收稿日期：XXXX年XX月；修订日期：XXXX年XX月；录用日期：XXXX年XX月；出版日期：XXXX年XX月；当前版本日期：XXXX年XX月。数字对象标识符 *10.1109/XXXX.2022.1234567*

通过凸化 ℓ_0 范数近似实现离散感知张量补全

Niclas F¨uhrling[1], IEEE 研究生学生会员，Getuar Rexhepi[1],IEEE 研究生学生会员，Giuseppe Abreu[1], IEEE 高级会员[1]德国不来梅 Constructor University 计算机科学与工程学院。通讯作者：Niclas F¨uhrling（电子邮件：nfuehrling@constructor.university）。

arXiv:2602.05802v1 [eess.SP] 5 Feb 2026

摘要 我们提出一种用于补全部分观测低秩张量的新算法，其中张量的每个条目均可从离散有限字母表集合中取值，例如常见的图像处理问题，其中条目表示 RGB 值。所提出的低秩张量补全（TC）方法基于传统的核范数（NN）最小化低秩 TC 范式，并通过加入离散感知正则项，在问题的目标函数中强制实现离散性。该正则项采用 ℓ_0 范数正则项，并在近端梯度（PG）框架下通过分式规划（FP）归一化的连续可微函数进行近似，以求解所提出的问题。仿真结果表明，与传统的最先进（SotA）技术相比，新方法在归一化均方误差（NMSE）和收敛性方面均表现更优；这些技术包括核范数最小化方法，以及将核范数最小化与矩阵分解方法相结合的方法。

索引词 分式规划、张量补全、近端梯度

I. 引言

随着 ITH 近年来机器学习和大数据的兴起，矩阵补全（MC）已成为众多现代应用中的一个基础问题，包括计算机科学中的推荐系统 [1]、信号处理中的定位算法 [2],以及无线通信中的毫米波信道估计 [3]。

大多数实际问题都可以表述为结构化低秩矩阵补全问题，其目标是从部分观测且不完整的矩阵 $\boldsymbol{O} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ [4]中恢复一个低秩矩阵 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ –[6]。经典的矩阵补全方法 [7]–[9]通过使用凸替代函数，即核范数（NN），替代本质上非凸的秩最小化目标函数来解决这一问题，从而提高可处理性并实现理论上的恢复保证。

若干最先进（SotA）方法遵循这一范式。具体而言，[7] 提出的方法将 NN 用作秩函数的紧凸松弛，即使只有少量含噪观测，也能实现可靠恢复。类似地，[8] 考虑通过半定规划（SDP）求解 NN 最小化问题。然而，基于 SDP 的解法，其计算复杂度随 $\mathcal{O}(\max(m,n)^4)$ 增长至，这严重限制了它们在大规模问题中的适用性。

为克服这一计算负担，[10]中提出的方法在近端梯度（PG）框架内采用奇异值阈值化（SVT），以高效地最小化核范数目标函数，在保持良好实证性能的同时显著降低复杂度。

受这些进展的启发，我们近期在 [11] 和 [12] 中提出了一种相关的、基于 PG 的低复杂度低秩矩阵补全框架，用于解决一种更具挑战性的情形：矩阵条目被限制为属于有限离散字母表。由此得到的离散感知矩阵补全方法尤其适用于推荐与评分系统等应用 [1]。通过在优化问题中加入离散空间正则项来体现离散性；在基于 ℓ_1-范数凸化 [11], 以及 ℓ_0-范数的光滑非凸近似 [12]的松弛形式下，该方法均可得到闭式更新。

然而，近年来，多路数据日益普及，推动了将矩阵补全扩展到更高阶结构，由此产生了张量补全（TC）问题。在许多现代应用中，观测

本作品采用知识共享署名 4.0 许可协议授权。有关更多信息，请参阅 https://creativecommons.org/licenses/by/4 .0/

本质上是多维的，无法在不丢失结构信息的情况下以矩阵形式忠实表示。例如，信号处理、机器学习和数据分析，以及科学计算 [13]–[15],，其中测量数据自然构成三阶或更高阶张量。在此背景下，矩阵补全可视为张量补全的一种特殊情况，其范围仅限于二阶张量。

张量补全旨在从部分观测的张量 $\mathcal{O}$中恢复一个低秩张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}$，二者具有相同的维度，并假设真实张量具有低维潜在结构。然而，与矩阵不同，张量具有多种秩的概念，例如 CP 秩、Tucker 秩和管秩，分别刻画不同类型的多线性依赖。这一根本差异使得张量补全相比其矩阵对应问题表达能力更强，同时也明显更具挑战性。

早期的张量补全方法大多沿袭矩阵补全的发展思路，将非凸张量秩目标函数替换为凸或易处理的替代函数。一种常见方法是最小化模态-n 展开的核范数之和，从而将基于核范数的矩阵补全技术推广到张量场景，正如 [16] 中所提出的那样。尽管这类松弛方法保留了凸性和理论保证，但通常计算复杂度较高，并且可能无法充分利用张量固有的多线性结构。作为替代方案，基于分解的表述通过低维潜在因子对张量进行参数化，因其良好的可扩展性和较低的内存占用而得到广泛采用 [17]。这些方法将矩阵分解技术推广到高阶张量，通常会形成非凸优化问题，但在实践中仍可通过迭代算法高效求解。

此外，人们提出了将核范数正则化与因子化表示相结合的混合方法，以弥合凸松弛与可扩展低秩建模之间的差距 [18]。此类形式保留了基于NN的方法所具备的部分正则化优势，同时显著降低了计算复杂度，从而在理论可处理性与实际性能之间提供了灵活的权衡。

总体而言，张量补全是矩阵补全一种原理清晰且强大的推广，使得在多维相关性起核心作用的场景中能够恢复不完整数据。这种额外的建模灵活性以更高的算法和理论复杂度为代价，因此推动了对低复杂度、结构感知型张量补全方法的持续研究，以将现代矩阵补全技术的成功拓展至高阶场景。

鉴于上述情况，本文提出一种基于新型离散感知低秩张量补全（TC）方法的最先进张量补全（TC）技术扩展。该方法在传统的基于核范数最小化的低秩张量补全范式中加入离散空间正则项，以在问题的目标函数中强制实现离散性。

为此，我们首先用一个可任意逼近且连续可微、但非凸的函数替代离散空间正则项，从而对其进行松弛；随后通过分式规划（FP）将其凸化。该方法还采用了专为所构建的问题设计的PG算法。

本文的主要贡献概括如下:

- 本文提出了一种新颖的离散感知低秩张量补全方法，其中离散正则项基于 ℓ_0-范数近似，通过FP进行凸化，并使用PG算法求解。
- 我们对比了该方法与最先进方法的综合性能，结果表明，所提出的方法在归一化均方误差（NMSE）和收敛速度方面表现更优。

本文结构如下。第二节首先介绍张量补全问题的基础知识，将其视为矩阵补全问题的推广，并描述常规张量补全技术，同时回顾 [11] 和 [12] 提出的矩阵补全离散感知变体。第三节介绍一种新方法：通过 ℓ_0-范数近似，为基于核范数最小化的方法扩展加入离散感知正则项。第四节和第五节分别给出将本文方法与最先进方法进行比较的仿真结果，并总结全文。

II. 预备知识

张量是向量和矩阵的多维推广，因此，N模张量 $\mathcal{T}$ 可表示为

$$\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N}, \tag{1}$$

其中， I_n 表示张量在模态 n上的大小，因此向量是1模张量，矩阵是2模张量，依此类推。

为简化起见，我们将张量补全作为图像处理的一部分来进行，如图1所示。此时，我们接收到图像的一个部分观测采样版本，并需要对其进行恢复。在这种情况下，图像可表示为一个3模态张量 $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{W \times H \times 3}$，其大小为 $W \times H \times 3$，其中 W和 H 分别表示图像的宽度和高度，第三个模态表示RGB颜色通道。

A. 矩阵与张量补全问题的经典表述

在探讨所提出的方法之前，将讨论几种可扩展至张量补全的主要矩阵补全技术，它们均旨在从部分观测的N模张量中恢复元素。典型的最先进低秩矩阵补全技术基于对矩阵秩的最小化，因此原始秩最小化问题可写为

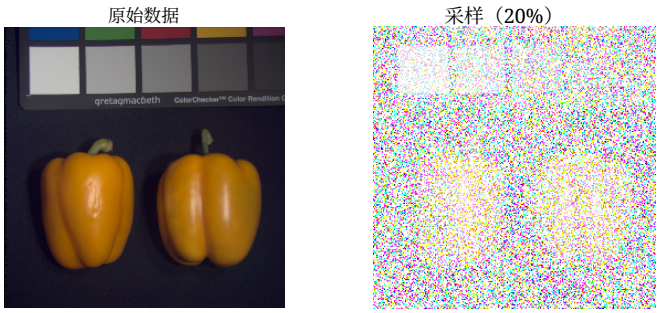


图1。 原始张量以图像形式呈现，以及其部分观测、采样后的版本，其中 20 % 的元素已被观测。

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad \text{rank}(\boldsymbol{X}), \tag{2a}$$

$$\text{s.t.} \quad P_\Omega(\boldsymbol{X}) = P_\Omega(\boldsymbol{O}), \tag{2b}$$

其中rank(·)表示输入矩阵的秩， $P_\Omega(\cdot)$表示一个掩码算子，其定义为

$$[P_\Omega(\boldsymbol{X})]_{i,j} = \begin{cases} [\boldsymbol{X}]_{i,j}, & \text{if } (i,j)\in\Omega, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3}$$

其中，$[\cdot]_{i,j}$ 表示给定矩阵的第（i,j）个元素，Ω 定义了包含已观测元素索引的索引集。

尽管问题 (2) 是最优的，但已有研究表明，由于秩算子的非凸性，该问题是非确定性多项式时间（NP）困难，因此无法高效地获得其解；这一结论对矩阵和张量均适用 [19]。

然而， [20],也表明，秩最小化问题可以通过将秩目标替换为核范数算子 $||\boldsymbol{X}||_*$来松弛，核范数算子定义为 $\boldsymbol{X}$的奇异值之和，因为秩为 r 的矩阵恰好有 r 个非零奇异值。因此，采用核范数目标函数的松弛优化问题可写为

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad ||\boldsymbol{X}||_*, \tag{4a}$$

$$\text{s.t.} \quad P_\Omega(\boldsymbol{X}) = P_\Omega(\boldsymbol{O}), \tag{4b}$$

其中，与原始问题(2)相比，核范数可视为秩算子 [21], 的紧下界。

在实际场景中，观测到的矩阵通常包含测量噪声，因此严格满足约束(4b)过于苛刻。由此，通常会放宽低秩要求，并将目标矩阵恢复为近似低秩解。因此，若干相关研究 $e.g.$、 [22]–[24], 考虑了问题(4)的以下松弛形式，定义为

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad ||\boldsymbol{X}||_*, \tag{5a}$$

$$\text{s.t.} \quad \underbrace{\frac{1}{2}||P_\Omega(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{O})||_F^2}_{\triangleq f(\boldsymbol{X})} \le \epsilon, \tag{5b}$$

其中，为方便记号， $f(\boldsymbol{X})$ 已作隐式定义，并将在本文余下部分中使用。

接下来，问题 (5) 可改写为如下正则化形式：

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad f(\boldsymbol{X}) + \lambda||\boldsymbol{X}||_*, \tag{6}$$

或者，直接纳入秩约束，可写为

$$\arg\min_{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}} \quad f(\boldsymbol{X}), \tag{7a}$$

$$\text{s.t.} \quad \text{rank}(\boldsymbol{X}) \le \nu. \tag{7b}$$

尽管许多最先进的方法 [25]–[27] 专注于求解低秩矩阵补全问题的凸松弛形式，但近年来，非凸优化方法 [28]–[30]已取得显著进展。通过直接对低秩结构进行参数化，这些方法能够更贴近原始的非凸形式；与凸替代方法相比，往往也能取得更优的实证性能。关于低秩矩阵补全的非凸优化技术的全面综述，可参见 [31]。

如前所述，核范数最小化这一概念同样适用于张量。其中$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ $\mathbb{R}^{I_1\ I_1\ \cdots I_N}$ $\boldsymbol{\mathcal{T}}$,,为N模张量，因此

$$\arg\min \quad ||\boldsymbol{\mathcal{X}}||_*, \tag{8a}$$

$$\text{s.t} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{8b}$$

其中，张量的核范数定义为

$$||\boldsymbol{\mathcal{X}}||_* = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i||\boldsymbol{X}_{(i)}||_* \tag{9}$$

其中， $\gamma_i \ge 0, \sum\gamma_i = 1$ 和 $\boldsymbol{X}_{(i)}$ 分别表示模 i 的矩阵化，可改写为

$$\arg\min \sum_{i=1}^{N}\gamma_i \quad ||\boldsymbol{X}_{(i)}||_*, \tag{10a}$$

$$\text{s.t} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}). \tag{10b}$$

一般而言，模-i 矩阵化/展开会将张量的元素重新排列成一个二维矩阵。对于张量$\boldsymbol{\mathcal{T}}$ $\in \mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，模-$i$ 展开是一个矩阵，定义如下：

$$\boldsymbol{T}_{(i)} \in \mathbb{R}^{I_i\times\prod_{j\ne i} I_j}. \tag{11}$$

为实现展开，首先对各维度进行置换，将第 i 个维度移至最前，然后重塑为一个矩阵。

随后可以通过多种方法求解该问题，例如 [16] 中所述的方法。

另一种矩阵补全模型可以基于矩阵分解 [17], , 从而将优化问题表述为

$$\arg\min_{\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}} \quad \frac{1}{2}||\boldsymbol{X}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^\intercal||_F^2, \tag{12a}$$

$$\text{s.t} \quad P_\Omega(\boldsymbol{X}) = P_\Omega(\boldsymbol{T}), \tag{12b}$$

其中 $\boldsymbol{U}\in\mathbb{R}^{m\times r}$ 且 $\boldsymbol{V}\in\mathbb{R}^{n\times r}$，满足 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}$

类似地，可以构造一个等价的张量补全版本，表示为

$$\underset{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{X}}}{\arg\min} \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma_i}{2} ||\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_{(i)}||_F^2, \tag{13a}$$

$$\text{s.t} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{13b}$$

其中$\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 和 $\boldsymbol{X}_i \in \mathbb{R}^{I_i\times r_i}$，且 $\boldsymbol{Y}_i \in \mathbb{R}^{r_i\times\prod_{j\neq i} I_j}$，可通过传统的最小二乘法求解。

另一种近期更先进的最先进方法 [18] 提出将核范数与矩阵分解相结合，从而得到如下问题:

$$\underset{\boldsymbol{\mathcal{X}}}{\arg\min} \quad \sum_{i\in\mathcal{A}} \gamma_i ||\boldsymbol{X}_i||_* + \sum_{j\in\mathcal{B}} \frac{\gamma_i}{2} ||\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{X}_{(i)}||_F^2, \tag{14a}$$

$$\text{s.t} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{14b}$$

其中， [18] 提出了两种解决方案：一种是放宽问题的非光滑版本，另一种是对目标函数进行平滑近似的光滑版本。

最后，最初在 [11] 中提出、随后在 [12] 中扩展的离散感知矩阵补全方案假设需要恢复的矩阵缺失条目属于有限离散字母表集合 $\mathcal{A} \triangleq \{a_1, a_2, \cdots\}$。为此，公式（6）中讨论的标准正则化优化问题可扩展为:

$$\underset{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}}{\arg\min} \quad f(\boldsymbol{X}) + \lambda g(\boldsymbol{X}) + \zeta r(\boldsymbol{X}|p), \tag{15}$$

其中， $f(\boldsymbol{X})$ 表示数据保真项， $g(\boldsymbol{X})$ 表示低秩正则项，其选为核范数（NN）；而为问题引入离散性的离散空间正则项 $r(\boldsymbol{X}|p)$ 定义为

$$r(\boldsymbol{X}|p) \triangleq \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|} ||\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{X}) - a_k\mathbf{1}||_p, \tag{16}$$

其中， $0 \leq p$、 $|\mathcal{A}|$ 定义了字母符号集合的基数；$\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{X})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的向量化，其中选取与给定索引集 Ω 对应的条目，Ω 是此前所述集合 Ω 的补集。

B. 矩阵与张量补全问题的经典解法

接下来，在介绍所提出的方法之前，我们将讨论几种主要的矩阵补全（MC）和张量补全（TC）技术，这些技术均旨在恢复部分观测的 N 模张量中的条目，并且都可以扩展到张量补全。

1）Soft-impute 方法

Soft-impute（软补全） [32] 及其扩展方法，即 [33],的加速非精确软补全（AIS）-impute方法，是最近提出的用于求解大规模矩阵补全问题的方法 [34], [35]，这些问题与所描述的问题具有相似结构，其描述依据为

方程(5)和(6)，旨在利用奇异值阈值化高效求解NN最小化问题。传统软补全方法由如下递推构成

$$\boldsymbol{X}_t = \text{SVT}_\lambda(\boldsymbol{X}_{t-1} + P_\Omega(\boldsymbol{O} - \boldsymbol{X}_{t-1})), \tag{17}$$

其中，奇异值阈值函数定义为

$$\text{SVT}_\lambda(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{\Sigma} - \lambda\boldsymbol{I})_+\boldsymbol{V}^\intercal, \tag{18}$$

其中 $(\cdot)_+$ 是输入的正部，且 $\boldsymbol{A} \triangleq \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^\intercal$。

此外， [33] 已证明，SI 可用作近端梯度法，从而能够采用基于 SI 的 Nesterov 型动量加速 [36], ，众所周知，这能显著加快收敛。相应的更新递推可写为

$$\boldsymbol{X}_t = \text{SVT}_\lambda(\boldsymbol{Y}_t + P_\Omega(\boldsymbol{O} - \boldsymbol{Y}_t)), \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_t = (1+\gamma_t)\boldsymbol{X}_{t-1} + \gamma_t\boldsymbol{X}_{t-2}$ 是动量加速函数， γ_t 表示动量的权重。

2) 离散感知矩阵补全

沿用两种最先进的离散感知矩阵补全方法， [11] 和 [12] 均采用近端梯度法迭代求解该问题，由此得到以下步骤递推

$$\boldsymbol{Y}_t = (1+\gamma_t)\boldsymbol{X}_{t-1} + \gamma_t\boldsymbol{X}_{t-2}, \tag{20}$$

$$\boldsymbol{Z}_t = \text{prox}_{\zeta_r}(\boldsymbol{Y}_t), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{X}_t = \text{SVT}_\lambda(P_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{Z}_t) + P_\Omega(\boldsymbol{O})), \tag{22}$$

其中，第一步结合了 (AIS)-impute 方法中讨论的动量加速函数；第二步对应于对离散空间正则项执行近端操作，该操作取决于正则项中使用的参数 p；最后一步则相当于对核范数正则项执行近端梯度操作，因为如上所述， [10] 已证明，奇异值阈值化可用作核范数的近端极小化算子。

3) 简单低秩张量补全（SiLRTC）算法SiLRTC 算法 [16] 通过凸松弛框架解决张量补全问题。其基本公式可表示如下

$$\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{M}_i} \quad \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \|\boldsymbol{M}_i\|_*, \tag{23a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)} = \boldsymbol{M}_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{23b}$$

$$P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{23c}$$

其中， γ_i 是每个模态的权重，$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{(i)}$ 表示张量$\boldsymbol{\mathcal{X}}$的模态-i展开， $\boldsymbol{M}_i$ 是为便于优化而引入的辅助变量。为提高鲁棒性和计算可处理性，问题的一个松弛版本

为每个模态引入一个容差参数 d_i ，使得

$$\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{M}_i} \quad \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left\|\boldsymbol{M}_i\right\|_*, \tag{24a}$$

$$\text{s.t.} \quad \left\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}-\boldsymbol{M}_i\right\|_F^2 \le d_i, \quad i=1,\ldots,n, \tag{24b}$$

$$P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}})=P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}). \tag{24c}$$

通过引入与二次约束相关的惩罚参数 β_i ，可以得到一个等价表述，从而导出如下无约束形式：

$$\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}},\boldsymbol{M}_i} \quad \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left\|\boldsymbol{M}_i\right\|_*+\frac{\beta_i}{2}\left\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}-\boldsymbol{M}_i\right\|_F^2, \tag{25a}$$

$$\text{s.t.} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}})=P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}). \tag{25b}$$

最小化问题可分解为两个子问题。对于固定的 $\boldsymbol{M}_i$，关于$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的子问题为

$$\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{2}\left\|\boldsymbol{M}_i-\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}\right\|_F^2, \tag{26a}$$

$$\text{s.t.} \quad P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}})=P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{26b}$$

由此可得到闭式解，表示为

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{i_1,\ldots,i_n}=\begin{cases}\left(\frac{\sum_i\beta_i\text{Fold}_i(\boldsymbol{M}_i)}{\sum_i\beta_i}\right)_{i_1,\ldots,i_n}, & (i_1,\ldots,i_n)\notin\Omega,\\ \boldsymbol{\mathcal{T}}_{i_1,\ldots,i_n}, & (i_1,\ldots,i_n)\in\Omega.\end{cases} \tag{27}$$

接下来，通过奇异值阈值化更新每个辅助变量 $\boldsymbol{M}_i$

$$\boldsymbol{M}_i=\text{SVT}_{\frac{\gamma_i}{\beta_i}}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}\right), \tag{28}$$

其中，奇异值阈值操作的定义与上一小节相同。

4) 矩阵分解方法

式 (13) 所述的目标函数对于变量块 $\boldsymbol{X}$、 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 分别是凸的（其余两个变量块固定时）。因此，可以采用块坐标下降方案，如 [17]，中提出的方法，其中 $\boldsymbol{X}$、 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 迭代更新。在第 k 次迭代中，相应更新对应的各个问题为

$$\boldsymbol{X}^{k+1}= \quad \arg\min_{\boldsymbol{X}} f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}^k,\boldsymbol{\mathcal{X}}^k), \tag{29a}$$

$$\boldsymbol{Y}^{k+1}= \quad \arg\min_{\boldsymbol{Y}} f(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\mathcal{X}}^k), \tag{29b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{k+1}= \quad \arg\min_{P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}})=P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}})} f(\boldsymbol{X}^{k+1},\boldsymbol{Y}^{k+1},\boldsymbol{\mathcal{X}}). \tag{29c}$$

子问题 (29a) 和 (29b) 均可分解为 N相互独立的最小二乘问题，并可并行求解。所得闭式更新可表示为 as

$$\boldsymbol{X}_i^{k+1}=\boldsymbol{X}_{(i)}^k(\boldsymbol{Y}_i^k)^\top\left(\boldsymbol{Y}_i^k(\boldsymbol{Y}_i^k)^\top\right)^\dagger, i=1,\ldots,N, \tag{30a}$$

$$\boldsymbol{Y}_i^{k+1}=\left((\boldsymbol{X}_i^{k+1})^\top\boldsymbol{X}_i^{k+1}\right)^\dagger(\boldsymbol{X}_i^{k+1})^\top\boldsymbol{X}_{(i)}^k, i=1,\ldots,N, \tag{30b}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}^{k+1}=P_{\Omega^c}\left(\sum_{i=1}^{N}\text{Fold}_i(\boldsymbol{X}_i^{k+1}\boldsymbol{Y}_i^{k+1})\right)+P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}}), \tag{30c}$$

其中 $(\cdot)^\dagger$ 表示摩尔–彭若斯伪逆。

由于$\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的恢复完全取决于乘积 $\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{Y}_i$、 $i=1,\ldots,N$，因此可以通过省略式 (30a) 中的伪逆来简化 $\boldsymbol{X}_i$ 的更新，从而得到

$$\boldsymbol{X}_i^{k+1}=\boldsymbol{X}_{(i)}^k(\boldsymbol{Y}_i^k)^\top, \quad i=1,\ldots,N. \tag{31}$$

结合式 (30b)，与式 (30a) 和 (30b) 相比，此更新对于所有 i 均会得到相同的乘积 $\boldsymbol{X}_i^{k+1}\boldsymbol{Y}_i^{k+1}$ ，这一点已在 [37, 引理 2.1] 中证明。

III. 所提方法

下文中，所提出的离散感知张量补全模型旨在通过求解一个由三个不同函数 [12] 组成的优化问题来恢复张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$

$$\arg\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \underbrace{f(\boldsymbol{\mathcal{X}})}_{\text{Data Fidelity}}+\underbrace{\zeta h(\boldsymbol{\mathcal{X}})}_{\text{Discrete Prior}}+\underbrace{\lambda g(\boldsymbol{\mathcal{X}})}_{\text{Low-Rank Prior}}, \tag{32}$$

满足观测约束 $P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}})=P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{T}})$。在这一表述中， $f(\boldsymbol{\mathcal{X}})=\frac{1}{2}\|P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}-\boldsymbol{\mathcal{O}})\|_F^2$确保与观测数据 [12]一致。低秩先验 $g(\boldsymbol{\mathcal{X}})=\sum_{i\in N}\gamma_i\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}\|_*$ 表示核范数之和（SNN），旨在促进多线性低秩结构 [12]。项 $h(\boldsymbol{\mathcal{X}})$ 是后续基于 l_0-范数近似推导出的离散感知正则项 [12]。虽然离散感知正则项与离散感知矩阵补全相似，但针对张量补全问题可将其改写为

$$r(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)}|p)\triangleq\sum_{k=1}^{|\mathbb{A}|}||\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_{(i)})-a_k\mathbf{1}||_p, \tag{33}$$

由于模态 i 展平不会改变张量的元素，因此可以使用该方法。

A. 基于 l_0-范数近似的离散正则化

考虑 [38] 中提出的以下 ℓ_0-范数紧致近似

$$||\boldsymbol{x}||_0\approx\sum_{i=1}^{L}\frac{|x_i|^2}{|x_i|^2+\alpha}=L-\sum_{i=1}^{L}\frac{\alpha}{|x_i|^2+\alpha}, \tag{34}$$

其中， L 和 α 分别是向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度和任意小的常数。

特别需要注意的是，如图 2 所示，在此近似下，对于 x_i 的任意取值，

$$\frac{|x_i|^2}{|x_i|^2+\alpha}\to 0 \text{ for } |x_i|^2=0, \tag{35}$$

$$\frac{|x_i|^2}{|x_i|^2+\alpha}\to 1 \text{ for } |x_i|^2>0. \tag{36}$$

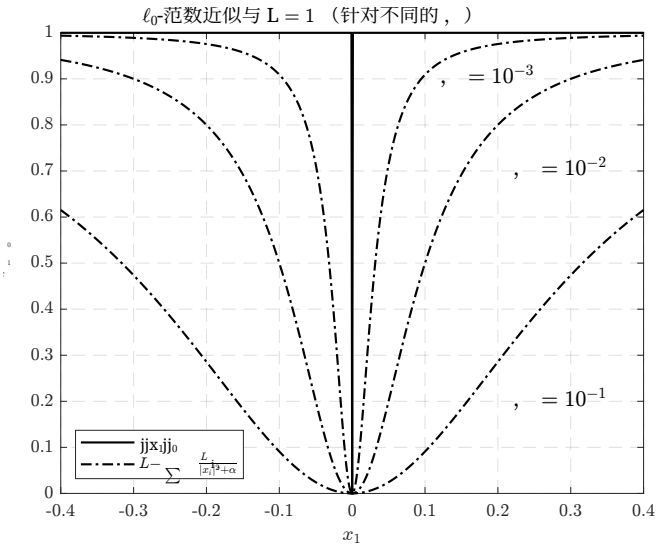


图 2. 采用 l_0-范数近似，并结合 $L = 1$ 和变化的平滑因子 α。

为了将该近似应用于离散感知正则项，我们首先使用对每一项的近似，将其改写为逐元素形式。如此处理后，该正则项可写为

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{X}|0) &= \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|} ||\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{X}) - a_k\mathbf{1}||_0 = \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|}\sum_{j=1}^{|\bar{\Omega}|} ||\boldsymbol{x}_j - a_k||_0 \\ &\approx \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|}\Big(\underbrace{|\bar{\Omega}|}_{const.} - \sum_{j=1}^{|\bar{\Omega}|}\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}_j - a_k|^2+\alpha}\Big) \\ &= -\sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|}\sum_{j=1}^{|\bar{\Omega}|}\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}_j - a_k|^2+\alpha}, \end{aligned} \tag{37}$$

其中，$|\bar{\Omega}|$ 表示集合 $\bar{\Omega}$ 中元素的数量。此外，由于 $|\bar{\Omega}|$是一个常数项，在求解优化问题时，后续可将其忽略。

B. 通过分式规划进行重构

请注意，式（37）的离散感知正则项形式并非凸函数，因为其中包含仿射函数与凸函数的比值。为缓解这一难题，我们引入一种基于分式规划的 ℓ_0-范数近似变体，该方法借助 [39], [40] 中所述的二次变换实现。

对原始数据 ℓ_0-范数近似应用二次变换，可得到一个简单的重构形式：

$$\begin{aligned} ||x||_0 &\approx L - \sum_{i=1}^{L}\frac{\alpha}{|x_i|^2+\alpha} \approx L - \Big(\sum_{i=1}^{L} 2\beta_i\sqrt{\alpha} - \beta_i^2(|x_i|^2+\alpha)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{L}\beta_i^2|x_i|^2 + \underbrace{L - \Big(\sum_{i=1}^{L} 2\beta_i\sqrt{\alpha}+\alpha\Big)}_{\text{indep. of } x} \equiv \sum_{i=1}^{L}\beta_i^2|x_i|^2, \end{aligned} \tag{38}$$

其中，$\beta_i \triangleq \frac{\sqrt{\alpha}}{|x_i|^2+\alpha}$ 是分式规划步骤得到的辅助变量；对于最小化问题，与 x 无关的项可以忽略，从而得到最后一个等价形式。

接下来，可将二次变换应用于离散空间正则项的问题表述，方式与式（38）类似，从而得到

$$-\sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|}\sum_{j=1}^{|\bar{\Omega}|}\frac{\alpha}{|\boldsymbol{x}_j - a_k|^2+\alpha} = \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|}\sum_{j=1}^{|\bar{\Omega}|}\beta_{k,j}^2|\boldsymbol{x}_j - a_k|^2, \tag{39}$$

其中 $\beta_{k,\,j} \triangleq \frac{\sqrt{\alpha}}{|\boldsymbol{x}_j - a_k|^2+\alpha}$ 是由上述二次变换得到的辅助变量。

因此，离散感知正则项可重新表述为

$$r(\boldsymbol{\mathcal{X}}|0) \approx h(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = \text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^\intercal \boldsymbol{B}\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) - 2\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}})^\intercal \boldsymbol{b}, \tag{40}$$

其中辅助变量定义为

$$\boldsymbol{b} = \sum_{k=1}^{|\mathbb{A}|} a_k[\beta_{k,1}^2, \beta_{k,2}^2, \ldots, \beta_{k,|\bar{\Omega}|}^2]^T \in \mathbb{R}^{|\bar{\Omega}|}, \tag{41a}$$

$$\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{|\mathbb{A}|} \text{diag}[\beta_{k,1}^2, \beta_{k,2}^2, \ldots, \beta_{k,|\bar{\Omega}|}^2]^T \in \mathbb{R}^{|\bar{\Omega}|\times|\bar{\Omega}|}, \tag{41b}$$

其中

$$\beta_{k,j} = \frac{\sqrt{\alpha}}{|\text{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_j) - a_k|^2+\alpha}. \tag{42}$$

C. 通过近端梯度进行迭代求解

得到近似 ℓ_0-范数正则项的闭式凸形式后，所提出的优化问题可写为

$$\arg\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} \underbrace{f(\boldsymbol{\mathcal{X}})}_{\frac{1}{2}||P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{X}}-\boldsymbol{\mathcal{O}})||_F^2} + \lambda\overbrace{g(\boldsymbol{\mathcal{X}})}^{||\boldsymbol{\mathcal{X}}||_*} + \zeta\underbrace{r(\boldsymbol{\mathcal{X}}|0)}_{\text{eq. (40)}}, \tag{43}$$

或者，利用公式（40），可表示为

$$\arg\min_{\boldsymbol{\mathcal{X}}} f(\boldsymbol{\mathcal{X}}) + \zeta h(\boldsymbol{\mathcal{X}}) + \lambda g(\boldsymbol{\mathcal{X}}). \tag{44}$$

为了解决所提出的优化问题，我们改进了 [12]中的近端梯度算法，以适应离散感知正则项和张量结构。

近端梯度法通过结合对平滑分量执行梯度下降步，以及对非平滑分量执行近端操作 [12],和离散感知正则项，迭代更新张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ 的估计值。在每次迭代 t中，为了确保数据保真度，对未观测条目执行梯度下降步，从而得到中间张量

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_t = P_\Omega(\boldsymbol{\mathcal{O}}) + P_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}_t - \mu_t\zeta\nabla h(\boldsymbol{\mathcal{X}}_t)), \tag{45}$$

其中 μ 表示采用利普希茨条件、为收敛保证而优化的步长

$$0 \le \mu \le 1/S, \tag{46a}$$

其中 S 表示利普希茨常数，计算如下：

$$S = \max \mathrm{eig}(\boldsymbol{B}^{\intercal}\boldsymbol{B}) = \max(B_{i,i}^2, \forall i), \tag{46b}$$

其中，maxeig(·) 表示返回自变量矩阵最大特征值的算子，而（46b）提供了一种低复杂度的替代方案。

此外，标量 ζ 用于在梯度步中对离散感知正则项的影响进行加权，可直接由（40）计算得出：

$$\nabla h(\boldsymbol{\mathcal{X}}) = 2(\mathrm{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{B}) \odot \mathrm{vec}_{\bar{\Omega}}(\boldsymbol{\mathcal{X}}) - \boldsymbol{b}). \tag{47}$$

计算得到中间张量$\boldsymbol{\mathcal{Y}}_t$ 后，通过 NN 的近端算子施加低秩先验；该算子可在张量的每个模态展开上高效计算。

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t+1} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \mathrm{Fold}_n\left(\mathrm{SVT}_{\alpha_n\lambda}(\mathrm{Unfold}_n(\boldsymbol{\mathcal{Y}}_t))\right), \tag{48}$$

其中，$\mathrm{SVT}_\tau(\cdot)$ 表示阈值为 τ [10]的奇异值阈值化算子。在本例中，对于每个模态 n，其阈值为 $\alpha_n\lambda$ ；其中，α_n 是各模态对应的权重，满足 $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = 1$ ；而 λ 是另一个超参数，用于指定低秩先验的权重。

为加快收敛，我们将 Nesterov 型动量加速 [36]融入更新过程。外推点计算如下：

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_t = (1+\theta_t)\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t-1} - \theta_t\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t-2}, \tag{49}$$

其中，动量权重 θ_t 在每次迭代中更新为 $\theta_t = \frac{t-1}{t+2}$ ，如 [36]中所定义。——

求解问题 (44) 的详细过程以伪代码形式总结于算法 1中。该算法通过迭代执行，并在达到最大迭代次数或连续张量估计之间的相对变化低于预设容差时终止。初始化时，将不完整张量中的缺失条目填入观测值的均值，由此得到初始估计 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0$。每次迭代中，算法首先根据当前张量估计，为未观测条目计算辅助变量 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 。利用这些量，通过 Nesterov 型加速步骤得到外推张量 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_t$ ^。随后，在 ^$\boldsymbol{\mathcal{X}}_t$处计算光滑目标函数 $h(\cdot)$ 的梯度，并根据利普希茨条件，将步长 μ_t 设为 $\boldsymbol{B}$ 最大对角元素的倒数。经过梯度下降步骤，得到中间张量 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_t$，随后通过奇异值阈值操作更新张量估计$\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t+1}$。当两个连续张量估计之间的相对弗罗贝尼乌斯范数差低于容差 ϵ时，迭代停止，并将最终张量估计作为输出返回。

算法 1 离散感知低秩张量补全 (DaLRTC)

输入： 不完整张量$\boldsymbol{\mathcal{O}}$、索引集 Ω、辅助变量 γ，最大迭代次数 $T_{\max}$、容差 ϵ、离散字母表集合$\mathbf{a}$和权重 λ。

初始化： 用观测元素的均值填充$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ 中的缺失条目元素，并设置 $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_{-1} = \boldsymbol{\mathcal{O}}$。
对 $t = 1$ **到** $T_{\max}$ **执行**
  为未观测条目计算辅助变量 $j \in \bar{\Omega}$:
  通过方程 (41) 计算 $\boldsymbol{b}$和 $\boldsymbol{B}$
  更新 $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_t$ 通过方程（49）
  计算 $\nabla h($ $\hat{\boldsymbol{\mathcal{X}}}_t)$，通过方程（47）
  $\mu_t \leftarrow 1/\max(\mathrm{diag}(\mathrm{B}))$
  使用方程（45）计算 $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_t$
  通过方程（48）更新 $\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t+1}$
  如果 $\|\boldsymbol{\mathcal{X}}_{t+1} - \boldsymbol{\mathcal{X}}_t\|_F / \|\boldsymbol{\mathcal{X}}_t\|_F < \epsilon$ **则**
    跳出
  结束 if
结束 for
返回 $\boldsymbol{\mathcal{X}}^*_t$

IV. 数值结果

本节将所提方法与基于核范数最小化的最先进技术 (FaLRTC)（见[16],）、 [17],中的矩阵分解方法 (TMac)，以及近期一种结合两种目标函数的技术 (S-LRTC)（见 [18]）进行比较。比较中选用图1所示的图像[1]，其尺寸为 256×256，包含作为第三维表示的 RGB颜色通道，因此形成尺寸为 $256 \times 256 \times 3$ 的张量和一个有限离散字母表集合 $\mathcal{A} = \{0, 1, \ldots, 255\}$。选用的性能指标为归一化均方误差 (NMSE)，其定义为

$$\mathrm{NMSE} = \frac{\|\widehat{\mathcal{X}} - \mathcal{X}_{\mathrm{true}}\|_F^2}{\|\mathcal{X}_{\mathrm{true}}\|_F^2}. \tag{50}$$

为确保所有最先进方法与所提方法在相同条件下进行比较，我们采用相同的仿真设置，其中张量$\boldsymbol{\mathcal{O}}$ 中观测值的比例从 20% 变化至 60%。不同观测比例下的归一化均方误差结果如图3所示，而观测比例固定为 60% 时的收敛情况如图4所示。

在图3中可以观察到，所提出的方法优于所有最先进方法。虽然在核范数目标函数中加入离散性已经能够带来性能提升，但所提出的方法也优于较新的方法，例如 S-LRTC 方法。尽管这两种方法之间的提升似乎很小，但考虑到达到相同结果所需的信息量，这一提升仍然具有显著意义。以预期的归一化均方误差为 0.4 为例，可以看出，所提出的方法只需要 48% 的观测张量，而表现最佳的最先进方法至少需要 60% 的观测张量。

[1]测试图像可在此处获取：
https://github.com/shangqigao/TensorCompletion

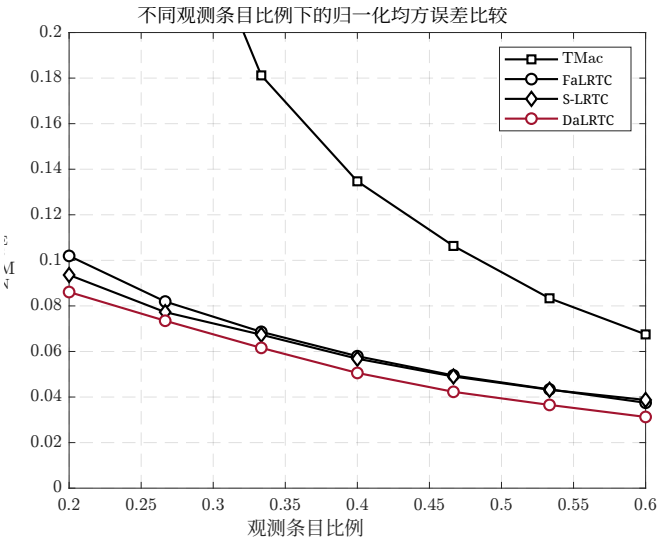


图3. 在不同的观测条目比例下，最先进方法与所提方法的归一化均方误差对比，其中 $\boldsymbol{O}$，针对 $\alpha = 0.01$，$\lambda = 65$ 和 $\zeta = 0.5$。

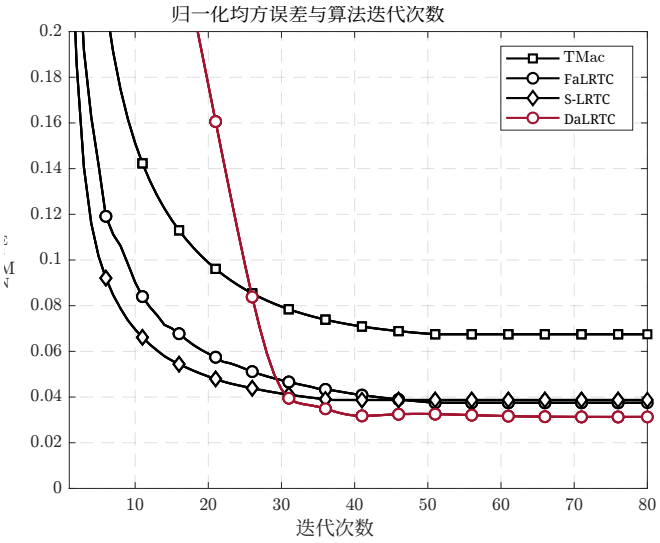


图4. 在 60% 观测比例下，最先进方法与所提方法的归一化均方误差收敛对比，针对 $\boldsymbol{O}$，$\alpha = 0.01$，$\lambda = 65$ 和$\zeta = 0.5$。

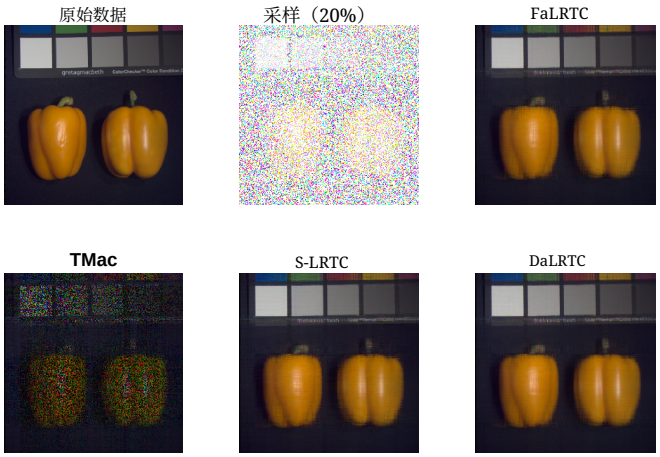


图5. 所提方法补全后的测试图像示例，与原始图像、采样图像以及最先进方法重建的图像进行比较，观测率为20%。

接下来，图4展示了各方法的收敛情况，说明所提出的方法与最先进方法一样能够快速收敛，但其收敛初始阶段较慢。这可以归因于分式规划重构所引入的额外辅助变量，这些变量需要在每次迭代中进行更新，并且需要经过若干次迭代才能稳定下来。

最后，为求完整，图5展示了观测率固定为 20% 时，最先进方法与所提方法的视觉效果对比。可以看出，所提方法能够以更高的视觉质量重建图像，产生的伪影更少，且颜色表现也比最先进方法更准确。

V. 结论

我们提出了一种新的离散感知张量补全算法。除传统的基于核范数最小化的目标外，我们还在目标函数中引入了离散空间的 ℓ_0-范数正则项，并采用渐近紧确的精度对其进行近似。随后，通过分式规划将所得非凸问题凸化，并利用近端梯度法高效求解，从而将离散空间感知融入张量补全问题。仿真结果表明，所提方案优于最先进技术，能够更准确地重建条目为离散值的低秩张量。该方案不仅适用于图像处理问题，也可用于信号处理、机器学习、数据分析以及科学计算等问题。未来的工作将着重改进所提方法，包括提升归一化均方误差性能和收敛表现。

参考文献

[1] Chen 和 S. Wang，“推荐系统矩阵补全综述”，*Knowledge and Information Systems*，第 64 卷，第 1 期，第 1–34 页，2022年。[2] L. T. Nguyen、J. Kim、S. Kim 和 B. Shim，“通过低秩矩阵补全实现物联网网络定位”，*IEEE Transactions on Communications*，第 67 卷，第 8 期，第 5833–5847 页，2019年。[3] E. Vlachos、G. C. Alexandropoulos 和 J. Thompson，“通过矩阵补全进行毫米波系统的大规模 MIMO 信道估计”，*IEEE Signal Processing Letters*，第 25 卷，第 11 期，第 1675–1679 页，2018年。[4] L. T. Nguyen、J. Kim 和 B. Shim，“低秩矩阵补全：当代综述”，*IEEE Access*，第 7 卷，第 94 215–94 237 页，2019年。[5] W. Dai、E. Kerman 和 O. Milenkovic，“低秩矩阵补全的几何方法”，*IEEE Transactions on Information Theory*，第 58 卷，第 1 期，第 237–247 页，2012年。[6] B. Vandereycken，“通过黎曼优化进行低秩矩阵补全”，*SIAM Journal on Optimization*，第 23 卷，第 2 期，第 1214–1236 页，2013年。[7] E. J. Cand`es 和 Y. Plan，“含噪声的矩阵补全”，*Proceedings of the IEEE*，第 98 卷，第 6 期，第 925–936 页，2010年。[8] E. J. Cand`es 和 B. Recht，“通过凸优化实现精确矩阵补全”，*Foundations of Computational Mathematics*，第 9 卷，第 6 期，第 717–772 页，2009年。[9] E. J. Cand`es 和 T. Tao，“凸松弛的威力：近乎最优的矩阵补全”，*IEEE Transactions on Information The- ory*，第 56 卷，第 5 期，第 2053–2080 页，2010年。[10] J.-F. Cai、E. J. Cand`es 和 Z. Shen，“用于矩阵补全的奇异值阈值算法”，*SIAM Journal on Optimization*，第 20 卷，第 4 期，第 1956–1982 页，2010年。

[11] H. Iimori、G. T. F. de Abreu、O. Taghizadeh 和 K. Ishibashi，“通过近端梯度实现离散感知矩阵补全”，载于 2020年第54届阿西洛马会议：信号、系统与计算机，2020年，第 1327–1332 页。[12] N. F¨uhrling、K. Ando、G. T. Freitas De Abreu、D. Gonz´alez G. 和 O. Gonsa，“通过凸化 ℓ_0-范数近似实现离散感知矩阵补全”，载于 2024年第58届阿西洛马会议：信号、系统与计算机，2024年，第 916–920 页。[13] Q. Song、H. Ge、J. Caverlee 和 X. Hu，“大数据分析中的张量补全算法”，ACM Trans. Knowl. Discov. Data，第 13 卷，第 1，2019 [ ] 10 1145 3278607 [14] Jan. . Online . Available: https://doi.org/ . / Y. Ji、Q. Wang、X. Li 和 J. Liu，“机器学习中张量技术及其应用综述”，IEEE Access，第 7 卷，第 162 950–162 990 页，2019年。[15] X.-Y. Wang、X.-P. Li、N. D. Sidiropoulos 和 H. C. So，“用于视觉数据的张量补全网络”，IEEE 信号处理汇刊，第 73 卷，第 386–400 页，2025年。[16] J. Liu、P. Musialski、P. Wonka 和 J. Ye，“通过张量补全估计视觉数据中的缺失值”，IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence，第 35 卷，220，2013 1，208no. pp. – 。[17] Y. Xu、R. Hao、W. Yin 和 Z. Su，“用于低秩张量补全的并行矩阵分解”，arXiv 预印本 arXiv:1312.1254，2013年。[18] S. Gao 和 Q. Fan，“结合核范数与矩阵分解的张量补全方法”，Journal of Scientific Computing，第 75 卷，第 1 期，第 43–64 页，2018年。 [Online]. Available: https: //doi.org/ 10 1007 10915 017 0521 9 . /s - - - C. J. Hillar 和 L.-H. Lim, [19] “大多数张量问题都是 NP 困难的”，Journal of the ACM (JACM)，第 60 卷，第 6 期，第 1–39 页，2013年。[20] E. Cand`es 和 B. Recht，“通过凸优化实现精确矩阵补全”，Communications of the ACM，第 55 卷，119，2012 6，111no. pp. – 。[21] B. Recht、M. Fazel 和 P. A. Parrilo，“通过核范数最小化保证线性矩阵方程的最小秩解”，SIAM Review，第 52 卷，第 3 期，第 471–501 页，2010年。[22] R. H. Keshavan、A. Montanari 和 S. Oh，“利用少量条目进行矩阵补全”，IEEE Transactions on Information Theory，第 56 卷，第 6 期，第 2980–2998 页，2010年。[23] W. Glunt、T. L. Hayden、S. Hong 和 J. Wells，“用于计算最近欧氏距离矩阵的交替投影算法”，SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications，第 11 卷，第 4 期，第 589–600 页，1990年。[24] R. K. W. Wong 和 T. C. M. Lee，“含噪条目和离群值的矩阵补全”，Journal of Machine Learning Research，第 18 卷，第 147 期，第 1–25 页，2017年。[25] R. Meka、P. Jain 和 I. Dhillon，“通过奇异值投影保证秩最小化”，NIPS，2009年09月。[26] Y. Hu、D. Zhang、J. Ye、X. Li 和 X. He，“通过截断核范数正则化实现快速、精确的矩阵补全”，IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence，第 35 卷，第 9 期，第 2117–2130 页，2013年。[27] J. Tanner 和 K. Wei，“通过交替最速下降法进行低秩矩阵补全”，Applied and Co mputational Harmonic Analysis，第 40 卷，2015年08月。[28] Y. Wang、Q. Yao 和 J. Kwok，“一种可扩展、自适应且有效的低秩矩阵学习非凸正则项”，2021年04月，第 1798–1808 页。[29] R. Sun 和 Z.-Q. Luo，“通过非凸分解保证矩阵补全”，IEEE Transactions on Information Theory，第 62 卷，第 11 期，第 6535–6579 页，2016年。[30] Q. Li、Z. Zhu 和 G. Tang，“低秩矩阵优化的非凸几何”，Information and Inference: A Journal of the IMA，第 8 卷，2018年01月。[31] Y. Chi、Y. M. Lu 和 Y. Chen，“非凸优化与低秩矩阵分解相遇：综述”，IEEE 信号处理汇刊，第 67 卷，第 20 期，第 5239–5269 页，2019年。[32] R. Mazumder、T. Hastie 和 R. Tibshirani，“用于学习大型不完整矩阵的谱正则化算法”，Journal of Machine Learning Research，第 11 卷，第 80 期，第 2287–2322 页，2010年。[33] Q. Yao 和 J. T. Kwok，“用于大规模矩阵和张量补全的加速且非精确 Soft-impute”，IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering，第 31 卷，第 9 期，第 1665–1679 页，2019年。

[34] B. Recht 和 C. R´e，《面向大规模矩阵补全的并行随机梯度算法》，*Mathematical Programming Computation*，第 5 卷，第 2 期，第 201–226 页，2013年。[35] H. Fang、Z. Zhang、Y. Shao 和 C.-J. Hsieh，《面向大规模推荐系统的改进型有界矩阵补全》，载于 *IJCAI*，2017年，第 1654–1660 页。[36] Y. E. Nesterov，《一种求解收敛速率为 $O(1/k^2)$ 的凸规划问题的方法》，苏联科学院院刊，第 269 卷，第 543–547 页，1983年。[37] Z. Wen、W. Yin 和 Y. Zhang，《通过非线性逐次超松弛算法求解矩阵补全的低秩分解模型》，*MathematicalProgramming Computation*，第 4 卷，第 4 期，第 333–361 页，2012年。[38] H. Mohimani、M. Babaie-Zadeh 和 C. Jutten，《基于平滑 ℓ^0 范数的超完备稀疏分解快速方法》，*IEEE* 信号处理汇刊，第 57 卷，301，2009 1，第 289 页。[39] K. Shen 和 W. Yu，《通信系统的分式规划——第一部分：功率控制与波束成形》，*IEEE* 信号处理汇刊，2018年。[40]——，《通信系统的分式规划——第二部分：通过匹配进行上行链路调度》，*IEEE* 信号处理汇刊，第 66 卷，第 10 期，第 2631–2644 页，2018年。