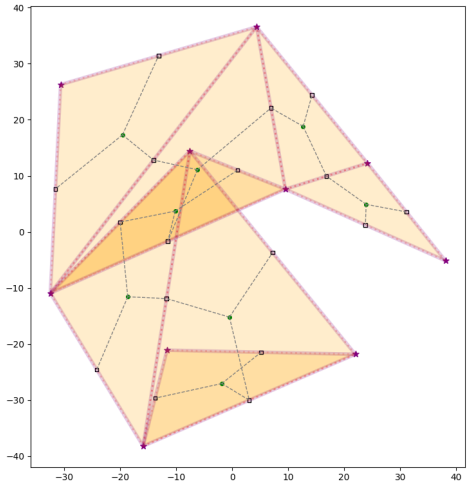


图 1：一个小型对称实例（$n = 10$），以任意平面嵌入方式展示以便观察。由选定三角形（阴影部分）构成的连通集形成一个抽象圆盘；内部边相互抵消，诱导边界则是一个简单圈（即回路）。

令 x_t，y_e，$z_{t,\,e} \in \{0,1\}$ 分别表示三角形、边和关联的选择。我们选择一个“可容许”子图 B'，以最大化净权重：

$$W(B') := \sum_{(t,e)\in A} z_{t,e} L_e \; - \sum_{e\in W} y_e 2L_e.$$

可容许性由以下约束定义：

(C1) 关联联结（终端节点度）。每个活动三角形都必须使用其全部三条边：

$$z_{t,e} \le y_e$$
$$z_{t,e} \le x_t$$
$$\sum_{e\subset t} z_{t,e} = 3x_t$$

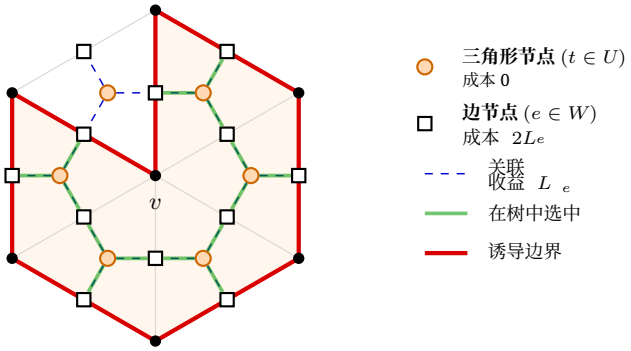
(C2) 流形正则性（斯坦纳节点度）。每条原始边至多关联两个选定三角形（图 3A）：

$$y_e \le \sum_{t\supset e} z_{t,e} \le 2y_e$$

(C3) 全局欧拉计数（节点基数）。这些数值与具有 n 个顶点的抽象三角剖分圆盘的基数相符：

$$\sum x_t = n - 2$$
$$\sum y_e = 2n - 3$$

(C4) 全局连通性（树）。活动子图 B' 必须是一棵树。



Figu图 2：关联图结构。选择一组三角形，使其构成一个拓扑圆盘（阴影部分），会导致内部边上的成本相互抵消，剩下的净成本对应于诱导边界回路（红色）。



图 3：禁忌异常：（A）与 > 2 个三角形关联的边；（B）不连通的顶点链。

(C5) 局部连通性（*Steiner* 群）。对于每个城市 v，活跃局部关联子图H_v 必须满足欧拉示性数：

$$\chi(H_v) = |V(H_v)| - |E(H_v)| = 1$$

这里， H_v 是由选定三角形以及与顶点 B' 关联的边所诱导的子图 v （参见图 *2* 中 v 的星）。鉴于全局树约束，这会强制顶点链成为一条简单路径（排除图 3B 中的蝴蝶结等情况，以及循环顶点链；若图 2中的局部扇闭合，就会出现循环顶点链）。因此，也隐式地保证了每个群至少有一个终端。

3. 理论性质

令 $K = \{t \in U : x_t = 1\}$ 为选定三角形，并定义边界边集

$$\partial K = \{e \in E : \sum_{t \supset e} z_{t,e} = 1\}.$$

引理 1 （组合边界恒等式）。对于任何满足 *(C1)–(C5)* 的选择，

$$-W(B') = \sum_{e \in \partial K} L_e.$$

证明。 如果 e 关联两个选定三角形，则其贡献为 $2L_e$ 收益，同时产生 $2L_e$ 成本，净值为 0。如果 e 恰好关联一个选定三角形，则其贡献为 L_e 收益，同时产生$2L_e$ 成本，净值为 $-L_e$。对所有边求和即可得证。 □

引理 2 （可靠性）。 任一可行解都定义一个抽象三角剖分圆盘，其边界是单个简单哈密顿圈。

证明。 由 (C4)，选定三角形构成一个连通复形。约束 (C2) 和 (C5) 排除了非流形边和不连通的顶点链接，因此该复形是带边界的单纯曲面。由 (C3)，其欧拉示性数为 $\chi = 1$，故它是一个圆盘。圆盘恰有一个边界分支，因此其边界是单个简单圈。此外，(C5) 表明每个顶点都位于边界上，故该圈是哈密顿圈。 □

定理 3 （等价性）。$\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSP}} = -\mathrm{OPT}_{\mathrm{cGSTP}}$。

证明。**可靠性**由引理 2 和引理 1 得出。

完备性。令 $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 为任意一个哈密顿圈。选择 $n-2$ 个三角形

$$K := \big\{\{v_1, v_i, v_{i+1}\} : i = 2, \ldots, n-1\big\}.$$

于是 $\partial K = C$。令 $x_t = 1$ 对应于 $t \in K$， $y_e = 1$ 对应于 K所使用的所有边，并令 $z_{t,e} = 1$ 对应于所有关联 $e \subset t$，即可得到满足 (C1)–(C5) 的可行解。根据引理 1，其目标值等于 $-L(C)$。对 C 取最优值，可得 $\mathrm{OPT}_{\mathrm{cGSTP}} \geq -\mathrm{OPT}_{\mathrm{TSP}}$；结合可靠性即可得到等式。 □

4. 讨论

本文通过将回路重新表述为可行三角形选择的边界，确立了对称旅行商问题与受约束的群斯坦纳树问题变体之间的结构等价。由此得到的模型提供了一个统一的约束系统，其中全局连通性和目标抵消自然地源自底层的单纯关联结构。该构造的一个关键特点是输入解耦：在完整复形可用时，它是精确的；而当限制在预先指定的候选三角形集合内时，它则成为一种受控的启发式方法。从实际建模的角度来看，巡回目标通过内部边的局部抵消得以体现，而可行性则由全局树约束与局部欧拉正则性的紧凑组合来保证 [3]。这使得稀疏几何复形（例如德劳内三角剖分或相关三角剖分）可以作为搜索空间的黑箱限制[4, 5, 6], ，同时只要最优回路包含在所选复形中，就能保持精确性。算法开发和系统的计算研究留待未来工作。

参考文献

[1] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, W. J. Cook, 《旅行商问题：一项计算研究》，普林斯顿大学出版社，2006年。[2] G. Reich, P. Widmayer，超越斯坦纳问题：一种面向超大规模集成电路的推广，载于：《计算机科学中的图论概念》，施普林格，1990年，第196–210页。[3] H. Edelsbrunner, J. Harer, 《计算拓扑学：导论》，美国数学会，2010年。[4] G. Das, D. Joseph，哪些三角剖分能够近似完全图？，载于：《国际最优算法研讨会论文集》，施普林格，1989年，第168–192页。[5] M. B. Dillencourt，韧性与德劳内三角剖分，《离散与计算几何》5(6)（1990年），575–601。[6] A. N. Letchford and N. A. Pearson，优良三角剖分产生优良回路，《计算机与运筹研究》35（2008年），638–647。