arXiv:2602.05858v1 [math.AP] 5 Feb 2026

半空间中具有局部化边界数据的斯托克斯系统的流动反转

TONGKEUN CHANG、KYUNGKEUN KANG 与 CHANHONG MIN

Abstract. 我们考虑半空间中具有零初始数据以及非零、时空局部化边界数据的非定常斯托克斯方程组。我们证明，存在边界流入，使得所诱导的流动呈现流动反转，即速度场的至少一个分量在半空间中改变其符号。这一现象通过对半空间中斯托克斯系统表示公式的细致分析加以说明，其中包括基于具有非零边界数据的格林张量的逐点估计。我们构造斯托克斯系统的解，使得速度场的切向分量至少出现一次符号改变，而法向分量至少出现两次符号改变。此外，所构造速度场的法向分量在边界附近与切向分量符号相反，而在距边界足够远处则与切向分量符号相同。

1. Introduction

本文研究半空间 $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ $(n \geq 2)$ 中带有零初始数据的斯托克斯系统，

$$\begin{aligned} \partial_t w - \Delta w + \nabla p = 0, \qquad \operatorname{div} w = 0, \qquad \text{in } \mathbb{R}^n_+ \times (0,\infty), \\ w(x, t=0) = 0, \qquad w(x', x_n = 0, t) = g(x', t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$w: \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 表示流体的速度，$p: \mathbb{R}^n_+ \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ 表示相应的压力，而 $g: \mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ 表示边界数据。

在当前设定下，边界数据 g 被假设在空间域和时间域上均具有紧支撑，并且仅关于空间变量光滑，而关于时间变量不光滑。与经典热方程不同，斯托克斯系统在边界附近不具备局部正则性，这主要是由于其非局部效应，即使在空间上与边界数据支集相互分离的区域内也是如此。

我们介绍斯托克斯系统奇异行为的最新进展，并阐述开展本研究的动机。我们考虑边界附近局部区域中的以下设定，具体而言，是位于远离边界数据 g支集的一个邻域。

$$\begin{cases} w_t - \Delta w + \nabla \pi = 0, \\ \operatorname{div} w = 0, \end{cases} \qquad Q_1^+ := B_1^+ \times (0,1), \tag{1.2}$$

其中 $Q_r^+ = B_r^+ \times (0, 1)$ 满足 $B_r^+ := \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| < r, \ x_n > 0\}$。此处仅在平坦边界上给定无滑移边界条件，即

$$w = 0 \quad \text{on } \Sigma := (B_1 \cap \{x_n = 0\}) \times (0,1). \tag{1.3}$$

在这种情况下，在 [22], 半空间中构造了一个斯托克斯系统的解，使其法向导数在边界附近表现出奇异行为。更具体地说，构造了斯托克斯系统（1.2）-（1.3）的一个例子，使得 $\|\partial_{x_3} w\|_{L^\infty(Q^+_{1/2})} = \infty$，尽管 $\|w\|_{H^1(Q_1^+)} < \infty$ （事实上，$\|w\|_{L^\infty(Q_1^+)} < \infty$).

2020 *Mathematics Subject Classification.* 35K51, 35Q35, 76D07.*Key words and phrases.* 分离点、流动反转、斯托克斯系统、半空间、格林函数。T. Chang 的工作得到 RS-2023-00244630 的资助。K. Kang 的工作得到韩国国家研究基金会资助项目 RS-2024-00336346 和 RS-2024-00406821 的资助。C. Min 的工作得到 RS-2024-00336346 以及韩国政府资助的韩国国家研究基金会项目 RS-2023-00212227 的资助。

此外，一个值得注意的特点是，正如 [3], 所展示的，尽管 Caccioppoli不等式在内部成立（参见 [20, 40]; 关于非牛顿流动的情形，另见 [21] ），但它在边界附近并不成立。也就是说，一般而言，不等式 $\|\nabla w\|_{L^2(Q^+_{1/2})} \le C\|w\|_{L^2(Q^+_1)}$ 对斯托克斯系统（1.2）–（1.3）的解并不成立。同样，Caccioppoli型不等式 $\|\nabla u\|^2_{L^2(Q^+_{1/2})} \le C\left(\|u\|^2_{L^2(Q^+_1)} + \|u\|^3_{L^3(Q^+_1)}\right)$ 一般而言，对纳维–斯托克斯方程也不成立（参见 [3]）。

一些研究通过构造法向导数在边界附近发散的解，进一步推进了对边界附近斯托克斯系统正则性的理解（见 [2, 4, 23–25]）。在存在非光滑、空间局部化外力的情况下，也有研究针对具有齐次初始及边界数据的斯托克斯方程和纳维–斯托克斯方程的有限能量解进行了类似构造，导致解在边界附近出现奇异行为（见 [6]）。

在近期工作 [5], 中，构造了具体示例，其中速度场本身及其法向导数在边界附近变得无界，即 $\|w\|_{L^\infty(Q^+_{1/2})} = \infty$；即使远离边界数据的支集，速度及其梯度仍保持局部平方可积。

我们计算中的一个观察结果是，由某些奇异数据诱导的解的奇点可能会在边界附近、速度矢量——即流体流动方向——发生反向的区域内形成。据我们所知，实验证据强烈表明，这种流动反转与边界附近边界层分离的开始密切相关（见 [11, 26, 30]）。

近年来，尽管相关研究数量相对有限，但已有严谨的解析工作尝试通过渐近模型描述边界层分离。这些模型在边界附近近似纳维–斯托克斯方程，例如 Prandtl方程和三层结构模型。Prandtl [31]于 1905年 推导出的二维 Prandtl方程如下。

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y v - \partial_y^2 u = -\partial_x p_E, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad \lim\limits_{y\to\infty} u(x,y,t) = u_E(x,t), \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $(u_E,\ p_E)$ 通过伯努利条件 $\partial_t u_E + u_E\partial_x u_E = -\partial_x p_E$ 相关联。

对于稳态情形，[29] 证明，在压力梯度非正的条件下，即 $\frac{dp_E}{dx}(x) \le 0$，Prandtl方程对所有 $x > 0$ 均整体适定。相较之下，在逆压梯度条件 $\frac{dp_E}{dx}(x) > 0$ 下，[29] 进一步证明该方程仅局部适定，即存在一点 $x^* > 0$，超过该点后，方程(1.4) 的经典解不再存在。此外，实验表明，在这种逆压梯度情形下，边界处切向速度的法向导数在 $x \nearrow x^*$ 时趋于零，这一现象被称为 Goldstein奇异性（见 [15]）。Dalibard 和 Masmoudi 的开创性工作 [9], 严谨地证明了这一行为，并定量刻画了趋零速率（另见 [33]）。近年来，关于 Goldstein奇异性之后定常普朗特方程解的描述，只有少数进展。具体而言，[10, 19] 研究了定常普朗特方程显式解附近的稳定性，这些解呈现出 u 符号的变化（流动反转），称为 Falkner–Skan解。

对于非定常情形，基于 [37, 38], 中的数值证据，人们猜想：在 t_0 处发生分离的一个必要条件是当 $t \to t_0$ 时 u 发生爆破。该猜想在 [13] 中于对称性假设下对平凡外流得到了严格证实。对于非平凡欧拉外流，[27] 借助凸性论证，通过证明与位移厚度相关的李雅普诺夫泛函发生爆破，从而证明了 [37] 中所给外欧拉流的有限时爆破（另见 [7, 8] 中的进一步发展）。

最近，人们提出了三层结构模型，希望比普朗特系统更准确地描述分离点附近的流动。该模型的数学分析已取得重要进展，尤其是关于其局部适定性与不适定性（见 [12, 14, 17, 18] 及其中的参考文献）。

受分离点和逆流问题的启发，本文的主要目标是构造一个斯托克斯系统（纳维–斯托克斯方程的线性化）的解，使其速度分量能够改变符号。本研究旨在深入理解流动反转的内在机制及其与边界附近奇异行为的联系，并探讨其对边界层分离现象可能产生的影响。

与纳维–斯托克斯方程相比，斯托克斯系统的一个主要优点是，可以通过格林张量为具有一般初始数据和边界数据的解写出显式表示公式。这一表示最初由 Golovkin 提出 [16] ，并由 Solonnikov [34,35] 进一步发展（对于非限制格林张量的情形，另见 [24] ）。因此，斯托克斯系统允许对流动进行细致的逐点分析，包括边界附近的区域。

1.1. 主要结果。 鉴于前述讨论与已有结果，我们现在以适合本文分析的形式引入分离点 与反转点 的适当定义。

我们首先引入分离点的概念，它是指某一特定时刻的边界点，在该时刻之前或之后紧邻的邻域内，速度的切向分量发生符号变化。更精确地说，其定义如下。

定义 *1.1.* 设 w 为斯托克斯系统的解，且 w_i 为w的第 i个切向分量。若存在$i \in \{1,\cdots,n-1\}$、正常数 δ、δ_1、δ_2、非增函数 $\alpha_i:(t_*-\delta_1,t_*) \to \mathbb{R}_+$ 以及非减函数 $\beta_{ik}:(t_*,t_*+\delta_2)\to(0,\delta)\ (k=1,2)$，满足 $\beta_{i1}(t) \le \beta_{i2}(t)$，则称点 $z^*=(x_*',0,t_*) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ 为 $w=(w_1,\cdots,w_n)$的分离点，使得

(i) 对每个 $t\in(t_*-\delta_1,t_*)$，所有 $0<x_n<\alpha_i(t)$ 均满足 $w_i(x_*',x_n,t)>0\,(<0,$ 分别如此*)*。*(ii)* 对每个 $t\in(t_*,t_*+\delta_2)$，所有 $0<x_n<\beta_{i1}(t)$ 均满足 $w_i(x_*',x_n,t)<0\,(>0,$ 分别如此 *)*。*(iii)* 对每个 $t\in(t_*,t_*+\delta_2)$，所有 $\beta_{i2}(t)<x_n<\delta$ 均满足 $w_i(x_*',x_n,t)>0\,(<0,$ 分别如此*)*。*(iv)* $\lim_{t\to t_*^+}\beta_{i2}(t)=0$。

下图（图1）给出了一个示例，展示了定义 1.1 中的条件。

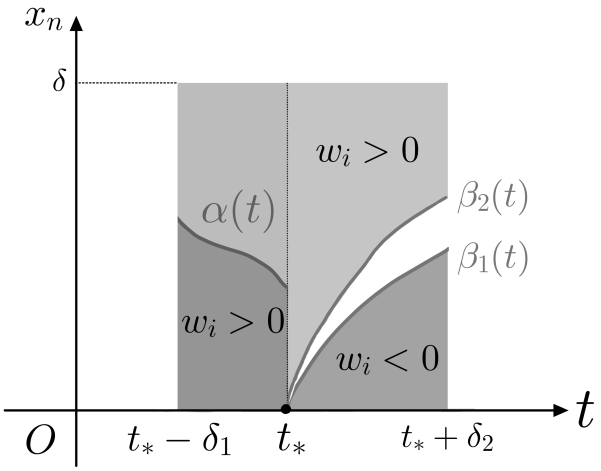


FIGURE 1. 分离点

注 1.2。 区域 $\{(x,t):t_*<t<t_*+\delta_2, 0<x_n<\beta_1(t)\}$ 表示反向流动。注意，我们不要求 $t_*-\delta_1<t<t_*$ 和 $\alpha(t)$ 在 $t\to t_*$ 时趋于零。

注 1.3. 我们指出，定义 *1.1*虽然专家可能早已知晓，但在文献中似乎尚未被明确表述。它可以视为对流动的一种几何刻画，其表述依据是边界附近切向速度分量的符号。特别是，导致分离点出现之前的流动行为描述，似乎与先前的实验观测一致（见 [1,32,36]），也与 [39] 中提出的定义一致。然而，据作者所知，分离点之后相应的流动描述此前尚未以这种方式表述，因此似乎是新的（不同的分离点定义，见例如 [28,39] ）。

接下来，我们引入反转点的概念，它指固定时刻的一个内部点：在该时刻的某个时间邻域内，速度的一个分量相对于法向变量改变符号。更确切地说，其定义如下。

定义 *1.4*。设 w 是由 *(2.1)* 定义的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解。对于 $1 \le i \le n$，点 $z^* = (x'_*, x^*_n, t_*) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ 是 w_i 的一个反转点（位于内部），若存在 $\delta_1, \delta_2 > 0$ 以及函数 $f : (t_* - \delta_1, t_* + \delta_1) \to (x^*_n - \delta_2, x^*_n + \delta_2)$、$g : (t_* - \delta_1, t_* + \delta_1) \to (x^*_n - \delta_2, x^*_n + \delta_2)$ 和 $h : (t_* - \delta_1, t_* + \delta_1) \to (x^*_n - \delta_2, x^*_n + \delta_2)$，使得 $h(t_*) = x^*_n$，且对所有 $t \in (t_* - \delta_1, t_* + \delta_1)$，

$$w_i(x'_*, h(t), t) = 0, \quad f(t) < h(t) < g(t) \quad \text{and} \quad w_i(x'_*, f(t), t) w_i(x'_*, g(t), t) < 0.$$

注 1.5. 与注 *1.3*类似，定义 *1.4*根据速度分量的符号，对流动进行了几何描述。该定义可视为近期文献中所述反转点的非定常类比 [19] 和 [10]。

在陈述主要结果之前，我们先给出边界数据 g： $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $(n \ge 2)$，其仅有非零的第 $j-$ 个分量，定义如下：

$$g(y', s) = g_j(y', s)\mathbf{e}_n = \psi(y')\phi(s)\mathbf{e}_n. \tag{1.5}$$

这里，假设 $\psi \ge 0$ 和 $\phi \ge 0$ 满足

$$\psi \in C_c^\infty(B'_{\frac{1}{2}}), \quad \text{supp } \phi \subset (0, 1), \quad \phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty([0, 1)). \tag{1.6}$$

特别地，对于 $s \in \left(\frac{1}{2}, _ 1\right)$，我们假设 $\phi(s)$ 由下式给出

$$\phi(s) = (1 - s)^a, \qquad -1 < a \le a_0, \tag{1.7}$$

其中， a_0 是一个正数，为了不失一般性，本文中均取其为 1。最后，我们用 M 表示以下量

$$M = \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(s) ds. \tag{1.8}$$

我们的第一个主要结果讨论了在半空间中，具有零初始数据和由（1.1）给出的边界数据（1.5）-（1.7）的斯托克斯系统存在分离点的问题。

定理 *1.6*（分离点的存在性）。设 $-1 < a \le -\frac{1}{2}$ 和 w 是由（*2.1*）定义的斯托克斯系统（*1.1*）的解，其边界数据 $g = g_n \mathbf{e}_n$ 由（*1.5*）-（*1.7*）给出。存在一个充分大的常数 $N > 1$，使得若 $|x'| > N$，则（x'，*0*，*1*）是 w_i 在 $1 \le i \le n - 1$处的一个分离点。

注 1.7。（i）当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时，我们注意到（x'，0，1）不是 w的分离点，因为定义 *1.1* 中的最后一个条件不满足。事实上，结果表明 $\lim_{t \to 1^+} \beta_{i2}(t) > 0$（更多细节见命题 *3.7*的（*ii*）-（*d*）、（*e*））。

(ii) 当 $a > 0$ 时，我们指出，存在充分小的 $\delta > 0$，使得对于 $x_n \ll 1$ 和 $t \in (1 - \delta, 1 + \delta)$，$w_i(x, t) < 0$，这意味着 $(x', 0, 1)$ 仍不是 w 的分离点（更多细节请参见命题 *3.7* 的 *(ii)-(e)* 以及命题 *4.6* 的 *(2)*）。可以证明，存在 $\phi(t)$，使得对于满足 $x_n < \sqrt{t}$ 的 $t \ll 1$，$w_i(x, t) > 0$，因此我们猜想存在 $t_* \in (0,1)$，使得 $(x', 0, t_*)$ 是 w 的分离点。

为陈述第二个主要结果，我们将 $x^*_{kn} = x^*_{kn}(x', t)$ 记为 w_k 的零点，即 $w_k(x', x^*_{kn}, t) = 0$。下面的定理讨论 x^*_{kn} 在时间 $t = 1$ 附近的渐近性。

定理 *1.8*（x^*_{kn}的渐近性）。设 w 是由式 *(2.1)* 定义、具有由式 *(1.5)–(1.7)* 给出的边界数据 $g = g_n \mathbf{e}_n$ 的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解。存在充分大的 $N > 1$ 和充分小的 $\delta = \delta(|x'|) > 0$，使得对于 $|x'| > N$和 $0 < |t - 1| < \delta$，存在正的常数 c_i $(i = 1, \cdots, 8)$ 和

d_1, d_2，它们仅依赖于 n，使得以下结论成立：对于 $i \neq n$,

$$
\begin{aligned}
x_{ni}^* \approx & \left[\left(\left\{(a+1)^{\frac{1}{1-2a}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{\frac{a+\frac12}{2a-1}}\mathbf{1}_{|x'|^2\geq\frac{c_1}{|a+\frac12|}}+\left|a+\frac12\right|^{\frac{1}{1-2a}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{\frac{a+\frac12}{2a-1}}\mathbf{1}_{|x'|^2\leq\frac{c_2}{|a+\frac12|}}\right\}\mathbf{1}_{-1<a<-\frac12}\right.\right.\\
&+|x'|\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac12}\mathbf{1}_{a=-\frac12}+\left\{(a+\frac12)^{\frac12}|x'|\mathbf{1}_{|x'|^2\leq\frac{c_3}{a+\frac12}}+(\ln|x'|)^{\frac12}\mathbf{1}_{|x'|^2\geq\frac{c_4}{a+\frac12}}\right\}\mathbf{1}_{a>-\frac12}\Big)\mathbf{1}_{1<t<1+\delta}\\
&\left.+(\ln|x'|)^{\frac12}\mathbf{1}_{a>0}\mathbf{1}_{1-\delta<t<1}\right]\mathbf{1}_{x_n\leq|x'|},\\
x_{nn}^* \approx & |x'|\mathbf{1}_{x_n>d_2|x'|}+\Big[(a+1)(t-1)^{\frac12-a}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{1<t<1+\delta}\mathbf{1}_{-1<a<0}+\mathbf{1}_{a=\frac12}\\
&+e^{-\frac{2a+1}{2a}|x'|^2}\Big(\{\mathbf{1}_{|x'|\geq\frac{c_5}{\frac12-a}}+(1-2a)^{\frac{1}{2a}}\mathbf{1}_{|x'|^2\leq\frac{c_6}{\frac12-a}}\}\mathbf{1}_{0<a<\frac12}\\
&+\{(2a-1)\mathbf{1}_{|x'|^2<\frac{c_7}{a-\frac12}}+\mathbf{1}_{|x'|\geq\frac{c_8}{a-\frac12}}\}\mathbf{1}_{\frac12<a<1}\Big)\Big]\mathbf{1}_{x_n\leq d_1|x'|}.
\end{aligned}
$$

注 1.9. 我们指出，定理1.6确实是定理 x_{kn}^* 中的渐近性1.8的推论。我们注意到，若 $a<-\frac12$，则 $\beta_{ik}(t)$ 在 w_i 时的增长率为 $(t-1)^{\frac{a+\frac12}{2a-1}}$。

定理1.6以及 x_{kn}^* 在 t取一般值时的渐近行为，是通过一系列命题得出的：命题3.7(x_{in}^*, $t>1$)，命题3.12(x_{nn}^*, $t>1$)，命题4.6(x_{in}^*, $t<1$)以及命题4.10(x_{nn}^*, $t<1$)。

下一个定理描述了 w_i 反转点的存在性。

定理 *1.10*（反转点的存在性）。设 w 是由边界数据 $g=g_n\boldsymbol{e}_n$ 确定的斯托克斯系统 ***(1.1)*** 的解，该解由 ***(2.1)*** 定义，边界数据由 ***(1.5)-(1.7)*** 给出。则存在 $c_*>0$ 和 $0<\delta\ll1$，使得对于满足 $|x'|\geq c_*(1+\sqrt{t})$ 的固定 (x',t)，以下结论成立。

(i) 对于 $-1<a<0$，对于所有 $t>1$，$w_i(x',x_n,t)$ $(i\neq n)$ 至少存在一个反转点；对于所有 $t>1$，$w_n(x',x_n,t)$ 至少存在两个反转点。(ii) 对于 $a>0$，对于所有 $t>1-\delta$，$w_i(x',x_n,t)$ $(i\neq n)$ 至少存在一个反转点；对于所有 $t>1-\delta$，$w_n(x',x_n,t)$ 至少存在两个反转点。

注 1.11. 直接计算可验证，对于某些可容许的边界数据，当 x_i 足够大时，压力 $\partial_{x_i}p$ 的切向导数在 $t>1$ 处为正。另一方面，存在 $\delta=\delta(a)>0$，使得当 $t\in(1-\delta,1)$ 时，$\partial_{x_i}p$ 在 $a>0$ 时为正，在 $a<0$ 时为负。这种行为与分别称为有利压力梯度和不利压力梯度的现象密切相关。尤其是，不利压力梯度被认为是导致边界附近边界层分离的主要机制，特别是当外流为由欧拉方程支配的剪切流时。

本文的结构如下。在第2节中，我们介绍标准记号，回顾与泊松问题相关的斯托克斯方程的解公式，并给出若干在分析中会用到的积分估计。第3 节和4 节用于证明定理1.8。如前所述，定理1.8分为命题3.7、命题3.12、命题4.6和命题4.10。随后，定理1.10的证明按照上述命题分情形展开，并在每个命题的证明之后给出。在第4节末尾，我们证明定理1.4。最后，附录汇集了辅助结果，包括技术性积分估计和初等不等式的证明。

2. Preliminaries

我们首先介绍以下约定。对于 $1\leq i\leq M$、$1\leq j\leq N$ 以及定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$ 上的函数 $f=f(x,t)$、$g_i=g_i(x,t)$、$h_j=h_j(x,t)$，若存在与 x 和 t 无关的正数常数 c_i，d_i，$\widetilde{c}_j$，d_j，α_j，β_j，使得

$$
\sum_{i=1}^M c_ig_i+\sum_{j=1}^N\widetilde{c}_jh_je^{-\alpha_jt}\leq f\leq\sum_{i=1}^M d_ig_i+\sum_{i=1}^N\widetilde{d}_jh_je^{-\beta_jt}.
$$

类似地，若存在与 x 和 t 无关的正数常数 c_i，$\widetilde{c}_j$，α_j，使得

$$f \le \sum_{i=1}^{M} c_i g_i + \sum_{j=1}^{N} \widetilde{c}_j h_j e^{-\alpha_j t}.$$

接下来，我们回顾半空间中斯托克斯方程的泊松核。众所周知，具有一般边界数据 $g=(g_1,\cdots,g_n)$ 的半空间中斯托克斯方程（1.1）的解可表示为

$$w_i(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_{ij}(x-y',t-s) g_j(y',s) dy' ds, \tag{2.1}$$

其中 $x-y':=(x'-y',x_n)$ 且 K_{ij}为 $\mathbb{R}^n_+ \times(0,\infty)$ 中斯托克斯系统的泊松核，其定义如下（见 [35]）：

$$K_{ij}(x,t) = -2\delta_{ij}\partial_{x_n}\Gamma(x,t) + 4L_{ij}(x,t) + 2\delta_{jn}\delta(t)\partial_{x_i}N(x), \quad i,j,=1,2,\cdots,n, \tag{2.2}$$

其中

$$L_{ij}(x,t) = \partial_{x_j} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{z_n}\Gamma(z,t)\partial_{x_i}N(x-z) dz,' dz_n \quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{2.3}$$

Here Γ 和 N 分别是如下定义的 n维热核和牛顿核 by

$$\Gamma(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t>0, \\ 0 & t\le 0, \end{cases} \quad N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln|x| & n=2, \\ -\frac{1}{n(n-2)\omega_n}|x|^{-n+2} & n\ge 3, \end{cases} \tag{2.4}$$

其中 ω_n 是 n维单位球的体积。我们还用 $\Gamma'=\Gamma'(x',t)$ 表示（$n-1$）维热核。

已知在 [35] 中，L_{ij} 在 $x\neq 0$ 和 $t>0$ 中光滑，并满足以下关系：

$$\sum_{i=1}^{n} L_{ii} = \frac{1}{2}\partial_{x_n}\Gamma, \quad L_{ij}=L_{ji}\ (1\le i,j\le n-1), \quad L_{in}=L_{ni}+B_{in}\ (i\neq n), \tag{2.5}$$

其中

$$B_{in}(x,t) := \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x-z',t)\partial_{z_i}N(z',0)dz'. \tag{2.6}$$

2.1. **积分估计**。 在本小节中，我们给出一些将在本文中通篇使用的积分估计。我们将处理的主要积分是 L_{ij} 由（2.3）给出，并将借助引理2.1 和引理2.2加以估计。

For $x\in\mathbb{R}^n_+$、 $t>0$ 以及非负整数 m 和 k，我们引入如下积分：

$$I_{m,k}(x,t) := \int_0^{x_n} \frac{x_n-z_n}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_n-z_n)^2}{4t}} \frac{z_n^k}{(|x'|^2+z_n^2)^{\frac{m}{2}}} dz_n. \tag{2.7}$$

我们首先给出$I_{m、k}$ 的估计，其证明将在附录A.1中给出。

引理 2.1. 设 $I_{m,\ k}$ 为式（2.7）中给出的积分。对于 $x\in\mathbb{R}^n_+$ 和 $t>0$ 满足$|x'|\ge\sqrt{t}$的情形，我们有e

$$I_{m,k}(x,t) \approx t^{-\frac{1}{2}} x_n^k |x|^{-m} \min\left\{1, x_n^2 t^{-1}\right\}.$$

现在我们给出热核和牛顿核的卷积型估计。每个卷积的主项都是牛顿核的导数，而误差项关于x的阶数更高。

引理 2.2. 设$(x',t)\ \in(\mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\})\times\mathbb{R}_+$满足 $|x'|\ge$最大值$\{1,\sqrt{t}\}$和 $1\le i\le n-1$。则有以下结论。

(i) 对于 $x_n > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma'(x'-z',t)\partial_{z_i}\partial_{x_n}N(z',x_n)dz' = \partial_{x_i}\partial_{x_n}N(x) + \partial_{x_i}\Gamma'(x',t)\mathbf{1}_{x_n\le 2|x'|} + J_1(x,t), \tag{2.8}$$

where $|J_1(x,t)| \lesssim \dfrac{tx_n}{|x|^{n+2}|x'|}$.

ii)$_n$*For* $x_n > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma'(x'-z',t)\partial_{z_i}\partial_{z_j}N(z',x_n)dz' = \partial_{x_j}\partial_{x_i}N(x) + J_2(x,t), \tag{2.9}$$

where $|J_2(x,t)| \lesssim \left(t + \delta_{ij}x_n^2 e^{-\frac{c|x'|^2}{t}}\right)|x|^{-n-2}$.

(iii)

$$\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma'(x'-z',t)\partial_{z_i}N(z',0)dz' = \partial_{x_i}N(x',0) + J_3(x',t), \tag{2.10}$$

其中 $|J_3(x',\ t)| \lesssim t|x'|^{-n-1}$。

引理 2.2 的证明将在附录 A.2中给出。

注 2.3. 由于 $\partial_{x_1}N(x',\ 0) + J_3(x',\ t) \approx \partial_{x_1}N(x',\ 0)$对 $x_i > c|x'|$和 $|x'| > 1$, 由引理 *2.2* 的 *(3)* 可得

$$B_{in}(x,t) \approx -t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x_n^2}{t}}\frac{x_i x_n}{|x'|^n}, \quad 1 \le i \le n-1, \tag{2.11}$$

其中 $B_{in}(x,\ t)$ 由 (2.6) 给出。

设 $1 \le i,j \le n$, 以及 $\widetilde{B}_\epsilon(0) := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid |x| < \epsilon\}$。我们引入如下奇异积分

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_{ij}(x,t) &:= \text{p.v.}\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}\partial_{z_j}N(z)dz \\ &:= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0)} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}\partial_{z_j}N(z)dz.\end{aligned} \tag{2.12}$$

~下一个命题给出了 L_{ij} 与 L_{ij}之间的关系。

~**命题 2.4.** 设 L_{ij} 与 L_{ij} 由 (2.3) 和 (2.12)分别给出。则对 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 与 $t > 0$, 下列恒等式成立:

$$L_{ij}(x,t) = \widetilde{L}_{ij}(x,t) + \frac{\delta_{ij}}{2n}\partial_{x_n}\Gamma(x,t) + \delta_{i<n,j=n}B_{in}(x,t), \tag{2.13}$$

其中 $B_{in}(x,t)$ 由 (2.6)给出。

证明。 我们首先注意到 L_{ij} 的被积函数具有可积奇点, 因此该积分绝对收敛。从而将微分符号 ∂_{x_j} 在 (2.3) 中于积分号下进行交换是合理的。

$$\begin{aligned}L_{ij}(x,t) &= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0)} \partial_{x_j}\partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)dz \\ &= -\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0))} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\nu_j dz + \widetilde{L}_{ij}(x,t),\end{aligned} \tag{2.14}$$

其中, ν_j 表示边界 $\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,\ x_n) - \widetilde{B}_\epsilon(0))$ 的法向量的第 j 个分量。注意, 第一个等式对 $j = n$ 也成立, 因为将被积函数在 $z_n = x_n$ 处取值所产生的额外边界项, 利用 $\partial_{x_n}\Gamma(x',\ 0,\ t) = 0$ 这一事实可知为零。

• **(情形 1：** $i \neq j$, $j < n$) 由于 $j \neq n$，我们只需考虑半球 $B_\epsilon(0)$ 的边界，记作 $\widetilde{S}_\epsilon(0)$。于是

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0))} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\nu_j dS_z = -\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\frac{z_j}{|z|}dS_z$$
$$= -\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \left(\partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)-\partial_{x_n}\Gamma(x,t)\right)\partial_{z_i}N(z)\frac{z_j}{|z|}dS_z - \partial_{x_n}\Gamma(x,t)\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)}\partial_{z_i}N(z)\frac{z_j}{|z|}dS_z.$$

最后一个积分因被积函数关于 z_i 和 z_j 的奇对称性而为零。对于第一个积分，根据中值定理，存在 $\xi = x-\theta z$，其中某个 $\theta \in$ 属于 (0，1)，使得

$$|\partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)-\partial_{x_n}\Gamma(x,t)| \le c|z|\,|\nabla\partial_{x_n}\Gamma(\xi,t)| \le c|z|\left(\frac{1}{t}+\frac{x_n\left(|x|+\epsilon\right)}{t^2}\right)e^{-\frac{(|x|-\epsilon)^2}{4t}}.$$

因此，我们得到

$$\left|\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \left(\partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)-\partial_{x_n}\Gamma(x,t)\right)\partial_{z_i}N(z)\frac{z_j}{|z|}dS_z\right| \le \int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} c\epsilon\left(\frac{1}{t}+\frac{x_n\left(|x|+\epsilon\right)}{t^2}\right)e^{-\frac{(|x|-\epsilon)^2}{4t}}\frac{1}{\epsilon^{n-1}}dS_z$$
$$\le c\epsilon\left(\frac{1}{t}+\frac{x_n\left(|x|+\epsilon\right)}{t^2}\right)e^{-\frac{(|x|-\epsilon)^2}{4t}},$$

当 $\epsilon \to 0$ 时趋于零。因此，当 $\epsilon \to 0$ 时，边界积分趋于零，并且我们有 $L_{ij}(x,\ t) = L_{ij}(x,\ t)$。

• (**情形 2：** $i = j < n$) (2.14) 中的边界项变为

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0))} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\nu_i dS_z$$
$$= -\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \left(\partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)-\partial_{x_n}\Gamma(x,t)\right)\partial_{z_i}N(z)\frac{z_i}{|z|}dS_z - \partial_{x_n}\Gamma(x,t)\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)}\partial_{z_i}N(z)\frac{z_i}{|z|}dS_z.$$

与情形 1 类似，第一个积分当 $\epsilon \to 0$ 时趋于零；对于第二个积分，我们看到

$$\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \partial_{z_i}N(z)\frac{z_i}{|z|}dS_z = \int_{|z|=\epsilon, z_n>0}\frac{c_n z_i^2}{\epsilon^{n+1}}dS_z = \frac{1}{2n}. \tag{2.15}$$

将此式与（2.15）及（2.14）结合，得到 $L_{ij} = \widetilde{L}_{ij} + \frac{1}{2n}\partial_n\Gamma$（$x$，$t$）。

• （**情况3：** $i = j = n$）（2.14）中的边界项变为

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0))} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_n}N(z)\nu_n dz$$
$$= -\int_{|z'|>\epsilon} \partial_{x_n}\Gamma(x'-z',x_n,t)\partial_{z_n}N(z',0)dz' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-z',0,t)\partial_{z_n}N(z',x_n)dz'$$
$$-\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_n}N(z)\frac{z_n}{|z|}dz := -I_1 + I_2 - I_3.$$

注意，由于 $I_1 = I_2 = 0$（$\partial_{z_n}Nz'$，0）$= 0$ 且 $\partial_{x_n}\Gamma$（$x'-z'$，0，t）$= 0$。对于最后一个积分 I_3，根据情况 $i = j < n$ 中给出的类似计算可得 $I_3 \to \frac{1}{2n}\partial_{x_n}\Gamma$（$x$，$t$）为$\epsilon \to 0$。

• （**情形 4：** $i < j = n$）注意，（2.14）中的边界项变为

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^{n-1}\times(0,x_n)-\widetilde{B}_\epsilon(0))} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\nu_n dz$$
$$= -\int_{|z'|>\epsilon} \partial_{x_n}\Gamma(x'-z',x_n,t)\partial_{z_i}N(z',0)dz' + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-z',0,t)\partial_{z_i}N(z',x_n)dz'$$
$$-\int_{\widetilde{S}_\epsilon(0)} \partial_{x_n}\Gamma(x-z,t)\partial_{z_i}N(z)\frac{z_n}{|z|}dz = -J_1 + J_2 - J_3.$$

与情形 1 类似，$J_2 = 0$ 由于 $\partial_{x_n}\Gamma$(x′ − z′，0，t) $= 0$ 且 $J_3 \to 0$ 与情形 $i \neq j$ 中一样，$j < n$。最后我们指出，$J_1 \to B_{in}$ 与 $\epsilon \to 0$ 一样。证明至此完成。□

注 2.5。 我们注意到，恒等式 (2.13) 再次确认了公式 (2.5)。由于验证过程直接明了，我们略去其细节。

下面的引理给出了本节的主要估计，为某些$\sim L_{ij}$提供逐点估计；这些量将出现在 w_i 和 w_n的解公式中（见（2.18）、（2.19）和（2.20））。

引理 2.6。 设 $1 \le i \le n-1$。存在 $N = N(n) > 1$, $0 < \epsilon_0 < 1$和 $c_0 > 1$，使得对于 $|x'| \ge N, x_n > 0$ 和 $\sqrt{t} < \epsilon_0 |x'|$，下述结论成立：

$$\sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{L}_{kk}(x,t) \approx \frac{|x'|^2 - (n-1)x_n^2}{t^{\frac{1}{2}}|x|^{n+2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\}. \tag{2.16}$$

此外，若 $|x'| \le c_0 x_i$，则

$$\widetilde{L}_{ni}(x,t) \approx \left(\frac{x_n}{|x|^{n+2}} + \frac{1}{t^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t}}\right) \frac{x_i}{t^{\frac{1}{2}}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\}. \tag{2.17}$$

引理 2.6 的证明见附录 A.3。

现在，我们引入具有由（1.1）给出的边界数据（1.5）的解的分解公式。记

$$\begin{aligned}
w_{ij}^L(x,t) &:= 4\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} L_{ij}(x-y',t-s)\psi(y')\phi(s)dy'ds, \quad 1 \le i,j \le n,\\
w_{ij}^{(L)}(x,t) &:= 4\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{L}_{ij}(x-y',t-s)\psi(y')\phi(s)dy'ds, \quad 1 \le i,j \le n,\\
w_i^B(x,t) &:= 4\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} B_{in}(x-y',t-s)\psi(y')\phi(s)dy'ds, \quad 1 \le i \le n-1,\\
w_i^N(x,t) &:= 2\phi(t)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_i} N(x-y')\psi(y')dy', \quad 1 \le i \le n,\\
w^G(x,t) &:= -2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x-y',t-s)\psi(y')\phi(s)dy'ds,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中 $x - y' := (x' - y',\ x_n)$。

于是由（2.1）、（2.2）以及命题2.4，可得

$$w_i(x,t) = w_{in}^{(L)}(x,t) + w_i^B(x,t) + w_i^N(x,t), \quad 1 \le i \le n-1, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
w_n(x,t) &:= -\sum_{i=1}^{n-1} w_{ii}^L(x,t) + w_n^N(x,t) + w^G(x,t)\\
&= -\sum_{i=1}^{n-1} w_{ii}^{(L)}(x,t) + w_n^N(x,t) + \frac{n-1}{n} w^G(x,t).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

在下一个引理中，我们给出某些非平凡代数方程零点的估计，这些方程出现在 w_i 和 w_n 的估计中，因此这些估计将有助于确定反转点的渐近行为。

引理 2.7。 令 $h(\theta) = \theta^a \ln\theta$，其中 $\theta > 0$，且 $a > 0$。

(i) 若 $M < \frac{1}{2}$，则对所有 $0 < \theta < \theta_1^*$，$h(\theta) > -M$；并且对所有 $\theta_2^* < \theta < e^{-1}$，$h(\theta) < -M$，其中

$$0 < \theta_1^* = \left(\frac{eaM}{e+1}\right)^{\frac{1}{a}} \left(\ln\frac{e+1}{eaM}\right)^{-\frac{1}{a}} < \theta_2^* = (aM)^{\frac{1}{a}} \left(\ln\frac{1}{aM}\right)^{-\frac{1}{a}} < e^{-\frac{1}{a}}.$$

(ii) 若 $M > 2$ 且 $c > 0$，则对于所有 $\sqrt{2} < \theta < \bar{\theta}_1^*$，$h(\theta) < cM$；并且对于 $\theta > \theta_2^*$，$h(\theta) > cM$，其中$\bar{\theta}_i^* := A_i M^{\frac{1}{a}} (\ln M)^{-\frac{1}{a}}$满足

$$A_1 := 2^{\frac{1}{a}} \max\{4, (ac)^{\frac{1}{a}}\}, \quad A_2 := 2^{\frac{1}{a}} \min\left\{4, \left(\frac{ac}{2a+3}\right)^{\frac{1}{a}}\right\}.$$

证明见附录 A.7。

注 2.8. 我们还列出以下初等不等式，它们有助于确定反转点的渐近行为。对于固定的 $\epsilon > 0$，以及任意 $x > 1$，

$$\epsilon \ln x \mathbf{1}_{x \le e^{\frac{1}{\epsilon}}} + \frac{e-1}{e} x^{\epsilon} \mathbf{1}_{x > e^{\frac{1}{\epsilon}}} \le x^{\epsilon} - 1 \le (e-1)\epsilon x \mathbf{1}_{x \le e^{\frac{1}{\epsilon}}} + x^{\epsilon} \mathbf{1}_{x > e^{\frac{1}{\epsilon}}}. \tag{2.21}$$

最后，我们引入一个记号，用来表示可测函数改变符号的区间集合。

定义 2.9. 设 $0 \le a < b \le \infty$ 和 $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是一个可测函数。我们定义

$$S^{-+}(f;a,b) := \{(y_1,y_2) \subset (a,b) \mid f(s) < 0 \text{ if } a < s < y_1, f(s) > 0 \text{ if } y_2 < s < b\},$$
$$S^{+-}(f;a,b) := \{(y_1,y_2) \subset (a,b) \mid f(s) > 0 \text{ if } a < s < y_1, f(s) < 0 \text{ if } y_2 < s < b\}.$$

注 2.10. 假设 f 在 $\mathbb{R}$上连续且有界。根据介值定理，如果存在 $(y_1^*, y_2^*) \in S^{-+}(f; a, b) \cup S^{+-}(f; a, b)$，那么存在 $y^* \in (y_1^*, y_2^*)$ 使得 $f(y^*) = 0$。在后续命题的证明中，我们将利用这一点来完成关于流动反转存在性的论证。

3. Signs of velocity components and asymptotics of reversal points for $t > 1$

本节中，我们将推导 x_n^* 的 $w_j(x, t)$ $(1 \le j \le n)$ 关于 $t > 1$的一些渐近性。主要结果见命题 3.7 和命题3.12，它们分别对应速度的切向分量和法向分量。

3.1. 速度场的切向分量。

3.1.1. 关于 w_i的估计。 首先引入若干积分，它们将在对 w_i的估计中出现。对于 $x_n > 0, r > 0, t > 1, a > -1$ 和 $k \ge 0$，定义以下积分。

$$\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t) := \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} ds, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{H}_{a,k}(r,t) := \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} e^{-\frac{r^2}{4(t-s)}} ds, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{K}_{a,k}(x,t) := \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} ds. \tag{3.3}$$

在下面的引理中，我们给出 w_i 关于$\mathcal{G}_{a,k}$、$\mathcal{H}_{a,k}$ 和$\mathcal{K}_{a,k}$的逐点估计。

引理 3.1 (**关于 w_i的估计。** 存在一个仅依赖于 n 的充分大的 $N \ge 1$，使得以下结论成立：设 $t > 1$, $|x'| \ge N(1+\sqrt{t})$ 以及 $x_i \ge \frac{1}{2}|x'|$和 $i \ne \bar{n}$，并记 $M := \int_0^{\frac{1}{2}} \phi(s) ds$。那么

$$\begin{aligned} w_i(x,t) \approx{}& \frac{M x_n x_i}{|x|^{n+2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \frac{M x_i}{t^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}} \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t) + x_i \mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t) \\ &- \frac{x_i x_n}{|x'|^n} \left(M t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x_n^2}{t}} + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t) \right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

证明。 回顾（2.19），通过（2.18）$_2$ 以及（2.17），可得

$$\begin{aligned} w_i^{(L)}(x,t) &\approx \int_0^1 \left(\frac{x_n}{|x|^{n+2}} + \frac{1}{(t-s)^{\frac{n+1}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}} \right) \frac{x_i}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s) ds \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cdots ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \cdots ds = I + J. \end{aligned}$$

我们分别估计 I 和 J。

$$I = \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t-s}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds + x_i \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds$$
$$\approx \frac{M x_n x_i}{|x|^{n+2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \frac{M x_i}{t^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\},$$

$$J = \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds + x_i \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds$$
$$\approx \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}} \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n, t) + x_i \mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x, t).$$

另一方面，由 (2.18)3,(2.11)，可得

$$w_i^B(x,t) \approx -\frac{x_i x_n}{|x'|^n} \int_0^1 \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x_n^2}{4(t-s)}} \phi(s)ds \approx -\frac{x_i x_n}{|x'|^n} \left(M t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x_n^2}{t}} + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n, t) \right).$$

将所有估计相加即可得到所需结果。 □

在以下辅助引理中，我们给出积分 (3.1)-(3.3) 的逐点估计。我们注意到，″ ≈″ 中的常数与 a 和 k 无关。这些引理的证明分别见附录A.4、A.5 和 A.6。

引理 3.2。设 $x_n > 0$, $t > 1$, $a > -1$ 和 $k \geq 0$。则有以下结论。(i) 若 $t \geq \frac{9}{8}$，则有 $\mathcal{G}_{a,k}(x_n, t) \approx \frac{1}{a+1}(t-1)^{-k}$ 最小值 $\left\{1, \frac{x_n^2}{t-1}\right\}$. (ii) 若 $1 < t < \frac{9}{8}$ 和 $x_n \leq \sqrt{2(t-1)}$，则有

$$\mathcal{G}_{a,k}(x_n, t) \approx x_n^2 \left(\frac{2^{k-a} - (t-1)^{a-k}}{a-k} \mathbf{1}_{a \neq k} + |\ln(2(t-1))| \mathbf{1}_{a=k} + \frac{1}{1+a}(t-1)^{a-k} \right).$$

(iii) 若 $1 < t < \frac{9}{8}$ 和 $x_n \geq \frac{1}{2}$，则有

$$\mathcal{G}_{a,k}(x_n, t) \approx \frac{2^{k-a-1} - (t-1)^{-k+a+1}}{1-k+a} \mathbf{1}_{a \neq k-1} + |\ln(2(t-1))| \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{1}{1+a}(t-1)^{-k+a+1}.$$

(iv) 若 $1 < t < \frac{9}{8}$ 和 $\sqrt{2(t-1)} \leq x_n \leq \frac{1}{2}$，则有

$$\mathcal{G}_{a,k}(x_n, t) \approx \frac{(t-1)^{a-k+1}}{1+a} \mathbf{1}_{-1<a<-1+\frac{k}{2}} + \frac{x_n^{2a-2k+2} - (t-1)^{a+1-k}}{a+1-k} \mathbf{1}_{-1+\frac{k}{2} \leq a < k-\frac{1}{2}, a \neq k-1}$$
$$+ \ln\left(\frac{x_n^2}{t-1}\right) \mathbf{1}_{a=k-1} + x_n \mathbf{1}_{a=k-\frac{1}{2}} + x_n^2 \frac{2^{k-a} - x_n^{2a-2k}}{a-k} \mathbf{1}_{k-\frac{1}{2} < a < k+\frac{1}{2}, a \neq k}$$
$$+ x_n^2 |\ln(2x_n^2)| \mathbf{1}_{a=k} + \frac{x_n^2}{2^a a} \mathbf{1}_{a \geq k+\frac{1}{2}}.$$

引理 3.3. 设 $r > 0$、$t > 1$、$a > -1$ 和 $k \geq 0$。则下述结论成立。(i) 若 $t > \frac{9}{8}$，则 $\mathcal{H}_{a,k}(r,t) \approx \frac{1}{a+1}(t-1)^{-k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}}$。(ii) 设 $1 < t < \frac{9}{8}$。(a) 若 $r \leq \sqrt{2(t-1)}$，则 $\mathcal{H}_{a,k}(r,t) \approx \frac{1 - \left(\frac{t-1}{r^2}\right)^{a+1-k}}{a+1-k} \mathbf{1}_{a \neq k-1} + |\ln(t-1)| \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}}$. (b) 若 $\sqrt{2(t-1)} \leq r \leq \frac{1}{2}$，则 (c) 若 $r \geq \frac{1}{2}$，则 $\mathcal{H}_{a,k}(r,t) \approx r^{-2} e^{-r^2} + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}}$。

$$\mathcal{H}_{a,k}(r,t) \approx \frac{1 - r^{2(a-k+1)}}{a+1-k} \mathbf{1}_{a \neq k-1} + |\ln r| \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}}.$$

引理 3.4. 设 $|x'|\geq 2$, $x_n>0$, $t>1$, $a>-1$ 和 $k\geq 0$。则下列结论成立。

(i) *Let* $t\geq \frac{9}{8}$, *then* $\mathcal{K}_{a,k}(x,t)\approx \dfrac{1}{a+1}(t-1)^{-k}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\dfrac{x_n^2}{t-1}\right\}$.

(ii) *Let* $1<t<\frac{9}{8}$, *then* $\mathcal{K}_{a,k}(x,t)\approx |x|^{-2}e^{-|x|^2}\min\left\{1,x_n^2\right\}+\dfrac{1}{1+a}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\dfrac{x_n^2}{t-1}\right\}$.

下面的引理表明，在 (x,t) 与 a 的某些条件下，积分 $\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}$ 受积分 $\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}$ 控制。

引理 3.5. 设 $1<t<\frac{9}{8}$。若要么 $\sqrt{2(t-1)}\leq x_n<\frac{1}{2}$ 且 $-1<a\leq 0$，要么 $\frac{1}{2}\leq x_n\leq |x'|$，则

$$\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t)\lesssim \frac{x_n}{|x|^{n+2}}\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t).$$

证明。我们首先考虑 $\sqrt{2(t-1)}\leq x_n<\frac{1}{2}$ 且 $-1<a\leq 0$ 的情形。我们将证明 $\frac{|x|^{n+2}}{x_n}\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t)\lesssim \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t)$。对于右侧不等式，注意到 $\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t)$ 是关于 a 的递减函数。因此由引理 3.2，我们得到，对 $-1<a\leq 0$,

$$\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t)\geq \mathcal{G}_{0,\frac{1}{2}}(x_n,t)\approx x_n.$$

现在证明左侧不等式。通过变量替换,

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n+2}}{x_n}\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t)&=x_n|x|^{n+2}\left(\int_{2(t-1)}^{t-\frac{1}{2}}u^{a-\frac{n+4}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{u}}\,du+\frac{e^{-\frac{|x|^2}{t-1}}}{(t-1)^{\frac{n+4}{2}}}\int_{2-t}^{1}(1-s)^a\,ds\right)\\&=x_n|x|^{n+2}\int_{\frac{|x|^2}{t-\frac{1}{2}}}^{\frac{|x|^2}{2(t-1)}}\left(\frac{|x|^2}{v}\right)^{a-\frac{n+4}{2}}e^{-v}\frac{|x|^2}{v}\,dv+x_n\frac{|x|^{n+2}}{(t-1)^{\frac{n+2}{2}-a}}e^{-\frac{|x|^2}{t-1}}\\&\lesssim x_n|x|^{2a}\int_0^{\infty}v^{\frac{n}{2}-a}e^{-v}\,dv+x_n|x|^{2a}\lesssim x_n.\end{aligned}$$

现在考虑 $\frac{1}{2}\leq x_n\leq |x'|$ 的情形。此时我们发现

$$\begin{aligned}\frac{|x|^{n+2}}{x_n}\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t)&=\frac{|x|^{n+2}}{x_n}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-s)^a}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds\\&\lesssim\frac{1}{x_n}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-s)^a e^{-\frac{cx_n^2}{t-s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds\\&\leq\frac{(t-1/2)^{\frac{1}{2}}}{x_n}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-s)^a}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{cx_n^2}{t-s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds\\&\lesssim\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-s)^a}{(t-s)^{\frac{1}{2}}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds=\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t).\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

下面的推论是引理 3.5 的直接推论，可用于简化w_i （3.4）中给出的表达式。

推论 3.6。 设 $1<t<\frac{9}{8}$。

(i) *If* $\sqrt{2(t-1)}\leq x_n<\frac{1}{2}$ *and* $-1<a\leq 0$, *then*

$$w_i(x,t)\approx\frac{Mx_n^3x_i}{|x|^{n+2}}+\frac{x_nx_i}{|x|^{n+2}}\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t)-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}\left(M+\mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t)\right).$$

(ii) 如果 $\sqrt{2(t-1)}\leq x_n<\frac{1}{2}$ 且 $a>0$，则

$$w_i(x,t)\approx x_i\mathcal{K}_{a,\frac{n+2}{2}}(x,t)-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}\left(M+\mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t)\right).$$

(iii) 如果 $\frac{1}{2} \le x_n \le |x'|$，则

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}} \left(M + \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t) - |x'|^2 (Me^{-x_n^2} + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t)) \right).$$

证明。 (i) 和 (iii) 由（3.4）和引理 3.5直接得到。

We 现在证明 (ii)。注意，对于 $a>0$、 $\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t) \approx x_n^2 \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t)$。然后我们注意到 t

$$\begin{aligned}
\frac{Mx_i}{t^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{c|x|^2}{t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \frac{x_n x_i}{|x|^{n+2}} \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t) &\approx Mx_i e^{-c|x'|^2} x_n^2 + \frac{x_n x_i}{|x'|^{n+2}} \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t) \\
&\approx \frac{x_i x_n^2}{|x'|^{n+2}} \left(M|x'|^{n+2} e^{-c|x'|^2} + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t) \right) \\
&\lesssim \frac{1}{|x'|^2} \frac{x_i x_n^2}{|x'|^n} \left(M + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t) \right) \\
&\lesssim \frac{1}{|x'|^2} \frac{x_i x_n^2}{|x'|^n} \left(Mt^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x_n^2}{t}} + \mathcal{H}_{a,\frac{3}{2}}(x_n,t) \right).
\end{aligned}$$

由不等式 $\frac{Mx_i x_n^3}{|x'|^{n+2}} \lesssim \frac{1}{|x'|^2} \frac{x_i x_n}{|x'|^n}$，结论随即得到。 □

3.1.2. 的渐近性 x_{ni}^* 及 的符号 w_i。 在陈述关于 x_{ni}^* 的渐近性结果之前，我们先引入一些集合，其定义条件涉及符号“$\lesssim$”和“$\gtrsim$”。我们首先澄清这些符号的含义。例如，对于给定的 $f\colon \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 和 A， $B>0$，我们定义

$$U := \left\{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \mid c_1 A \le f(x',t) \le c_2 B \right\} \tag{3.5}$$

其中某些常数 c_1 和 c_2 取决于 n、 a和 M。为方便记号，从现在起，我们将上述集合记为

$$U = \{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \mid A \lesssim f(x',t) \lesssim B \}.$$

现在我们引入将在下一个命题中出现的集合：对于 $0 \le \alpha < \beta$ ，

$$\begin{aligned}
U_1(\alpha,\beta) &:= \left\{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \mid \alpha \lesssim |a+1||x'|^2 \lesssim \beta \right\}, \\
U_2(\alpha,\beta) &:= \left\{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \,\middle|\, \alpha \lesssim \left|a+\frac{1}{2}\right| |x'|^2 \lesssim \beta \right\}, \\
U_3(\alpha,\beta) &:= \left\{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \,\middle|\, \alpha \lesssim |x'|^2 \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1} \right)^{-1} \lesssim \beta \right\}.
\end{aligned}$$

接下来，我们将以下集合 $A_a^i \subset \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$、 $i\in\{1,2\}$ 定义如下。

$$A_a^1 := \begin{cases} U_1(t-1,(t-1)^{a+\frac{1}{2}}), & \text{if } -1 < a \le -\frac{3}{4}, \\ U_2(e^{-\frac{2}{1+2a}}(t-1),(t-1)^{a+\frac{1}{2}}), & \text{if } -\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}, \\ U_2(e^{\frac{2}{1+2a}}(t-1),1), & \text{if } -\frac{1}{2} < a \le -\frac{1}{4}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$A_a^2 := \begin{cases} U_3\left(t-1, \min\left\{ e^{-\frac{2}{1+2a}}(t-1), \frac{1}{4} \right\}\right), & \text{if } -\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}, \\ U_3(t-1,1), & \text{if } a = -\frac{1}{2}, \\ U_3\left(t-1, \min\left\{ e^{\frac{1-2a}{1+2a}}(t-1), 2^{2a-1}(t-1)^{a+\frac{1}{2}} \right\}\right), & \text{if } -\frac{1}{2} < a \le -\frac{1}{4}. \end{cases} \tag{3.7}$$

此外，对于任意可测函数 $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$，我们记

$$U(f) := \left\{ (x',t) \in \mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+ \,\middle|\, 1 \lesssim \frac{|x'|^2}{f(t)} \lesssim e^{|x'|^2} \right\}.$$

接着，我们定义集合

$$A_a^3 := U(f_a), \tag{3.8}$$

其中 $f_a = f_a(t)$ 定义为

$$\begin{aligned} f_a(t) :=& \frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+1}\mathbf{1}_{-1<a\le-\frac{3}{4}} + |\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}(t-1)^{-|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t\le 1+\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}}} + |\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t\ge 1+\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}}}\right) \\ &\times \left(\mathbf{1}_{-\frac{3}{4}<a<-\frac{1}{2}} + (t-1)^{|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{-\frac{1}{2}<a\le-\frac{1}{4}}\right) + \mathbf{1}_{a>-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

现在我们已准备好证明以下命题，该命题给出了当 $t>1$ 时 x^*_{ni} 的渐近性 1.

命题 *3.7.* 设 w 是由边界数据 $g = g_n e_n$（由 *(1.5)-(1.7)* 给出）确定的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解，其定义见 *(2.1)*。存在正数常数 $c^l_j (l = 1, 2, 3,\ j = 1, 2)$，如 *(3.6)-(3.8)* 所示；另有 $c_* > 0$，其取决于 n、c^l_j 和 M，使得若 $|x'| > c_*(1+\sqrt{t})$ 且 $t > 1$，则对于由 *(3.6)-(3.8)* 给出的集合 A^l_a、$l \in \{1,2,3\}$，存在 $(x^*_{ni1}, x^*_{ni2}) \in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t); 0, \infty)$，其中 S^{+-} 在定义 *2.9* 中定义，并满足以下条件：对于 $k = 1,\ 2$，

(i) 设 $t \ge \frac{9}{8}$，则 $x^*_{nik} \approx \left(t\ln\left(\frac{(a+1)|x'|^2}{t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$。

(ii) 设 $1 < t < \frac{9}{8}$。(a) 对于 $-1 < a < -\frac{3}{4}$，

$$x^*_{nik} \approx \left(\frac{(a+1)|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{1-2a}}\mathbf{1}_{A^1_a} + \left(\ln\frac{(a+1)|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{A^3_a}.$$

(b) 对于 $-\frac{3}{4} \le a < -\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} x^*_{nik} \approx& \left(\frac{|a+\frac{1}{2}||x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{1-2a}}\mathbf{1}_{A^1_a} + |x'|\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{A^2_a} \\ &+ \left(\left(\ln\frac{|x'|^2}{|\ln(t-1)|}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t\ge 1+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}} + \left(\ln\frac{|a+\frac{1}{2}||x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t<1+\frac{1}{4}e^{\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\right)\mathbf{1}_{A^3_a}. \end{aligned}$$

(c) *For* $a = -\frac{1}{2}$, $x^*_{nik} \approx |x'|\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{A^2_a} + \left(\ln\frac{|x'|^2}{|\ln(t-1)|}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{A^3_a}$.

(d) *F*或 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$，

$$\begin{aligned} x^*_{nik} \approx& \left(a+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}|x'|\mathbf{1}_{A^1_a} + \left(\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)}\right)^{\frac{1}{1-2a}}\mathbf{1}_{A^2_a} \\ &+ \left(\left(\ln\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t>1+e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}} + \left(\ln\left(\left(a+\frac{1}{2}\right)|x'|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t<1+e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\right)\mathbf{1}_{A^3_a}. \end{aligned}$$

(e) *For* $-\frac{1}{4} \le a < 1$, $x^*_{nik} \approx (\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{A^3_a}$.

此处 $x^*_{nik} \in (\sqrt{2(t-1)},\ 1+2)$ 若 $(x',t) \in A^1_a \cup A^2_a$，且 $x^*_{nik} \in (1+2, |x'|)$ 若 $(x',t) \in A^3_a$。

注记3.8. 数 $-\frac{3}{4}$与 $-\frac{1}{4}$在 a的条件中出现时，可分别替换为介于 -1与 $-\frac{1}{2}$之间的任意数，以及大于 $-\frac{1}{2}$的任意数，尤其依赖于 $|x'|$。这为常数 $c_i\ (i = 1, \cdots, 4)$出现在定理 *1.8*中提供了依据。数 $-\frac{3}{4}$与$-\frac{1}{4}$ 的选取源于使用引理 *3.2*时在计算上的便利。

注记3.9. 我们注意到，集合 $A^1_a \cup (A^3_a\{t < 1 + e^{-a+1/2}\})$ 在$a \to -1/2$时趋于零。因此，*(b)*和*(d)*中给出的渐近性在 $a \to -1/2$ 时的极限与*(c)*中给出的极限一致。当我们证明反转点的存在性时，将详细考虑这一事实。

证明。 在进入逐情形分析之前，我们先说明证明的共同结构。在每个子情形中， $w_i(x,t)$被两个显式比较函数从上、下界定，分别记为 g_1 和 g_2。这些函数具有相同的代数结构，仅相差乘性常数。

根据（x， t）的区域， w_i 的符号以下列方式之一确定：或者（i）两个比较函数在 x_n的相关区间上具有确定的符号，这直接推出 w_i的符号；或者（ii）比较函数在点 x^*_{ni1} 和 x^*_{ni2}处为零，这意味着 w_i发生符号变化。

下面的所有子情形都遵循这一方案；不同之处仅在于界的具体表达式不同。

在整个证明过程中，常数 $c_i = c_i（n，\ M）\ \ d_i = d_i（n，\ M）> 0$、 $i = 1$、2、3、4可能在每种情形中有所变化。在每个子情形中，这些常数都满足 $c_1 \le d_1$、 $c_2 \ge d_2$ 和 $c_3 \le d_3$。

- **（情形 1：** $1 < t < \frac{9}{8}$， $x_n < \sqrt{2（t-1）}$ ）根据（3.4）、引理3.2 的（ii）以及引理3.3的（ii），有

$$
\begin{aligned}
w_i(x,t) &\approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left\{(x_n^2-|x'|^2)\left(\frac{(t-1)^{a-\frac12}-1}{\frac12-a}\mathbf{1}_{a\ge-\frac14,a\neq\frac12}+|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=\frac12}+\frac{(t-1)^{a-\frac12}}{a+1}\right)\right.\\
&\quad\left.+x_n\left(e^{-|x'|^2}+\frac{(t-1)^{a-\frac n2-1}}{a+1}e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}}\right)+M\left(x_n+|x'|^{n+2}e^{-|x'|^2}\right)\right\}\\
&\approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left\{-|x'|^2\left(\frac{(t-1)^{a-\frac12}-1}{\frac12-a}\mathbf{1}_{a\ge-\frac14,a\neq\frac12}+|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=\frac12}+\frac{(t-1)^{a-\frac12}}{a+1}\right)\right.\\
&\quad\left.+x_n\left(e^{-|x'|^2}+\frac{(t-1)^{a-\frac n2-1}}{a+1}e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}}\right)+M\left(x_n+|x'|^{n+2}e^{-|x'|^2}\right)\right\}\\
&\lesssim \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left\{-|x'|^2\left(\frac{(t-1)^{a-\frac12}-1}{\frac12-a}\mathbf{1}_{a\ge-\frac14,a\neq\frac12}+|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=\frac12}+\frac{(t-1)^{a-\frac12}}{a+1}\right)\right.\\
&\quad\left.+\left(1+\frac{1}{a+1}\right)|x'|^{n+2}e^{-|x'|^2}+M\right\}<0
\end{aligned}
$$

通过取足够大的 $|x'|$。

- **（情形 2：** $1 < t < \frac{9}{8}$， $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac12$ ）

子情形 2-1： $-1 < a < -\frac34$。由推论 3.6 的 (i)、引理 3.2 的 (iii) 以及引理 3.3 的 (ii)-(b)，可得

$$
\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1}-c_2|x'|^2x_n^{2a-1}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1}-d_2|x'|^2x_n^{2a-1}\right).
$$

若 $\frac{d_1}{d_2}\frac{2^{\frac12-a}}{a+1}(t-1)\le|x'|^2\le\frac{c_1}{c_2}\frac{2^{2a-1}}{a+1}(t-1)^{a+\frac12}$，则记为

$$
x^*_{ni1}:=\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2a-1}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}\left(\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1}\right)^{\frac{1}{2a-1}},\quad x^*_{ni2}:=\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{1}{2a-1}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}\left(\frac{(t-1)^{a+1}}{a+1}\right)^{\frac{1}{2a-1}},
$$

从而 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 且 $(x^*_{ni2},\ x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\ \cdot,\ t);\sqrt{2(t-1)},\ \frac12)$。

另一方面，若 $|x'|^2\ge\frac{d_1}{d_2}\frac{2^{2a-1}}{a+1}(t-1)^{a+\frac12}$，则对所有 $\sqrt{2(t-1)}\le x_n\le\frac12$， $w_i(x,\ t)<0$；而若 $|x'|^2<\frac{c_1}{c_2}\frac{2^{\frac12-a}}{a+1}(t-1)$，则对所有 $\sqrt{2(t-1)}\le x_n<\frac12$， $w_i(x,\ t)>0$。

子情形 2-2： $-\frac34\le a<-\frac12$。由推论 3.6 的 (i)、引理 3.2 的 (iii)、引理 3.3 的 (ii)-(b)，可得

$$
w_i(x,t)\approx\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1\frac{x_n^{2a+1}-(t-1)^{a+\frac12}}{a+\frac12}-c_2|x'|^2x_n^{2a-1}\right).\tag{3.9}
$$

1) 假设 $x_n\le e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}$。由（2.21），可得 $x_n^{2a+1}-(t-1)^{a+\frac12}\approx x_n^{2a+1}\ln\frac{x_n^2}{t-1}$。由（3.9），可得

$$
\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1x_n^{2a+1}\ln\frac{x_n^2}{t-1}-c_2|x'|^2x_n^{2a-1}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1x_n^{2a+1}\ln\frac{x_n^2}{t-1}-d_2|x'|^2x_n^{2a-1}\right).
$$

于是由引理 2.7，可得

$$w_i(x,t) > 0 \text{ for } x_n \geq \max\left\{2, \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} |x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} =: x^*_{ni1},$$

$$w_i(x,t) < 0 \text{ for } x_n \leq \min\left\{2, \left(\frac{d_2}{5d_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} |x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} =: x^*_{ni2}.$$

注意，$x^*_{ni2} \leq x^*_{ni1}$。如果

$$\frac{\sqrt{2(t-1)}}{\min\left\{2, \left(\frac{d_2}{5d_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}} \leq |x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{\min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\}}{\max\left\{2, \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}, \tag{3.10}$$

那么，我们有 $\sqrt{2(t-1)} \leq x^*_{nik} \leq \min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\}$，因此 $(x^*_{ni2}, x^*_{ni1}) \in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t); \sqrt{2(t-1)}, \min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\})$。

On the other hand, if $\min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\} \leq \min\left\{2, \left(\frac{d_2}{5d_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} |x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$, then we have $w_i(x,t) < 0$ for $\sqrt{2(t-1)} \leq x_n \leq \min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\}$.

2) 假设 $x_n \geq e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}$。由（2.21），我们有 $x_n^{a+2} \approx (t-1)^{a+2}$。由（3.9），我们有

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{e-1}{e} c_1 \frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|} - c_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right) \leq w_i(x,t) \leq \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1 \frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|} - d_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right).$$

于是，我们有

$$w_i(x,t) > 0 \text{ for } x_n \geq \left(\frac{e-1}{e}\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2a-1}} \left|a+\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{1-2a}} |x'|^{\frac{2}{1-2a}} (t-1)^{\frac{a+\frac{1}{2}}{2a-1}} =: x^*_{ni1},$$

$$w_i(x,t) < 0 \text{ for } x_n \leq \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{1}{2a-1}} \left|a+\frac{1}{2}\right|^{\frac{1}{1-2a}} |x'|^{\frac{2}{1-2a}} (t-1)^{\frac{a+\frac{1}{2}}{2a-1}} =: x^*_{ni2}.$$

注意 $x^*_{ni1} \geq x^*_{ni2}$。如果 $\frac{d_1}{d_2} e^{-\frac{1-2a}{1+2a}}(t-1) \leq |a+\frac{1}{2}||x'|^2 \leq 2^{2a-1}\frac{e-1}{e}\frac{c_1}{c_2}(t-1)^{a+\frac{1}{2}}$，则我们有 $\min(e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}) \leq x^*_{nik} \leq \frac{1}{2}$ 从而 $(x^*_{ni2}, x^*_{ni1}) \in S^{-+}\left(w_i(x',\cdot,t); \min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\}, \frac{1}{2}\right)$。

另一方面，如果 $2^{2a-1}\frac{e-1}{e}\frac{c_1}{c_2}(t-1)^{a+\frac{1}{2}} \leq |a+\frac{1}{2}||x'|^2$，则我们有 $w_i(x,t) < 0$ 对于 $\min\{e^{-\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac{1}{2}\} \leq x_n \leq \frac{1}{2}$。

子情形 2-3： $a = -\frac{1}{2}$。由推论 3.6 的 (i)、引理 3.2 的 (iii) 以及引理 3.3 的 (ii)-(b)，我们有

$$x_n^{-2}\left(c_1 x_n^2 \ln \frac{x_n^2}{t-1} - c_2|x'|^2\right) \leq w_i(x,t) \leq x_n^{-2}\left(d_1 x_n^2 \ln \frac{x_n^2}{t-1} - d_2|x'|^2\right).$$

我们现在寻找 x^*_{nik}。由引理2.7，我们有

$$w_i(x,t) > 0 \text{ for } x_n \geq A_2|x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} =: x^*_{ni1}, \quad w_i(x,t) < 0 \text{ for } x_n \leq A_1|x'| \left(\ln \frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} := x^*_{ni2}.$$

若 $\frac{A_2^2}{4}|x'|^2 \leq \ln \frac{|x'|^2}{t-1} \leq \frac{A_1^2}{2}\frac{|x'|^2}{t-1}$，我们有 $\sqrt{2(t-1)} \leq x^*_{nik} \leq \frac{1}{2}$，从而 $(x^*_{ni2}, x^*_{ni1}) \in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t); \sqrt{2(t-1)}, \frac{1}{2})$，而当 $|x'|^2 \geq \frac{d_1}{4d_2}|\ln(4(t-1))|$ 时，则 $w_i(x,t) < 0$ 对 $\sqrt{2(t-1)} \leq x_n \leq \frac{1}{2}$。

子情形 2-4： $-\frac{1}{2} < a < 0$。由推论 3.6 的 (i)、引理 3.2 的 (iii) 以及引理 3.3 的 (ii)-(b)，可得

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{x_n^{2a+1} - (t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} - |x'|^2 x_n^{2a-1}\right). \tag{3.11}$$

1. 假设 $x_n < e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}$。那么由（2.21），$x_n^{2a+1} - \frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+\frac12} \approx (t-1)^{a+\frac12}\ln\frac{x_n^2}{t-1}$，并由（3.11）可得

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1(t-1)^{a+\frac12}\ln\frac{x_n^2}{t-1} - c_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right) \le w_i(x,t) \le \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1(t-1)^{a+\frac12}\ln\frac{x_n^2}{t-1} - d_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right).$$

由引理2.7，可得

$$w_i(x,t) > 0 \text{ for } x_n \ge A_1|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{-\frac{a+\frac12}{1-2a}}\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{1-2a}} =: x^*_{ni1},$$

$$w_i(x,t) < 0 \text{ for } x_n \le A_2|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{-\frac{a+\frac12}{1-2a}}\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{1-2a}} =: x^*_{ni2},$$

其中 $A_1 :=$最大值 $\left\{2, \left(\frac{1-2a}{2}\frac{c_2}{c_1}\right)^{\frac{1}{1-2a}}\right\}$ 且 $A_2 :=$最小值 $\left\{2, \left(\frac{1-2a}{8-4a}\frac{d_2}{d_1}\right)^{\frac{1}{1-2a}}\right\}$。显然，我们有 $A_1 \ge A_2$。如果

$$\frac{2^{\frac12-a}}{A_2^{1-2a}}(t-1) \le |x'|^2\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-1} \le \frac{1}{A_1^{1-2a}}\min\left\{e^{\frac{1-2a}{1+2a}}(t-1), 2^{2a-1}(t-1)^{a+\frac12}\right\}, \tag{3.12}$$

那么我们有 $\sqrt{2(t-1)} \le x^*_{ni2} \le x^*_{ni1} \le$最小值$\{e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac12\}$，因此 $(x^*_{ni2},\ x^*_{ni1}) \in S^{-+}\left(w_i(x,\cdot,t);\ \sqrt{2(t-1)},\ \text{最小}\{e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac12\}\right)$.

另一方面，the othe 如果 $|x'|^2 \ge 2e^{\frac{1-2a}{1+2a}}\frac{d_1}{d_2}(t-1)$，那么 $w_i(x,t) < 0$ 对于 $\sqrt{2(t-1)} \le x_n \le e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}$.

2. 假设 $x_n > e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}$。由（2.21），$x_n^{2a+1} - \frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+\frac12} \approx \frac{x_n^{2a+1}}{a+\frac12}$ 并由（3.11）可得

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1\frac{x_n^{2a+1}}{a+\frac12} - c_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right) \le w_i(x,t) \le \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1\frac{x_n^{2a+1}}{a+\frac12} - d_2|x'|^2 x_n^{2a-1}\right).$$

令 $x^*_{ni1} := \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\left(a+\frac12\right)}|x'|$，$x^*_{ni2} := \sqrt{\frac{d_2}{d_1}\left(a+\frac12\right)}|x'|$，使得 $x^*_{ni1} \ge x^*_{ni2}$。为确保 $x^*_{nik}(k=1,2)$ 满足条件 $e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1} < x_n \le \frac12$，我们要求

$$e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{\frac{d_1}{d_2}}\sqrt{t-1} \le \left|a+\frac12\right|^{\frac12}|x'| \le \sqrt{\frac{c_1}{4c_2}}.$$

因此，$(x^*_{ni2},\ x^*_{ni1}) \in S^{-+}\left(w_i(x',\cdot,t);\ \min\{e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1}, \frac12\}, \frac12\right)$。

另一方面，如果 $|x'|^2 \ge \frac{2}{a+\frac12}\frac{d_1}{d_2}$，则 $w_i(x,t) < 0$ 对于 $e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1} < x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

子情形 2-5： $a = 0$。由推论 3.6 的 (i)、引理 3.2 的 (iii) 以及引理 3.3 的 (ii)-(b)，当 $|x'|$充分大时，有

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_i}{|x'|^{n+2}}(Mx_n+1)(x_n^2 - |x'|^2) < 0.$$

子情形 2-6： $a > 0$。由推论 3.6 的 (ii)、引理 3.2 的 (iii) 以及引理 3.3 的 (ii)-(b)，当 $|x'|$充分大时，有

$$w_i(x,t) \lesssim x_i x_n\left[-\left(M + \frac{x_n^{2a-1}-1}{\frac12 - a}\mathbf{1}_{0<a<1, a\neq\frac12} + |\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=\frac12} + x_n^{2a-1}\mathbf{1}_{a\ge1}\right)\frac{1}{|x'|^n} + x_n e^{-|x'|^2}\right] < 0.$$

- **(情况3：** $1 < t < \frac98$，$\frac12 < x_n < |x'|$**)**

由推论 3.6中的 (iii)、引理 3.2 中的 (iii) 以及引理 3.3中的 (iii)，可得

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(1 + \frac{2^{-a-\frac12} - (t-1)^{a+\frac12}}{a+\frac12}\mathbf{1}_{a\neq-\frac12} + |\ln(2(t-1))|\mathbf{1}_{a=-\frac12} + \frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1} - |x'|^2 e^{-x_n^2}\right). \tag{3.13}$$

子情形 3-1： $-1 < a < -\frac34$。

由（3.13），我们得到

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1}-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{a+1}-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).$$

令 $x^*_{ni1}:=\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{(a+1)c_2}{c_1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}\right)\right)^{\frac12}$，$x^*_{ni2}:=\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{(a+1)d_2}{d_1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}\right)\right)^{\frac12}$，使得 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ and $w_i(x,t)>0$ 当 $x_n\ge x^*_{ni1}$ 时，而 $w_i(x,t)<0$ 当 $x_n\le x^*_{ni2}$ 时。这意味着，如果 $\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}<\frac{(a+1)|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}<\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，那么 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);1\,2,|x'|)$。

另一方面，若 $|x'|^2\le\frac{c_1e^{\frac{c_3}{4}}(t-1)^{a+\frac12}}{c_2(a+1)}$，则对所有 $\frac12\le x_n\le|x'|$，$w_i(x,t)>0$。

子情形 3-2： $-\frac34\le a<-\frac12$。由（3.13），我们有

$$w_i(x,t)\approx\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{2^{-a-\frac12}-(t-1)^{a+\frac12}}{a+\frac12}-|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).\tag{3.14}$$

1. 假设 $t\ge1+\frac12e^{\frac{2}{2a+1}}$。由（2.21），我们有 $2^{-a-\frac12}-(t-1)^{a+\frac12}\approx|a+\frac12|\ln(t-1)|$。因此（3.14）给出

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1|\ln(t-1)|-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1|\ln(t-1)|-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).$$

令 $x^*_{ni1}=\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac12}$ 且 $x^*_{ni2}=\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac12}$，使得 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 且 $w_i(x,t)>0$ 对 $x_n\ge x^*_{ni1}$ 成立，而 $w_i(x,t)<0$ 对 $x_n\le x^*_{ni2}$ 成立。这意味着，若 $\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}\le\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\le\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，则 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);1\,2,|x'|)$。

另一方面，如果 $\frac{e|a+\frac12|}{e-1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}\le\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}$，那么 $w_i(x,t)<0$；而如果 $\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}\le\frac{e|a+\frac12|}{e-1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}$，那么 $w_i(x,t)>0$。

2. 假设 $t\le1+\frac12e^{\frac{2}{2a+1}}$。由（2.21），可得 $2^{-a-\frac12}-(t-1)^{a+\frac12}\approx|a+\frac12|(t-1)$。因此，（3.14）给出

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1\frac{e-1}{e}\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{|a+\frac12|}-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1\frac{(t-1)^{a+\frac12}}{|a+\frac12|}-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).$$

令 $x^*_{ni1}=\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{e|a+\frac12|c_2}{e-1}\frac{|x'|^2}{c_1(t-1)^{a+\frac12}}\right)\right)$，$x^*_{ni2}=\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{e|a+\frac12|d_2}{e-1}\frac{|x'|^2}{d_1(t-1)^{a+\frac12}}\right)\right)^{\frac12}$，使得 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 且 $w_i(x,t)>0$，当 $x_n\ge x^*_{ni1}$ 时成立，而 $w_i(x,t)<0$，当 $x_n\le x^*_{ni2}$ 时成立。这意味着，如果 $\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}\le\frac{e|a+\frac12|}{e-1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}\le\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，那么 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);1\,2,|x'|)$。

另一方面，若 $\frac{e|a+\frac12|}{e-1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}\le\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}$，则 $w_i(x,t)>0$；若 $\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}\le\frac{e|a+\frac12|}{e-1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac12}}$，则 $w_i(x,t)<0$，对所有 $\frac12<x_n<|x'|$ 均成立。

子情形 3-3： $a=-\frac12$。由（3.13），可得

$$\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1|\ln(t-1)|-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1|\ln(t-1)|-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).$$

令 $x^*_{ni1}:=\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac12}$，$x^*_{ni2}:=\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac12}$，使得 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 且 $w_i(x,t)>0$ 对 $x_n\ge x^*_{ni1}$ 成立，而 $w_i(x,t)<0$ 对 $x_n\le x^*_{ni2}$ 成立。这意味着，若 $\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}\le\frac{|x'|^2}{|t-1|\ln(t-1)|}\le\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，则 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);1\,2,|x'|)$。

另一方面，如果 $|x'|^2\le\frac{c_1e^{\frac{c_3}{4}}}{c_2}|\ln(t-1)|$，则对所有 $\frac12\le x_n\le|x'|$，$w_i(x,t)>0$。

子情形 3-4： $-\frac{1}{2}<a<-\frac{1}{4}$。此前在子情形 3-2 中已指出，若 $|x'|^2\le \frac{c_1}{c_2}e^{\frac{c_3}{4}}2^{-a-\frac{1}{2}}-\left(\frac{t-1}{a+\frac{1}{2}}\right)^{a+\frac{1}{2}}$，则对所有 $\frac{1}{2}\le x_n\le|x'|$，$w_i(x,t)>0$；若 $|x'|^2e^{-d_3|x'|^2}\ge\frac{d_1}{d_2}2^{-a-\frac{1}{2}}-\left(\frac{t-1}{a+\frac{1}{2}}\right)^{a+\frac{1}{2}}$，则对所有 $\frac{1}{2}\le x_n\le|x'|$，$w_i(x,t)\prec 0$。

由（2.21），可得 $2^{-a-\frac{1}{2}}-\left(\frac{t-1}{a+\frac{1}{2}}\right)^{a+\frac{1}{2}}\approx(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t<1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}$。于是（3.14）给出

$$w_i(x,t)\ge\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left[c_1\left((t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\frac{e-1}{e}\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t<1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\right)-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right],$$

$$w_i(x,t)\le\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left[(e-1)d_1\left((t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\frac{1}{e|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t<1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\right)-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right].$$

Let

$$x^*_{ni1}=\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\left(\frac{1}{c_3}\ln\left(\frac{e|a+\frac{1}{2}|c_2}{(e-1)c_1}|x'|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t\le1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}},$$

$$x^*_{ni2}=\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\left(\frac{1}{d_3}\ln\left(\frac{e|a+\frac{1}{2}|d_2}{(e-1)d_1}|x'|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{t\le1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}.$$

注意到，对于 $x_n\ge x^*_{ni1}$，$x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 和 $w_i(x,t)>0$；而对于 $x_n\le x^*_{ni2}$，$w_i(x,t)\le0$。这意味着，如果 $\frac{d_1}{d_2}e^{\frac{d_3}{4}}\le\frac{|x'|^2}{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|}\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\frac{e-1}{e|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t\le1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\le\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，那么 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);\frac{1}{2},|x'|)$。

另一方面，如果 $|x'|^2\le\frac{c_2e^{\frac{c_3}{4}}}{c_1}\left((t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t\ge1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}+\frac{e-1}{e}\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|}\mathbf{1}_{t\le1+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a+\frac{1}{2}}}}\right)$，那么 $w_i(x,t)>0$ 对于 $\frac{1}{2}<x_n<|x'|$。

子情形 3-5： $a\ge-\frac{1}{4}$。由（3.13），可得

$$\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left(c_1-c_2|x'|^2e^{-c_3x_n^2}\right)\le w_i(x,t)\le\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left(d_1-d_2|x'|^2e^{-d_3x_n^2}\right).$$

令 $x^*_{ni1}:=\left(\frac{1}{c_3}\ln\frac{c_2|x'|^2}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}}$，$x^*_{ni2}:=\left(\frac{1}{d_3}\ln\frac{d_2|x'|^2}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}}$，使得 $x^*_{ni1}\ge x^*_{ni2}$ 且 $w_i(x,t)>0$ 对于 $x_n\ge x^*_{ni1}$，而 $w_i(x,t)<0$ 对于 $x_n\le x^*_{ni2}$。这意味着，如果 $e^{\frac{d_3}{4}}\frac{d_1}{d_2}\le|x'|^2\le\frac{c_1}{c_2}e^{c_3|x'|^2}$，那么 $(x^*_{ni2},x^*_{ni1})\in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t);\frac{1}{2},|x'|)$。

另一方面，若 $|x'|^2e^{-\frac{c_3}{4}}>\frac{c_1}{c_2}$，则对 $\frac{1}{2}<x_n<|x'|$，$w_i(x,t)>0$。

- **(情形 4：** $1<t<\frac{9}{8}$，$x_n>|x'|$**)**

由（3.4）、引理3.2 的（iii）以及引理3.3的（iii），可得

$$w_i(x,t)\ge\frac{x_ix_n}{x_n^{n+2}|x'|^n}\left(c_1|x'|^n-c_2x_n^{n+2}e^{-c_3x_n^2}\right)>0,$$

取 $|x'|$ 足够大，使其依赖于 n 和 M。

- **(情形 5：** $t>\frac{9}{8}$，$x_n<\sqrt{t}$ **或** $x_n>|x'|$**)** 由（3.4）、引理3.1、引理3.2 的（i）以及引理3.3的（i），我们发现对 $t\ge2$，若 $x_n<\sqrt{t}$，则

$$w_i(x,t)\lesssim(M+\frac{1}{a+1})\frac{x_nx_i}{t^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{t}{|x|^{n+2}}+\frac{e^{-\frac{c|x|^2}{t}}}{t^{\frac{n+1}{2}}}-\frac{1}{|x'|^n}\right)\lesssim-(M+\frac{1}{a+1})\frac{x_ix_n}{t^{\frac{3}{2}}|x'|^n}<0$$

对于充分大的 $|x'|$，并且若 $x_n>|x'|$，则 $w_i(x,t)\ge\frac{x_ix_n}{x_n^{n+2}t^{\frac{3}{2}}}\left(c_1t-c_2\frac{x_n^{n+2}}{|x'|^n}e^{-\frac{c_3x_n^2}{t}}\right)>0$ 对于充分大的 $|x'|$。

- **（情形 6：** $t > \frac{9}{8}$, $\sqrt{t} < x_n < |x'|$**）** 由（3.4），引理 3.1 以及引理 3.2，以及引理 3.3，我们有

$$\frac{x_n x_i}{t^{\frac{1}{2}}|x'|^{n+2}}\left(\frac{c_1}{a+1} - c_2\frac{|x'|^2}{t}e^{-\frac{c_3 x_n^2}{t}}\right) \le w_i(x,t) \le \frac{x_n x_i}{t^{\frac{1}{2}}|x'|^{n+2}}\left(\frac{d_1}{a+1} - d_2\frac{|x'|^2}{t}e^{-\frac{d_3 x_n^2}{t}}\right).$$

注意到，上述不等式意味着 $c_1 < d_1, c_2 > d_2$ 和 $c_3 < d_3$。令 $x^*_{ni1} := \sqrt{\frac{2t}{c_3}\ln\left(\frac{c_2}{c_1}(a+1-\frac{|x'|^2}{t})\right)}$, $x^*_{ni2} := \sqrt{\frac{t}{d_3}\ln\left(\frac{d_2}{d_1}(a+1-\frac{|x'|^2}{t})\right)}$, 使得 $x^*_{ni1} \ge x^*_{ni2}$ 和 $w_i(x,t) > 0$ 当 $x_n \ge x^*_{ni1}$ 时，而 $w_i(x,t) < 0$ 当 $x_n \le x^*_{ni2}$ 时。这意味着若 $\frac{d_1}{d_2}e^{d_3 t} < |x'|^2 < \frac{c_1}{c_2}te^{c_3\frac{|x'|^2}{t}}$，则 $(x^*_{ni2}, x^*_{ni1}) \in S^{-+}(w_i(x',\cdot,t); \sqrt{t}, |x'|)$。证明至此完成。□

We 现在证明 x^*_{ni} 在 a中的连续性，这是命题 3的直接推论 .7.

推论 *3.10*。设 w 是由*(2.1)*定义、具有边界数据 $g = g_n e_n$（见*(1.5)–(1.7)*）的斯托克斯系统*(1.1)*的解。对于 $-1 < a < 0$ 和 $i < n$，令 $x^*_n = x^*_n(x', t, a)$ 为 w_i 的流反转点。对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $|x'| \ge c_*$，其中 $c_* > 0$ 仅取决于 n 和 $M := \int_0^1 \phi(s)ds$，存在 $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, |x'|) > 0$，使得如下结论成立：若 $a \in (-\frac{1}{2} - \delta_0, -\frac{1}{2} + \delta_0)$，则存在 $t_0 = t_0(\epsilon, |x'|, a) > 1$，使得对于任意 $t \in (1, t_0)$，有 $0 < x^*_n(x', t, a) < \epsilon$。

证明。我们固定 $|x'| > c_*$ 其中 c_* 已在命题 3.7中给出，并设 $\epsilon > 0$ 已给定

1) 我们回顾一下，若 $-\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}$，则对于 (x', t)，$x^*_n \approx |x'|\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \in A^3_a$，且对于 (x', t)，$x^*_n \approx |a+\frac{1}{2}|^{\frac{1}{1-2a}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{\frac{a+\frac{1}{2}}{2a-1}} \in A^2_a$。由 (3.6)，我们得到当 $a \to -\frac{1}{2}$ 时，$A^2_a \to \varnothing$。另一方面，由 (3.7)，我们得到若 $t < 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{1+2a}}$，则存在 $t_1(a)$ $t_2(a)$，使得对于 (x', t)，$t_1(a) < t < t_2(a) \in A^3_a$，且当 $a \to -\frac{1}{2}$ 时，$t_1(a) \to 1$。事实上，$t_1(a)$ 和 $t_2(a)$ 满足 $t_i(a) = 1 + \frac{|x'|^2}{x_i}$ a ( )，$i = 1, 2$，其中$x_i(a)$ 是方程 $x = ce^{-\frac{2}{1+2a}}\ln x$ 的解，对某个仅依赖于 n 的 c，且 $x_2(a) < x_1(a)$。于是我们得到当 $a \to -\frac{1}{2}$ 时，$x_1(a) \to \infty$。

2) 我们回顾一下，若 $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$ 且 $t \le 1 + \frac{1}{4}e^{a+\frac{1}{2}}$，则对于满足 $e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t-1} \lesssim (a+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}|x'| \lesssim 1$ 的 $|x'|$，有 $x^*_n \approx (a+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}|x'|$，其中 $\lesssim$ 和 $\approx$ 中的常数仅依赖于 n 和 M。接着，我们选择 δ_0，使得 $(\delta_0 + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}|x'| < \epsilon$；对于每个 $a \in (-\frac{1}{2} - \delta_0, -\frac{1}{2} + \delta_0)$，选择满足 $e^{\frac{1}{2a+1}}\sqrt{t_0 - 1} \lesssim (a+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}|x'|$ 的 t_0。□

3.2. **速度场的法向分量**。本小节讨论速度场的法向分量，并将证明当 $t > 1$ 时，法向速度至少有两个反转点。

3.2.1. **的估计** w_n。下面的引理给出了 w_n的逐点估计。

引理 3.11。存在仅依赖于 n 的充分大的 $N \ge 1$，使得以下结论成立：设$t > 1$，且 $|x'| \ge N(1 + \sqrt{t})$。那么

$$w_n(x,t) \approx \left(\frac{M}{t^{\frac{1}{2}}}\min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n, t)\right)\frac{(n-1)x_n^2 - |x'|^2}{|x|^{n+2}} + \frac{Mx_n}{t^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{c|x|^2}{t}} + x_n\mathcal{H}_{a,\frac{n+2}{2}}(|x|, t). \tag{3.15}$$

证明。我们首先估计 $\sum_{i=1}^{n-1} w^{(L)}_{ii}$ $(x,\ t)$。利用（2.18）$_2$，（2.16），

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} w^{(L)}_{ii}(x,t) &\approx \frac{|x'|^2 - (n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}}\|\psi\|_{L^1}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t-s}}\min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\}\phi(s)ds \\ &\approx -\frac{(n-1)x_n^2 - |x'|^2}{|x|^{n+2}}\left(Mt^{-\frac{1}{2}}\min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\} + \mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n, t)\right).\end{aligned}$$

接下来，我们估计 $w^G(x,\ t)$。直接计算可得

$$\begin{aligned} w^G(x,t) &\approx \int_0^{\frac{1}{2}} x_n(t-s)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{t-s}}\phi(s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 x_n(t-s)^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{t-s}}(1-s)^a ds \\ &\approx M x_n t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{t}} + x_n \mathcal{H}_{a,\frac{n+2}{2}}(|x|,t). \end{aligned}$$

最后，我们得到 $w_n^N(x,\ t) \approx x_n|x|^{-n}\phi(t)$。综合所有估计，我们便可推出该引理。 □

3.2.2. **的渐近性以及** w_n的符号。 为陈述我们的结果，我们需要引入以下集合。对于 $n \geq 1$ 和 $0 < \alpha \lesssim \beta < \infty$, 记

$$S(\alpha,\beta) := \{(x',t)\,\Big|\,\alpha \lesssim e^{-|x'|^2} \lesssim \beta\}, \qquad S(0,\beta) := \{(x',t)\,\Big|\,e^{-|x'|^2} \lesssim \beta\},$$

$$S(\alpha,\infty) := \{(x',t)\,\Big|\,e^{-|x'|^2} \gtrsim \alpha\}, \qquad V(\alpha,\beta) := \left\{(x',t)\,\Big|\,\alpha \lesssim \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln\left(|x'|^{-n}e^{|x'|^2}\right)} \lesssim \beta\right\}.$$

我们考虑函数 f_{ia}: $[1,\infty) \to \mathbb{R}_+$, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 其定义如下

$$\begin{aligned} f_{1a}(t) :=& \frac{(t-1)^a}{a+1}\mathbf{1}_{-1<a<0} + (t-1)^a\mathbf{1}_{0<a\leq\frac{1}{4}} \\ &+ \left((t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t>1+e^{\frac{2}{2a-1}}} + \frac{(t-1)^a}{1-2a}\mathbf{1}_{t\leq 1+e^{\frac{2}{2a-1}}}\right)\mathbf{1}_{\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} \\ &+ \left((t-1)^{a-\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{t>1+e^{\frac{2}{1-2a}}} + \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{2a-1}\mathbf{1}_{t\leq 1+e^{\frac{2}{1-2a}}}\right)\mathbf{1}_{\frac{1}{2}<a\leq\frac{3}{4}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a>\frac{3}{4}}, \\ f_{2a}(t) :=& (t-1)^a\mathbf{1}_{0<a\leq\frac{1}{4}} + \frac{(t-1)^a}{1-2a}\mathbf{1}_{\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}} + \frac{(t-1)^{\frac{1}{2}}}{2a-1}\mathbf{1}_{\frac{1}{2}<a\leq\frac{3}{4}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a>\frac{3}{4}}, \\ f_{3a}(t) :=& \mathbf{1}_{0<a\leq\frac{1}{4},a>\frac{3}{4}} + \frac{e^{\frac{2a}{2a-1}}}{1-2a}\mathbf{1}_{\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}} + \frac{1}{2a-1}\mathbf{1}_{\frac{1}{2}<a\leq\frac{3}{4}}, \\ f_{4a}(t) :=& \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}, (2(t-1))^{\frac{1}{2}}\right\}\mathbf{1}_{\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}} + (t-1)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + \max\left\{2^{-a}e^{\frac{2a}{1-2a}}, 2^a(1-t)^a\right\}\mathbf{1}_{\frac{1}{2}<a<\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

然后定义这些集合

$$B_a^1 := S_{n-2}(0, f_{1a}(t)), \quad B_a^2 := S_{n-2}(f_{2a}(t), f_{3a}(t)), \quad B_a^3 := V_{n-2}(f_{4a}(t), 1). \tag{3.16}$$

现在我们可以证明以下命题，它给出了当 $t > 1$时 x_{nn}^* 的渐近性。

命题 *3.12.* 设 w 为由边界数据$g = g_n\boldsymbol{e}_n$ （由 *(1.5)-(1.7)* 给出）确定、并由 *(2.1)* 定义的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解。存在依赖于 n 和 M 的 $c_* > 0$，使得若 $|x'| > c_*$ 和 $t > 1$, 则对于 *(3.16)* 中给出的集合 B_a^l、 $l \in \{1,2,3\}$, 存在 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);\ 0, 1/2)$, 其中 S^{+-} 在定义 *2.9* 中定义，满足以下条件：对于 $k = 1, 2,$

(1) If $t > \frac{9}{8}$, *then* $x_{nnk}^* \approx |x'|^n t^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{t}}$.

(2) Let $1 < t \leq \frac{9}{8}$.

(i) *If* $-1 < a < 0$, *then* $x_{nnk}^* \approx \left((a+1)e^{-|x'|^2} + (t-1)^a e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}}\right)(t-1)^{\frac{1}{2}-a}\mathbf{1}_{B_a^1}$.

(ii) *If* $0 < a < \frac{1}{4}$, *then* $x_{nnk}^* \approx (t-1)^{\frac{1}{2}-a}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{B_a^1} + e^{-\frac{|x'|^2}{2a}}\mathbf{1}_{B_a^2}$.

(iii) *If* $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{2}$, *then*

$$\begin{aligned} x_{nnk}^* \approx& \left(\frac{e^{-|x'|^2}}{|\ln(t-1)|}\mathbf{1}_{t>1+e^{\frac{1}{a-\frac{1}{2}}}} + (\frac{1}{2}-a)(t-1)^{\frac{1}{2}-a}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{t<1+e^{\frac{1}{a-\frac{1}{2}}}}\right)\mathbf{1}_{B_a^1} \\ &+ ((1-2a)e^{-|x'|^2})^{\frac{1}{2a}}\mathbf{1}_{B_a^2} + e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{B_a^3}. \end{aligned}$$

(iv) 如果 $a = \frac{1}{2}$, 那么 $x_{nnk}^* \approx |\ln(t-1)|^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{B_a^1} + e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{B_a^3}$。

(v) 如果 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$，那么

$$x^*_{nnk} \approx \left(\frac{(t-1)^{\frac{1}{2}-a}}{|\ln(t-1)|} e^{-|x'|^2} \mathbf{1}_{t>1+e^{\frac{2}{2a-1}}} + (a-\frac{1}{2}) e^{-|x'|^2} \mathbf{1}_{t<1+e^{\frac{2}{2a-1}}} \right) \mathbf{1}_{B^1_a}$$
$$+ (2a-1) e^{-|x'|^2} \mathbf{1}_{B^2_a} + e^{-\frac{|x'|^2}{2a}} \mathbf{1}_{B^3_a}.$$

(vi) 若 $\frac{3}{4} \le a \le 1$，则 $x^*_{nnk} \approx e^{-|x'|^2} \left(\mathbf{1}_{B^1_a} + \mathbf{1}_{B^2_a} \right)$。

此处，若 $(x',t) \in B^1_a$，则为 $x^*_{nnk} \in (0, \sqrt{2(t-1)})$；而若 $(x',t) \in B^2_a \cup B^3_a$，则为 $x^*_{nnk} \in (\sqrt{2(t-1)}, 1/2)$。

此外，对于 $a > 0$，存在 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{-+}(w_n(x',\cdot,t); 1/2, \infty)$，其中 S^{-+} 在定义2.9中定义，满足 $x^*_{nnk} \approx |x'|$。

注 3.13。 与注 3.8类似，条件 $1/4$ 和 $3/4$ 中的数值 a 可以分别替换为 0与 $1/2$ 之间以及 $1/2$ 与1 之间的任意数。这说明了定理 $c_i (i = 5, \cdots, 8)$ 中出现常数的合理性 1.8。

注 3.14。 注意，当 $a \to \frac{1}{2}$ 时，集合 B^2_a 趋于零。因此在 $a = \frac{1}{2}$ 附近，当 $(x',t) \in B^3_a$ 时，该项可作为 x^*_{nnk} 在“多数” t 取值下的界。还要注意，当 $a = \frac{1}{2}$ 时，x^*_{nnk} 的界中类似的项来自 B^3_a，这证实了 x^*_{nnk} 在 $a = \frac{1}{2}$ 处关于 a 的连续性。

证明。 证明的结构与命题 3.7的证明相同。

在整个证明过程中，常数 $c_i = c_i(n, M)$ $d_i = d_i(n, M) > 0, i = 1, \cdots, 5$ 可在不同情形中取不同值。在每个子情形中，这些常数都满足 $c_1 \ge d_1$, $c_2 \le d_2$, $c_3 \ge d_3$, $c_4 \le d_4$ 和 $c_5 \ge d_5$。

• **(情形 1：** $1 < t < \frac{9}{8}$, $x_n < \sqrt{2(t-1)}$**)** 由（3.15）、引理 3.2 的 (i) 和引理 3.3的 (iv)，我们有

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n} \Big(\frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a+1} \mathbf{1}_{-1<a<0} + \frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}-a}}{\frac{1}{2}-a} \mathbf{1}_{0<a<\frac{3}{4}, a\neq\frac{1}{2}}$$
$$+ |\ln(t-1)| \mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + \frac{1}{a} \mathbf{1}_{a>\frac{3}{4}} \Big) + x_n \left(e^{-|x'|^2} + \frac{(t-1)^{a-\frac{n}{2}}}{a+1} e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}} \right). \tag{3.17}$$

子情形 1-1： $-1 < a < 0$。 由（3.17），我们有

$$w_n(x,t) \ge -c_1 \frac{x_n^2}{|x'|^n} \frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a+1} + x_n \left(c_2 e^{-c_3|x'|^2} + c_4 \frac{(t-1)^{a-\frac{n}{2}}}{a+1} e^{-\frac{c_5|x'|^2}{t-1}} \right),$$
$$w_n(x,t) \le -d_1 \frac{x_n^2}{|x'|^n} \frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a+1} + x_n \left(d_2 e^{-d_3|x'|^2} + d_4 \frac{(t-1)^{a-\frac{n}{2}}}{a+1} e^{-\frac{d_5|x'|^2}{t-1}} \right).$$

若 $d_2(a+1)|x'|^n e^{-d_3|x'|^2} + d_4(t-1)^{a-\frac{n}{2}} |x'|^n e^{-\frac{d_5|x'|^2}{t-1}} < d_1\sqrt{2}(t-1)^a$，则记为

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2(a+1)|x'|^n e^{-c_3|x'|^2} + c_4(t-1)^{a-\frac{n}{2}} |x'|^n e^{-\frac{c_5|x'|^2}{t-1}}}{c_1(t-1)^{a-\frac{1}{2}}},$$
$$x^*_{nn2} := \frac{d_2(a+1)|x'|^n e^{-d_3|x'|^2} + d_4(t-1)^{a-\frac{n}{2}} |x'|^n e^{-\frac{d_5|x'|^2}{t-1}}}{d_1(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}.$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 以及 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x', \cdot, t); 0, \sqrt{2(t-1)})$。

另一方面，如果 $c_2(a+1)|x'|^n e^{-c_3|x'|^2} + c_4(t-1)^{a-\frac{n}{2}} |x'|^n e^{-\frac{c_5|x'|^2}{t-1}} > \sqrt{2}c_1(t-1)^a$，那么 $w_n(x,t) > 0$ 对于 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

子情形 1-2： $0 < a < \frac{1}{4}$。 根据（3.17），我们有

$$\frac{x_n}{|x'|^n} \Big(-c_1 x_n (t-1)^{a-\frac{1}{2}} + c_2 |x'|^{n-2} e^{-c_3|x'|^2} \Big) \le w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n} \Big(-d_1 x_n (t-1)^{a-\frac{1}{2}} + d_2 |x'|^{n-2} e^{-d_3|x'|^2} \Big).$$

若 $|x'|^{n-2} e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2}c_1}{c_2}(t-1)^a$，则我们记

$$x^*_{nn1} = \frac{c_2}{c_1}(t-1)^{-a+\frac{1}{2}} |x'|^{n-2} e^{-\alpha_1|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} = \frac{d_2}{d_1}(t-1)^{-a+\frac{1}{2}} |x'|^{n-2} e^{-\beta_1|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t); \sqrt{2(t-1)},_{1\,2})$。

另一方面，如果 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^a$，那么 $w_n(x,\ t) > 0$ 对于所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

子情形 1-3： $\frac{1}{4} \le a < \frac{1}{2}$。由 (3.17)，可得

$$w_n(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^n}\Big(- x_n \frac{1-(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} + |x'|^{n-2}e^{-|x'|^2}\Big).$$

1) 假设 $t > 1 + e^{2^{2a-1}}$，则由 (2.21)，$(t-1)^{a-\frac{1}{2}} \approx |\ln(t-1)|$。于是，我们有

$$\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-c_1 x_n |\ln(t-1)| + c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right) \le w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1 x_n|\ln(t-1)| + d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2}{c_1}\frac{1}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2}{d_1}\frac{1}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

从而 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);\ \sqrt{2(t-1)},_{1\,2})$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，则 $w_n(x,t) > 0$ 对所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

2）假设 $t < 1 + e^{2^{2a-1}}$，则由（2.21），$(t-1)^{a-\frac{1}{2}} \approx \frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}$。于是，我们有

$$\frac{x_n}{|x'|^n}\left(c_1 x_n\frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} + c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right) \le w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(d_1 x_n\frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} + d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{2\sqrt{2c_1}}{(1-2a)\,c_2}(t-1)^a$，则我们记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2}{c_1}(\frac{1}{2}-a)(t-1)^{\frac{1}{2}-a}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2}{d_1}(\frac{1}{2}-a)(t-1)^{\frac{1}{2}-a}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x',\ \cdot,\ t);\ \sqrt{2(t-1)},_{1\,2})$。

另一方面，如果 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{2\sqrt{2c_1}}{(1-2a)c_2}(t-1)^a$，那么 $w_n(x,\ t) > 0$ 对所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。**情形 1-4：** $a = \frac{1}{2}$。由 (3.17)，可得

$$-c_1\frac{x_n^2}{|x'|^n}|\ln(t-1)| + c_2 x_n|x'|^{-2}e^{-c_3|x'|^2} \le w_n(x,t) \le -d_1\frac{x_n^2}{|x'|^n}|\ln(t-1)| + d_2 x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}.$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2}{c_1}\frac{1}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2}{d_1}\frac{1}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x',\ \cdot,\ t);\sqrt{2(t-1)},\ _{1\,2})$。

另一方面，如果 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，那么 $w_n(x,\ t) > 0$ 对所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

子情形 1-5： $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{4}$。由 (3.17)，可得

$$w_n(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^n}\Big(- x_n \frac{1-(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} + |x'|^{n-2}e^{-|x'|^2}\Big).$$

1) 假设 $t > 1 + e^{1^{2^{2a}}}$，则由（2.21），$(t-1)^{a-\frac{1}{2}} \approx (t-1)^{a-\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{t-1}$。于是，我们有

$$w_n(x,t) \ge -c_1\frac{x_n^2}{|x'|^n}(t-1)^{a-\frac{1}{2}}|\ln(t-1)| + c_2\frac{x_n}{|x'|^2}e^{-c_3|x'|^2},$$

$$w_n(x,t) \le -d_1\frac{x_n^2}{|x'|^n}(t-1)^{a-\frac{1}{2}}|\ln(t-1)| + d_2\frac{x_n}{|x'|^2}e^{-d_3|x'|^2}.$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{a-\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2}{c_1}\frac{(t-1)^{\frac{1}{2}-a}}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2}{d_1}\frac{(t-1)^{\frac{1}{2}-a}}{|\ln(t-1)|}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

从而 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x', \cdot, t); \sqrt{2(t-1)})$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{a-\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$，则对所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$，$w_n(x, t) > 0$。

2）假设 $t < 1 + e^{1-2a}$，则由（2.21），$1 - \frac{(t-1)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{a-\frac{1}{2}}$。于是，我们有

$$\frac{x_n}{|x'|^n}\Big(-\frac{c_1}{a-\frac{1}{2}}x_n + c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\Big) \le w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\Big(-\frac{d_1}{a-\frac{1}{2}}x_n + d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\Big).$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(a-\frac{1}{2})(t-1)$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2(a-\frac{1}{2})}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2(a-\frac{1}{2})}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x', \cdot, t); \sqrt{2(t-1)})$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(a-\frac{1}{2})(t-1)$，则 $w_n(x,t) > 0$ 对所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$。

子情形 1-6： $a \ge \frac{3}{4}$。由 (3.17)，可得

$$-c_1\frac{x_n^2}{|x'|^n} + c_2x_n|x'|^{-2}e^{-c_3|x'|^2} \le w_n(x,t) \le -d_1\frac{x_n^2}{|x'|^n} + d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}.$$

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}, \quad x^*_{nn2} := \frac{d_2}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1} \le x^*_{nn2}$ 和 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x', \cdot, t); \sqrt{2(t-1)}$ 1 2</style>)。

若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{\sqrt{2c_1}}{c_2}(t-1)^{\frac{1}{2}}$，则对于所有 $x_n \le \sqrt{2(t-1)}$，$w_n(x, t) > 0$。

• (情形 2： $1 < t < \frac{9}{8}$，$\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$**)**

由 (3.15、引理 3.2 和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned} w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Bigg(&\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+1}\mathbf{1}_{a\le-\frac{3}{4}} + \frac{x_n^{2a+1}-(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{-\frac{3}{4}<a\le 0, a\ne-\frac{1}{2}} + \ln\Big(\frac{x_n^2}{t-1}\Big)\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{2^{\frac{1}{2}-a}-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}x_n^2\mathbf{1}_{0<a\le\frac{3}{4}, a\ne\frac{1}{2}} + x_n^2|\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + \frac{x_n^2}{a}\mathbf{1}_{a>\frac{3}{4}}\Bigg) \\ &+ x_n\Big(e^{-|x'|^2} + \frac{(t-1)^{a-\frac{n}{2}}}{a+1}e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}}\Big). \end{aligned} \tag{3.18}$$

子情形 2-1： $-1 < a \le -\frac{3}{4}$。由 (3.18)，当 $|x'|$较大时，可得

$$\begin{aligned} w_n(x,t) &\lesssim -\frac{1}{|x'|^n}\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+1} + x_ne^{-|x'|^2} + \frac{x_n(t-1)^{a-\frac{n}{2}}}{a+1}e^{-\frac{|x'|^2}{t-1}} \\ &\le -\frac{1}{|x'|^n}\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+1} + e^{-|x'|^2} < 0 \end{aligned}$$

对所有 $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$。

子情形 2-2： $-\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}$。由（3.18），可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\frac{x_n^{2a+1}-(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} + \frac{x_n}{|x'|^2}e^{-|x'|^2}.$$

1）若 $x_n \le e^{-\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}}$，则由（2.21），$x_n^{2a+1}-\left(\frac{t-1}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}} \approx x_n^{2a+1}$ 因此，当 $|x'|$ 足够大时，我们有

$$w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1 x_n^{2a}\ln\frac{x_n^2}{t-1}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-2d_1\ln 2+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right)<0$$

对所有 $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$

2) 若 $x_n \ge e^{-\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}}$，则由 (2.21)，$\frac{x_n^{2a+1}-\left(\frac{t-1}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} \approx \frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}})}{a+\frac{1}{2}}$。因此，对于较大的 $|x'|$,

$$w_n(x,t) \le d_1|x'|^{-n}\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}+d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2} \le -2^{\frac{3}{2}-a}d_1|x'|^{-n}+\frac{d_2}{2}|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}<0$$

对所有 $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$。

子情形 2-3： $a=-\frac{1}{2}$。由（3.18），当 $|x'|$ 较大时，我们有

$$w_n(x,t) \le -d_1|x'|^{-n}\ln\frac{x_n^2}{t-1}+d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2} \le -d_1\ln 2|x'|^{-n}+\frac{d_2}{2}|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}<0$$

对所有 $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$。

子情形 2-4： $-\frac{1}{2}<a\le -\frac{1}{4}$。由（3.18），我们有

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left(\frac{x_n^{2a+1}-(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\right)+x_n|x'|^{-2}e^{-|x'|^2}.$$

1）假设 $x_n \le e^{\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}}$。那么由（2.21），我们有 $x_n^{2a+1}-\left(\frac{t-1}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}} \approx (t-1)^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{x_n^2}{t-1}$，并且我们有

$$w_n(x,t) \le |x'|^{-n}x_n\left(-d_1(t-1)^{a+\frac{1}{2}}x_n^{-1}\ln\frac{x_n^2}{t-1}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

如果 $e^{\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{2}$，那么我们有

$$(t-1)^{a+\frac{1}{2}}x_n^{-1}\ln\frac{x_n^2}{t-1} \ge (t-1)^a\frac{e^{\frac{-1}{2a+1}}}{2a+1} \ge 4^{-a}e^{\frac{-2a}{2a+1}}\frac{e^{\frac{-1}{2a+1}}}{2a+1} \ge 4^{-a}\frac{e^{-1}}{2a+1}.$$

若 $e^{\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{2}$，则有

$$(t-1)^{a+\frac{1}{2}}x_n^{-1}\ln\frac{x_n^2}{t-1} \ge (t-1)^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{1}{4(t-1)} \ge \frac{1}{2^{2a+1}e}\ln\frac{1}{4(t-1)}.$$

因此，对于充分大的 $|x'|$，$w_n(x,t)<0$ for $\sqrt{2(t-1)} \le x_n < \frac{1}{2}$。

2) 假设 $x_n \ge e^{\frac{1}{2a+1}}(t-1)^{\frac{1}{2}}$。那么由 (2.21)，有 $x_n^{2a+1}-\left(\frac{t-1}{2}\right)^{a+\frac{1}{2}} \approx \frac{x_n^{2a+1})}{a+\frac{1}{2}}$ 且

$$w_n(x,t) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1\frac{x_n^{2a}}{a+\frac{1}{2}}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right) \le \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1\frac{e^{\frac{2a}{2a+1}}}{a+\frac{1}{2}}(t-1)^a+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right)<0$$

对于充分大的 $|x'|$。

子情形 2-5： $-\frac{1}{4}<a<0$。由（3.18），对于所有 $\sqrt{2(t-1)} < x_n < \frac{1}{2}$，

$$w_n(x,t) \le |x'|^{-n}x_n(-d_1x_n^{2a}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}) \le |x'|^{-n}x_n(-d_1 2^{-2a}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2})<0$$

当 $|x'|$ 充分大时。

子情形 2-6： $0<a\le\frac{1}{4}$。由（3.18），可得

$$-c_1|x'|^{-n}x_n^{2a+1}+c_2x_n|x'|^{-2}e^{-c_3|x'|^2} \le w_n(x,t) \le -d_1|x'|^{-n}x_n^{2a+1}+d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}.$$

若 $\frac{2^a d_1}{d_2}(t-1)^a < |x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}$ 且 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} < \frac{2^{-2a}c_1}{c_2}$，则记

$$x_{nn1}^* := \left(\frac{c_2}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}, \quad x_{nn2}^* := \left(\frac{d_2}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}.$$

使得 $x_{nn1}^* \le x_{nn2}^*$ 和 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);\sqrt{2(t-1)},\frac{1}{2})$。

另一方面，如果 $\frac{2^a d_1}{d_2}(t-1)^a > |x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}$，那么 $w_n(x,\ t) < 0$ 对于 $\sqrt{2(t-1)} < x_n < \frac{1}{2}$。

子情形 2-7： $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$。由(3.18)，可得

$$w_n(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-x_n\frac{2^{\frac{1}{2}-a}-x_n^{2a-1}}{2a-1}+|x'|^{n-2}e^{-|x'|^2}\right). \tag{3.19}$$

1. 假设 $x_n^2 \geq \frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}$。由（2.21），可得

$$-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-c_1x_n|\ln(2x_n^2)|+c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right) \leq w_n(x,t) \leq -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1x_n|\ln(2x_n^2)|+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

回忆引理 2.7。若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\left(\ln\frac{2c_1}{c_2e|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{-1} > \frac{2\sqrt{2}c_1}{(e+1)c_2e}\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}, \sqrt{2(t-1)}\right\}$ 且 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\frac{2d_1}{d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}}\right)^{-1} < \frac{4\sqrt{2}d_1}{d_2}$，则记

$$x^*_{nn1} := \frac{c_2e}{2\sqrt{2}c_1(e+1)}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\left(\ln\frac{2(e+1)c_1}{ec_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{-1},$$

$$x^*_{nn2} := \frac{d_2}{2\sqrt{2}d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\frac{2d_1}{d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}}\right)^{-1},$$

从而 $x^*_{nn1} \leq x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t); \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}, \sqrt{2(t-1)}\right\}, \frac{1}{2}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\frac{2d_1}{d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}}\right)^{-1} \leq \frac{2d_1}{d_2}\max\left\{e^{\frac{1}{2a-1}}, 2(t-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$，则 $w_n(x,t) < 0$ 对 $\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}, \sqrt{2(t-1)}\right\} < x_n < \frac{1}{2}$ 成立。

2. 假设 $x_n^2 < \frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}$。由（2.21），可得

$$-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-c_1\frac{x_n^{2a}}{\frac{1}{2}-a}+c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right) \leq w_n(x,t) \leq -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1\frac{x_n^{2a}}{\frac{1}{2}-a}+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

回忆引理 2.7。若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} \geq \frac{2^ac_1(t-1)^a}{c_2\frac{1}{1-2a}}$ 且 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2} < \frac{d_1}{2^ad_2}\frac{e^{\frac{2a}{2a-1}}}{1-2a}$，则记

$$x^*_{nn1} := \left(\frac{c_2}{c_1}(1-2a)|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}, \quad x^*_{nn2} := \left(\frac{d_2}{d_1}(1-2a)|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}},$$

使得 $x^*_{nn1} \leq x^*_{nn2}$ 且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ \sqrt{2(t-1)},\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2} > \frac{2^ac_1}{c_2}(1-2a)(t-1)^a$，则 $w_n(x,\ t) > 0$；而若 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2} < \frac{d_1}{2^ad_2}\frac{e^{\frac{2a}{2a-1}}}{1-2a}$，则对于 $\sqrt{2}(t-1)$，$w_n(x,\ t) < 0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}$。

子情形 2-8： $a = \frac{1}{2}$。由（3.18），可得

$$\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-c_1x_n|\ln x_n|+c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right) \leq w_n(x,t) \leq \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-d_1x_n|\ln x_n|+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

Let

$$x^*_{nn1} = \frac{c_2}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\left(\ln\frac{c_1}{c_2}|x'|^{2-n}e^{c_3|x'|^2}\right)^{-1},$$

$$x^*_{nn2} = \frac{e}{e+1}\frac{d_2}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\left(\frac{e+1}{e}\frac{d_1}{d_2}|x'|^{2-n}e^{d_3|x'|^2}\right)\right)^{-1},$$

从而 $x^*_{nn1} \leq x^*_{nn2}$。则对于满足 $\sqrt{2}(t-1) \leq x^*_{nn1} \leq x^*_{nn2} \leq \frac{1}{2}$ 的 $(|x'|,\ t)$，我们有 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);\ \sqrt{2}(t-1),\ \frac{1}{2})$ 由引理 2.7可得。

On 另一方面，如果 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2} < \frac{d_1}{d_2}\frac{e^{\frac{2a-1}{1-2a}}}{1-2a}$，那么 $w_n(x,\ t) < 0$ 对于 $\sqrt{2(t-1)} \leq x_n < \frac{1}{2}$.

子情形 2-9： $\frac{1}{2}<a\le\frac{3}{4}$。由（3.18），我们得到

$$w_n(x,t)\approx\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-x_n^{2a}\frac{2^{\frac{1}{2}-a}x_n^{1-2a}-1}{2a-1}+|x'|^{n-2}e^{-|x'|^2}\right).$$

1. 假设 $x_n^2\ge\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}$由(2.21)，可得

$$-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(c_1x_n^{2a}|\ln(2x_n^2)|-c_2|x'|^ne^{-c_3|x'|^2}\right)\le w_n(x,t)\le-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(d_1x_n^{2a}|\ln(2x_n^2)|-d_2|x'|^ne^{-d_3|x'|^2}\right).$$

回顾引理2.7。若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\left(\ln\frac{e+1\ c_1}{2^aaec_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{-1}>(e+1)_{eac_2}^{c_1}\max\left\{2^{-a}e^{\frac{2a}{1-2a}},2^a(t-1)^a\right\}$且 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\frac{d_1}{2^aad_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{2^aa\frac{1}{ec_2}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}<\frac{d_1}{2^{2a}ad_2}$，则记

$$x^*_{nn1}:=\left(\frac{eac_2}{(e+1)c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\left(\ln\frac{(e+1)c_1}{2^aaec_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{-\frac{1}{2a}},$$

$$x^*_{nn2}:=\left(\frac{d_2a}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\left(\ln\frac{d_1}{2^aad_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}}\right)^{-\frac{1}{2a}},$$

因此 $x^*_{nn1}\le x^*_{nn2}$且 $(x^*_{nn1},x^*_{nn2})\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}},\sqrt{2(t-1)}\right\},\frac{1}{2}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\left(\ln\frac{e+1\ c_1}{2^aaec_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}}\right)^{-1}>(e+1)_{2^{2a}aec_2}^{c_1}$，则 $w_n(x,t)>0$；而若 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\left(\ln\frac{d_1}{2^aad_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}}\right)^{2^a}<\frac{d_1}{ad_2}\max\left\{2^{-a}e^{\frac{2a}{1-2a}},2^a(t-1)^a\right\}$，则 $w_n(x,t)<0$对于 $\max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}},\sqrt{2(t-1)}\right\}\le x_n<\frac{1}{2}$。

2. 假设 $x_n^2<\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}$由（2.21），可得

$$-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(c_1\frac{x_n}{a-\frac{1}{2}}-c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right)\le w_n(x,t)\le-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(d_1\frac{x_n}{a-\frac{1}{2}}-d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

回顾引理2.7。若 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}>\sqrt{2}c_1(a-\frac{1}{2})(t-1)^{\frac{1}{2}}$且 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}<\frac{d_1e^{\frac{1}{1-2a}}}{\sqrt{2}d_2}(a-\frac{1}{2})$，则记

$$\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-\frac{c_1}{2a-1}x_n+c_2|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}\right)\le w_n(x,t)\le\frac{x_n}{|x'|^n}\left(-\frac{d_1}{2a-1}x_n+d_2|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}\right).$$

若 $\frac{d_1}{(2a-1)d_2}\sqrt{2(t-1)}<|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}$且 $|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}<2^{\frac{c_1}{(2a-1)c_2}}$，则记

$$x^*_{nn1}=\frac{(2a-1)c_2}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2},\quad x^*_{nn2}=\frac{(2a-1)d_2}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1}\le x^*_{nn2}$且 $(x^*_{nn1},x^*_{nn2})\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\sqrt{2(t-1)}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}}\right)$。

另一方面，如果$|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}>\sqrt{2}^{\frac{c_1}{(a-\frac{1}{2})c_2}}e^{\frac{1}{1-2a}}$，那么 $w_n(x,\ t)>0$；而如果 $|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}<\sqrt{2}d_1(a-\frac{1}{2})d_2(t-1)^{\frac{1}{2}}$，那么 $w_n(x,\ t)<0$对 $\sqrt{2(t-1)}<x_n<\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}}$。

子情形 2-10： $\frac{3}{4}<a\le1$。由（3.18），可得

$$-c_1|x'|^{-n}x_n^2+c_2x_n|x'|^{-2}e^{-c_3|x'|^2}\le w_n(x,t)\le-d_1|x'|^{-n}x_n^2+d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}.$$

如果 $\frac{d_1}{d_2}\sqrt{2(t-1)}<|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}$且$|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2}<\frac{c_1}{2c_2}$，则记为

$$x^*_{nn1}:=\frac{c_2}{c_1}|x'|^{n-2}e^{-c_3|x'|^2},\quad x^*_{nn2}:=\frac{d_2}{d_1}|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2},$$

使得 $x^*_{nn1}\le x^*_{nn2}$以及 $(x^*_{nn1},x^*_{nn2})\in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);\sqrt{2(t-1)},\frac{1}{2})$。

另一方面 她的手中，若$\frac{d_1}{d_2}\sqrt{2(t-1)}>|x'|^{n-2}e^{-d_3|x'|^2}$，则对于 $\sqrt{2(t-1)}<x_n<\frac{1}{2}$，$w_n(x,\ t)<0$。

• **(情况3：** $1<t<\frac{9}{8}$，$-\frac{1}{2}<x_n<\frac{c_0}{\sqrt{n-1}}|x'|$) 我们选取 $0<c_0<1$ 使得对于 $x_n<\frac{c_0}{\sqrt{n-1}}|x'|$，根据引理 3.11，

$$w_n(x,t)\approx-\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t}\right\}+\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n.t)\right)\frac{1}{|x'|^n}+\frac{x_n}{t^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{c|x'|^2}{t}}+x_n\mathcal{H}_{a,\frac{n+2}{2}}(|x|,t).$$

由（3.15）、引理 3.2 和引理 3.3，可得

$$\begin{aligned}w_n(x,t)\le&-d_1|x'|^{-n}\left(\frac{1}{a}\mathbf{1}_{a>-\frac{1}{4}}+\frac{2^{-a-\frac{1}{2}}-(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{-\frac{3}{4}<a\le-\frac{1}{4},a\neq-\frac{1}{2}}+|\ln(t-1)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right.\\&\left.+\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{a+1}\mathbf{1}_{-1<a\le-\frac{3}{4}}\right)+d_2x_n|x'|^{-2}e^{-d_3|x'|^2}\le-d_1|x'|^{-n}+c_0d_2|x'|^{-1}e^{-d_3|x'|^2}<0\end{aligned}\tag{3.20}$$

当 $|x'|$ 充分大时。

• **（情形 4：** $1<t<\frac{9}{8}$，$x_n>\frac{c_1}{\sqrt{n-1}}|x'|$) 我们选取 $c_1>1$ 使得对于 $x_n>\frac{c_1}{\sqrt{n-1}}|x'|$，根据引理 3.11，

$$w_n(x,t)\approx\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t}\right\}+\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n.t)\right)\frac{1}{x_n^n}+\frac{x_n}{t^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{cx_n^2}{t}}+x_n\mathcal{H}_{a,\frac{n+2}{2}}(|x|,t).$$

于是我们得到 $w_n(x,t)>0$，因为上述方程中的每一项都是正的。

• **(情形 5：** $t>\frac{9}{8}$) 由 (3.15)、引理 3.2 和引理 3.3，我们得到

$$\begin{aligned}w_n(x,t)&\ge t^{-\frac{n+2}{2}}|x'|^{-n}x_n\left(-c_1x_nt^{\frac{n-1}{2}}+c_2|x'|^ne^{-\frac{c_3|x'|^2}{t}}\right),\\w_n(x,t)&\le t^{-\frac{n+2}{2}}|x'|^{-n}x_n\left(-d_1x_nt^{\frac{n-1}{2}}+d_2|x'|^ne^{-\frac{d_3|x'|^2}{t}}\right).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Let

$$x^*_{nn1}:=\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{|x'|^2}{t}\right)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t}e^{-\frac{c_3|x'|^2}{t}}\quad x^*_{nn2}:=\frac{d_2}{d_1}|x'|^nt^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{d_3|x'|^2}{t}},$$

因此 $0<x^*_{nn1}\le x^*_{nn2}$。当 $|x'|$ 足够大时成立，其中阈值仅依赖于 n。我们还注意到 $x_{n2}\le c_5\sqrt{t}$.

于是，由 (3.21) 可得，对于 $x_n<x^*_{nn1}$，$w_n(x,t)>0$；对于 $x_n>x^*_{nn2}$，$w_n(x,t)<0$，其中 x_n 足够小。另一方面，由 (3.15)，对于 $x_n>c_1|x'|$，$w_n(x,t)\ge c_1(t^{-\frac{1}{2}}+\mathcal{G}_{a,\frac{1}{2}}(x_n,t))x_n^{-n}>0$，并且当 $|x'|$ 足够大时，$t^{\frac{1}{2}}<x_n<c_0|x'|$，$w_n(x,t)\le-|x'|^{-n}t^{-\frac{1}{2}}\left(d_1-d_2\frac{x_n}{|x'|}\right)<0$。因此我们得到 $(c_0|x'|,c_1|x'|)\in S^{-+}(w_n(x',\cdot,t);\sqrt{t},\infty)$。

命题 3.12 的证明到此结束。 □

4. Signs of velocity components and asymptotics of reversal points for $t<1$

本节将推导 x^*_n 关于 $w_i(x,t)$ 在 $t<1$下的一些渐近性。主要结果见命题 4.6和命题 4.10。

4.1. **速度场的切向分量。**

4.1.1. **对** w_i 的估计。由式（2.19）可知，$w_i(x,t)=w^{(L)}_{in}(x,t)+w^B_i(x,t)+w^N_i(x,t)$。首先，我们将给出 $w^{(L)}_{in}$ 的估计（引理 4.3）和 $w^B_i+w^N_i$（引理 4.4）。我们从辅助引理开始。

引理 4.1. 设 $\frac{7}{8}<t<1$。对于 $\alpha\in\mathbb{R}$，令

$$A(\alpha,\theta,t):=\int_{1-t}^{\frac{1}{2}}s^\alpha e^{-\frac{\theta^2}{4s}}ds,\quad B(\alpha,\theta,t):=\int_0^{1-t}s^\alpha e^{-\frac{\theta^2}{4s}}ds.$$

(i) 若 $\theta^2\le2(1-t)$，则

$$\begin{aligned}A(\alpha,\theta,t)&\approx\frac{2^{-\alpha-1}-(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathbf{1}_{\alpha\neq-1}+|\ln2(1-t)|\mathbf{1}_{\alpha=-1},\\B(\alpha,\theta,t)&\approx\left(\frac{(1-t)^{\alpha+1}-2^{-\alpha-1}\theta^{2\alpha+2}}{\alpha+1}+\theta^{2\alpha+2}\right)\mathbf{1}_{\alpha\neq-1}+\ln\left(\frac{2(1-t)}{\theta^2}\right)\mathbf{1}_{\alpha=-1}.\end{aligned}$$

(ii) 若 $2(1-t)\le\theta^2\le\frac{1}{4}$，则

$$A(\alpha,\theta,t)\approx\left(\frac{2^{-\alpha-1}-(4\theta^2/3)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+1\right)\mathbf{1}_{\alpha\neq-1}+\ln\left(\frac{3}{8\theta^2}\right)\mathbf{1}_{\alpha=-1},\quad B(\alpha,\theta,t)\approx\theta^{-2}(1-t)^{2+\alpha}e^{-\frac{\theta^2}{1-t}}.$$

（iii）若 $\theta\ge\frac{1}{2}$，则

$$A(\alpha,\theta,t)\approx\theta^{-2}e^{-\theta^2},\quad B(\alpha,\theta,t)\approx\theta^{-2}(1-t)^{2+\alpha}e^{-\frac{\theta^2}{1-t}}.$$

证明见附录 A.8

注 4.2。引理 *4.1* 的（*iii*）在积分上限 $A(\alpha,\theta,t)$ 为严格大于 $\frac{1}{8}$ 的任意数时同样成立。

下一个引理是为 $w_{in}^{(L)}$ 的渐近性准备的。

引理 4.3（**的估计** $w_{in}^{(L)}$）。设 $i\neq n$，$\frac{7}{8}\le t\le1$ 和 $|x'|\le cx_i$ 其中某个 $c>1$。设 $w_{in}^{(L)}$ 定义为 (2.18)。则有以下结论：

(4.1)

$$w_{in}^{(L)}(x,t)\approx\frac{x_ix_n}{|x|^{n+2}}\begin{cases}x_n|x'|^{n+2}e^{-|x'|^2}+x_n(1-t)^a,\\ +x_n|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac12}+x_n\dfrac{1-(1-t)^{a-\frac12}}{a-\frac12}\mathbf{1}_{a\neq\frac12}, & \text{if } x_n<(2(1-t))^{\frac12},\\ x_n^2\dfrac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac12}\mathbf{1}_{a\neq\frac12}+x_n^2|\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac12}\\ +\dfrac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac12}}{a+\frac12}\mathbf{1}_{a\neq-\frac12}+\left|\ln\dfrac{x_n^2}{1-t}\right|\mathbf{1}_{a=-\frac12}, & \text{if } (2(1-t))^{\frac12}<x_n<(t-\frac12)^{\frac12},\\ \dfrac{1-(1-t)^{a+\frac12}}{a+\frac12}\mathbf{1}_{a\neq-\frac12}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac12}, & \text{if } x_n>(t-\frac12)^{\frac12}.\end{cases}$$

证明。由（2.18）和（2.17）可得

$$\begin{aligned}w_{in}^{(L)}&=4\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\widetilde{L}_{in}(x-y',t-s)\psi(y')\phi(s)dy'ds\\&\approx\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}\int_0^t\left(\frac{x_n}{|x|^{n+2}}+\frac{e^{-\frac{|x|^2}{t-s}}}{(t-s)^{\frac{n+1}{2}}}\right)\frac{x_i}{(t-s)^{\frac12}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds,\end{aligned}\tag{4.2}$$

这里用到了 $|x'-y'|\approx|x'|$ 当 $|x'|\ge2$ 且 $y'\in\operatorname{supp}(\psi)$。

• **(情形 1：** $x_n^2<2(1-t)$ **)** 在这种情况下，我们将（4.2）中的最后一个积分拆分如下。

$$\left(\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^{3t-2}+\int_{3t-2}^t\right)\cdots ds=:I_1+I_2+I_3.$$

对于 I_1，我们对 $t-s\approx1$ 使用 $\frac{7}{8}<t<1$ 当 $0<s<\frac12$，因此 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}\approx x_n^2$，得到

$$I_1\approx\frac{x_ix_n^3}{|x'|^{n+2}}\int_0^{\frac12}(t-s)^{-\frac32}\phi(s)ds+x_ix_n^2\int_0^{\frac12}(t-s)^{-\frac{n+4}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{t-s}}\phi(s)ds\approx\frac{x_ix_n^3}{|x'|^{n+2}}+x_ix_n^2e^{-|x'|^2}.\tag{4.3}$$

对于 I_2，我们使用 $t-s\approx1-s$ 对于 $\frac12<s<3t-2$ 以及最小值 $\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}\approx\frac{x_n^2}{t-s}$ 结合引理 4.1 的 (iii) 得到

$$\begin{aligned}I_2&\approx\frac{x_ix_n^3}{|x'|^{n+2}}\int_{2(1-t)}^{t-\frac12}s^{a-\frac32}ds+x_ix_n^2\int_{2(1-t)}^{t-\frac12}s^{-\frac{n+4}{2}+a}e^{-\frac{|x'|^2}{s}}ds\\&\approx\frac{x_ix_n^3}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-(1-t)^{a-\frac12}}{a-\frac12}\mathbf{1}_{a\neq\frac12}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac12}\right)+x_ix_n^2|x'|^{-2}e^{-|x'|^2}.\end{aligned}$$

对于 I_3，我们使用 $1-s\approx 1-t$ 对于 $3t-2<s<t$ 得到

$$I_3 \approx \frac{x_i x_n^3}{|x'|^{n+2}}(1-t)^a\int_{3t-2}^{t-x_n^2}(t-s)^{-\frac{3}{2}}ds + x_i x_n^2(1-t)^a\int_{3t-2}^{t-x_n^2}(t-s)^{-\frac{n+4}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{t-s}}ds$$
$$+\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}(1-t)^a\int_{t-x_n^2}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds \approx \frac{x_i x_n^2}{|x'|^{n+2}}(1-t)^a.$$

因此，对于 $x_n<(2(1-t))^{\frac{1}{2}}$，我们有

$$w_{in}^{(L)}(x,t)\approx x_i x_n^2 e^{-|x'|^2}+\frac{x_i x_n^2}{|x'|^{n+2}}(1-t)^a+\frac{x_i x_n^3}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right).$$

- **(Ca 情形 2：** $2(1-t)<x_n^2\le t-\frac{1}{2}$**)** 在这种情况下，我们将式（4.2）中的最后一个积分拆分如下。

$$\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}}+\int_{\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}}^{t}\right)\cdots ds =: I_1+I_2+I_3.$$

对 I_1 的估计与式（4.3）相同。

对于 I_2，我们发现 $t-s\approx 1-s$ 对于 $-\frac{1}{2}<s<\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}$，且 $2(1-t)<x_n^2\le t-\frac{1}{2}$ 意味着 $\frac{1}{2}\le t-x_n^2<\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}$。因此，我们进一步将 I_2 拆分如下

$$I_2 \approx \frac{x_i x_n^3}{|x'|^{n+2}}\int_{x_n^2}^{t-\frac{1}{2}}s^{a-\frac{3}{2}}ds + x_i x_n^2\int_{x_n^2}^{t-\frac{1}{2}}s^{-\frac{n+4}{2}+a}e^{-\frac{|x'|^2}{s}}ds + \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\int_{\frac{3}{2}(1-t)}^{x_n^2}s^{-\frac{1}{2}+a}ds$$
$$\approx \frac{x_i x_n^3}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}}+|\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right)+x_i x_n^2|x'|^{-2}e^{-|x'|^2}$$
$$+\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}}+\ln\frac{x_n^2}{1-t}\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right).$$

我们发现，对于 $\frac{5}{2}t-\frac{3}{2}<s<t$ 且 $\min\left\{1,\ \frac{x_n^2}{t-s}\right\}=1$。因此我们发现对于 I_3，

$$I_3 \approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}(1-t)^a\int_{2t-1}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds \approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}.$$

合并所有估计，我们得到

$$w_{in}^{(L)}(x,t)\approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(x_n^2\frac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}}+x_n^2|\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}+\frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}}\right.$$
$$\left.+\left|\ln\frac{x_n^2}{1-t}\right|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}+(1-t)^{a+\frac{1}{2}}+x_n|x'|^n e^{-|x'|^2}\right)$$
$$\approx \frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(x_n^2\frac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}}+x_n^2|\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}+\frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}}+\ln\frac{x_n^2}{1-t}\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right).$$

- **(情形 3：** $x_n^2\ge t-\frac{1}{2}$**)** 在这种情况下，我们像情形 1 中那样进行拆分。对于 I_1，我们进一步将积分拆分如下。

$$I_1\approx\left(\frac{x_i x_n}{|x|^{n+2}}+x_i e^{-|x|^2}\right)\int_0^{t-x_n^2}\frac{x_n^2}{t-s}\phi(s)ds+\frac{x_i}{|x|^{n+2}}\int_{t-x_n^2}^{\frac{1}{2}}\phi(s)ds\approx\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}.$$

对于分别取为 I_2 和 I_3、$t-s\approx 1-s$ 和 $1-s\approx 1-t$、$\frac{1}{2}<s<2t-1$ 和 $2t-1<s<t$，我们有

$$I_2\approx\frac{x_i x_n}{|x|^{n+2}}\int_{\frac{1}{2}}^{2t-1}(t-s)^{-\frac{1}{2}+a}ds\approx\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right),$$
$$I_3\approx\frac{x_i x_n}{|x|^{n+2}}(1-t)^a\int_{2t-1}^{t}(t-s)^{-\frac{1}{2}}ds\approx\frac{x_i x_n}{|x'|^{n+2}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}.$$

因此，对于 $t-\frac{1}{2}\le x_n^2\le t$，当 t 接近 1 时，我们有

$$w_{in}^{(L)}(x,t)\approx\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac12}}{a+\frac12}\mathbf{1}_{a\neq-\frac12}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac12}+(1-t)^{a+\frac12}+1\right)$$
$$\approx\frac{x_ix_n}{|x'|^{n+2}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac12}}{a+\frac12}\mathbf{1}_{a\neq-\frac12}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac12}\right).$$

证明完毕。 □

在下一个引理中，我们给出 $w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)$ 的渐近性。

引理 4.4。令 $|x'|$ 足够大，并且对于某个常数 $c>1$，$|x'|\le cx_i$。那么对于 $x_n<\sqrt{t}$，有如下结论：

(i) 如果 $x_n\ge\sqrt{t}$，则有

$$w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)\approx-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}e^{-x_n^2}+\frac{x_i}{|x|^n}(1-t)^a.$$

(ii) 如果 $(2(1-t))^{\frac12}<x_n\le\sqrt{t}$，则有

$$w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)\approx-\frac{1}{|x'|^{n-1}}\left(x_n\frac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac12}\mathbf{1}_{a>0,a\neq\frac12}+x_n|\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac12}-(1-t)^a\mathbf{1}_{-1<a<0}\right).$$

(iii) 如果 $x_n<(2(1-t))^{\frac12}$，我们有

$$w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)\approx-\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\left(\frac{1-(1-t)^{a-\frac12}}{a-\frac12}\mathbf{1}_{a>0,a\neq\frac12}+|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac12}-(1-t)^{a-\frac12}\mathbf{1}_{-1<a<0}\right).$$

注 4.5。对于 $1/2\le x_n\le\sqrt{t}$，*(i)* 中的条件 $x_n\ge\sqrt{t}$ 可以替换为 $x_n\ge1/2$，因为 *(i)* 和 *(ii)* 中的估计是可比的。

证明。我们首先说明证明的主要思路。(i) 的证明通过分别估计 w_i^B 和 w_i^N 来完成。另一方面，(ii) 和 (iii) 的证明通过如下分解 $w_i^B+w_i^N$ 来完成：利用关键恒等式 $w_i^B(x',0,t)=-w_i^N(x',0,t)=-2R_i'\psi(x')\phi(t)$，其中 R_i' 表示 $n-1$ 维空间中的第 i 个 Riesz 变换，我们写作

$$w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)=(w_i^B(x,t)-w_i^B(x',0,t))+(w_i^N(x,t)-w_i^N(x',0,t)),$$

这正是估计 (iii) 中出现因子 x_n 的原因。

• (情形 1：$x_n>\sqrt{t}$) 回顾引理 2.2 的 (3)，可知 $|J_3(x,t)|\le ct|x'|^{-n-1}$。由于当 $|x'|$ 足够大时，$\partial_{x_i}N(x',0)\approx\frac{x_i}{|x'|^n}$，因此对于 $7/8<t<1$、$0<s<t$ 和 $|x'|\approx x_i$，有 $\partial_{x_i}N(x',0)+J_3(x',t-s)\approx x_i|x'|^{-n}$。于是，我们有

$$w_i^B(x,t)\approx-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}\int_0^t(t-s)^{-\frac32}e^{-\frac{x_n^2}{t-s}}\phi(s)ds=-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}\left(\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^{2t-1}+\int_{2t-1}^t\right)\cdots ds$$
$$=:-\frac{x_ix_n}{|x'|^n}\left(I_1+I_2+I_3\right).$$

对于 I_1，由于当 $0<s<1/2$ 且 $7/8<t<1$ 时，$t-s\approx1$，因此我们有

$$I_1\approx e^{-x_n^2}\int_0^{\frac12}\phi(s)ds\approx e^{-x_n^2}.$$

对于 I_2，由于当 $1/2<s<2t-1$ 时，$t-s\approx1-s$，因此我们有

$$I_2\approx\int_{1-t}^{\frac12}s^{-\frac32+a}e^{-\frac{x_n^2}{s}}ds=A(a-3/2,x_n,t).$$

对于 I_3，由于 $1-s\approx1-t$ 对 $2t-1<s<t$，我们有

$$I_3\approx(1-t)^a\int_0^{1-t}s^{-\frac32}e^{-\frac{x_n^2}{s}}ds=(1-t)^aB(-3/2,x_n,t).$$

综合所有估计并结合引理 4.1，我们有对于 $x_n \geq \sqrt{t}$,

$$
\begin{aligned}
w_i^B(x,t) &\approx -\frac{x_i x_n}{|x'|^n}\Big(e^{-x_n^2} + A(a-3/2, x_n, t) + (1-t)^a B(-3/2, x_n, t)\Big) \\
&\approx -\frac{x_i x_n}{|x'|^n}\left(e^{-x_n^2} + x_n^{-2}e^{-x_n^2} + (1-t)^{a+\frac{1}{2}}x_n^{-2}e^{-\frac{x_n^2}{1-t}}\right) \approx -\frac{x_i x_n}{|x'|^n}e^{-x_n^2}.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

另一方面，很容易看出，对于 $3/4 < t < 1$,

$$
w_i^N(x,t) \approx (1-t)^a x_i |x|^{-n}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{4.5}
$$

- **（情形 2：** $x_n < \sqrt{t}$**）** 令 $x_n \leq |x'| \leq c x_i$，且 $c > 1$。注意，对于 $|y'| < 1/2$, $\partial_{x_n}\partial_{x_i} N(x' - y', x_n) \approx -\frac{x_i x_n}{|x|^{n+2}}$。因此，我们有

$$
\partial_{x_n} w_i^N(x,t) = 2\phi(t)\int_{|y'|<\frac{1}{2}} \partial_{x_n}\partial_{x_i} N(x'-y', x_n)\psi(y')dy' \approx -\phi(t)\frac{x_i x_n}{|x|^{n+2}}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}.
$$

由于对于 $|x'| \geq 1$, $w_i^N(x', 0, t) = 2R_i'\psi(x')\phi(t)$，我们有

$$
w_i^N(x,t) - 2R_i'\psi(x')\phi(t) = 2\int_0^{x_n} \partial_{y_n} w_i^N(x', y_n, t)dy_n \approx -\frac{x_i x_n^2}{|x|^{n+2}}\phi(t).
$$

由于 $2\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-y', x_n, t-s)dy'ds = -1$ 对于所有 (x, t) 以及 $\phi(s) = 0$ 对于 $s < 0$，我们有

$$
\begin{aligned}
w_i^B + 2R_i'\psi(x')\phi(t) &= 4\int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-y', x_n, t-s)\big(R_i'\psi(y')\phi(s) - R_i'\psi(x')\phi(t)\big)dy'ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= 4\int_0^t \phi(s)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-y', x_n, t-s)\big(R_i'\psi(y') - R_i'\psi(x')\big)dy'ds, \\
I_2 &:= 4R_i'\psi(x')\int_0^t \big(\phi(s) - \phi(t)\big)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-y', x_n, t-s)dy'ds, \\
I_3 &:= -4R_i'\psi(x')\phi(t)\int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n}\Gamma(x'-y', x_n, t-s)dy'ds.
\end{aligned}
$$

1. I_1的估计。由于 $|R_i'\psi(x')| \lesssim \|\psi\|_{C^1(\mathbb{R}^{n-1})}$ 对 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$成立，我们有

$$
\left|\int_{|x'-y'|\geq\frac{1}{2}|x'|} \Gamma'(x'-y', t-s)\big(R_i'\psi(y') - R_i'\psi(x')\big)dy'\right| \leq c\int_{|y'|\geq\frac{|x'|}{2\sqrt{t-s}}} \Gamma'(y', 1)dy' \leq ce^{-\frac{c|x'|^2}{t-s}}.
$$

注意，对于 $|x'| \geq 1$, $|\nabla_{x'}^2 R_i'\psi(x')| \leq c\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}|x'|^{-n-1}$。由于对所有$1 \leq k \leq n-1$ 和 $t-s > 0$, $\int_{|y'|\leq\frac{1}{2}|x'|} y_k\Gamma'(y', t-s)dy' = 0$成立，利用两次中值定理，我们有

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{|x'-y'|\leq\frac{1}{2}|x'|} \Gamma'(x'-y', t-s)\big(R_i'\psi(y') - R_i'\psi(x')\big)dy'\right| &= \left|\int_{|y'|\leq\frac{1}{2}|x'|} \Gamma'(y', t-s)y'\cdot\nabla'^2 R_i'\psi(x'-\eta')\xi'dy'\right| \\
&\leq c|x'|^{-n-1}(t-s).
\end{aligned}
$$

按照与（4.4）相同的计算，我们有

$$
|I_1| \leq c|x'|^{-n-1}x_n\Big(e^{-x_n^2} + A(a-1/2, x_n, t) + (1-t)^a B(-1/2, x_n, t)\Big). \tag{4.7}
$$

2. I_2的估计。由于 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\Gamma'(x'-y',\ t)\,dy'=1$，我们有

$$\begin{aligned}I_2&=4R_i'\psi(x')\int_0^t\big(\phi(s)-\phi(t)\big)\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_{x_n}\Gamma(x'-y',x_n,t-s)dy'ds\\&\approx-|x'|^{-n+1}\int_0^t\big(\phi(s)-\phi(t)\big)\frac{x_n}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x_n^2}{4(t-s)}}ds\\&\approx-|x'|^{-n+1}\left(\int_0^{\frac12}+\int_{\frac12}^{2t-1}+\int_{2t-1}^t\right)\cdots ds=:-|x'|^{-n+1}(I_{21}+I_{22}+I_{23}).\end{aligned}$$

由于 $t-s\approx1$ 对于 $0<s<\frac12$ 和 $\frac78<t<1$，我们有

$$I_{21}\approx\Big(\mathbf{1}_{a>0}-(1-t)^a\mathbf{1}_{a<0}\Big)x_ne^{-x_n^2}. \tag{4.8}$$

对于 I_{23}，由于 $\phi(s)-\phi(t)=-\phi'(\eta)(t-s)\approx-\phi'(t)(t-s)$ 对于 $2t-1<s<t$，我们有

$$I_{23}\approx-\phi'(t)x_n\int_0^{1-t}s^{-\frac12}e^{-\frac{x_n^2}{s}}ds\approx a(1-t)^{a-1}x_nB(-1/2,x_n,t). \tag{4.9}$$

对于 I_{22}，我们首先考虑 $a>0$ 的情况。在这种情况下，我们看到 $1/2<s<2t-1$ 意味着 $\phi(s)-\phi(t)\approx\phi(s)=(1-s)^a\approx(t-s)^a$。因此，我们有

$$I_{22}\approx\int_{1-t}^{t-\frac12}x_ns^{-\frac32+a}e^{-\frac{x_n^2}{4s}}ds=x_nA(a-3/2,x_n,t). \tag{4.10}$$

另一方面，如果 $a<0$，那么对于 $1/2<s<2t-1$，$\phi(s)-\phi(t)\approx-\phi(t)$。因此，我们有

$$I_{22}\approx-\phi(t)\int_{1-t}^{t-\frac12}x_ns^{-\frac32}e^{-\frac{x_n^2}{4s}}ds=-\phi(t)x_nA(-3/2,x_n,t). \tag{4.11}$$

由于 $R_i'\psi(x')\approx|x'|^{-n+1}$ 且 $\phi(t)=(1-t)^a$，由 (4.8)-(4.11) 可得

$$I_2\approx\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\begin{cases}-\big(1+A(a-3/2,x_n,t)+a(1-t)^{a-1}B(-1/2,x_n,t)\big), & a>0,\\(1-t)^{a-1}\left((1-t)+(1-t)A(-3/2,x_n,t)-aB(-1/2,x_n,t)\right), & a<0.\end{cases} \tag{4.12}$$

3. I_3 的估计。由于 $x_n^2\le t$，可得

$$I_3\approx|x'|^{-n+1}\phi(t)x_n\int_t^\infty\frac{1}{s^{\frac32}}e^{-\frac{x_n^2}{4s}}ds\approx|x'|^{-n+1}\phi(t)\min(1,x_n). \tag{4.13}$$

综合所有估计 (4.6)、(4.7)、(4.12) 和 (4.13)，可得，对于 $a>0$且 $x_n\le\frac12$，

$$\begin{aligned}w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)&=\big(w_i^B(x,t)+2R_i'\psi(x')\phi(t)\big)+\big(w_i^N(x,t)-2R_i'\psi(x')\phi(t)\big)\\&\approx-\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\Big(1+A(a-3/2,x_n,t)+a(1-t)^aB(-1/2,x_n,t)+\frac{x_n}{|x'|^2}(1-t)^a-(1-t)^a\Big)\\&\approx-\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\left(1+A(a-3/2,x_n,t)+a(1-t)^aB(-1/2,x_n,t)\right)\end{aligned} \tag{4.14}$$

且对于 $a<0$,

$$\begin{aligned}w_i^B(x,t)+w_i^N(x,t)&=\big(w_i^B(x,t)+2R_i'\psi(x')\phi(t)\big)+\big(w_i^N(x,t)-2R_i'\psi(x')\phi(t)\big)\\&\approx\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\Big(1+A(-3/2,x_n,t)-\frac{a}{1-t}B(-1/2,x_n,t)-\frac{x_n}{|x'|^2}\Big)(1-t)^a\\&\approx\frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\left(1+A(-3/2,x_n,t)-\frac{a}{1-t}B(-1/2,x_n,t)\right)(1-t)^a.\end{aligned} \tag{4.15}$$

子情形 1-1： $x_n < (2(1-t))^{\frac{1}{2}}$。根据引理 4.1，对于 $a > 0$,

$$\begin{aligned}1 + A(a-3/2,\ x_n,\ t) + a(1-t)^a B(-1/2,\ x_n,\ t)\\ \approx 1 + \frac{2^{-a+\frac{1}{2}} - (1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + a(1-t)^a\left(\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_n}{2}}{\frac{1}{2}} + x_n\right)\\ \approx \frac{2^{-a+\frac{1}{2}} - (1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

另一方面，对于 $a < 0$,

$$\begin{aligned}1 + A(-3/2,&x_n,t) - \frac{a}{1-t}B(-1/2,x_n,t)\\ &\approx 1 + \frac{\sqrt{2} - (1-t)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \frac{a}{1-t}\left(\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_n}{2}}{\frac{1}{2}} + x_n\right) \approx (1-t)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

子情形 1-2： $(2(1-t))^{\frac{1}{2}} \le x_n < \sqrt{t}$。由引理 4.1，对于 $a > 0$，我们有

$$\begin{aligned}1 + A(a-3/2, x_n, t) + a(1-t)^a B(-1/2, x_n, t)\\ \approx 1 + \frac{2^{-a+\frac{1}{2}} - \left(4x_n^2/3\right)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + \frac{a(1-t)^{a+\frac{3}{2}}}{x_n^2}e^{-\frac{x_n^2}{1-t}}\\ \approx \frac{1 - \left(8x_n^2/3\right)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

另一方面，对于 $a < 0$,

$$1 + A(-3/2, x_n, t) - \frac{a}{1-t}B(-1/2, x_n, t) \approx 1 + \frac{\left(4x_n^2/3\right)^{-\frac{1}{2}} - 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{a(1-t)^{\frac{1}{2}}}{x_n^2}e^{-\frac{x_n^2}{1-t}} \approx \frac{1}{x_n}.$$

将这些界与估计（4.14）和（4.15）相结合，即得所需结果。至此证明完成。□

4.1.2. 的渐近性 x_{ni}^* 以及 的符号 w_i。我们先引入以下集合：对于 θ_0, θ_1 将在后文确定,

$$C_a^1 := \{(x',t) \mid (1-t)^a \lesssim (\ln|x'|)^{-\frac{1}{2}}|x'|^{-\theta_0}\}, \quad C_a^2 := \{(x',t) \mid |\ln(1-t)| \lesssim |x'|^2(1-t)^{\theta_1}\}.$$

Now 我们现在可以证明以下命题，它给出了当 $t < 1$ 时 w_i 的符号。

命题 *4.6*。设 w 是由边界数据 $g = g_n e_n$（由 *(1.5)-(1.7)* 给出）对应的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解，该解由 *(2.1)* 定义，且设 $i = 1, 2, \cdots, n-1$。存在依赖于 n 和 M 以及 $\epsilon_0 > 0$ 的 $c_* > 0$，使得若 $|x'| > c_*$ 且 $1 - \epsilon_0 < t < 1$，则以下结论成立：存在 c_0, $c_1 > 0$, $0 < \theta_0 < 2$, $0 < \theta_1 < a$，使得存在区间 $(x_{ni1}^*, x_{ni2}^*) \in S^{+-}(w_i(x',\cdot,t); 0, \infty)$ 满足以下条件：对于 $k = 1, 2$,

(i) 若 $-1 < a < 0$，则，$w_i(x,\ t) > 0$。(ii) 若 $a > 0$，则 $x_{nik}^* \approx (\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{C_a^1} + |\ln(1-t)|^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{C_a^2}$。

证明。由 (2.19)$_1$ 和 (2.5)，w_i 可表示为

$$w_i(x,t) = w_{in}^{(L)}(x,t) + w_i^B(x,t) + w_i^N(x,t). \tag{4.16}$$

- **(情形 1：** $x_n < (2(1-t))^{\frac{1}{2}}$**)** 根据引理 4.3 和引理 4.4的 (i)，对于仅取决于 $|x'|$的大 enough n,

$$\begin{aligned}w_i(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\Bigg[&\left(e^{-|x'|^2} + |x'|^{-2}(1-t)^a\right)x_n + \left(\frac{x_n^2}{|x'|^2} - 1\right)\\ &\times\left(|\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} + \frac{1-(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a>0,a\neq\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{x_n^2}{|x'|^2}\frac{1-(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} + (1-t)^{a-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{-1<a<0}\Bigg].\end{aligned}$$

取 $|x'|$ 足够大时，我们发现 $w_i(x,\ t) > 0$，如果 $-1 < a < 0$，而 $w_i(x,\ t) < 0$，如果 $a > 0$。

• **(情形 2：** $(2(1-t))^{\frac{1}{2}} < x_n < \frac{1}{2}$) 由引理 4.3和引理 4.4的 (ii)，对于足够大的$|x'|$,

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^{n-1}}\left(\frac{x_n^2}{|x'|^2}-1\right)\left(\frac{1-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a>0,a\neq\frac{1}{2}} + |\ln x_n|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right)$$
$$+\frac{1}{|x'|^{n-1}}\left(\frac{x_n}{|x'|^2}\frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + x_n\left|\ln\frac{x_n^2}{1-t}\right|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}} + (1-t)^a\mathbf{1}_{-1<a<0}\right).$$

取足够大的 $|x'|$, 我们发现，当 $-1<a<0$ 时， $w_i(x,t)>0$ ；而当 $a>0$时， $w_i(x,t)<0$ 。

• **（情况3：** $\sqrt{t} < x_n < |x'|$) 由引理4.3 和引理4.4中的(i)，可得

$$w_i(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^{n+1}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right) - \frac{x_n}{|x'|^{n-1}}e^{-x_n^2} + \frac{1}{|x'|^{n-1}}(1-t)^a. \tag{4.17}$$

若 $a<0$，则（4.17）意味着 $w_i(x,t)>0$。现在假设 $a>0$。由（4.17），取 $1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{a+\frac{1}{2}}$，可知存在 $0<c_i, d_i, 1\le i\le 4$，使得

$$\begin{aligned} w_i(x,t) &\le |x'|^{-n+1}\left(\frac{d_1}{a+\frac{1}{2}}\frac{x_n}{|x'|^2} - d_2x_ne^{-d_3x_n^2} + d_4(1-t)^a\right),\\ w_i(x,t) &\ge |x'|^{-n+1}\left(\frac{c_1}{a+\frac{1}{2}}\frac{x_n}{|x'|^2} - c_2x_ne^{-c_3x_n^2} + c_4(1-t)^a\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

首先，如果 $\frac{c_1}{a+\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{t}}{|x'|^2} + c_4(1-t)^a > \frac{c_2e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}c_3}$，那么对于所有$\sqrt{t}\le x_n\le|x'|$，都有 $w_i(x,t)>0$。

此外，令 $x_{ni}^* = (\alpha_i\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}$， $i=1,2$，使得 $d_3\alpha_1<2$ 且 $c_3\alpha_2>2$。

取 $\delta_2>1$满足 $\frac{d_1}{a+\frac{1}{2}}|x'|^{-2} < \frac{d_2}{2}|x'|^{-d_3\alpha_1}$对于 $|x'|>\delta_2$。若 $d_4(1-t)^a < \frac{d_2}{2}(\alpha_1\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}|x'|^{-d_3\alpha_1}$，则由$(4.18)_1$,可得

$$w_i(x',x_{n1}^*,t) \le |x'|^{-n+1}\left(-\frac{d_2}{2}(\alpha_1\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}|x'|^{-d_3\alpha_1} + d_4(1-t)^a\right) < 0.$$

取 $\delta_1>3$满足 $c_2|x'|^{-c_3\alpha_2} < \frac{c_1}{2(a+\frac{1}{2})}|x'|^{-2}$对于 $|x'|>\delta_3$。于是，由 $(4.18)_2$,可得

$$w_i(x',x_{n2}^*,t) \ge |x'|^{-n+1}\left(\frac{c_1}{2(a+\frac{1}{2})}(\alpha_2\ln|x'|)^{\frac{1}{2}}|x'|^{-2} + c_4(1-t)^a\right) > 0.$$

令 $y_{ni}^* = (-\beta_i\ln(1-t))^{\frac{1}{2}}$， $i=1,2$，使得 $d_3\beta_1<a$ 且 $c_3\beta_2>a$。

取 $\epsilon_1>0$满足 $d_4(1-t)^a < \frac{d_2}{2}(-\beta_1\ln(1-t))^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{d_3\beta_1}$对于 $1-t<\epsilon_1$。若 $\frac{d_1}{a+\frac{1}{2}}|x'|^{-2} < \frac{d_2}{2}(1-t)^{d_3\beta_1}$，则由 $(4.18)_1$, 可得

$$w_i(x',y_{n1}^*,t) \le |x'|^{-n+1}\left(\frac{d_1}{a+\frac{1}{2}}(-\beta_1\ln(1-t))^{\frac{1}{2}}|x'|^{-2} - \frac{d_2}{2}(-\beta_1\ln(1-t))^{\frac{1}{2}}(1-t)^{d_3\beta_1}\right) < 0.$$

取 $\epsilon_1>0$满足 $c_2(-\beta_2\ln(1-t))^{\frac{1}{2}}(1-t)^{c_3\beta_2} < \frac{c_4}{2}(1-t)^a$对于 $1-t<\epsilon_1$。于是，由 $(4.18)_2$ 可得

$$w_i(x',y_{n2}^*,t) \ge |x'|^{-n+1}\left(c_1(-\beta_2\ln(1-t)^{\frac{1}{2}}|x'|^{-2} + \frac{c_4}{2}(1-t)^a\right) > 0.$$

• **(情形 4：** $x_n>|x'|$) 由引理 4.3 和引理 4.4 的 (i) 可得

$$\begin{aligned} w_i(x,t) &\approx \frac{|x'|}{x_n^{n+1}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right) - \frac{x_n}{|x'|^{n-1}}e^{-x_n^2} + \frac{|x'|}{x_n^n}(1-t)^a\\ &\approx \frac{|x'|}{x_n^{n+1}}\left(\frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right) + \frac{|x'|}{x_n^n}(1-t)^a > 0. \end{aligned}$$

我们完成命题 4.6 中 (i) 和 (ii) 的证明。 □

现在我们将证明定理 1.8，即 w的分离点的存在性。

定理 1.6的证明。由命题 4.6的证明中的情形 1 和情形 2，我们可以选取 $\delta = 1/8$ 和$\alpha_i(t) = 1/2$，使其满足 $\alpha_i(t)$ 在定义 1.1中所给出的定义。

对于 $-1 < a \le -3/4$，由命题 3.7可知，必存在 $\delta_1 > 0$，$\delta_2 \approx \min\{|a+1||x'|^2, (|a+1||x'|^2)^{\frac{2}{2a+1}}\}$ 和 $\beta_{ik}(t) \approx (a+1)^{\frac{1}{1-2a}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{\frac{a+\frac12}{2a-1}}(k=1,2)$，使得 $\lim_{t\to1^+}\beta_{i2}(t) = 0$ 且 $w_i(x', x_n, t) < 0$ 对所有 $0 < x_n < \beta_{i1}(t)$ 都成立，而 $w_i(x', x_n, t) > 0$ 对所有 $\beta_{i2}(t) < x_n < \delta_1$以及 $(x', t) \in A_a^2$ 都成立，其中 A_a^2 由 (3.6) 给出。

对于 $-3/4 < a \le -1/2$，由命题3.7可知，必存在 $\delta_1 > 0$，$\delta_2 \approx \min\{e^{\frac{2}{1+2a}}|a+\frac12||x'|^2, |a+\frac12|^{\frac{2}{1+2a}}|x'|^{\frac{4}{1+2a}}\}$ 以及 $\beta_{ik}(t) \approx (a+1)^{\frac{1}{1-2a}}|x'|^{\frac{2}{1-2a}}(t-1)^{\frac{a+\frac12}{2a-1}}(k=1,2)$，使得 $\lim_{t\to1^+}\beta_2(t) = 0$ 且 $w_i(x', x_n, t) < 0$ 对所有 $0 < x_n < \beta_{i1}(t)$ 都成立，而 $w_i(x', x_n, t) > 0$ 对所有 $\beta_{i2}(t) < x_n < \delta_1$以及 $(x', t) \in A_a^2$ 都成立，其中 A_a^2 由 (3.6) 给出。

对于 $a = -1/2$，由命题 3.7 可知，必存在 $\delta_1 > 0$, δ_2，使得 $1 < t \le \delta_2$ 满足条件 $(x', t) \in A_a^3$，其中 A_a^3 由 (3.7) 给出，并且 $\beta_{ik}(t) \approx |x'|\left(\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\right)^{-\frac12}(k=1,2)$，使得 $\lim_{t\to1^+}\beta_{i2}(t) = 0$，且对所有 $0 < x_n < \beta_{i1}(t)$，$w_i(x', x_n, t) < 0$；而对所有 $\beta_{i2}(t)$，$w_i(x', x_n, t) < 0$，并且 $(x', t) \in A_a^3$。□

4.2. **速度场的法向分量**。

4.2.1. **对 的估计**。我们回顾一下 (2.20)：

$$w_n(x,t) = -\sum_{i=1}^{n-1} w_{ii}^{(L)}(x,t) + w_n^N(x,t) + \frac{n-1}{n}w^G(x,t) =: -w_n^{(L)}(x,t) + w_n^N(x,t) + \frac{n-1}{n}w^G(x,t). \tag{4.19}$$

在本小节中，我们将给出 w^G 和 $w_n^{(L)}$（引理4.7）以及 $w_n^N - w_n^{(L)}$（引理4.9）的估计。

引理 4.7（w^G **和** $w_n^{(L)}$的估计）。设 $g_n \ne 0$ 和 $7/8 < t < 1$。设 w^G 和 $w_n^{(L)}$分别由(2.18)$_5$ 和(4.19)给出。那么

$$w^G(x,t) \approx x_n e^{-|x|^2} \tag{4.20}$$

并且对于 $x_n \ge 1/e$,

$$w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{|x'|^2 - (n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}}\left(1 + \frac{1-(1-t)^{a+\frac12}}{a+\frac12} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac12}\right). \tag{4.21}$$

注 4.8。常数 $1/e$ 与估计无关。我们希望对(4.21) 施加的实质性要求是 $x_n \ge c_0$，其中 $c_0 > 0$ 是一个普适常数。此条件是命题*4.10*的证明所必需的（尤其是在子情形 *2-3* 中）。

证明。*1.* w^G的估计。对于 $|x'| \ge 2$，我们有

$$\begin{aligned} w^G(x,t) &= c_n\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{x_n}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{x_n^2+|x'-z'|^2}{4(t-s)}}\psi(z')\phi(s)dz'ds \approx \int_0^t \frac{x_n}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}}\phi(s)ds \\ &= \left(\int_0^{\frac12} + \int_{\frac12}^{2t-1} + \int_{2t-1}^t\right)\frac{x_n}{(t-s)^{\frac{n+2}{2}}}e^{-\frac{c|x|^2}{t-s}}\phi(s)ds =: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

我们回顾一下，$7/8 < t < 1$，因此每个 I_i 的估计如下：

$$I_1 \approx x_n e^{-|x|^2}\int_0^{\frac12}\phi(s)ds \approx x_n e^{-|x|^2}, \quad I_2 \approx \frac{x_n}{|x|^{n-2a}}\int_{\frac{|x|^2}{2}}^{\frac{|x|^2}{1-t}} s^{\frac{n-2}{2}-a}e^{-s}ds \approx \frac{x_n}{|x|^2}e^{-|x|^2},$$

$$I_3 \approx \frac{x_n}{|x'|^n}(1-t)^a\int_{\frac{|x|^2}{1-t}}^{\infty} s^{\frac{n-2}{2}}e^{-s}ds \approx \frac{x_n}{|x|^2(1-t)^{\frac{n-2}{2}-a}}e^{-\frac{|x|^2}{1-t}}.$$

因此，我们得到（4.20）。

2. $w_n^{(L)}$的估计。我们回顾估计式（2.16），并仿照引理4.3的证明对积分作类似拆分，得到

$$\begin{aligned} w_n^{(L)}(x,t) &\approx -\int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|x'-y'|^2-(n-1)x_n^2}{(t-s)^{\frac{1}{2}}|x-y'|^{n+2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)\psi(y')dy'ds \\ &\approx -\frac{|x'|^2-(n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds \\ &\approx -\frac{|x'|^2-(n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{2t-1} + \int_{2t-1}^t\right) \frac{1}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds. \end{aligned}$$

由于 $\min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \approx 1$ 对于 $0<s<t$ 和 $x_n > 1/e$，我们有

$$\begin{aligned} w_n^{(L)}(x,t) &\approx -\frac{|x'|^2-(n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} (t-s)^{-\frac{1}{2}}\phi(s)ds - \int_{1-t}^{t-\frac{1}{2}} s^{a-\frac{1}{2}}ds - (1-t)^a \int_0^{1-t} s^{-\frac{1}{2}}ds\right) \\ &\approx -\frac{|x'|^2-(n-1)x_n^2}{|x|^{n+2}} \left(1 + \frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

其中，在最后一个估计中，我们用到了 $t-s \approx 1-s$对于 $0<s<2t-1$ 以及 $1-s \approx 1-t$ 对于 $2t-1<s<t$。这就得到了（4.21），其中 $x_n > 1/e$。□

如果 x_n 足够小，那么 w_n^N和 w^G 关于 x_n 都是一次量，且系数为正（见（4.5）和引理 4.7），并且可以直接验证 $w_n^{(L)}$也是一次量，但系数为负。因此，要获得 w_n 在边界附近的精确估计，不应将这些项分开考虑；事实证明，只需将 w_n^N和 $w_n^{(L)}$一起考虑即可。下一个引理表明，差值 $w_n^N - w_n^{(L)}$随 $x_n \to 0$ 呈二次衰减，因此 w^G 占据主导地位，从而保证了 w_n 在边界附近为正。为陈述该估计，我们定义如下函数。

$$\sigma(t) := \left(\frac{2^{\frac{1}{2}-a} - (m(1-t))^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(2e^2(1-t))|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right).$$

其中 $m :=$ 最大$\{2, e^{\frac{1}{a}}\}$。

引理 4.9 (**对** $w_n^N - w_n^{(L)}$)。设 $7/8 < t < 1$ 和 $m :=$ 最大$\{2, e^{\frac{1}{a}}\}$。存在常数$N>1$ 和 $c_0 > 1$，它们仅依赖于 n，使得对于 $|x'| \geq N$，

(i) 设 $-1 < a < 0$，则有 $w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) > 0$。(ii)

设 $a \geq (\ln 2)^{-1}$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left[M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}\right].$$

(iii) 设 $(\ln 10^{-3})^{-1} \leq a < (\ln 2)^{-1}$，则有如下结果。

(1) 若 $x_n^2 \leq 2(1-t)$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left[M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)\right].$$

(2) 若 $2(1-t) < x_n^2 \leq e^{\frac{1}{a}}(1-t)$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left[Mx_n^2 + (1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^2\sigma(t)\right].$$

(3) 若 $e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \leq \frac{1}{e^2}$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left[Mx_n^2 + (1-t)^{a+\frac{1}{2}} + \frac{x_n^{2a+1} - (e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} + x_n^2\frac{2^{\frac{1}{2}-a} - x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\right].$$

(iv) 令 $|\ln(2(1-t))| \leq a \leq (\ln 10^{-3})^{-1}$，则有如下结论。

(1) 若 $x_n^2 \le \min\left\{\frac{1}{e^2}, \frac{5}{2}(1-t)\right\}$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left[M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)\right].$$

(2) 若 $\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 \le$的最小值 $\left\{\frac{1}{e^2}, \frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}$，

则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left[Mx_n + a(1-t)^a \ln\frac{x_n^2}{1-t} + x_n\sigma(t)\right].$$

(3) 若 $\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \le$的最小值 $\left\{\frac{1}{e^2}, e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}$，

则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left[Mx_n^2 + \left(a + e^{\frac{1}{2a}}\right)(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^2\sigma(t)\right].$$

(4) 若 $e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \le \frac{1}{e^2}$，则

$$\begin{aligned} w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Big[&Mx_n^2 + \left(a + e^{\frac{1}{2a}}\right)(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{x_n^{2a+1} - (e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} + x_n^2\left(\frac{2^{\frac{1}{2}-a} - x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right)\Big]. \end{aligned}$$

(v) 令 $0 < a < |\ln(2(1-t))|$，则有如下结论。

(1) 若 $x_n^2 \le \frac{5}{2}(1-t)$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left[M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\right].$$

(2) 若 $\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 \le \frac{1}{e^2}$，则

$$w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left[Mx_n + a(1-t)^a \ln\frac{x_n^2}{1-t}\right].$$

证明。 由 (4.19) 和 (2.18) 可得

$$\begin{aligned} w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) &= w_n^N(x,t) - \sum_{i=1}^{n-1} w_{ii}^{(L)}(x,t) \\ &= 2\phi(t)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_n N(x-y')\psi(y')dy' 4\sum_{i=1}^{n-1}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{L}_{ii}(x-y', t-s)\phi(s)dy'ds. \end{aligned} \tag{4.22}$$

由引理 2.2 的 (2)，对 $1 \le i \le n-1$，有

$$\widetilde{L}_{ii}(x,t) = \int_0^{x_n} \partial_n\Gamma_1(x_n - z_n, t)\left(\partial_{x_i}^2 N(x', z_n) + J(x', z_n, t)\right)dz_n, \tag{4.23}$$

其中 J 满足与 J_2 在引理 2.2 的 (2) 中给出的相同估计。于是由 (4.22) 和 (4.23) 可得

$$\begin{aligned} w_n^N(x,t) - w_n^{(L)}(x,t) = 2\phi(t)&\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_n^2 N(x'-y', z_n)dz_n\psi(y')dy' \\ &+ 4\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_n^2 N(x'-y', z_n)\psi(y')\int_0^t \partial_n\Gamma_1(x_n - z_n, t-s)\psi(s)dsdy'dz_n \\ &+ \int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi(y')\int_0^t \partial_n\Gamma_1(x_n - z_n, t-s)J(x'-y', z_n, t-s)\phi(s)dsdy'dz_n, \end{aligned}$$

在此我们使用了恒等式 $\Delta N(x) = 0$ 对于 $x \neq 0$ 和 $\int_0^{x_n} \partial_n^2 N(x', y_n)dy_n = \partial_n N(x$

whe).

由于 $\int_{-\infty}^{t}\partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)ds=-1/2$，我们有

$$\begin{aligned}&\phi(t)+2\int_0^t\partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\phi(s)ds\\&\quad=2\int_0^t\partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\big(\phi(s)-\phi(t)\big)ds-2\int_{-\infty}^0\partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\phi(t)ds.\end{aligned}$$

于是，我们有

$$w_n^N(x,t)-w_n^{(L)}(x,t)=A_1(x,t)+A_2(x,t)+A_3(x,t),$$

其中

$$\begin{aligned}A_1(x,t)&:=4\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_n^2N(x'-y',y_n)\psi(y')dy'\int_0^t\partial_n\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\big(\phi(s)-\phi(t)\big)dsdy_n,\\A_2(x,t)&:=-4\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_n^2N(x'-y',y_n)\psi(y')dy'\int_{-\infty}^0\partial_n\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\phi(t)dsdy_n,\\A_3(x,t)&:=-4\int_0^{x_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_0^tJ(x'-y',y_n,t-s)\psi(y')\partial_n\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)\phi(s)dsdy'dy_n.\end{aligned}$$

1. 对A_1的估计。注意，$\partial_{y_n}\partial_{y_n}N(x'-y',y_n)\approx|x'|^{-n}$对于 $|y'|<\frac12$、 $|x'|>1$和 $y_n^2<\frac1n|x'|^2$成立。因此，我们有

$$\int_0^{x_n}\partial_{y_n}\partial_{y_n}N(x'-y',y_n)\partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-y_n,t-s)dy_n\approx-|x'|^{-n}\frac{1}{(t-s)^{\frac12}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}.$$

因此，我们有

$$A_1(x,t)\approx-|x'|^{-n}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\frac12}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}\big(\phi(s)-\phi(t)\big)ds.$$

这里，我们记

$$\begin{aligned}\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{\frac12}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}\big(\phi(s)-\phi(t)\big)ds&=\int_0^{\frac12}\cdots ds+\int_{\frac12}^{2t-1}\cdots ds+\int_{2t-1}^t\cdots ds\\&=:A_{11}+A_{12}+A_{13}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

1. 对于 A_{11}，利用 $x_n^2<\frac12$和 $t-s\approx1$分别表示 $t>7/8$和 $0<s<1/2$，我们得到

$$A_{11}\approx x_n^2\int_0^{\frac12}\big(\phi(s)-\phi(t)\big)ds\approx x_n^2\left(M\mathbf{1}_{a>0}-(1-t)^a\mathbf{1}_{a<0}\right),\tag{4.25}$$

其中 $M:=\int_0^{\frac12}\phi(s)ds$。

2. 对于 A_{13}，利用 $\phi(s)-\phi(t)=-\phi'(\eta)(t-s)\approx a(1-t)^{a-1}(t-s)$表示 $2t-1<s<t$，我们得到

$$A_{13}\approx a(1-t)^{a-1}\int_{2t-1}^t(t-s)^{\frac12}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds\approx a(1-t)^{a+\frac12}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{1-t}\right\}.\tag{4.26}$$

3. 对于 A_{12}，我们分别考虑 $-1<a<0$ 和 $a>0$ 这两种情形。

- **(情形 1：** $-1<a<0$**)** 利用 (2.21)，我们有

$$\phi(s)-\phi(t)=-(1-s)^a\Big(\big(\frac{1-t}{1-s}\big)^a-1\Big)\approx a(1-s)^a\ln\frac{1-s}{1-t}\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\le e^{-\frac1a}}-(1-t)^a\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\ge e^{-\frac1a}}$$

因此

$$A_{12}\approx\int_{\frac12}^{2t-1}\left(a(1-s)^a\ln\frac{1-s}{1-t}\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\le e^{-\frac1a}}-(1-t)^a\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\ge e^{-\frac1a}}\right)(1-s)^{-\frac12}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{1-s}\right\}ds=:I_1+I_2.$$

从现在起，我们记 $p(t):=\min\left\{2^{-1},(1-t)^{e^{\frac{1}{|a|}}}\right\}$。注意， $p(t)\ge e$ for $-1<a<0$。

现在我们估计 I_1。注意,

$$I_1 = a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \int_2^{p(t)} s^{a-\frac{1}{2}} \ln s \ \min\left\{1, \frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\} ds.$$

i) 若 $x_n^2 < \frac{5}{2}(1-t)$，则 $\min\left\{1, \frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\} = \frac{x_n^2}{(1-t)s}$，因此

$$I_1 \approx a x_n^2 (1-t)^{a-\frac{1}{2}} \int_2^{p(t)} s^{a-\frac{3}{2}} \ln s \, ds \approx a x_n^2 (1-t)^{a-\frac{1}{2}}. \tag{4.27}$$

ii) 若 $\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 < \frac{21}{8e} p(t)(1-t)$，则 $p(t) > \frac{x_n^2}{1-t}$，因此

$$I_1 \approx a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} \left((1-t) \int_2^{\frac{x_n^2}{1-t}} s^{a-\frac{1}{2}} \ln s ds + x_n^2 \int_{\frac{x_n^2}{1-t}}^{p(t)} s^{a-\frac{3}{2}} \ln s ds \right).$$

因此，对于 $a \neq -\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{a}{a+\frac{1}{2}} \left(x_n^{2a+1} \ln \frac{x_n^2}{1-t} - \frac{x_n^{2a+1} - (1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} \right) + \frac{a}{\frac{1}{2}-a} x_n^{2a+1} \left(\ln \frac{x_n^2}{1-t} + \frac{1}{\frac{1}{2}-a} \right) \\ &\approx \frac{a}{a+\frac{1}{2}} \left(x_n^{2a+1} \ln \frac{x_n^2}{1-t} - \frac{x_n^{2a+1} - (1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \tag{4.28}$$

而对于 $a = -\frac{1}{2}$，

$$\begin{aligned} I_1 &\approx a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} \left((1-t) \left(\ln \frac{x_n^2}{1-t} \right)^2 + x_n^2 \left(\frac{x_n^2}{1-t} \right)^{-1} \left(\ln \frac{x_n^2}{1-t} + 1 \right) \right) \\ &\approx a \ln^2 \frac{x_n^2}{1-t}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

iii) 若 $x_n^2 > \frac{21}{8e} p(t)(1-t)$，则 $\frac{x_n^2}{(1-t)s} \geq \frac{x_n^2}{p(t)(1-t)} \geq \frac{e^{1/a}}{2(1-t)} = \max\left\{1, \frac{e^{1/a}}{2(1-t)}\right\} \geq 1$，因此

$$\begin{aligned} I_1 &\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \int_2^{p(t)} s^{a-\frac{1}{2}} \ln s ds \\ &\approx \frac{a}{a+\frac{1}{2}} (1-t)^{a+\frac{1}{2}} \left(p(t)^{a+\frac{1}{2}} \ln p(t) - \frac{p(t)^{a+\frac{1}{2}} - 1}{a+\frac{1}{2}} \right) \mathbf{1}_{a \neq -\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} (\ln p(t))^2 \mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

现在我们估计 I_2。由于 $e^{-1} < e^{-\frac{1}{a}}$，我们有

$$I_2 \approx -(1-t)^a \int_{e^{-\frac{1}{a}}(1-t)}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{s}\right\} ds.$$

如果 $e^{-\frac{1}{a}}(1-t) > \frac{1}{2}$，那么 $I_2 = 0$。因此，我们可以假设 $e^{-\frac{1}{a}}(1-t) < \frac{1}{2}$。
i) 如果 $x_n^2 < e^{-\frac{1}{a}}(1-t)$，那么 $\min\left\{1, \frac{x_n^2}{s}\right\} \approx \frac{x_n^2}{s}$ 对 $e^{-\frac{1}{a}}(1-t) < s < \frac{1}{2}$ 成立，因此

$$I_2 \approx -(1-t)^a x_n^2 \int_{e^{-\frac{1}{a}}(1-t)}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} ds = -2(1-t)^a x_n^2 \left((e^{-\frac{1}{a}}(1-t))^{-\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right).$$

ii) 如果 $e^{-\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 < 1/2$，那么

$$I_2 \approx -(1-t)^a \int_{e^{-\frac{1}{a}}(1-t)}^{x_n^2} s^{-\frac{1}{2}} ds - (1-t)^a x_n^2 \int_{x_n^2}^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} ds = -2(1-t)^a \left(2x_n - \sqrt{2} x_n^2 - (e^{-\frac{1}{a}}(1-t))^{\frac{1}{2}} \right).$$

综合此前所有估计可知，对于 $-1 < a < 0$，若 $7/8 < t < 1 - e^{\frac{1}{a}}/2$，则 $A_{12} = I_1$ 因此，由（4.25）和（4.26），可得

i) 若 $x_n^2 < \frac{5}{2}(1-t)$，则

$$A_1 \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left(Mx_n^2 + ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\right). \tag{4.31}$$

ii) 若$\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 < \frac{21}{8e}p(t)(1-t)$，则

$$\begin{aligned} A_1 \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Bigg[&Mx_n^2 + a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{a}{a+\frac{1}{2}}\left(x_n^{2a+1}\ln\frac{x_n^2}{1-t} - \frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + a\left(\ln\frac{x_n^2}{1-t}\right)^2\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

iii) 若$\frac{21}{8e}p(t)(1-t) < x_n^2 < \frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned} A_1 \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Bigg[&Mx_n^2 + a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{a}{a+\frac{1}{2}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\left(p(t)^{a+\frac{1}{2}}\ln p(t) - \frac{p(t)^{a+\frac{1}{2}}-1}{a+\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}(\ln p(t))^2\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

另一方面，若$1-e^{\frac{1}{a}}/2 < t < 1$，则 $A_{12} = I_1 + I_2$，因此由（4.25）和（4.26），可得：i) 若 $x_n^2 < \frac{5}{2}(1-t)$，则

$$A_1 \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left[Mx_n^2 + a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\right]. \tag{4.34}$$

ii) 若$\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 < e^{-\frac{1}{a}}(1-t)$，则

$$\begin{aligned} A_{12} \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Bigg[&Mx_n^2 + a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \\ &+\frac{a}{a+\frac{1}{2}}\left(x_n^{2a+1}\ln\frac{x_n^2}{1-t} - \frac{x_n^{2a+1}-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(\ln\frac{x_n^2}{1-t}\right)^2\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.35}$$

iii) 若 $e^{-\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 < \frac{1}{2}$，则（回忆一下，$p(t) = e^{-\frac{1}{a}}$对于 $1-e^{\frac{1}{a}}/2 < t < 1$）。

$$\begin{aligned} A_{12} \approx -\frac{1}{|x'|^n}\Bigg[&Mx_n^2 + a(1-t)^{a+\frac{1}{2}} - 2(1-t)^a\left(2x_n - \sqrt{2}x_n^2 - (e^{-\frac{1}{a}}(1-t))^{\frac{1}{2}}\right) \\ &+\frac{a}{a+\frac{1}{2}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\left(-\frac{e^{-1-\frac{1}{2a}}}{a} - \frac{e^{-1-\frac{1}{2a}}-1}{a+\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} - \mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.36}$$

• **(情形 2：** $a > 0$）与之前类似，我们有

$$\begin{aligned} A_{12} &\approx \int_{\frac{1}{2}}^{2t-1}\left(a(1-t)^a\ln\frac{1-s}{1-t}\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\le e^{\frac{1}{a}}} + (1-s)^a\mathbf{1}_{\frac{1-s}{1-t}\ge e^{\frac{1}{a}}}\right)(1-s)^{-\frac{1}{2}}\min\left\{1, \frac{x_n^2}{1-s}\right\}ds \\ &=: I_3 + I_4. \end{aligned}$$

我们首先估计 I_3。注意

$$I_3 = a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{p(t)} s^{-\frac{1}{2}}\ln s\min\left\{1, \frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\}ds,$$

其中，$p(t) := \min\left\{2, \frac{1}{(1-t)}, e^{\frac{1}{a}}\right\}$如情形 1 中所定义。与情形 1 不同的是，情形 1 中我们对 $p(t)$ 有统一的下界；通过将 a 取得足够大，$a > 0$ $p(t)$ 可以任意接近 1。特别地，当 $e^{\frac{1}{a}} < 2$ 时，I_3 消失。因此，之后估计 I_3 时，我们假设 $e^{\frac{1}{a}} \ge 2$。

首先假设 $2 \ge e^{\frac{1}{a}} \ge 10/3$。那么我们有 $p(t) = e^{\frac{1}{a}}$。
i) 若 $x_n^2 \ge 2(1-t)$，则 $\min\left\{1, \frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\} = \frac{x_n^2}{(1-t)s}$对 $s > 2$ 成立，因此

$$I_3 \approx ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\int_2^{e^{\frac{1}{a}}} s^{-\frac{3}{2}}\ln s ds \approx ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{a}} - 2).$$

ii) 若 $2(1-t)<x_n^2\geq e^{\frac{1}{a}}(1-t)$，则

$$I_3\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{\frac{x_n^2}{1-t}}s^{-\frac{1}{2}}\ln s ds+ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\int_{\frac{x_n^2}{1-t}}^{p(t)}s^{-\frac{3}{2}}\ln s ds\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{a}}-2).$$

iii) 若 $x_n^2>e^{\frac{1}{a}}(1-t)$，则

$$I_3\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{e^{\frac{1}{a}}}s^{-\frac{1}{2}}\ln s ds\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{a}}-2).$$

现在假设 $e^{\frac{1}{a}}\geq 10/3$，使得 $5/2\geq 3/4p(t)$ 成立。

i) 若 $x_n^2\geq\frac{5}{2}(1-t)$，则 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\}\approx\frac{x_n^2}{1-t()s}$，对于 $s>2$，因此

$$I_3=ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\int_2^{e^{\frac{1}{a}}}s^{-\frac{3}{2}}\ln s ds\approx ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}.$$

ii)-1 若 $\frac{5}{2}(1-t)<x_n^2\geq\frac{3}{4}p(t)(1-t)$ 且 $10/3<e^{\frac{1}{a}}<4$，则 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\}\approx 1$，因此

$$I_3\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{e^{\frac{1}{a}}}s^{-\frac{1}{2}}\ln s ds\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\approx ax_n(1-t)^a\ln\frac{x_n^2}{1-t},$$

这里我们用到了 $10/3\leq e^{\frac{1}{a}}\leq 4$ 蕴含 $\frac{5}{2}(1-t)\leq x_n^2\leq 3(1-t)$。

ii)-2 若 $\frac{5}{2}(1-t)<x_n^2\geq\frac{3}{4}p(t)(1-t)$ 且 $e^{\frac{1}{a}}\geq 4$，则

$$\begin{aligned}I_3&\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{\frac{x_n^2}{1-t}}s^{-\frac{1}{2}}\ln s ds+ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\int_{\frac{x_n^2}{1-t}}^{p(t)}s^{-\frac{3}{2}}\ln s ds\\&\approx ax_n(1-t)^a\ln\frac{x_n^2}{1-t}+ax_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}}\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{x_n}\ln\frac{x_n^2}{1-t}\approx ax_n(1-t)^a\ln\frac{x_n^2}{1-t}.\end{aligned}$$

iii) 若 $x_n^2>\frac{3}{4}p(t)(1-t)$，则 $p(t)=e^{\frac{1}{a}}$，因此

$$I_3\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_2^{e^{\frac{1}{a}}}s^{-\frac{1}{2}}\ln s ds\approx a(1-t)^{a+\frac{1}{2}}(e^{\frac{1}{a}}-2)\approx e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}.$$

接下来估计 I_4。记 $m=\max\left\{2,e^{\frac{1}{a}}\right\}$，则有

$$I_4\approx(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\int_m^{\frac{1}{2(1-t)}}s^{a-\frac{1}{2}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\}ds.$$

注意，若 $e^{\frac{1}{a}}(1-t)>1/2$，则 $I_4=0$。因此，今后估计 I_4 时，我们假设 $e^{\frac{1}{a}}(1-t)\geq 1/2$。

首先考虑情形 $1<e^{\frac{1}{a}}\leq 2$。在这种情况下，我们有 $m=2$。

i) 若 $x_n^2\leq 2(1-t)$，则 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\}=\frac{x_n^2}{1-t()s}$，因此

$$I_4=x_n^2\frac{2^{\frac{1}{2}-a}-(2(1-t))^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}}\approx\frac{2^{\frac{1}{2}-a}x_n^2}{a-\frac{1}{2}}.$$

ii) 如果 $2(1-t)<x_n^2\leq e^{-2}$，则

$$I_4=(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{x_n^2}{1-t}(2(1-t))^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}-\frac{\left(\frac{x_n^2}{1-t}\right)^{a+\frac{1}{2}}}{(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})}-\frac{2^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\right)\approx\frac{2^{\frac{1}{2}-a}x_n^2}{a-\frac{1}{2}}.$$

现在考虑情形 $2<e^{\frac{1}{a}}\leq\frac{1}{(1-t)}$。在这种情形下，我们有 $m=e^{\frac{1}{a}}$。

i) 若 $x_n^2 \le e^{\frac{1}{a}}(1-t)$，则 $\min\left\{1, \frac{x_n^2}{(1-t)s}\right\} = \frac{x_n^2}{1-t()s}$，因此

$$I_4 \approx x_n^2(1-t)^{a-\frac{1}{2}} \int_{e^{\frac{1}{a}}}^{\frac{1}{2(1-t)}} s^{a-\frac{3}{2}} ds \approx x_n^2 \left[\frac{2^{\frac{1}{2}-a} - (e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a-\frac{1}{2}}}{a-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(2e^2(1-t)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} \right].$$

ii) 若 $e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \le \frac{1}{e^2}$，则

$$\begin{aligned} I_4 &\approx (1-t)^{a+\frac{1}{2}} \left[\int_{e^{\frac{1}{a}}}^{\frac{x_n^2}{1-t}} s^{a-\frac{1}{2}} ds + \frac{x_n^2}{1-t} \int_{\frac{x_n^2}{1-t}}^{\frac{1}{2(1-t)}} s^{a-\frac{3}{2}} ds \right] \\ &= \frac{x_n^{2a+1} - (e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} + x_n^2 \left(\frac{2^{\frac{1}{2}-a} - x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}} + |\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

关于 A_2。由于 $x_n < \frac{1}{e}$ 且 $\int_{-\infty}^0 \partial_{x_n}\Gamma_1(x_n - y_n, t-s)ds \approx -\min(1, x_n - y_n)$，我们有

2. 估计

$$\begin{aligned} A_2(x,t) &= -\int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{y_n}\partial_{y_n} N(x'-y', y_n)\psi(y')dy' \int_{-\infty}^0 \partial_{x_n}\Gamma_1(x_n - y_n, t-s)\phi(t)dsdy_n \\ &\approx \frac{x_n \min\{1, x_n\}}{|x|^n}(1-t)^a \approx \frac{x_n^2}{|x'|^n}(1-t)^a. \end{aligned} \tag{4.37}$$

注意，通过取 $M = c_0(1/8)^a$，并使 $c_0 > 1$ 充分大，A_2 可被吸收到出现于 A_1 中的项$-\frac{1}{|x'|^n} M x_n^2$ 中。

3. 对 A_3 的估计。由于 $J_2(x, t) \le c\left(\frac{(t-s}{|x|^{n+2}} + \frac{x_n^2}{|x|^{n+2}} e^{-\frac{c|x'|^2}{t-s}}\right) \le c\frac{t-s}{|x|^{n+2}}$) 对 $x_n \le \frac{1}{n}|x'|$，由引理 2.2 的 (2)，我们有

$$\begin{aligned} |A_3(x,t)| &\lesssim |x|^{-n-2} \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds \\ &= |x|^{-n-2} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^{2t-1} + \int_{2t-1}^t \right) (t-s)^{\frac{1}{2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} \phi(s)ds \\ &= |x|^{-n-2}(I_5 + I_6 + I_7). \end{aligned}$$

利用 $t-s \approx 1$ 对于 $0 < s < 1/2$ 和 $7/8 < t < 1$，I_5 很容易估计为 $I_5 \approx M\min\left\{1, x_n^2\right\}$。利用 $t-s \approx 1-s$ 对于 $1-t < s < 1/2$ 和 $7/8 < t < 1$，对于 I_6，我们得到以下估计

$$I_6 \approx \begin{cases} x_n^2\left(1 + \frac{2^{-a-\frac{1}{2}} - (1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right), & \text{if } x_n^2 < 2(1-t), \\ x_n^2\left(1 + \frac{2^{-a-\frac{1}{2}} - x_n^{2a+1}}{a+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln x_n|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right), & \text{if } 2(1-t) < x_n^2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

最后，利用 $1-s \approx 1-t$ 对于 $2t-1 < s < t$，I_7 可估计为

$$I_7 \approx (1-t)^a \int_0^{1-t} s^{\frac{1}{2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{s}\right\} ds \approx \begin{cases} x_n^2(1-t)^{a+\frac{1}{2}}, & \text{if } x_n^2 < 2(1-t), \\ (1-t)^{a+\frac{3}{2}}, & \text{if } 2(1-t) < x_n^2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

汇总前面的估计可得

$$|A_3(x,t)| \lesssim \frac{x_n^2}{|x'|^{n+2}} \begin{cases} \left(M + \frac{2^{-a-\frac{1}{2}} - (1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln(1-t)|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right), & \text{if } x_n^2 < 2(1-t), \\ \left(M + \frac{2^{-a-\frac{1}{2}} - x_n^{2a+1}}{a+\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{a\neq-\frac{1}{2}} + |\ln x_n|\mathbf{1}_{a=-\frac{1}{2}}\right), & \text{if } 2(1-t) < x_n^2 < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{4.38}$$

取 $|x'|$ 足够大时，我们看到 A_3 可被吸收到 A_1 中。由于 $w_n^N(x, t) - w_n^{(L)}(x, t) = A_1 + A_2 + A_3 \approx A_1$，将 I_1 至 I_4 的所有估计结合起来即可得到结果。□

4.2.2. 的渐近性和 的符号。为了陈述当 $t<1$ 时 x_n^* 关于 w_n 的渐近性，我们回顾第 3.2 小节开头所引入的记号及其约定。我们还定义如下集合： $S_n(\alpha):=S_n(\alpha,\ \alpha)$。现在定义如下函数：对于 $\mu(t):=M+\sigma$ $(t)^{\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}<_2\ ^1(1-t)}}$，我们定义

$$
\begin{aligned}
g_{1a}(t) &:= (\mu(t)+a(1-t)^{a-\frac{1}{2}})\left(\min\left\{e^{-1},\left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}>\frac{10}{3}}+\min\left\{e^{-1},(2(1-t))^{\frac{1}{2}}\right\}\mathbf{1}_{2<e^{\frac{1}{a}}<\frac{10}{3}}\right)\\
&\quad+\left(M+a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}+\frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}\right)\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}\le 2},\\
g_{2a}(t) &:= a(1-t)^a\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}>\frac{10}{3}},\\
g_{3a}(t) &:= a(1-t)^a\min\left\{\ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{\mu(t)},\left|\ln\left((1-t)^{-1}\min\left\{e^{-2},\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}\right)\right|\right\}\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}>\frac{10}{3}},\\
g_{4a}(t) &:= \left(\mu(t)(1-t)^{\frac{1}{2}}+a(1-t)^a\ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{\mu(t)}\right)\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}>\frac{10}{3}},\\
g_{5a}(t) &:= \left(\mu(t)\min\left\{e^{-1},\left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}+a(1-t)^a\ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{\mu(t)}\right)\mathbf{1}_{e^{\frac{1}{a}}>\frac{10}{3}},\\
g_{6a}(t) &:= e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(1+\sigma(t))\mathbf{1}_{2<e^{\frac{1}{a}}<\frac{1}{2(1-t)}},\\
g_{7a}(t) &:= \frac{(1-t)^a}{\frac{1}{2}-a}\mathbf{1}_{0<a<\frac{1}{2}}+\frac{e^{\frac{1}{2a}}}{a-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{2<e^{\frac{1}{a}}<e^2},\\
g_{8a}(t) &:= \frac{e^{\frac{2a}{2a-1}}}{\frac{1}{2}-a}\mathbf{1}_{0<a<\frac{1}{2}}+\frac{e^{\frac{1}{1-2a}}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{2<e^{\frac{1}{a}}<e^2},\\
g_{9a}(t) &:= \max\left\{e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},e^{\frac{1}{2a-1}}\right\}\mathbf{1}_{e^2<e^{\frac{1}{a}}<\frac{1}{2(1-t)}}+e(1-t)^{\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}+\max\left\{e(1-t)^a,2^{-a}e^{\frac{2a}{1-2a}}\right\}\mathbf{1}_{2<e^{\frac{1}{a}}<e^2}.
\end{aligned}
$$

接着定义以下集合:

$$
\begin{aligned}
&D_a^1:=S_n(0,g_{1a}(t)),\quad D_a^2:=S_n(g_{2a}(t),g_{3a}(t)),\quad D_a^3:=S_n(g_{4a}(t),g_{5a}(t)),\\
&D_a^4:=S_n(g_{6a}(t)),\quad D_a^5:=S_n(g_{7a}(t),g_{8a}(t)),\quad D_a^6:=V_n(g_{9a}(t),1).
\end{aligned}
$$

命题 *4.10.* 设 w 为由 *(2.1)* 定义、满足边界数据 $g=g_n\boldsymbol{e}_n$ （由 *(1.5)-(1.7)* 给出）的斯托克斯系统 *(1.1)* 的解。存在依赖于 n 和 M 的 $c_*>0$，使得若 $|x'|>c_*$ 和$7/8<t<1$，则存在 $(x_{nn1}^*,x_{nn2}^*)\in S^{+-}(w_n(x',\cdot,t);0,e^{-1})$ 满足以下条件：对 $k=1,\ 2,$

(i) 若 $-1<a<0$，则 $w_n(x,t)$
>0。(ii) 设 $0<a<(\ln 10\ 3\ )^{-1}$。
(a) 若 $\frac{7}{8}<t<1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}$，则

$$
\begin{aligned}
x_{nnk}^*\approx{}&(M+a(1-t)^{a-\frac{1}{2}})^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^1}+(1-t)^{\frac{1}{2}}\exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}\mathbf{1}_{D_a^2}\\
&+M^{-1}\left(e^{-|x'|^2}+a(1-t)^a\ln\frac{M}{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}\right)\mathbf{1}_{D_a^3}.
\end{aligned}
$$

(b) 若 $1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}\le t<1$，则

$$
\begin{aligned}
x^*_{nnk}\approx{}&(M+a(1-t)^{a-\frac12}+\sigma(t))^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^1}+(1-t)^{\frac12}\exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}\mathbf{1}_{D_a^2}\\
&+(M+\sigma(t))^{-1}\left(e^{-|x'|^2}+a(1-t)^a\ln\frac{M+\sigma(t)}{2a(1-t)^{a-\frac12}}\right)\mathbf{1}_{D_a^3}\\
&+(M+\sigma(t))^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^4}\\
&+\left(\left((\frac12-a)e^{-|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\mathbf{1}_{a<\frac12}+(a-\frac12)e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{a>\frac12}\right)\mathbf{1}_{D_a^5}\\
&+\left(\frac{e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\mathbf{1}_{a\le\frac12}+\left(\frac{e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\right)^{\frac{1}{2a}}\mathbf{1}_{a>\frac12}\right)\mathbf{1}_{D_a^6}.
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

(iii) 令 $(\ln 10/3)^{-1}\le a<(\ln 2)^{-1}$，则

$$
\begin{aligned}
x^*_{nnk}\approx{}&(M+(1-t)^{a-\frac12}+\sigma(t))^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^1}+(M+\sigma(t))^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^4}\\
&+(a-\frac12)e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^5}+\left(\frac{e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\right)^{\frac{1}{2a}}\mathbf{1}_{D_a^6}.
\end{aligned}
$$

(iv) 令 $a\ge(\ln 2)^{-1}$，则 $x^*_{nnk}\approx\left(M+a(1-t)^{a-\frac12}+2^{\frac12-a}a^{-\frac12}\right)^{-1}e^{-|x'|^2}\mathbf{1}_{D_a^1}$。

此外，若 $a>0$，则存在 $(x^*_{nn1},x^*_{nn2})\in S^{-+}(w_n(x',\cdot,t);e^{-1},\infty)$ 满足 $x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}\approx(e^{-|x'|^2}+(1-t)^a)^{-1}$ 对于 $|x'|^{-1}\approx e^{-|x'|^2}+(1-t)^a\lesssim 1$。

注 *4.11.* 上述所有 x^*_{nnk} 都满足 $x^*_{nnk}\le e^{-1}$，命题最后一行除外。事实上，从证明中显然可知，以下估计成立：$x^*_{nnk}\le\min\left\{(5/2(1-t))^{\frac12},e^{-1}\right\}$ 若 $(x',t)\in D_a^1$（但 $e^{\frac1a}\le 2$ 时除外；不过在这种情况下，只要取 $|x'|$ 足够大，且仅依赖于 n，结论显然成立），若 $(1-t)^{\frac12}\le x^*_{nnk}\le e^{-1}$，则 $(5/2(1-t))^{\frac12}\lesssim x^*_{nnk}\lesssim e^{-1}$；若 $(x',t)\in D_a^2\cup D_a^3$，则 $(2(1-t))^{\frac12}\le x^*_{nnk}\le\min\left\{e^{-1};\text{若 }(e^{\frac1a}(1-t))^{\frac12}\right\}$，则 $(x'.t)\in D_a^4$；若 $(e^{\frac1a}(1-t))^{\frac12}\le x^*_{nnk}\le e^{-1}$，则 $(x',t)\in D_a^5\cup D_a^6$。

注 4.12. 注意，*(iii)-(4)*、*(iv)-(3)* 和 *(v)* 是可以取极限的情形 $t\to 1^-$。于是，x^*_{nnk} 的相应渐近性与 $t\to 1^+$ 时的渐近性相符。参见命题 中$(x',t)\in B_a^2\cup B_a^3$ 时 3.12中 x^*_{nnk} 的渐近性。

证明。若 $-1<a<0$，则由引理 4.7 和（4.5），可得 $w_n(x,t)=w_n^N-w_n^L+w^G>0$.

- **(情形 1：$x_n<e^{-1}$)**

在整个证明过程中，我们将省略下文所列 w_n 各项估计中出现的常数。但读者需牢记，每当我们使用记号 $\lesssim$，$\gtrsim$ 或 $\approx$时，都表示存在相应的常数，这些常数符合我们在第 2 节开头引入的约定。

子情形 1-1： $0<a<(\ln 10/3)^{-1}$。首先假设 $\frac78<t<1=\frac12e^{-\frac1a}$。

1. $x_n^2<$最小 $\left\{e^{-2},\frac52(1-t)\right\}$。由引理 4.9 的 (v)-(1)，可得

$$
w_n(x,t)\approx-\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left(M+a(1-t)^{a-\frac12}\right)+x_ne^{-|x'|^2}.
$$

因此，若 $e^{-|x'|^2}\lesssim(M+a(1-t)^{a-\frac12})$ 最小$\left\{e^{-1},\ (\frac52(1-t))^{\frac12}\right\}$，则存在 $x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}$使得

$$
x^*_{nn1},x^*_{nn2}\approx\frac{e^{-|x'|^2}}{M+a(1-t)^{a-\frac12}},
$$

且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2})\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);0,\text{最小值}\left\{e^{-1},\ (\frac52(1-t))^{\frac12}\right\}\right)$。

另一方面，若 $e^{-|x'|^2} \gtrsim (M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}})$ 的最小值为 $\left\{e^{-1}, \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$，则 $w_n(x, t) > 0$。2. $1-t$的最小值为$\} < x_n^2 < e^{-2}$。由引理 4.7 以及引理 4.9中的 (iv)-(2)，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(Mx_n + a(1-t)^a \ln\frac{x_n^2}{1-t}\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

考虑方程 $Mx_n + a(1-t)^a \ln \frac{x_n^2}{1-t} = e^{-|x'|^2}$。该方程的解为

$$\widetilde{x}_n = \frac{2a(1-t)^a}{M} W\left(\frac{M(1-t)^{\frac{1}{2}-a}}{2a}\exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}\right),$$

其中，$x = W(z)$（$z > 0$）表示方程 $xe^x = z$ 的唯一解。利用众所周知的界:

$$W(z) \approx z\mathbf{1}_{0\le z\le e} + \ln z \mathbf{1}_{z\ge e}, \tag{4.40}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_n \approx{}& (1-t)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}\mathbf{1}_{|x'|^n e^{-|x'|} \lesssim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M}} \\ &+ \frac{2a(1-t)^a}{M}\left(e^{-|x'|^2} + \ln\frac{M(1-t)^{\frac{1}{2}-a}}{2a}\right)\mathbf{1}_{|x'|^n e^{-|x'|} \gtrsim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M}}.\end{aligned}$$

因此，我们得出以下结论。

i) 设 $e^{-|x'|^2} \lesssim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M}$。若 $e^{-|x'|^2} \gtrsim a(1-t)^a$ 且 $e^{-|x'|^2} \lesssim a(1-t)^a|\ln(1-t)|$，则存在 x_{nn1}^*、x_{nn2}^* 使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx (1-t)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}$$

且 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x', \cdot, t); \min\left\{e^{-1}, \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, e^{-1}\right)$。

另一方面，若 $e^{-|x'|^2} \gtrsim a(1-t)^a|\ln(1-t)|$，则 $w_n(x, t) > 0$；而若 $e^{-|x'|^2} \lesssim a(1-t)^a|\ln(1-t)|$，则 $w_n(x, t) < 0$。

ii) 设 $e^{-|x'|^2} \gtrsim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M}$。那么，若 $e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M(1-t)}{2a}^{\frac{1}{2}-a} \gtrsim M(1-t)^{\frac{1}{2}}$且$e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M(1-t)}{2a}^{\frac{1}{2}-a} \lesssim M$，则存在 x_{nn1}^*、x_{nn2}^*，使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx \frac{1}{M}\left(e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M(1-t)^{\frac{1}{2}-a}}{a}\right)$$

以及 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x', \cdot, t);\ \text{最小}\left\{e^{-1}, \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}, e^{-1}\right)$。

另一方面，若 $e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M(1-t)^{\frac{1}{2}-a}}{2a} \lesssim M(1-t)^{\frac{1}{2}}$，则 $w_n(x, t) < 0$。

现在假设 $1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}} < t < 1$。

1. $x_n^2 \le \min\left\{e^{-2}, \frac{5}{2}(1-t)\right\}$。根据引理4.9的 (iv)-(1)，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left[M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)\right] + x_n e^{-|x'|^2}.$$

因此，若 $e^{-|x'|^2} \lesssim (M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t))$ 的最小值为$\left\{e^{-2}, \frac{5}{2}(1-t)\right\}$，则存在 x_{nn1}^*, x_{nn2}^*，使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx \frac{e^{-|x'|^2}}{M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)}$$

且 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x', \cdot, t); 0, \text{最小值}\left\{e^{-1}, \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$。

另一方面 其手中，若 $e^{-|x'|^2} \gtrsim (M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t))\min\left\{e^{-2}, \frac{5}{2}(1-t)\right\}$，则 $w_n(x, t) > 0$.

2. $\frac{5}{2}(1-t) < x_n^2 \le \min\left\{e^{-2}, \frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}$. 根据引理 4.9 的 (iv)-(2)，我们有

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left((M+\sigma(t))x_n + a(1-t)^a \ln\frac{x_n^2}{1-t}\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

考虑方程 $(M+\sigma(t))x_n + a(1-t)^a \ln\frac{x_n^2}{1-t} = e^{-|x'|^2}$。该方程的解为

$$\widetilde{x}_n = \frac{2a(1-t)^a}{M+\sigma(t)} W\left(\frac{(M+\sigma(t))(1-t)^{\frac{1}{2}-a}}{2a} e^{\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}}\right).$$

利用估计式 (4.40)，可得

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_n \approx{}& (1-t)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}\mathbf{1}_{e^{-|x'|^2} \lesssim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M+\sigma(t)}} \\ &+ \frac{1}{M+\sigma(t)}\left(e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M+\sigma(t)}{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}\right)\mathbf{1}_{|x'|^n e^{-|x'|} \gtrsim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M+\sigma(t)}}.\end{aligned}$$

因此，我们得到以下结论。

i) 设 $e^{-|x'|^2} \lesssim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M+\sigma(t)}$ 若 $e^{-|x'|^2} \gtrsim a(1-t)^a$ 且 $e^{-|x'|^2} \lesssim a(1-t)^a \left|\ln\left((1-t)^{-\frac{1}{2}} \min\left\{e^{-1}, \left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)\right|$，则存在 x_{nn1}^*, x_{nn2}^* 使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx (1-t)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{e^{-|x'|^2}}{2a(1-t)^a}$$

以及 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t); \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}, \text{最小值 } \left\{e^{-1}, \left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$。

另一方面，如果 $e^{-|x'|^2} \gtrsim a(1-t)^a \left|\ln\left((1-t)^{-\frac{1}{2}} \text{最小值 } \left\{e^{-1}, \left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)\right|$，那么 $w_n(x,t) > 0$；而如果 $e^{-|x'|^2} \lesssim a(1-t)^a$，那么 $w_n(x,t) < 0$。

ii) 设 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim 2a(1-t)^a \ln\frac{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}{M+\sigma(t)}$。那么，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M+\sigma(t)}{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}} \gtrsim (M+\sigma(t))(1-t)^{\frac{1}{2}}$ 且 $|x'|^n e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M+\sigma(t)}{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}} \lesssim (M+\sigma(t)) \min\left\{e^{-1}, \left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$，则存在 x_{nn1}^*, x_{nn2}^* 使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx \frac{1}{M+\sigma(t)}\left(|x'|^n e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M+\sigma(t)}{a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}}\right)$$

且 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t); \left(\frac{5}{2}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}, \min\{e^{-1}, \left(\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right)^{\frac{1}{2}}\}\right)$.

另一方面，如果 $|x'|^n e^{-|x'|^2} + 2a(1-t)^a \ln\frac{M+\sigma(t)}{2a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}} \lesssim (M+\sigma(t))(1-t)^{\frac{1}{2}}$，那么 $w_n(x,t) < 0$。

3. $\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \le \min\left\{e^{-2}, e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}$。由引理 4.9 的 (iv)-(3)，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left((M+\sigma(t))x_n^2 + (a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

现在考虑情形 $a = \frac{1}{2}$。于是 $\sigma(t) = |\ln(2e^2(1-t))|$，因此显然有 $(a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \approx (1-t) \lesssim |\ln(2e^2(1-t))|(1-t) \lesssim \sigma(t)x_n^2$。

现在考虑 $a \neq \frac{1}{2}$ 的情形。由（2.21）可知，若 $0 < a < \frac{1}{2}$，则

$$\sigma(t) \approx 2^{\frac{1}{2}-a}|\ln(2e^{\frac{1}{a}}(1-t))|\mathbf{1}_{1-t > \frac{1}{2}e^{\frac{1}{a(2a-1)}}} + \frac{(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}-a}\mathbf{1}_{1-t < \frac{1}{2}e^{\frac{1}{a(2a-1)}}}, \tag{4.41}$$

并且如果 $a > \frac{1}{2}$，那么

$$\sigma(t) \approx (e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a-\frac{1}{2}}|\ln(2e^{\frac{1}{a}}(1-t))|\mathbf{1}_{1-t > \frac{1}{2}e^{\frac{4a-1}{a(1-2a)}}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{1-t < \frac{1}{2}e^{\frac{4a-1}{a(1-2a)}}}. \tag{4.42}$$

我们希望将项 $(a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}}$ 控制在 $(M+\sigma(t))x_n^2$ 以内。为此，应用上述对 $\sigma(t)$的估计似乎至关重要。

我们考虑最后一种情况 $a<\frac{1}{2}$，于是有 $\frac{1}{2}e^{a^{\frac{1}{(2a-1)}}}<e^{-\frac{2a+1}{a}}<\frac{4}{3}e^{-\frac{2a+1}{a}}$。若 $1-t<\frac{1}{2}e^{a^{\frac{1}{(2a-1)}}}$，则有 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\approx(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a-\frac{1}{2}}x_n^2\lesssim\sigma(t)x_n^2$；若 $1-t>\frac{1}{2}e^{a^{\frac{1}{(2a-1)}}}$，则 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a-\frac{1}{2}}x_n^2\lesssim|\ln(2e^{\frac{1}{a}}(1-t))|x_n^2\approx\sigma(t)x_n^2$，其中我们使用了不等式 $x^{a-\frac{1}{2}}\lesssim|\ln(2x)|$ for $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}<x<\frac{4}{3e^2}$。此外，我们注意到 $e^{\frac{1}{2a}}\gtrsim a$。因此，我们得到所需的不等式 $(a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim\sigma(t)x_n^2$。

现在考虑 $a>\frac{1}{2}$ 的情形，此时我们有 $\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}<e^{-\frac{2a+1}{a}}<\frac{4}{3}e^{-\frac{2a+1}{a}}$。若 $1-t<\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}$，则 $e^{\frac{1}{a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim e^{\frac{4a^2-4a+1/2}{1-2a}}\lesssim\sigma(t)$，因为 $\frac{4a^2-a+1/2}{1-2a}<0$ 对 $\frac{1}{2}<a\lesssim(\ln 10_3)^{-1}$ 成立。另一方面，若 $1-t>\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}$，则 $e^{\frac{1}{a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim\sigma(t)$ 等价于 $e^{\frac{1-2a}{2a}}e^{\frac{1}{a}}(1-t)\lesssim|\ln(2e^{\frac{1}{a}}(1-t))|$，这成立是因为 $e^{\frac{1-2a}{2a}}\leq 1$，且 $\theta\lesssim|\ln\theta|$ 对 $e^{1-2a}<\theta<\frac{8}{3e^2}$ 成立。因此，我们得到了同样所需的不等式。合并所有这些估计可得

$$w_n(x,t)\approx-\frac{x_n}{|x'|^n}\left((\sigma(t)+M)x_n-|x'|^ne^{-|x'|^2}\right). \tag{4.43}$$

因此，如果 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}(M+\sigma(t))\lesssim|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim\min\left\{e^{-1},e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}(M+\sigma(t))$，那么存在 x^*_{nn1},x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1},x^*_{nn2}\approx\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{M+\sigma(t)},$$

且 $(x^*_{nn1},x^*_{nn2})\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ (\frac{3}{4}e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{\frac{1}{2}},\min\left\{e^{-1},e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$。

另一方面，如果 $|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim\min\left\{e^{-1},e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}(M+\sigma(t))$，那么 $w_n(x,t)<0$；而如果 $|x'|^ne^{-|x'|^2}\gtrsim\min\left\{e^{-1},e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}(M+\sigma(t))$，那么 $w_n(x,t)>0$。

4. $e^{\frac{1}{a}}(1-t)<x_n^2\leq e^{-2}$. 根据引理 4.9的 (iv)-(4)，我们有

$$\begin{aligned}w_n(x,t)\approx-\frac{1}{|x'|^n}\Bigg(&Mx_n^2+\left(a+e^{\frac{1}{2a}}\right)(1-t)^{a+\frac{1}{2}}+\frac{x_n^{2a+1}-(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\\&+x_n^2\left(\frac{2^{\frac{1}{2}-a}-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{a\neq\frac{1}{2}}+|\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=\frac{1}{2}}\right)\Bigg)+x_ne^{-|x'|^2}.\end{aligned}$$

我们首先注意到，根据（2.21），

$$\frac{x_n^{2a+1}-(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\approx(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{x_n^2}{e^{\frac{1}{a}}(1-t)}\mathbf{1}_{x_n^2<e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)}+\frac{x_n^{2a+1}}{a+\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{x_n^2>e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)}, \tag{4.44}$$

且对于 $0<a<\frac{1}{2}$，

$$\frac{2^{\frac{1}{2}-a}-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\approx2^{\frac{1}{2}-a}|\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{x_n^2>\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}}+\frac{x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{x_n^2<\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}}, \tag{4.45}$$

而对于 $a>\frac{1}{2}$，

$$\frac{2^{\frac{1}{2}-a}-x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}}\approx x_n^{2a-1}|\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{x_n^2>\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}}+\frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}\mathbf{1}_{x_n^2<\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}}. \tag{4.46}$$

注意，对于 $0<a<(\ln 10_3)^{-1}$，我们有 $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}<e^{-2}$，这对于确定下文将要描述的区域很有用。

4-1. 首先考虑 $0<a<\frac{1}{2}$ 的情形。回顾一下有用的界（4.44）和（4.45）。

i) 若 $x_n^2 < \frac{1}{2}e^{2a^2-1}$ 和 $x_n^2 < e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}}}(1-t)$，则有以下不等式

$$(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{x_n^2}{e^{\frac{1}{a}}(1-t)} \lesssim \frac{x_n^{2a+1}}{\frac{1}{2}-a}, \quad e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} < \frac{x_n^{2a+1}}{\frac{1}{2}-a}, \quad a \lesssim e^{\frac{1}{2a}}, \quad Mx_n \lesssim \frac{x_n^{2a}}{\frac{1}{2}-a},$$

由此得到

$$w_n(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-\frac{x_n^{2a}}{\frac{1}{2}-a} + |x'|^n e^{-|x'|^2}\right). \tag{4.47}$$

ii) 若 $x_n^2 < \frac{1}{2}e^{2a^2-1}$ 和 $x_n^2 > e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}}}(1-t)$，则有以下不等式

$$(a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim \frac{x_n^{2a+1}}{\frac{1}{2}-a}, \quad Mx_n^2 \lesssim \frac{x_n^{2a+1}}{\frac{1}{2}-a},$$

这导出了相同的界（4.47）。

iii) 若 $\max\left\{e^{\frac{a}{a+\frac{1}{2}}}(1-t), \frac{1}{2}e^{2a^2-1}\right\} < x_n^2 < e^{-2}$，则由不等式 $x_n^2|\ln(2x_n^2)| \gtrsim x_n^{\frac{2a+1}{a+\frac{1}{2}}}$（注意，这只要求 $\frac{1}{2}e^{2a^2-1} < x_n^2 < e^{-2}$，而我们的条件显然满足这一点），可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left((a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^2|\ln(2x_n^2)|\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

接下来，我们进一步将这一情形分为 $1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}} < t < 1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}$ 和 $1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}} < t < 1$。

对于第一种情况，我们有 $e^{\frac{a}{a+\frac{1}{2}}}(1-t) < x_n^2 < e^{-2}$，因此 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{2a+1} \lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$。对于第二种情况，我们有 $\frac{1}{2}e^{2a^2-1} < x_n^2 < e^{-2}$，因此 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim e^{\frac{3-2a}{2a-1}} \lesssim x_n^{3-2a} \lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$，其中我们利用了 $x_n^{2a-1}|\ln(2x_n^2)|$ 在 $x_n \geq \frac{1}{2}e^{2a^2-1}$ 上递减这一事实。于是我们得到

$$w_n(x,t) \approx \frac{x_n}{|x'|^n}\left(-x_n|\ln(2x_n^2)| + |x'|^n e^{-|x'|^2}\right). \tag{4.48}$$

iv) 若 $\frac{1}{2}e^{2a^2-1} < x_n^2 < e^{-2}$ 和 $x_n^2 < e^{\frac{a}{a+\frac{1}{2}}}(1-t)$，则利用不等式 $0 < \ln\frac{x_n^2}{e^{\frac{1}{a}}(1-t)} < \frac{1}{a+\frac{1}{2}}$，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left(Mx_n^2 + (a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^2|\ln(2x_n^2)|\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

我们希望将 $(a+e^{\frac{1}{2a}})(1-t)^{a+\frac{1}{2}}$ 上界估计为 $x_n^2|\ln(2x_n^2)|$。为此，我们需要考虑以下几种情况：设 a^* 是方程 $4x^2 + \frac{8}{2^-\ln 2}x - 1 = 0$ 的唯一正解，则当 $0 < a < a^*$ 时，有 $e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}}} < \frac{1}{2}e^{2a^2-1-\frac{1}{a}}$；而当 $a > a^*$ 时，不等式反向成立。

我们首先考虑情形 $0 < a < a^*$。注意到，我们的区域可以写成 $\max\left\{\frac{1}{2}e^{2a^2-1}, e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\} < x_n^2 < \min\left\{e^{-2}, e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}}}(1-t)\right\}$。于是，我们可以将该区域分解为以下三个部分：

(1) A_1: $1-e^{-2-\frac{1}{a}} < t < 1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{1}{a}}$, $e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 < e^{-2}$.

(2) A_2: $1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{1}{a}} < t < 1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}$, $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}} < x_n^2 < e^{-2}$.

(3) A_3: $1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}} < t < 1$, $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}} < x_n^2 < e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)$.

对于 A_1，我们有不等式 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{2a+1} \lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$。对于 A_2，我们有 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim e^{2a^2-1} \lesssim x_n^2$。最后，对于 A_3，我们有 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim e^{\frac{4a^2+4a-1}{1-2a}}x_n^2 \leq x_n^2$，因为 $\frac{4a^2+4a-1}{1-2a} < 0$ 对于 $0 < a < a^*$。

现在我们考虑情形 $a > a^*$。那么，我们可以将同一论域分解为以下三部分：

(1) B_1: $1-e^{-2-\frac{1}{a}}<t<1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}$, $\quad e^{\frac{1}{a}}(1-t)<x_n^2<e^{-2}$.

(2) B_2: $1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}<t<1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{1}{a}}$, $\quad e^{\frac{1}{a}}(1-t)<x_n^2<e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)$.

(3) B_3: $1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}-\frac{1}{a}}<t<1$, $\quad \frac{1}{2}e^{\frac{2}{2a-1}}<x_n^2<e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)$.

对于 B_1和 B_2，我们有不等式 $e^{\frac{1}{a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim x_n^{2a+1}\lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$。对于 B_3，我们有不等式$e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim e^{\frac{2}{2a-1}}\lesssim x_n^2$。

因此，对所有 A_i和 B_i，我们有所需的不等式 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$，并且显然有$Mx_n^2\lesssim x_n^2|\ln(2x_n^2)|$，因为 $M\lesssim 1$对 $0<a<\frac{1}{2}$成立。因此，我们得到相同的界限（4.48）。

考虑方程 $x_n|\ln(2x_n^2)|=c$对 $x_n<e^{-1}$成立，其中 $c>0$足够小，使得解（记作$\widetilde{x}_n$）存在。由引理 2.7，我们得到 $\widetilde{x}_n\approx\frac{c}{|\ln c|}$。

因此，我们得到以下结论：

i) 若$\frac{1}{-\frac{1}{2}-a}(1-t)^a\lesssim|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim\frac{1}{-\frac{1}{2}-a}e^{\frac{2a}{2a-1}}$，则存在 x_{nn1}^*,x_{nn2}^*使得

$$x_{nn1}^*,x_{nn2}^*\approx\left(\left(\frac{1}{2}-a\right)|x'|^ne^{-|x'|^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$$

且 $(x_{nn1}^*,x_{nn2}^*)\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},2^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim\frac{1}{\frac{1}{2}-a}(1-t)^a$，则 $w_n(x,t)<0$；而若 $|x'|^ne^{-|x'|^2}\gtrsim\frac{1}{\frac{1}{2}-a}e^{\frac{2a}{2a-1}}$，则$w_n(x,t)>0$。

ii) 若 $\max\left\{e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},2^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}\right\}\lesssim\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\lesssim 1$，则存在 x_{nn1}^*,x_{nn2}^*，使得

$$x_{nn1}^*,x_{nn2}^*\approx\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}$$

且 $(x_{nn1}^*,x_{nn2}^*)\in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ \text{最大值}\left\{e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},2^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}\right\},e^{-1}\right)$。

另一方面，若$\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\lesssim$最大值$\left\{e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},2^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a-1}}\right\}$，则 $w_n(x,t)<0$；而若$\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\gtrsim 1$，则 $w_n(x,t)>0$。

4-2. 我们考虑 $a=\frac{1}{2}$ 的情形。此时 $w_n(x,\ t)$ 的界为

$$\begin{aligned}w_n(x,t)&\approx-\frac{1}{|x'|^n}\left(Mx_n^2+(1-t)+(x_n^2-e^2(1-t))+x_n^2|\ln(2x_n^2)|\right)+x_ne^{-|x'|^2}\\&\approx-\frac{x_n}{|x'|^n}\left(x_n|\ln(2x_n^2)|-|x'|^ne^{-|x'|^2}\right),\end{aligned}$$

由此得到不等式（4.48）。因此，若 $e^2(1-t)\lesssim\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\lesssim 1$，则存在 $x_{nn1}^*,\ x_{nn2}^*$ 使得

$$x_{nn1}^*,x_{nn2}^*\approx\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}$$

且 $(x_{nn1}^*,\ x_{nn2}^*)\in S^{+-}\left(w_n(x',\ \cdot,\ t);\ e(1-t)^{\frac{1}{2}},\ e^{-1}\right)$。

另一方面，若$\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2}}\lesssim e^2(1-t)$，则 $w_n(x,\ t)<0$；而若$\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2}}\gtrsim 1$，则 $w_n(x,\ t)>0$。

4-3. 现在考虑这种情况 $a>\frac{1}{2}$。回顾一下我们有用的估计（4.44）和（4.46）。

i) 如果 $x_n^2<\frac{1}{2}e^{1-\frac{2}{2a}}$和 $x_n^2<e^{\frac{a}{a+\frac{1}{2}}}(1-t)$，那么我们有以下不等式

$$(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{x_n^2}{e^{\frac{1}{a}}(1-t)}\lesssim x_n^2,\quad(e^{\frac{1}{2a}}+a)(1-t)^{a+\frac{1}{2}}\lesssim(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}\lesssim x_n^{2a+1}\lesssim\frac{x_n^2}{a-\frac{1}{2}},$$

由此可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(\frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}x_n - |x'|^n e^{-|x'|^2}\right). \tag{4.49}$$

ii) 若 $x_n^2 < \frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}$ 和 $x_n^2 > e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}(1-t)$，则有以下不等式

$$\frac{x_n^{2a+1}}{a+\frac{1}{2}} \lesssim \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}x_n^2, \quad e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{2a+1} \lesssim \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}x_n^2,$$

这导出相同的界 (4.49)。

iii) 若 $\max\left\{\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}, e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}(1-t)\right\} < x_n^2 < e^{-2}$，则由不等式 $x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)| \gtrsim x_n^2$（注意，这只要求 $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}} < x_n^2 < e^{-2}$，而这显然由我们的条件满足），可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left(e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

接下来我们进一步将情形分为 $1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}} \le t < 1-e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}$ 和 $1-e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}} < t < 1$。对于第一种情形，有 $e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}(1-t) < x_n^2 < e^{-2}$，因此 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{2a+1} \lesssim x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$。对于第二种情形，有 $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}} < x_n^2 < e^{-2}$，因此 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{4a} \lesssim x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$，其中我们用到了 $x_n^{1-2a}|\ln(2x_n^2)|$ 在 $x_n \ge \frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}$ 上递减。于是得到

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(x_n^{2a}|\ln(2x_n^2)| - |x'|^n e^{-|x'|^2}\right). \tag{4.50}$$

iv) 若 $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}} < x_n^2 < e^{-2}$ 且 $x_n^2 < e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}(1-t)$，则利用不等式 $(e^{\frac{1}{a}}(1-t))^{a+\frac{1}{2}}\ln\frac{e^{\frac{1}{a}}x_n^2}{(1-t)} \lesssim \frac{1}{a+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}$，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{1}{|x'|^n}\left(Mx_n^2 + e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} + x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

与之前一样，我们希望用 $x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$ 来控制 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}}$。可以直接验证，$\frac{1}{2} < a < (\ln 10^3)^{-1}$ 意味着 $\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{1}{2}} \le e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a\,a+\frac{1}{2}()}}$。因此，我们的区域可以分解为以下三部分：

(1) C_1: $1-e^{-2-\frac{1}{a}} < t < 1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}$, $\quad e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 < e^{-2}$.

(2) C_2: $1-e^{-2-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}} < t < 1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{1}{a}}$, $\quad e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 < e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)$.

(3) C_3: $1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{1}{a}} < t < 1-\frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}-\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}$, $\quad \frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}} < x_n^2 < e^{\frac{2a+\frac{1}{2}}{a(a+\frac{1}{2})}}(1-t)$.

对于 C_1 和 C_2，我们有不等式 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^{2a+1} \lesssim x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$。对于 C_3，我们有不等式 $e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim e^{\frac{4a}{1-2a}} \lesssim x_n^{4a} \lesssim x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$。

显然，我们有 $Mx_n^2 \lesssim x_n^{2a+1}|\ln(2x_n^2)|$，因为函数 $x_n^{2a-1}|\ln(2x_n^2)|$ 在区间 $x_n^2 > \frac{1}{2}e^{\frac{2}{1-2a}}$ 上递减（4.50）。因此，我们得到相同的界。

考虑方程 $x_n^{2a}|\ln(2x_n^2)| = c$，其中 $x_n < e^{-1}$，且 $c > 0$ 足够小，使得解（记作 $\widetilde{x}_n$）存在。然后由引理 2.7，我们得到 $\widetilde{x}_n \approx \left(\frac{c}{|\ln c|}\right)^{\frac{1}{2a}}$。

因此，我们得到以下结论：

i) 若 $\frac{1}{a-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \lesssim |x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim \frac{1}{a-\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{1-2a}}$，则存在 x_{nn1}^*, x_{nn2}^*，使得

$$x_{nn1}^*, x_{nn2}^* \approx (a-\frac{1}{2})|x'|^n e^{-|x'|^2}$$

以及 $(x_{nn1}^*, x_{nn2}^*) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t); e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim \frac{1}{a-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$，则 $w_n(x,t) < 0$；而若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim \frac{1}{a-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}$，则 $w_n(x,t) > 0$。

ii) 若 $\max\left\{e^2(1-t)^{2a}, 2^{-2a} e^{\frac{4a}{1-2a}}\right\} \lesssim \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{|x'|^{-n} e^{|x'|^2} \ln(\cdot)} \lesssim 1$，则存在 x^*_{nn1}, x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \left(\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})}\right)^{\frac{1}{2a}}$$

且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ \max\left\{e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}, 2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}\right\}, e^{-1}\right)$。

另一方面，若 $\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})} \lesssim \max\left\{e^2(1-t)^{2a}, 2^{-2a} e^{\frac{4a}{1-2a}}\right\}$，则 $w_n(x,t) < 0$，而若 $\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})} \gtrsim 1$，则 $w_n(x,t) > 0$。

子情形 1-3： $(\ln 10^{-3})^{-1} \le a < (\ln 2)^{-1}$。

1. $x_n^2 \le \min\left\{e^{-2}, 2(1-t)\right\}$。根据引理 4.9 中的 (iii)-(1)，我们有

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left(M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

因此，如果 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim (M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)) \min\left\{e^{-1},\ (2(1-t))^{\frac{1}{2}}\right\}$，则存在 x^*_{nn1} 和 x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t)}$$

且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\ \cdot,\ t);\ 0,\ \min\left\{e^{-1},\ (2(1-t))^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim M(1-t)^{\frac{1}{2}} + (1-t)^a + \sigma(t)(1-t)^{\frac{1}{2}}$，则 $w_n(x,\ t) > 0$。

2. $2(1-t) \le x_n^2 <$ 最小值 $\left\{e^{-2},\ e^{\frac{1}{a}}(1-t)\right\}$。由引理 4.9 的 (iii)-(2)，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left(M + \sigma(t)\right) + x_n e^{-|x'|^2},$$

其中用到了不等式

$$(1-t)^{a+\frac{1}{2}} \lesssim x_n^2 (1-t)^{a-\frac{1}{2}} \le x_n^2 (1-t)^{\frac{1}{2}} \lesssim x_n^2,$$

因为 $a > (\ln 10^{-3})^{-1} > 1$。因此，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \approx (1-t)^{\frac{1}{2}}(M + \sigma(t))$，则存在 x^*_{nn1} 和 x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{M + \sigma(t)}$$

并且 $(x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\ \cdot,\ t);\ (2(1-t))^{\frac{1}{2}}, \text{最小值}\ \left\{e^{-1},\ e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim (1-t)^{\frac{1}{2}}(M + \sigma(t))$，则 $w_n(x,\ t) > 0$；若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim (1-t)^{\frac{1}{2}}(M + \sigma(t))$，则 $w_n(x,\ t) < 0$。

3. $e^{\frac{1}{a}}(1-t) < x_n^2 \le e^{-2}$。由引理 4.9 的 (iii)-(3)，可得

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n}{|x'|^n}\left(M x_n + \frac{2^{\frac{1}{2}-a} - x_n^{2a-1}}{a-\frac{1}{2}} x_n - \left(\frac{e^{1+\frac{1}{2a}}}{a+\frac{1}{2}} - 1\right)\frac{(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{x_n} + \frac{x_n^{2a}}{a+\frac{1}{2}}\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

采用与子情形 1-2 中第 4 步类似的方法，我们得到以下结论。

i) 若 $\frac{e^{\frac{1}{2a}}}{a-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} \lesssim |x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim \frac{1}{a-\frac{1}{2}} \min\left\{e^{-1},\ 2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}\right\}$，则存在 $x^*_{nn1},\ x^*_{nn2}$，使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \left(a - \frac{1}{2}\right)|x'|^n e^{-|x'|^2}$$

且 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x',\cdot,t);\ e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}, \text{最小}\ \left\{e^{-1}, 2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}\right\}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim \frac{e^{\frac{1}{2a}}}{a-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$，则 $w_n(x,t) < 0$；而若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim \frac{1}{a-\frac{1}{2}}$最小 $\left\{e^{-1}, 2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}\right\}$，则 $w_n(x,t) > 0$。

ii) 如果 $\max\left\{2^{-a} e^{\frac{1}{1-2a}}, e(1-t)^a\right\} \lesssim \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{|x'|^{-n} e^{|x'|^2} \ln()} \lesssim 1$，那么存在 x^*_{nn1}， x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \left(\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})}\right)^{\frac{1}{2a}}$$

以及 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}\left(w_n(x', \cdot, t); \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{1-2a}}, e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\right\}, e^{-1}\right)$（注意，此情形仅在 a 满足 $\frac{1}{2} e^{\frac{2}{1-2a}} < e^{-2}$ 时发生）。

另一方面，若 $\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})} \lesssim \max\left\{2^{-a} e^{\frac{2a}{1-2a}}, e(1-t)^a\right\}$，则 $w_n(x,t) < 0$；而若 $\frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})} \gtrsim 1$，则 $w_n(x,t) < 0$。

子情形 1-4： $a \geq (\ln 2)^{-1}$。由引理 4.7 以及引理 4.9的 (ii)，对所有 $x_n \leq e^{-1}$，

$$w_n(x,t) \approx -\frac{x_n^2}{|x'|^n}\left(M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}\right) + x_n e^{-|x'|^2}.$$

因此，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}$，则存在 x^*_{nn1} 与 x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}},$$

以及 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{+-}(w_n(x', \cdot, t); 0, e^{-1})$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \gtrsim M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \frac{2^{\frac{1}{2}-a}}{a-\frac{1}{2}}$，则 $w_n(x,t) > 0$。

- **(情形 2：** $e^{-1} < x_n < \frac{1}{n}|x'|$) 由引理 4.7 与 (4.5)，我们有

$$w_n(x,t) \approx \frac{1}{|x'|^n}\left(\left(|x'|^n e^{-|x'|^2} + (1-t)^a\right) x_n - 1\right).$$

因此，若 $|x'|^{-1} \approx |x'|^n e^{-|x'|^2} + (1-t)^a \lesssim 1$，则存在 x^*_{nn1} 与 x^*_{nn2} 使得

$$x^*_{nn1}, x^*_{nn2} \approx \left(|x'|^n e^{-|x'|^2} + (1-t)^a\right)^{-1}$$

以及 $(x^*_{nn1}, x^*_{nn2}) \in S^{-+}\left(w_n(x', \cdot, t); e^{-1}, \frac{|x'|}{n}\right)$。

另一方面，若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} + (1-t)^a \gtrsim 1$，则 $w_n(x,t) > 0$；而若 $|x'|^n e^{-|x'|^2} + (1-t)^a \lesssim |x'|^{-1}$，则 $w_n(x,t) < 0$。

- **(情况3：** $x_n > |x'|$) 由引理 4.7 及（4.5），我们有

$$w_n(x,t) \approx \frac{1}{x_n^n}\left(1 + \frac{1-(1-t)^{a+\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}}\right) + x_n e^{-x_n^2} + \frac{1}{x_n^{n-1}}(1-t)^a > 0. \tag{4.51}$$

□

我们现在证明定理 1.10 反转点的存在性。

证明。 - **(情形 1：** $i < n$, $t > 1$) 由命题 3.7 的 (i) 可知，对于 $t \geq \frac{9}{8}$，w_i 对所有 $a > -1$都必须发生符号变化。

对于 $1 < t < \frac{9}{8}$，我们需要对命题3.7的证明进行更仔细的分析。我们将证明以下陈述：对于每个 $a > -1$ 和 $1 < t < \frac{9}{8}$，存在 $N > 1$，其仅取决于 n 和 a，使得当$|x'| = N$时，$w_i(x', x_n, t)$会改变其符号。证明方法是说明，对于这样的 x'，(x', t)属于命题 x^*_{nik} 中所给出的3.7的表达式中指标下标所写集合之一。

((i)：$-1 < a \le -\frac{3}{4}$）存在常数 c_1、$\cdots$、$c_5 > 0$ 使得

$$A_a^2 = \left\{(x', t) \mid c_1(t-1) \le (a+1)|x'|^2 \le c_2(t-1)^{a+\frac{1}{2}}\right\},$$
$$A_a^4 = \left\{(x', t) \mid c_3(t-1)^{a+\frac{1}{2}} \le (a+1)|x'|^2 \le c_4(t-1)^{a+\frac{1}{2}} e^{c_5|x'|^2}\right\}.$$

我们首先说明如何选取合适常数的思路。为简便起见，我们将由集合 A_a^i 给出的区域仍记作 A_a^i，以免混淆。注意，对每个 t，满足（x'，t）的 $|x'|$ 总小于满足（x'，t）的 $\in A_a^4$。此外，由集合 A_a^2 给出的区域在上方有界，而 A_a^4 在下方有界，它们的界均由 t 中的某些递减函数给出；这些函数在 $t \to 1$ 时趋于无穷，并在 $t \to \frac{9}{8}$ 时保持有界。因此，我们可以选取某个常数 $N > 0$，使得直线 $|x'|^2 = N$ 在（x'，t）平面上经过区域 A_a^4，对应某个以 $t = \frac{9}{8}$ 为右端点的时间区间；同时也经过区域 A_a^2，对应某个以 $t = 1$ 为左端点的时间区间。接下来需要填补这两个区间之间的空隙。为此，我们将证明存在 $N' > N$，使得直线 $|x'| = N'$ 在（x'，t）平面上经过区域 A_a^4，其对应的时间区间是此前尚未覆盖的部分。注意，常数的选取必须独立于 t。

取 $N = \max\left\{5c_*^2, \frac{2c_3 8^{-a-\frac{1}{2}}}{a+1}\right\}$，其中 $c_* > 0$ 由命题 3.7 给出。则存在 $t_1 > 1$，使得对所有满足 x' 的 $1 < t \le t_1$，均有 $(x', t) \in A_a^2$，且 $|x'| = N$。此外，还存在 $t_2 > t_1$，使得对所有满足 x' 的 $t_2 < t < \frac{9}{8}$，均有 $(x', t) \in A_a^4$，且 $|x'| = N$。只需证明存在 x'，其与 t 无关，并使得对所有 $t_1 < t < t_2$，均有 $(x', t) \in A_a^4$。事实上，令 $N_1' := c_4(t_1-1)^{a+\frac{1}{2}}$，并取满足对所有 $x \ge N_2'$ 均有 $xe^{-c_5 x} \le \frac{c_4}{c_3} N^2$ 的 $N_2' > 0$。现在定义 $N' := \max\{N_1', N_2'\}$。那么对于任意 $t_1 < t < t_2$，首先有 $c_4(t-1)^{a+\frac{1}{2}} \le |a+1|N'$，且 $c_4(t-1)^{a+\frac{1}{2}} e^{c_5|x'|^2} \ge c_4(t_2-1)^{a+\frac{1}{2}} e^{c_5 N'^2} = \frac{c_4}{c_3}|a+1|N^2 e^{c_5 N'^2} \ge |a+1|N'^2$。因此，对于任意 $t_1 < t < t_2$，当 x' 满足 $|x'| = N'$ 时，均有 $(x', t) \in A_a^4$。

((ii)：$-\frac{3}{4} < a < -\frac{1}{2}$）存在常数 $c_1, \cdots, c_5 > 0$ 使得

$$A_a^2 = \left\{(x', t) \mid c_1 e^{-\frac{2}{1+2a}}(t-1) \le |a+\frac{1}{2}||x'|^2 \le c_2(t-1)^{a+\frac{1}{2}}\right\},$$
$$A_a^4 = \left\{(x', t) \mid 1 < t \le 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}},\ c_3\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|} \le |x'|^2,\ |x'|^2 e^{-c_5|x'|^2} \le c_4\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|}\right\}$$
$$\cup \left\{(x', t) \mid 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}} \le t \le \frac{9}{8},\ c_3|\ln(t-1)| \le |x'|^2,\ |x'|^2 e^{-c_5|x'|^2} \le c_4|\ln(t-1)|\right\}.$$

设 $1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}} < t \le \frac{9}{8}$。存在仅依赖于 n 的 $N_0 > 1$，使得对 $|x'|^2 \ge N_0$ 有 $|x'|^2 e^{-c_5|x'|^2} \le c_4|\ln(t-1)|$。记 $N_1 := c_3\left|\ln\left(\frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}}\right)\right|$。于是可见，对任意 $1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}} < t \le \frac{9}{8}$，当 x' 满足 $|x'|^2 = N_1$ 时，$(x', t) \in A_a^4$。因此，取 $N = \max\{N_0, N_1\}$，对满足 $|x'| = N$ 的 x' 即得所需结果。

现在考虑 $1 < t \le 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}}$ 的情形。与之前类似，存在一个仅取决于 n 和 a 的 $N_0 > 1$，使得对于 $|x'|^2 \ge N_0$，我们有 $|x'|^2 e^{-c_5|x'|^2} \le c_4\frac{(t-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|}$。现在记 $T := \min\left\{1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}}, 1 + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{2}{2a-1}} e^{-\frac{4}{4a^2-1}}\right\}$，从而对于 $1 < t \le T$，集合 A_a^2 非空。

对于 $\frac{1+T}{2} \le t \le 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}}$，记 $N_1 := c_3\frac{(T-1)^{a+\frac{1}{2}}}{2^{a+\frac{1}{2}}|a+\frac{1}{2}|}$，则由于对于任意 $\frac{1+T}{2} \le t \le 1 + \frac{1}{4}e^{\frac{2}{2a+1}}$，存在 x' 使得 $|x'|^2 = N_1$，且 $(x', t) \in A_a^4$。此外，存在 $1 < t_1 < \frac{1+T}{2}$ 使得 $|a+\frac{1}{2}|N_1 = c_2(t_1-1)^{a+\frac{1}{2}}$。于是，对于 $1 < t \le t_1$，存在 x' 使得 $|x'|^2 = \max\{N_0, N_1\}$，且 $(x', t) \in A_a^2$。现在记 $N_2 := \frac{c_3(t_1-1)^{a+\frac{1}{2}}}{|a+\frac{1}{2}|}$，则对于 $t_1 \le t \le \frac{1+T}{2}$，有 $c_3(t-1)^{a+\frac{1}{2}} \le c_3(t_1-1)^{a+\frac{1}{2}} = |a+\frac{1}{2}|N_2$。因此，对于 $t_1 \le t \le \frac{1+T}{2}$，存在 x' 使得 $|x'|^2 = \max\{N_0, N_2\}$，且 $(x', t) \in A_a^4$。

(iii)： $a=-\frac{1}{2}$) 存在常数 $c_1,\ \cdots,\ c_5>0$，使得

$$A_a^3=\left\{(x',t)\mid c_1\ln\frac{|x'|^2}{t-1}\le\frac{|x'|^2}{t-1},\ |x'|^2e^{-c_2|x'|^2}\ge t-1\right\},$$
$$A_a^4=\left\{(x',t)\mid c_3|\ln(t-1)|\le|x'|,\ |x'|^2e^{-c_5|x'|^2}\le c_4|\ln(t-1)|\right\}.$$

与前面的情形一样，我们选择 $N_0>1$，使其仅依赖于 n，从而 $|x'|^2\ge N_0$ 蕴含赋予 A_a^4的第二个条件。此外，由命题3.7的证明可知，$c_1=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{d_1}{d_2}\right\}$，其中常数 $d_1,d_2>0$ 在其证明中给出。因此，赋予 A_a^3 的第一个条件显然成立。然后，类似于情形 1 的论证可得所需结果。

(iv)： $-\frac{1}{2}<a\le-\frac{1}{4}$) 存在常数 $c_1,c_2,c_3>0$，使得

$$A_a^4=\left\{(x',t)\mid 1<t\le1+\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{2a+1}},\ |x'|^2\ge\frac{c_1}{a+\frac{1}{2}},\ |x'|^2e^{-c_3|x'|^2}\le\frac{c_2}{a+\frac{1}{2}}\right\}$$
$$\cup\left\{(x',t)\mid 1+\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{2a+1}}\le t\le\frac{9}{8},\ |x'|^2\ge c_1(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|,\right.$$
$$\left.|x'|^2e^{-c_3|x'|^2}\le c_2(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|\right\}.$$

若 $t\le1+\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{2a+1}}$，则取 $|x'|$ 足够大即可立即得到该结果。

若 $1+\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{2a+1}}<t<\frac{9}{8}$，我们首先注意到函数 $t\mapsto(t-1)^{a+\frac{1}{2}}|\ln(t-1)|$ 在 $t=\frac{9}{8}$ 处取得局部极小值，并在 $t=1+e^{-\frac{2}{2a+1}}$ 处取得最大值 $\frac{1}{|a+\frac{1}{2}|e}$。于是，我们可以取 $|x'|$，使得 $|x'|^2\ge\frac{c_1}{|a+\frac{1}{2}|e}$ 且 $|x'|^2e^{-c_3|x'|^2}\le\frac{c_2|\ln\frac{8}{9}|}{8^{a+\frac{1}{2}}}$，从而得到所需结果。

(v)： $a\ge-\frac{1}{4}$) 由于 A_a^4与 t无关，该结果立即可得。

- **情形 2：** $i=n,\ t>1$) 由命题3.12的 (i)，我们看到对于 $t>\frac{9}{8}$，w_n 对所有 $a>-1$ 都改变其符号，并由命题3.7的 (ii)，以及针对情形 $i<n,\ t>1$的证明中给出的类似论证，我们看到 w_n 在 $(x',\ t)\in\bigcup_{i=1}^3B_a^i$上改变其符号。

- **情况3：** $i<n,\ t<1$) 由命题4.6的 (ii)，我们看到存在 $\epsilon_0>0$ 使得对所有 $1-\epsilon_0<t<1,\ w_i(x,\ t)$ 在 $(x',\ t)\in C_a^1\cup C_a^2$上改变其符号。

- **情形 4：** $i=n,\ t<1$) 只需证明，对于每个 $t\in(7/8,\ 1)$，存在仅依赖于 n 且充分大的 $|x'|$，使函数 $x_n\mapsto w_n(x',\ x_n,\ t)$ 改变其符号。我们只考虑 $a>1/2$ 的情形，因为 $a\le1/2$ 的情形可类似证明。

(i)： $a\ge(\ln2)^{-1}$) 此情形很简单，因为对于每个 $t\in(7/8,\ 1)$，我们总能选取充分大的 $|x'|$，使得 $(x',\ t)\in D_a^1$。

(ii)： $\frac{4-2\ln\ln2}{4-2\ln2}\le a<(\ln2)^{-1}$) 在此情形下，我们回顾一下：对于时间区间 $(1-e^{-2-\frac{1}{a}},\ 1)$，存在$x_n^*\approx(a-\frac{1}{2})|x'|^ne^{-|x'|^2}\in(e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},\ e^{-1})$，使得对于 $(1-t)^{-\frac{1}{2}}\lesssim|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim1$。因此，存在 $t_1\in(1-e^{-2-\frac{1}{a}},\ 1)$，使得对于每个 $t\in(t_1,\ 1)$，存在 x'，满足 $w_n(x',\ x_n^*,\ t)=0$，其中某个 $x_n^*\in(e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},\ e^{-1})$。

另一方面，考虑时间区间 $(7/8,1)$。回顾可知，存在$x_n^*\approx(M+(1-t)^{a-\frac{1}{2}})^{-1}|x'|^ne^{-|x'|^2}\in(0,\min\{e^{-1},(2(1-t))^{\frac{1}{2}}\})$（注意，$\sigma(t)\lesssim1\lesssim M$对 $\frac{4-2\ln\ln2}{4-2\ln2}<a<(2\ln2)^{-1}$成立），对于 $|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim(M+(1-t)^{a-\frac{1}{2}})\min\{1,(1-t)^{\frac{1}{2}}\}$。因此，在该处对于 $t\in(7/8,t_1)$，存在 x'使得 $w_n(x',x_n^*,t)=0$对某个 $x_n^*\in(0,(2(1-t))^{\frac{1}{2}})$成立。

(iii)： $1/2<a<\frac{4-2\ln\ln4}{4-2\ln2}$) 在此情形下，我们将其拆分为 $1/2<a<a_0$和 $a_0\le a<\frac{4-2\ln\ln4}{4-2\ln2}$其中$a_0<(2\ln2)^{-1}$(这使得 $7/8<1-1/2e^{-\frac{1}{a}}$对 $1/2<a<a_0$) 的选取满足不等式 $e^{\frac{1}{1-2a}}\lesssim\frac{|x'|^ne^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n}e^{|x'|^2})}\lesssim1$ 对 $2c_*<|x'|<10c_*$ 其中 c_* 由命题 4.10给出。

我们首先考虑 $a_0\le a<\frac{4-2\ln\ln4}{4-2\ln2}$ 的情形。对于时间区间 $(1-\frac{1}{2}e^{a\frac{4a-1}{1-2a}},1)$，回顾可知，对于 $(a-\frac{1}{2})^{-1}e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\lesssim|x'|^ne^{-|x'|^2}\lesssim(a-\frac{1}{2})^{-1}e^{\frac{1}{1-2a}}$，存在$x_n^*\approx(a-\frac{1}{2})|x'|^ne^{-|x'|^2}\in(e^{\frac{1}{2a}}(1-t)^{\frac{1}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{1-2a}})$。

我们首先固定 $N_1 > c_*$，使得 $N_1^n e^{-N_1^2} \lesssim (a-\frac{1}{2})^{-1} e^{1-\frac{1}{2a}}$ 于是存在 $t_1 \in (1-\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}, 1)$，使得对于所有 $t \in [t_1, 1)$，$(a-\frac{1}{2})^{-1} e^{\frac{1}{2a}} (1-t)^{\frac{1}{2}} \lesssim N_1^n e^{-N_1^2}$ 成立。于是存在 x_n^*，使得对于满足 $|x'| = N_1$ 的 x' 以及所有 $t \in [t_1, 1)$，$w_n(x', x_n^*, t) = 0$。

现在考虑时间区间 $(7/8, 1)$。我们将情形分为 $a_0 \le a < (2\ln 2)^{-1}$ 和 $(2\ln 2)^{-1} \le a < \frac{4-\ln 2}{4-2\ln 2}$。

若 $a_0 \le a < (2\ln 2)^{-1}$，则 x_n^* 对于 $t \in (7/8, 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}})$ 的存在性显然成立。对于时间区间 $(1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}, 1)$，我们回顾一下：存在 $x_n^* \approx (M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}})^{-1} |x'|^n e^{-|x'|^2}$，使得 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim (M + a(1-t)^{a-\frac{1}{2}}) \min\{e^{-1}, (1-t)^{\frac{1}{2}}\}$。我们固定 $N_2 > c_*$，使得 $N_2^n e^{-N_2^2} \lesssim \min\{e^{-1}, (1-t_1)^{\frac{1}{2}}\}$。于是，对于任意 $t \in [1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}, t_1)$，存在 x_n^*，使得 $w_n(x', x_n^*, t) = 0$，其中 x' 满足 $|x'| = N_2$。

若 $(2\ln 2)^{-1} \le a < \frac{4-\ln 2}{4-2\ln 2}$，则有 $1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}} < 7/8$，因此得到与上文相同的结果，只是区间 $(7/8, 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}})$ 现在为空。这就完成了对 $a_0 \le a < \frac{4-\ln 2}{4-2\ln 2}$ 的分析。

现在考虑 $1/2 < a < a_0$ 的情形。对于时间区间 $[1-\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}, 1)$，回忆一下，存在 $x_n^* \approx \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})}$，使得对于 $e^{1-\frac{1}{2a}} \lesssim \frac{|x'|^n e^{-|x'|^2}}{\ln(|x'|^{-n} e^{|x'|^2})} \lesssim 1$ 成立。选取 $N_3 \in (2c_*, 10c_*)$，根据关于 a_0 的假设，有不等式 $e^{1-\frac{1}{2a}} \lesssim \frac{N_3^n e^{-N_3^2}}{\ln(N_3^{-n} e^{N_3^2})} \lesssim 1$。于是，对于任意 $t \in [1-\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}, 1)$，存在 x_n^*，使得 $w_n(x', x_n^*, t) = 0$，其中 x' 满足 $|x'| = N_3$。

现在考虑时间区间 $[1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}, 1-\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}})$。回想一下，存在 $x_n^* \approx (M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t))^{-1} |x'|^n e^{-|x'|^2}$，使得对于 $|x'|^n e^{-|x'|^2} \lesssim (M + (1-t)^{a-\frac{1}{2}} + \sigma(t))$，$\min\{e^{-1}, (1-t)^{\frac{1}{2}}\}$。我们固定 $N_4 > c_*$，使得 $N_4^n e^{-N_4^2} \lesssim e^{2a^{\frac{4a-1}{1-2a}}}$。那么对于任意 $t \in [1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}, 1-\frac{1}{2}e^{a^{\frac{4a-1}{1-2a}}})$，存在 x_n^*，使得 $w_n(x', x_n^*, t) = 0$，对于满足 $|x'| = N_4$ 的 x'。

最后我们考虑时间区间（$7/8$，$1-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{a}}$），则 x_n^* 的存在性可仿照上文类似地证明。至此完成对 $1/2 < a < a_0$ 的分析。□

Appendix A. Proof of Lemmas

A.1. **引理的证明 2.1**。我们将积分分成如下两部分：

$$I_{m,k} = \left(\int_0^{\frac{x_n}{2}} + \int_{\frac{x_n}{2}}^{x_n} \right) \frac{x_n - z_n}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x_n - z_n)^2}{4t}} \frac{z_n^k}{(|x'|^2 + z_n^2)^{\frac{m}{2}}} dz_n =: A + B.$$

对于 B，由于 $\frac{x_n}{2} \le z_n \le x_n$，我们有

$$B \approx \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{x_n^k}{|x|^m} \int_{\frac{x_n}{2}}^{x_n} (x_n - z_n) e^{-\frac{(x_n - z_n)^2}{4t}} dz_n \approx \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{x_n^k}{|x|^m} t(1 - e^{-\frac{cx_n^2}{t}}) \approx \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{x_n^k}{|x|^m} \min\left\{1, x_n^2 t^{-1}\right\},$$

其中，对 $\theta \ge 0$ 我们使用了不等式 $1 - e^{-\theta} \approx \min\{1, \theta\}$，并对 c，$\theta \ge 0$ 使用了 $\min\{1, c\theta\} \approx \min\{1, \theta\}$。若 $2|x'| \ge x_n$，利用对 $\theta \ge 0$ 成立的不等式 $\theta e^{-\theta} \lesssim \min\{1, \theta\}$，我们得到

$$A \le \frac{x_n}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x_n^2}{16t}} \frac{x_n^{k+1}}{|x'|^m} = \frac{x_n^k}{t^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|x'|^m} \frac{x_n^2}{t} e^{-\frac{x_n^2}{16t}} \lesssim \frac{x_n^k}{t^{\frac{1}{2}} |x'|^m} \min\left\{1, x_n^2 t^{-1}\right\}.$$

若 $2|x'| \le x_n$，利用 $\sqrt{t} \le |x'|$ 以及不等式 $\theta^m e^{-\theta} \lesssim e^{-\frac{\theta}{2}}$ 和非负整数 m，我们有

$$A \le \frac{x_n}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x_n^2}{16t}} \frac{x_n^{k+1}}{|x'|^m} \le \frac{x_n}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x_n^2}{16t}} \frac{x_n^{k+1}}{t^{\frac{m}{2}}} \lesssim \frac{x_n^k}{t^{\frac{1}{2}} x_n^m} \frac{x_n^2}{t} e^{-\frac{x_n^2}{32t}} \lesssim \frac{1}{x_n^{m-k} t^{\frac{1}{2}}} \min\left\{1, x_n^2 t^{-1}\right\}.$$

证明至此完成。

A.2. **引理 2.2 的证明。 •(1) 的证明**

对于固定ed $x' \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ 和 $x_n > 0$，我们将 $\mathbb{R}^{n-1}$ 分为三组 D_1，D_2 和 D_3 定义为 b y

$$D_1 = \{z' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x' - z'| \le \frac{1}{10}|x'|\},$$

$$D_2 = \{z' \in \mathbb{R}^{n-1} : |z'| \le \frac{1}{10}|x'|\}, \qquad D_3 = \mathbb{R}^{n-1} \setminus (D_1 \cup D_2).$$

我们将等式左侧的积分（2.8）拆分为以下三项:

$$\text{LHS of (2.8)} = \int_{D_1} \cdots dz' + \int_{D_2} \cdots dz' + \int_{D_3} \cdots dz' =: I_1 + I_2 + I_3. \tag{A.1}$$

令 $1 \le i,\ j \le n$。利用 $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Gamma'(z',\ t)dz' = 1$ 对所有 $t > 0$成立，我们按如下方式分解 I_1。

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{|x'-z'| \le \frac{1}{10}|x'|\}} \Gamma'(x'-z',t)\Big(\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(z',x_n) - \partial_{x_n}\partial_{x_i}N(x)\Big)dz' \\ &\quad + \partial_{x_n}\partial_{x_i}N(x) - \partial_{x_n}\partial_{x_i}N(x)\int_{\{|z'| \ge \frac{1}{10}\frac{|x'|}{\sqrt{t}}\}} \Gamma'(z',1)dz' \\ &=: I_{11} + \partial_{x_n}\partial_{x_i}N(x) + I_{12}. \end{aligned}$$

注意到

$$|\partial_{x'}\partial_{x_n}N(x)| \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+2}},\quad |\nabla^2_{x'}\partial_{x_n}N(x)| \le c\frac{x_n}{|x|^{n+2}},\quad |\nabla^3_{x'}\partial_{x_n}N(x)| \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+4}}. \tag{A.2}$$

由（A.2）$_1$,可得

$$|I_{12}(x,t)| \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+2}}\int_{\{|z'| \ge \frac{1}{10}\frac{|x'|}{\sqrt{t}}\}} e^{-\frac{1}{8}|z'|^2}dz' \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}} \le c\frac{tx_n}{|x|^{n+2}|x'|}. \tag{A.3}$$

利用中值定理，注意到在 x' 和 z' 之间存在 ξ'，使得

$$\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(z',x_n) - \partial_{x_n}\partial_{z_i}N(x) = \nabla'\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(\xi',x_n)\cdot(x'-z').$$

注意，对所有 $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ 和 $t > 0$，$\int_{|x'-z'| \le \frac{1}{10}|x'|} \Gamma'(x'-z',\ t)(x'-z')dz' = 0$。于是，我们有

$$\begin{aligned} I_{11}(x,t) &= \int_{|x'-z'| \le \frac{1}{10}|x'|} \Gamma'(x'-z',t)\nabla'\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(\xi',x_n)\cdot(x'-z')dz' \\ &= \int_{|x'-z'| \le \frac{1}{10}|x'|} \Gamma'(x'-z',t)\Big(\nabla'\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(\xi',x_n) - \nabla'\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(x',x_n)\Big)\cdot(x'-z')dz' \\ &= \int_{|x'-z'| \le \frac{1}{10}|x'|} \Gamma'(x'-z',t)(\xi'-x')(\nabla')^2\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(\eta',x_n)(x'-z')dz', \end{aligned}$$

其中 η' 介于 x' 与 $x'-\xi'$之间。

注意到 $\frac{9}{10}|x'| \le |\xi'|,\ |\eta'| \le \frac{11}{10}|x'|$ 与 $|\xi'-x'| \le |x'-z'|$ 对于 $x',\ \xi' \in D_1$，由（A.2）$_3$可得

$$|(\xi'-x')(\nabla')^2\partial_{x_n}\partial_{z_i}N(\eta',x_n)(x'-z')| \le c\frac{x_n|\eta'||x'-z'|^2}{(|\eta'|^2+x_n^2)^{\frac{n+4}{2}}} \le c\frac{x_n|x'||x'-z'|^2}{|x|^{n+4}},$$

由此可知

$$|I_{11}(x,t)| \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+4}}t\int_{|z'| \le \frac{|x'|}{10\sqrt{t}}} |z'|^2e^{-\frac{1}{8}|z'|^2}dz' \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+4}}t \le \frac{cx_nt}{|x|^{n+3}}. \tag{A.4}$$

另一方面，对于 $z' \in D_3$，我们观察到 $|\Gamma'(x'-z',\ t)| \le ct^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{1}{8}\frac{|z'|^2}{t}}$，因此，由（A.2）$_1$,可得

$$|I_3(x,t)| \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+2}}\int_{|z'| \ge \frac{|x'|}{10\sqrt{t}}} e^{-\frac{1}{8}|z'|^2}dz' \le c\frac{x_n|x'|}{|x|^{n+2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}} \le \frac{cx_nt}{|x'||x|^{n+2}}. \tag{A.5}$$

尚需估计 I_2。首先，我们考虑情形 $x_n \ge 2|x'|$。我们注意到 $|\partial_{z_i}\partial_{x_n}N(z',\ x_n)| \le c|z'|x_n^{-n-1}$对于 $2|z'| \le x_n$以及 $\Gamma'(x'-z',\ t) \le ct^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}}$对于 $|z'| \le \frac{1}{10}|x'|$，由此可知

$$\begin{aligned} |I_2(x,t)| &\le x_n^{-n-1}t^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}}\int_{|z'| \le \frac{1}{10}|x'|} |z'|dz' \\ &\le c|x'|^nx_n^{-n-1}t^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}} \le \frac{ct}{x_n^{n+1}|x'|} \le \frac{cx_nt}{|x|^{n+2}|x'|}, \end{aligned} \tag{A.6}$$

其中，我们用 $|x'| \ge 1$ 和 $e^{-A} \le c_mA^{-m}$ 表示 $A > 0$ 和 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。

接下来，我们考虑情形 $x_n < 2|x'|$。利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} I_2(x,t) &= \int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\partial_{x_i}\Gamma'(x'-z',t)dz' \\ &\quad + \int_{|z'|=\frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\Gamma'(x'-z',t)\mathbf{n}_i(z')d\sigma(z') \\ &=: I_{21}(x,t) + I_{22}(x,t). \end{aligned}$$

注意到对于 $|z'| = \frac{1}{10}|x'|$，$\Gamma'(x'-z',t) \le ct^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}}$ 以及 $|\partial_{x_n} N(z',x_n)| \le c\frac{x_n}{|x|^n}$ 可得

$$|I_{22}(x,t)| \le ct^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}} \frac{x_n}{|x|^n} \int_{|z'|=\frac{1}{10}|x'|} d\sigma(z') \le ct^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}} \frac{x_n}{|x|^n}|x'|^{n-2} \le \frac{cx_nt}{|x'|^{n+3}}. \tag{A.7}$$

由于对于所有 $x_n > 0$，$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{x_n} N(z',x_n)dz' = 1$，因此可得

$$\begin{aligned} I_{21}(x,t) &= \int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\big(\partial_{x_i}\Gamma'(x'-z',t) - \partial_{x_i}\Gamma'(x',t)\big)dz' \\ &\quad + \partial_{x_i}\Gamma'(x',t) + \partial_{x_i}\Gamma'(x',t)\int_{|z'|\ge \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)dz' \\ &=: I_{211}(x,t) + \partial_{x_i}\Gamma'(x',t) + I_{212}(x,t). \end{aligned}$$

利用 $\int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} z'dz' = 0$ 和中值定理，可得

$$I_{211}(x,t) = \int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\nabla'\partial_{x_i}\Gamma'(x'-\xi',t)\cdot z'dz', \tag{A.8}$$

由此可得，再次运用中值定理，得到以下结论。

$$\begin{aligned} |I_{211}(x,t)| &= \left| \int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\Big(\nabla'\partial_{x_i}\Gamma'(x'-\xi',t) - \nabla'\partial_{x_i}\Gamma'(x,t)\Big)\cdot z'dz' \right| \\ &= \left| \int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_n} N(z',x_n)\xi'\nabla'^2\partial_{x_i}\Gamma'(x'-\eta',t)\cdot z'dz' \right| \\ &\le c\int_{|z'|\le \frac{1}{10}|x'|} \frac{x_n|z'|^2}{(|z'|^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}|x'|t^{-\frac{n+3}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{8t}}dz' \\ &\le ct^{-\frac{n+3}{2}}x_n|x'|^2e^{-\frac{|x'|^2}{t}} \le \frac{cx_nt}{|x'|^{n+3}}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

根据 $\int_{|z'|\ge \frac{|x'|}{10x_n}} \partial_{x_n} N(z',1)dz' \le 1$ 这一事实，可得

$$|I_{212}(x,t)| \le ct^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{8t}} \int_{|z'|\ge \frac{1}{10}\frac{|x'|}{x_n}} (|z'|^2+1)^{-\frac{n}{2}}dz' \le ct^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{8t}}x_n|x'|^{-1} \le \frac{cx_nt}{|x'|^{n+3}}. \tag{A.10}$$

因此，对于 $x_n \le 2|x'|$，由式（A.7）、（A.9）和（A.10）可得

$$I_2(x,t) = \partial_{x_i}\Gamma'(x',t) \pm \frac{tx_n}{|x'|^{n+3}}. \tag{A.11}$$

令 $J_1 = I_2 + I_3 + I_{11} + I_{12}$ 并将估计（A.3）、（A.4）、（A.5）、（A.6）、（A.11）相加，即得引理 2.2中的（1）。

• **引理 2.2** 中（2）的证明。与引理 2.2中（1）的证明一样，我们将式（2.9）左端的积分拆分为以下三项:

$$\text{LHS of (2.9)} = \int_{D_1} \cdots dz' + \int_{D_2} \cdots dz' + \int_{D_3} \cdots dz' := J_1 + J_2 + J_3. \tag{A.12}$$

如引理2.2中 (1) 的证明所示，我们将 J_1 按以下方式分解。

$$I_1 = I_{11} + \partial_{x_i}\partial_{x_j} N(x) + I_{12}.$$

对于 I_{12}，注意到

$$|\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)| \le c\frac{|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2}{|x|^{n+2}}, \quad |\nabla'\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)| \le c\frac{|x'|}{|x|^{n+2}}, \tag{A.13}$$

由（A.13）$_1$ 可知

$$|I_{12}(x',t)| \le c\frac{|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2}{|x|^{n+2}}\int_{\{|z'|\ge\frac{1}{10}\frac{|x'|}{\sqrt{t}}\}} e^{-\frac{1}{8}|z'|^2}dz' \le c\frac{|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2}{|x|^{n+2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}}. \tag{A.14}$$

对于 I_{11}，由中值定理，存在 ξ'，位于连接 x' 与 z' 的线段上，使得

$$\partial_{z_i}\partial_{z_j}N(z',x_n)-\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)=\nabla'\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}N(\xi',x_n)\cdot(z'-x'),$$

从而

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{D_1}\Gamma'(x'-z',t)\nabla'\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}N(\xi',x_n)\cdot(z'-x')dz' \\ &= \int_{D_1}\Gamma'(x'-z',t)\left(\nabla'\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}N(\xi',x_n)-\nabla'\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)\right)\cdot(z'-x')dz', \end{aligned}$$

其中我们用到了，对于 $1\le j\le n-1$，$\int_{D_1}\Gamma'(x'-z',\ t)(x_j-z_j)dz'=0$。然后再次应用中值定理，存在 η'，位于连接 x' 与 ξ' 的线段上，使得

$$\nabla'\partial_{\xi_i}\partial_{\xi_j}N(\xi',x_n)-\nabla'\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)=\nabla'^2\partial_{\eta_i}\partial_{\eta_j}N(\eta',x_n)\cdot(\xi'-x').$$

于是我们得到

$$I_{11}=\int_{D_1}\Gamma'(x'-z',t)\nabla'^2\partial_{\eta_i}\partial_{\eta_j}N(\eta',x_n):(\xi'-x')\otimes(z'-x')dz'.$$

注意到 $|\nabla'^2\partial_{x_i}\partial_{x_j}N(x)|\le c|x|^{-n-2}$，我们有

$$|I_{11}(x',t)| \le c\frac{t}{|x|^{n+2}}\int_{\{|z'|\le\frac{1}{10}\frac{|x'|}{\sqrt{t}}\}}|z'|e^{-c|z'|^2}dz' \le c\frac{t}{|x|^{n+2}}. \tag{A.15}$$

现在我们估计 I_3。回顾 $|\Gamma'(x'-z',\ t)|\le ct^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|z'|^2}{8t}}$ 对 $z'\in D_3$ 成立，因此由（A.13）$_1$ 可得

$$|I_3(x,t)| \le c\frac{|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2}{|x|^{n+2}}\int_{\{|z'|\ge\frac{|x'|}{10\sqrt{t}}\}} e^{-\frac{1}{8}|z'|^2}dz' \le c\frac{|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2}{|x|^{n+2}}e^{-\frac{|x'|^2}{80t}}. \tag{A.16}$$

剩下需要估计 I_2。与前面类似，我们先考虑情形 $x_n\ge 2|x'|$。注意到 $|\partial_{z_i}\partial_{x_n}N(z',\ x_n)|\le c|z'|x_n^{-n-1}$ 对 $x_n\ge 2|z'|$ 成立，且 $\Gamma'(x'-z',\ t)\le ct^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{8t}}$ 对 $|z'|\le\frac{1}{10}|x'|$ 成立，我们得到

$$\begin{aligned} I_2(x,t) &\le x_n^{-n-2}t^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{10t}}\int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|}(|z'|^2+\delta_{ij}x_n^2)dz' \\ &\le x_n^{-n-2}t^{-\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{|x'|^2}{10t}}(|x'|^{n+1}+\delta_{ij}x_n^2|x'|^{n-1}) \\ &\le x_n^{-n-2}e^{-\frac{|x'|^2}{10t}}(|x'|^2+\delta_{ij}x_n^2). \end{aligned} \tag{A.17}$$

另一方面，如果 $x_n<2|x'|$，利用分部积分，我们得到

$$\begin{aligned} I_2(x,t) &= \int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|}\partial_{z_j}N(z',x_n)\partial_{x_i}\Gamma'(x'-z',t)dz' \\ &\quad+\int_{|z'|=\frac{1}{10}|x'|}\partial_{z_j}N(z',x_n)\Gamma'(x'-z',t)\mathbf{n}_i(z')d\sigma(z') \\ &= I_{21}(x,t)+I_{22}(x,t). \end{aligned}$$

对于 I_{22}，回顾 $\Gamma'(x'-z',t) \le ct^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}}$ 以及 $|\partial_{x_j} N(z',x_n)| \le c\frac{|x'|}{|x|^n}$ 对于 $|z'| = \frac{1}{10}|x'|$，我们得到

$$I_{22}(x,t) \le ct^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}} \frac{|x'|}{|x|^n} \int_{|z'|=\frac{1}{10}|x'|} d\sigma(z') \le c\frac{t}{|x|^{n+2}}. \tag{A.18}$$

对于 I_{21}，利用 $\int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|} \partial_{x_j} N(z', x_n)dz' = 0$ 对所有 $x_n > 0$，由中值定理可得

$$\begin{aligned} I_{21}(x,t) &= \int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|} \partial_{z_j} N(z',x_n)\big(\partial_{x_i}\Gamma'(x'-z',t) - \partial_{x_i}\Gamma'(x',t)\big)dz' \\ &= \int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|} \partial_{z_j} N(z',x_n)\nabla'\partial_{x_i}\Gamma'(x'-\xi',t)\cdot z'dz' \\ &\le ct^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{8t}} \int_{|z'|\le\frac{1}{10}|x'|} \frac{|z'|^2}{(|z'|^2+x_n^2)^{\frac{n}{2}}}dz' \le c\frac{t}{|x'|^{n+2}}. \end{aligned} \tag{A.19}$$

因此，对于 $x_n \le 2|x'|$，由式（A.18）和式（A.2）可得

$$|I_2(x,t)| \le c\frac{t}{|x'|^{n+2}}. \tag{A.20}$$

Setting $J_2 = I_2 + I_3 + I_{11} + I_{12}$ 并将式（A.12）至（A.20）相加，可得引理 2.2 的结论（2）.

- **（3）的证明** 由于证明过程类似，我们省略引理 2.2 中（3）的证明。 □

A.3. **引理 2.6 的证明。** • **证明** (2.16) 由引理 2.2 的 (2) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{L}_{kk}(x,t) &= 4\int_0^{x_n} \partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-z_n,t)\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\partial_{x_k}\partial_{x_k}N(x',z_n) + J_2(x',z_n,t)\Big)dz_n \\ &\approx -(n-1)I_{n+2,2} + |x'|^2 I_{n+2,0}, \end{aligned}$$

这里用到了 $\sqrt{t} \le \epsilon_0|x'|$ 当 $\epsilon_0 > 0$ 足够小时。由引理 2.16**2.1** 得到 (2.1。

• **证明** (2.17) 由于 $\Gamma(x,t) = \Gamma_1(x_n,t)\Gamma'(x',t)$，由引理 2.2 可知 t

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{ni} &= \int_0^{x_n} \partial_{x_n}\Gamma_1(x_n-z_n,t)\Big(\partial_{z_n}\partial_{x_i}N(x',z_n) + \partial_{x_i}\Gamma'(x',t)\mathbf{1}_{z_n\le 2|x'|} + J_1(x',z_n,t)\Big)dz_n \\ &\approx: \widetilde{L}_{ni,1} + \widetilde{L}_{ni,2} + \widetilde{L}_{ni,3}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

~我们首先直接估计 $L_{ni,1}(x,t)$ 如下：

$$\widetilde{L}_{ni,1}(x,t) \approx \int_0^{x_n} t^{-\frac{3}{2}}(x_n-z_n)e^{-\frac{(x_n-z_n)^2}{t}} \frac{x_i z_n}{(|x'|^2+z_n^2)^{\frac{n+2}{2}}}dz_n = x_i I_{n+2,1} \approx \frac{x_i x_n}{t^{\frac{1}{2}}|x|^{n+2}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\}. \tag{A.2}$$

~对于 $L_{ni,2}$，若 $x_n \le 2|x'|$，直接计算可得

$$\widetilde{L}_{ni,2}(x,t) \approx x_i t^{-\frac{n+4}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} \int_0^{x_n} z_n e^{-\frac{z_n^2}{4t}}dz_n \approx x_i t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t}\right\}. \tag{A.3}$$

另一方面，若 $x_n \ge 2|x'|$，则有

$$\begin{aligned} \widetilde{L}_{ni,2}(x,t) &\approx x_i t^{-\frac{n+4}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} \int_0^{2|x'|} (x_n-z_n)e^{-\frac{(x_n-z_n)^2}{4t}}dz_n \\ &= x_i t^{-\frac{n+4}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} \int_{x_n-2|x'|}^{x_n} ue^{-\frac{u^2}{4t}}du = x_i t^{-\frac{n+4}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} 2t(e^{-\frac{(x_n-2|x'|)^2}{4t}} - e^{-\frac{x_n^2}{4t}}). \end{aligned} \tag{A.4}$$

若 $x_n \ge 4|x'|$，则上述括号以 $e^{-\frac{cx_n^2}{t}}$ 为上界。另一方面，若 $2|x'| \le x_n \le 4|x'|$，则上述括号以 **1** 为上界。在这两种情形下，我们得到

$$\widetilde{L}_{ni,2}(x,t) \lesssim x_i t^{-\frac{n+4}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} t$$

从而对 $x_n \geq 2|x'|$,

$$\widetilde{L}_{ni,1}(x,t)+\widetilde{L}_{ni,2}(x,t)\approx \frac{x_n x_i}{t^{\frac{1}{2}}|x|^{n+2}}.$$

因此，我们得出

$$\widetilde{L}_{ni,1}(x,t)+\widetilde{L}_{ni,2}(x,t)\approx \left(\frac{x_n x_i}{t^{\frac{1}{2}}|x|^{n+2}}+x_n t^{-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{c|x|^2}{t}}\right)\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t}\right\}.$$

对于 $\widetilde{L}_{ni,3}$，利用 $|J_1(x,t)|\lesssim \frac{tx_n}{|x|^{n+2}|x'|}$，我们有

$$|\widetilde{L}_{ni,3}|\lesssim \int_0^{x_n}\frac{x_n-z_n}{t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x_n-z_n)^2}{4t}}\frac{tz_n}{|x'|(|x'|^2+z_n^2)^{\frac{n+2}{2}}}dz_n\approx\frac{t}{|x'|}I_{n+2,1}.$$

将上述给出的所有估计相加，我们可以看到

$$\widetilde{L}_{ni}\approx x_i I_{n+2,1}+x_i t^{-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{c|x|^2}{t}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t}\right\}\pm\frac{t}{|x'|}I_{n+2,1}\approx x_i\left(\frac{x_n}{t^{\frac{1}{2}}|x'|^{n+2}}+t^{-\frac{n+2}{2}}e^{-\frac{c|x|^2}{t}}\right)\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t}\right\},$$

因为当 $\bar{\epsilon}_0>0$ 足够小时 $\sqrt{t}\leq\epsilon_0|x'|$，且我们假设对于某个 $c_0>1$ 有 $|x'|\leq c_0 x_i$。

A.4. **引理 3.2 的证明。** • **（情形 $t>\frac{9}{8}$）**注意到 $t-s\approx t-1$ 对于 $t\geq\frac{9}{8}$ 以及 $\frac{1}{2}<s<1$，我们得到

$$\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t)\approx\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)^a(t-1)^{-k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}ds\approx\frac{1}{a+1}(t-1)^{-k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}.$$

- **（情形 $1<t<\frac{9}{8}$）**

i) 若 $x_n^2\leq 2(t-1)$，则

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t)&=\int_{\frac{1}{2}}^{2-t}\frac{(1-s)^a}{(t-s)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds+\int_{2-t}^1\frac{(1-s)^a}{(t-s)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-s}\right\}ds\\
&\leq\int_{\frac{1}{2}}^{2-t}\frac{(1-s)^a}{(1-s)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{1-s}\right\}ds+\frac{1}{(t-1)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}\int_{2-t}^1(1-s)^a ds\\
&\leq\int_{t-1}^{\frac{1}{2}}u^{a-k}\min\left\{2,\frac{x_n^2}{u}\right\}du+\frac{(t-1)^{a+1}}{(a+1)(t-1)^k}\min\left\{2,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}\\
&=x_n^2\int_{t-1}^{\frac{1}{2}}u^{a-k-1}du+\frac{x_n^2(t-1)^{a-k}}{a+1}\\
&\leq x_n^2\left(\frac{2^{k-a}-(t-1)^{a-k}}{a-k}\mathbf{1}_{a\neq k}+|\ln(2(t-1))|\mathbf{1}_{a=k}\right)+\frac{x_n^2(t-1)^{a-k}}{a+1},
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $1-s<t-s$ 与 $t-1<t-s$ 对 $s<1<t$ 成立，且 $\min\{1,a\}\leq\min\{1,b\}$ 对 $0\leq a\leq b$ 成立。

类似地，我们有

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t)&\geq\int_{\frac{1}{2}}^{2-t}\frac{(1-s)^a}{2^k(1-s)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{2(1-s)}\right\}ds+\frac{1}{2^k(t-1)^k}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{2(t-1)}\right\}\int_{2-t}^1(1-s)^a ds\\
&=\frac{1}{2^{k+1}}\int_{t-1}^{\frac{1}{2}}u^{a-k}\min\left\{2,\frac{x_n^2}{u}\right\}du+\frac{1}{2^{k+1}(t-1)^k}\min\left\{2,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}\frac{(t-1)^{a+1}}{a+1}\\
&=\frac{x_n^2}{2^{k+1}}\int_{t-1}^{\frac{1}{2}}u^{a-k-1}du+\frac{x_n^2}{2^{k+1}(t-1)^{k+1}}\frac{(t-1)^{a+1}}{a+1}\\
&=\frac{x_n^2}{2^{k+1}}\left(\frac{2^{k-a}-(t-1)^{a-k}}{a-k}\mathbf{1}_{a\neq k}+|\ln(2(t-1))|\mathbf{1}_{a=k}\right)+\frac{x_n^2(t-1)^{a-k}}{2^{k+1}(a+1)},
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $t-s<2(1-s)$ 和 $t-s<2(t-1)$ 分别对 $\frac{1}{2}<s<2-t$ 和 $2-t<s<1$ 成立。

ii) 若 $x_n \geq \frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} ds \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} (1-s)^{a-k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-s}\right\} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-1)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-1}\right\} ds \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} (1-s)^{a-k} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-1)^k} ds \\
&= \frac{2^{k-a-1} - (t-1)^{a-k+1}}{a-k+1} \mathbf{1}_{a\neq k-1} + |\ln(2(t-1))| \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{(t-1)^{a+1-k}}{a+1}.
\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t) &\geq \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} \frac{(1-s)^a}{2^k(1-s)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{2(1-s)}\right\} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{2^k(t-1)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{2(t-1)}\right\} ds \\
&\geq \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} \frac{(1-s)^a - k}{2^{k+1}} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{1-s}\right\} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{2^{k+1}(t-1)^k} \min\left\{1, \frac{x_n^2}{t-1}\right\} ds \\
&= \frac{1}{2^{k+1}} \int_{t-1}^{\frac{1}{2}} u^{a-k} du + \frac{1}{2^{k+1}(t-1)^k} \int_0^{t-1} u^a du \\
&= \frac{1}{2^{k+1}} \left(\frac{2^{k-a-1} - (t-1)^{a-k+1}}{a-k+1} \mathbf{1}_{a\neq k-1} + |\ln(2(t-1))| \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{(t-1)^{a-k+1}}{a+1} \right).
\end{aligned}$$

iii) 如果 $2(t-1) \leq x_n^2 \leq \frac{1}{4}$，那么 $-\frac{1}{2} \leq t - x_n^2 \leq 1$，因此

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{a,k}(x_n.t) &= \int_{\frac{1}{2}}^{t-x_n^2} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} \frac{x_n^2}{t-s} ds + \int_{t-x_n^2}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-s)^k} ds \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^{t-x_n^2} (1-s)^{a-k-1} x_n^2 ds + \int_{t-x_n^2}^{2-t} (1-s)^{a-k} ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{(t-1)^k} ds \\
&= x_n^2 \int_{x_n^2-t+1}^{\frac{1}{2}} u^{a-k-1} du + \int_{t-1}^{x_n^2-t+1} u^{a-k} du + \int_0^{t-1} \frac{u^a}{(t-1)^k} du \\
&\leq x_n^2 \int_{\frac{x_n^2}{2}}^{\frac{1}{2}} u^{a-k-1} du + \int_{t-1}^{x_n^2} u^{a-k} du + \int_0^{t-1} \frac{u^a}{(t-1)^k} du \\
&= x_n^2 \left(2^{k-a} \frac{1 - x_n^{2(a-k)}}{a-k} \mathbf{1}_{a\neq k} + |\ln x_n^2| \mathbf{1}_{a=k} \right) \\
&\quad + \frac{x_n^{2(a-k+1)} - (t-1)^{a-k+1}}{a-k+1} \mathbf{1}_{a\neq k-1} + \ln \frac{x_n^2}{t-1} \mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{(t-1)^{a-k+1}}{a+1}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

类似地，

(A.6)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{a,k}(x_n,t) &\geq \int_{\frac{1}{2}}^{t-x_n^2} \frac{x_n^2}{2^{k+1}}(1-s)^{a-k-1}ds + \int_{t-x_n^2}^{2-t} \frac{(1-s)^{a-k}}{2^k}ds + \int_{2-t}^{1} \frac{(1-s)^a}{2^k(t-1)^k}ds \\ &= \int_{x_n^2-t+1}^{\frac{1}{2}} \frac{x_n^2}{2^{k+1}}u^{a-k-1}du + \int_{t-1}^{x_n^2-t+1} \frac{u^{a-k}}{2^k}du + \int_0^{t-1} \frac{u^a}{2^k(t-1)^k}du \\ &\geq \int_{x_n^2}^{\frac{1}{2}} \frac{x_n^2}{2^{k+1}}u^{a-k-1}du + \int_{t-1}^{\frac{x_n^2}{2}} \frac{u^{a-k}}{2^k}du + \frac{(t-1)^{a+1-k}}{2^k(a+1)} \\ &= \frac{x_n^2}{2^{k+1}}\left(\frac{2^{k-a}-x_n^{2(a-k)}}{a-k}\mathbf{1}_{a\neq k} + |\ln(2x_n^2)|\mathbf{1}_{a=k}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2^k}\left(2^{k-a-1}\frac{x_n^{2(a-k+1)}-(2(t-1))^{a-k+1}}{a-k+1}\mathbf{1}_{a\neq k-1} + \ln\frac{x_n^2}{2(t-1)}\mathbf{1}_{a=k-1}\right) + \frac{(t-1)^{a+1-k}}{2^k(a+1)}.\end{aligned}$$

结论随后可通过直接计算得到。

A.5. **引理 3.3的证明**。 在证明引理 3.3 和引理 3.4之前，我们需要对以下积分进行估计：

(A.7)
$$I(\alpha;x,y) := \int_x^y e^{-u}u^\alpha du.$$

引理 A.1. 设 $0 < x < y$。则积分 $I(\alpha;\ x,y)$ 满足以下界：对于普适常数 $0 < M < N$，

(i) 若 $y \leq N$，则

$$e^{-N}\left(\frac{y^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathbf{1}_{\alpha\neq-1} + \ln\frac{y}{x}\mathbf{1}_{\alpha=-1}\right) \leq I(\alpha;x,y) \leq \frac{y^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathbf{1}_{\alpha\neq-1} + \ln\frac{y}{x}\mathbf{1}_{\alpha=-1}.$$

(ii) 如果 $y \geq N$、 $x \leq M$，则

$$\begin{aligned}&e^{-\frac{M+N}{2}}\left(\frac{\left(\frac{M+N}{2}\right)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathbf{1}_{\alpha\neq-1} + \ln\frac{M+N}{2x}\mathbf{1}_{\alpha=-1}\right) + \int_{\frac{M+N}{2}}^N e^{-u}u^\alpha du \\ &\leq I(\alpha;x,y) \leq \frac{\left(\frac{M+N}{2}\right)^{\alpha+1}-x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathbf{1}_{\alpha\neq-1} + \ln\frac{M+N}{2x}\mathbf{1}_{\alpha=-1} + \int_{\frac{M+N}{2}}^\infty e^{-u}u^\alpha du.\end{aligned}$$

(iii) 如果 $y \geq N$、 $x \geq M$、 $y \geq \frac{N}{M}x$，则

$$\min\left\{1,\left(\frac{N}{M}\right)^\alpha\right\}(1-e^{M-N})e^{-x}x^\alpha \leq I(\alpha;x,y) \leq \max\left\{1,\int_0^\infty e^{-u}\left(1+\frac{u}{M}\right)^\alpha du\right\}e^{-x}x^\alpha.$$

(iv) 如果 $y \geq N$、 $x \geq M$、 $y \leq \frac{N}{M}x$，则

$$\left(\mathbf{1}+\left(\frac{N}{M}\right)^\alpha\mathbf{1}_{\alpha<0}\right)x^\alpha(y-x)e^{-\frac{Nx}{M}} \leq I(\alpha;x,y) \leq \left(\left(\frac{N}{M}\right)^\alpha\mathbf{1}_{\alpha\geq0}+\mathbf{1}_{\alpha<0}\right)x^\alpha(y-x)e^{-x}.$$

证明。 **(i)**。 $(y \leq N)$ **：** 我们有 $e^{-N} \leq e^{-u} \leq 1$。因此 $e^{-N}\int_x^y u^\alpha du \leq I(\alpha;\ x,\ y) \leq \int_x^y u^\alpha du$。

(ii)。 $(y \geq N,\ x \leq M)$ **：** 我们将积分拆分为 $I(\alpha;\ x,\ y) = \left(\int_x^{\frac{M+N}{2}} + \int_{\frac{M+N}{2}}^y\right)e^{-u}u^\alpha du$。

第一个积分的处理方式与 **(i)** 类似，而第二个积分满足

$$\int_{\frac{M+N}{2}}^N e^{-u}u^\alpha du \leq \int_{\frac{M+N}{2}}^y e^{-u}u^\alpha du \leq \int_{\frac{M+N}{2}}^\infty e^{-u}u^\alpha du.$$

(iii). $(y \geq N,\ x \geq M,\ y \geq \frac{N}{M}x)$**:** 对于上界，我们可以看到

$$I(\alpha; x, y) \leq \int_x^\infty e^{-u}u^\alpha du \leq C_1 e^{-x}x^\alpha,$$

其中

$$C_1 := \max_{x\geq M} \frac{\int_x^\infty e^{-u}u^\alpha du}{e^{-x}x^\alpha} = \max_{x\geq M} \int_0^\infty e^{-u}\left(1+\frac{u}{x}\right)^\alpha du.$$

利用 $(1+\frac{u}{x})^\alpha \leq (1+\frac{u}{M})^\alpha$，当 $\alpha \geq 0$ 时，以及 $(1+\frac{u}{x})^\alpha \leq 1$，当 $\alpha < 0$ 时，即可得出结论。
对于下界，我们看到

$$I(\alpha; x, y) \geq \int_x^{\frac{Nx}{M}} e^{-u}u^\alpha du \geq C_2 e^{-x}x^\alpha,$$

其中

$$C_2 := \min_{x\geq M} \frac{\int_x^{\frac{Nx}{M}} e^{-u}u^\alpha du}{e^{-x}x^\alpha} = \min_{x\geq M} \int_0^{\frac{N-M}{M}x} e^{-u}\left(1+\frac{u}{x}\right)^\alpha du.$$

由上界证明中给出的类似不等式即可得出结论。

(iv). $(y \geq N,\ x \geq M,\ y \leq \frac{N}{M}x)$**:** 对于 $\alpha \geq 0$，利用 $x \leq u \leq y$ 以及均值 定理 ，

$$I(\alpha; x, y) \leq y^\alpha(e^{-x}-e^{-y}) = y^\alpha(y-x)e^{-x} \leq \left(\frac{N}{M}\right)^\alpha x^\alpha e^{-x}(y-x),$$

$$I(\alpha; x, y) \geq x^\alpha(e^{-x}-e^{-y}) \geq x^\alpha(y-x)e^{-y} \geq x^\alpha e^{-\frac{Nx}{M}}(y-x).$$

对于 $\alpha < 0$，我们同样有

$$I(\alpha; x, y) \leq x^\alpha(e^{-x}-e^{-y}) \leq x^\alpha e^{-x}(y-x),$$

$$I(\alpha; x, y) \geq y^\alpha(e^{-x}-e^{-y}) \geq \left(\frac{N}{M}\right)^\alpha x^\alpha e^{-y}(y-x) \geq \left(\frac{N}{M}\right)^\alpha x^\alpha e^{-\frac{Nx}{M}}(y-x).$$

□

现在证明引理 3.3。

- **（情形** $t > \frac{9}{8}$**）**。利用 $t-1 < t-s < 2(t-1)$，对于 $t > \frac{9}{8}$ 和 $\frac{1}{2} < s < 1$，我们有

$$\mathcal{H}_{a,k}(r,t) \approx \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-s)^a}{(t-1)^k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}} ds = \frac{1}{a+1}\frac{e^{-\frac{cr^2}{t-1}}}{(t-1)^k}.$$

- **（情形** $1 < t < \frac{9}{8}$**）**。在此情形下，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{a,k}(r,t) &\approx \int_{\frac{1}{2}}^{2-t} (1-s)^{a-k} e^{-\frac{cr^2}{1-s}}\, ds + (t-1)^{-k} e^{-\frac{r^2}{t-1}} \int_{2-t}^1 (1-s)^a\, ds \\ &\approx r^{2(a-k+1)} I\left(k-a-2; 2cr^2, \frac{cr^2}{t-1}\right) + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k} e^{-\frac{cr^2}{t-1}}.\end{aligned}$$

从现在起，我们选取 $x = 2cr^2$，$y = \frac{cr^2}{t-1}$，$M = \frac{c}{2}$ 以及 $N = 2c$。注意到 $N > M > 0$ 成立。**i)** 若 $r^2 \leq 2(t-1)$，则 $y \leq N$，因此由引理A.1的**(i)**可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{a,k}(r,t) &\approx r^{2(a-k+1)}\left((cr^2)^{k-a-1}\frac{(t-1)^{a+1-k} - 2^{k-a-1}}{k-a-1}\mathbf{1}_{a\neq k-1} + |\ln(2(t-1))|\mathbf{1}_{a=k-1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}} \\ &= c^{k-a-1}\frac{(t-1)^{a+1-k} - 2^{k-a-1}}{k-a-1}\mathbf{1}_{a\neq k-1} + |\ln(2(t-1))|\mathbf{1}_{a=k-1} + \frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}}.\end{aligned}$$

ii) 若 $2(t-1)\le r^2\le\frac14$，则 $y\ge N$，且 $x\le M$，因此由引理A.1的(ii)可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{a,k}(r,t)&\approx r^{2(a-k+1)}\left(\left(\frac{5c}{4}\right)^{k-a-1}\frac{1-\left(\frac{8r^2}{5}\right)^{k-a-1}}{k-a-1}\mathbf{1}_{a\neq k-1}+\ln\frac{5}{8r^2}\mathbf{1}_{a=k-1}\right)+\frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}}\\&\approx\frac{1-r^{2(a-k+1)}}{a-k+1}\mathbf{1}_{a\neq k-1}+|\ln r|\mathbf{1}_{a=k-1}+\frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}}.\end{aligned}$$

iii) 若 $r\ge\frac12$，则 $x\ge M$，$y\ge N$且 $y\ge\frac{N}{M}x$（最后一个条件等价于 $1<t<\frac98$），因此由引理A.1 的 (iii) 可得，

$$\mathcal{H}_{a,k}(r,t)\approx r^{2(a-k+1)}e^{-2cr^2}r^{2(k-a-2)}+\frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}}\approx r^{-2}e^{-2cr^2}+\frac{1}{a+1}(t-1)^{a+1-k}e^{-\frac{cr^2}{t-1}}.$$

A.6. **引理 3.4 的证明**。现在证明引理 3.4。

- **（情形** $t>\frac98$**）**注意到，对于 $t\ge\frac98$ 和 $\frac12<s<1$，$t-s\approx t-1$，我们得到

$$\mathcal{K}_{a,k}(x_n,t)\approx\int_{\frac12}^1\frac{(1-s)^a}{(t-1)^k}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}ds\approx\frac{1}{(a+1)(t-1)^k}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}.$$

- **（情形** $1<t<\frac98$**）**由于对于 $\frac12<s<2-t$，有 $t-s\approx1-s$，且对于 $2-t<s<1$ 有 $t-s\approx t-1$，因此

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{a,k}(x,t)&\approx\int_{\frac12}^{2-t}(1-s)^{a-k}e^{-\frac{c|x|^2}{1-s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{1-s}\right\}ds+(t-1)^{-k}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}\int_{2-t}^1(1-s)^ads\\&=\int_{t-1}^{\frac12}s^{a-k}e^{-\frac{c|x|^2}{s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}ds+\frac{1}{1+a}(t-1)^{-k+a+1}e^{-\frac{c|x|^2}{t-1}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{t-1}\right\}.\end{aligned}$$

i) 若 $x_n^2<2(t-1)$，则有 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}\approx\frac{x_n^2}{s}$ 因此通过变量替换并应用引理 A.1 的 (iii),

$$\begin{aligned}\int_{t-1}^{\frac12}s^{a-k}e^{-\frac{c|x|^2}{s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}ds&\approx x_n^2|x|^{2a-2k}I\left(k-a-1;2c|x|^2,\frac{c|x|^2}{t-1}\right)\\&\approx x_n^2|x|^{2a-2k}|x|^{2k-2-2a}e^{-2c|x|^2}=x_n^2|x|^{-2}e^{-2c|x|^2}.\end{aligned}$$

ii) 若 $2(t-1)\le x_n^2<\frac14$，则有 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}=\frac{x_n^2}{s}$ 当 $x_n^2\le s\le\frac12$ 且 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}=1$ 当 $t-1\le s\le x_n^2$，因此由变量替换以及引理 A.1 的 (iii) 可得，

$$\begin{aligned}\int_{t-1}^{\frac12}s^{a-k}e^{-\frac{c|x|^2}{s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}ds&\approx|x|^{2a-2k+2}I\left(k-a-2;\frac{c|x|^2}{x_n^2},\frac{c|x|^2}{t-1}\right)\\&\quad+x_n^2|x|^{2a-2k}I\left(k-a-1;2c|x|^2,\frac{c|x|^2}{x_n^2}\right)\\&\approx x_n^{2a-2k+4}|x|^{-2}e^{-\frac{c|x|^2}{x_n^2}}+x_n^2|x|^{-2}e^{-2c|x|^2}\approx x_n^2|x|^{-2}e^{-2c|x|^2}.\end{aligned}$$

最后一个”≈” 可通过分别考虑 $a-k+1\ge0$ 和 $a-k+1<0$ 的情形来证明。

iii) 若 $x_n\ge\frac12$，则有 $\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}=1$ 当 $t-1\le s\le\frac12$，因此由变量替换以及引理 A.1 的 (iii) 可得，

$$\int_{t-1}^{\frac12}s^{a-k}e^{-\frac{c|x|^2}{s}}\min\left\{1,\frac{x_n^2}{s}\right\}ds\approx|x|^{2a-2k+2}I\left(k-a-2;2c|x|^2,\frac{c|x|^2}{t-1}\right)\approx|x|^{-2}e^{-2c|x|^2}.$$

这就完成了引理3.4的证明。

A.7. **引理2.7的证明。** (1) 注意到 $h(\theta)$ 在 $\theta \in (0, e^{-\frac{1}{a}})$ 上递减。定义 $\theta_1^* := (aM)^{\frac{1}{a}} \left(\ln \frac{1}{aM}\right)^{-\frac{1}{a}}$。于是 $\theta_1^* < e^{-\frac{1}{a}}$ 且

$$h(\theta_1^*) = -M - M\left(\ln \frac{1}{aM}\right)^{-1} \ln\ln \frac{1}{aM} < -M.$$

因此，对于 $0 < \theta < \theta_1^*$，我们有 $h(\theta) > -M$。

另一方面，定义 $\theta_2^* := \left(\frac{eaM}{e+1}\right)^{a} \left(\ln \frac{e+1}{eaM}\right)^{-\frac{1}{a}}$。于是 $\theta_2^* < e^{-\frac{1}{a}}$，并且

$$h(\theta_2^*) = -\frac{e}{e+1}M - \frac{e}{e+1}M\left(\ln \frac{e+1}{eaM}\right)^{-1} \ln\ln \frac{e+1}{eaM} > -\frac{e}{e+1}M - \frac{1}{e+1}M = -M.$$

因此，对于 $\theta_2^* < \theta < e^{-\frac{1}{a}}$，我们有 $h(\theta) < -M$。

(2) 注意到，$h(\theta)$ 是 $\theta > 1$ 上的增函数。令 $\theta_i^* := A_i M^{\frac{1}{a}} (\ln M)^{-\frac{1}{a}}$, $i = 1, 2$，其中 $A_i > 0$ 待定。注意，对于 $M > 2$，有 $-1 < \ln(\ln M) \ln M < \frac{1}{a}$。于是对于 $2 \le \theta \le \theta_2^*$，取 $A_2 \le 2^{2+\frac{1}{a}}$ 可得

$$h(\theta_2^*) = A_2^a M\left(\frac{\ln A_2}{\ln M} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\frac{\ln\ln M}{\ln M}\right) \le A_2^a M\left(\left(2 + \frac{1}{a}\right)\frac{\ln 2}{\ln M} + \frac{2}{a}\right) \le A_2^a M \frac{2a+3}{a}.$$

现在进一步选取 A_2 使得 $A_2^a \le \frac{ca}{2a+3}$。于是我们得到 $h(\theta_2^*) \le cM$。对于 $\theta > \theta_1$，$h_1(\theta) > 0$ 也可类似证明。

A.8. **引理 4.1 的证明。** 利用变量替换，我们注意到

$$A(\alpha,\theta,t) = \int_{1-t}^{\frac{1}{2}} s^{\alpha} e^{-\frac{\theta^2}{4s}} ds = \theta^{2\alpha+2} \int_{2\theta^2}^{\frac{\theta^2}{1-t}} s^{-\alpha-2} e^{-s} ds, \quad B(\alpha,\theta,t) = \theta^{2\alpha+2} \int_{\frac{\theta^2}{1-t}}^{\infty} s^{-\alpha-2} e^{-s} ds.$$

由于 $\frac{1}{1-t} - 2 \ge 2$。如果 $\frac{\theta^2}{1-t} \le 1$，则可得

$$A(\alpha,\theta,t) \approx \theta^{2\alpha+2} \int_{2\theta^2}^{\frac{\theta^2}{1-t}} s^{-\alpha-2} ds = \frac{2^{-\alpha-1} - (1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \mathbf{1}_{\alpha\neq -1} + |\ln(2(1-t))| \mathbf{1}_{\alpha=-1},$$
$$B(\alpha,\theta,t) \approx \theta^{2\alpha+2}\left(\int_{\frac{\theta^2}{1-t}}^{2} s^{-\alpha-2} ds + 1\right) \approx \frac{(1-t)^{\alpha+1} - (\theta^2/2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \mathbf{1}_{\alpha\neq 1} + \ln\frac{2(1-t)}{\theta^2} \mathbf{1}_{\alpha=-1} + \theta^{2\alpha+2}.$$

在 $1 - t \le \theta^2 \le \frac{1}{4}$ 的情况下，我们得到

$$A(\alpha,\theta,t) \approx \theta^{2\alpha+2}\left(\int_{2\theta^2}^{\frac{3}{4}} s^{-\alpha-2} ds + 1\right) \approx \frac{2^{-\alpha-1} - (4\theta^2/3)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \mathbf{1}_{\alpha\neq -1} + |\ln\theta| \mathbf{1}_{\alpha=-1} + \theta^{2\alpha+2},$$
$$B(\alpha,\theta,t) = \theta^{2\alpha+2} \int_{\frac{\theta^2}{1-t}}^{\infty} s^{-\alpha-2} e^{-s} ds \approx \theta^{-2}(1-t)^{\alpha+2} e^{-\frac{\theta^2}{1-t}}.$$

证明完毕。

References

[1] S. Burgmann 和 W. Schr¨oder, *Investigation of flow reversal in separated laminar boundary layers using PIV*, 《Experiments in Fluids》, **36**, 204-213, （2004）。[2] T. Chang、H. Choe 和 K. Kang, *On maximum modulus estimates of the Navier-Stokes equations with nonzero boundary data* **50**, 3, 3147 3171 2018 。《SIAM数学分析杂志》,

无 – （）。[3] T. Chang 和 K. Kang, *On Caccioppoli's inequalities of Stokes equations and Navier-Stokes equations near boundary*, 《微分方程杂志》**269**, 第 9 期, 6732–6757（2020）。[4] T. Chang 和 K. Kang, *Local Regularity Near Boundary for the Stokes and Navier–Stokes Equations*, 《SIAM数学分析杂志》**55**, 第 5 期, 5051-5085（2023）。[5] T. Chang 和 K. Kang, *Singular velocity of the Stokes and Navier–Stokes equations near boundary in the half-space*, 《非线性分析》**262**, 论文编号 113939（2026）。[6] T. Chang 和 K. Kang, *Singular weak solutions near boundaries in a half space away from localized force for the Stokes and Navier–Stokes equations* ,

即将在《数学流体力学杂志》发表。[7] C. Collot、T.-E. Ghoul、S. Ibrahim 和 N. Masmoudi, *On singularity formation for the two-dimensional unsteady Prandtl system around the axis* **24**, 3703 3800 2022 , 《欧洲数学会杂志》-

（）。

[8] C. Collot、T.-E. Ghoul 和 N. Masmoudi, *Singularities and unsteady separation for the inviscid two-dimensional Prandtl system* **240**, 1349 1430 2021 , 《Arch. Ration. Mech. Anal.》– (). [9] A-L. Dalibard 和 N. Masmoudi, *Separation for the stationary Prandtl equation*, 《Publ. Math. IHES》, 130, 187 - 297 (2019). [10] A-L. Dalibard、F. Marbach 和 J. Rax, *Linear and nonlinear parabolic forward-backward problems*, arXiv:2203.11067 (2025). [11] S. P. Das、U. Srinivasan 和 J. H. Arakeri, *Instabilities in unsteady boundary layers with reverse flow*, 《European Journal of Mechanics - B/Fluids》, 55, 49-62 (2016). [12] H. Dietert 和 D. G´erard-Varet, *On the ill-posedness of the triple deck model*, 《SIAM数学分析杂志》, 54, 第 2 期, 2611–2633, (2022). [13] W. E. B. Engquist, *Blowup of solutions of the unsteady Prandtl's equation*, 《Comm. Pure Appl. Math.》, 50, 第 12 期, 1287–1293, (1997). [14] D. G´erard-Varet、S. Iyer 和 Y. Maekawa, 通过凹性改进三层结构及相关模型的适定性, 《数学流体力学杂志》, 25, 第 69 期, (2023). [15] S. Goldstein, *On laminar boundary-layer flow near a position of separation*, 《Quart. J. Mech. Appl. Math.》, 1, 第 1 期, 43–69, (1948). [16] K. K. Golovkin, *Potential theory for the non-stationary linear Navier-Stokes equations in the case of three space variables* (俄文), 《Trudy Mat. Inst. Steklov.》, 59, 87-99, (1960). [17] S. Iyer 和 V. C. Vicol, *Real analytic local well-posedness for the triple deck*, 《Comm. Pure Appl. Math.》, 74, 第 8 期, 1641–1684, (2021). [18] S. Iyer 和 Y. Maekawa, *Local Rigidity of the Couette Flow for the Stationary Triple-Deck Equations*, arXiv:2405.10532, (2024). [19] S. Iyer 和 N. Masmoudi, *Reversal in the Stationary Prandtl Equations*, arXiv 预印本 arXiv:2203.02845 (2024). [20] B. Jin, *On the Caccioppoli inequality of the unsteady Stokes system*, 《Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B》, 4, 第 3 期, 215-223, (2013). [21] B. Jin 和 K. Kang, *Caccioppoli type inequality for non-Newtonian Stokes system and a local energy inequality of Newtonian Navier-Stokes equations without pressure* **37**, 9, 4815 4834, 2017 , 《Discrete Contin. Dyn. Syst.》, 无 - (). [22] K. Kang, *Unbounded normal derivative for the Stokes system near boundary*, 《Math. Ann.》, 331, 第 1 期, 87-109, (2005). [23] K. Kang、B. Lai、C.-C. Lai 和 T.-P. Tsai, *Finite-energy Navier-Stokes flows with unbounded gradients induced by localized flux in the half-space* **375**, 9, 6701 6746, 2022 , 《Trans. Amer. Math. Soc.》, 无 – (). [24] K. Kang、B. Lai、C.-C. Lai 和 T.-P. Tsai, *The Green tensor of the nonstationary Stokes system in the half-space*, 《Comm. Math. Phys.》, 399, 第 2 期, 1291–1372, (2023). [25] K. Kang 和 C. Min, *Local and global regularity for the Stokes and Navier-Stokes equations with boundary data in the half-space* **23**, 10, 1506 1561, 2024 , 《Commun. Pure Appl. Anal.》, 无 - (). [26] J. B. Klemp 和 A. Acrivos, *A moving-wall boundary layer with reverse flow* **76**, 2, , 《Journal of Fluid Mechanics》, 无 -381, (). [27] I. Kukavica、V. Vicol 和 F. Wang, *The van Dommelen and Shen singularity in the Prandtl equations* **307**, , 《Adv. Math.》– 311, (). [28] S. Matsui 和 T. Shirota, *On separation points of solutions of Prandtl boundary layer problem*, 《Hokkaido Math. Journal》 13, 92-108, (1984). [29] O. A. Oleinik 和 V. N. Samokhin, *Mathematical Models in Boundary Layer Theory*, 《Applied Mathematics and Mathematical Computation》, 第 15 卷, Chapman & Hall/CRC, 博卡拉顿, (1999). [30] T. J. Pedley, *Viscous boundary layers in reversing flow*, 《Journal of Fluid Mechanics》, 74, 59-79, (1976). [31] L. Prandtl, *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, 载于《Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses》, 海德堡, 484–491, (1904), Teubner, 莱比锡, (1905年). [32] W. R. Sears 和 D. P. Telionis, *Boundary-Layer Separation in Unsteady Flow*, 《SIAM J. Appl. Math.》, 28, 215-235, (1975). [33] W. Shen、Y. Wang、Z. Zhang, *Boundary layer separation and local behavior for the Steady Prandtl equation*, 《Adv. Math.》389, 107896, (2021). [34] V. A. Solonnikov, *Estimates for solutions of a non-stationary linearized system of Navier-Stokes equations*, 《Trudy Mat. Inst. Steklov.》, 70, 213–317,)1964). 俄文; 英文译本见《A.M.S. Translations》, 第二辑 75:1-117, (1968). [35] V. A. Solonnikov, *Estimates of the solutions of the nonstationary Navier-Stokes system. (Russian) Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions* 7 Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LoMI)》38: 153-231。译载于《J. Soviet Math.》, 8, 47-529, (1977). [36] I. Tani, *Low-speed flows involving bubble separations*, 《航空航天科学进展》, 5, 70-103, (1964). [37] L. L. van Dommelen 和 S. F. Shen, *The spontaneous generation of the singularity in a separating laminar boundary layer*, 《J. Comput. Phys.》38, 第 2 期, 125–140, (1980). [38] L. L. van Dommelen 和 S. F. Shen, *The genesis of separation. In: Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows*, 施普林格, 293–311, (1982). [39] Y.-G. Wang 和 S.-Y. Zhu, *Back Flow of the Two-dimensional Unsteady Prandtl Boundary Layer Under an Adverse Pressure Gradient* **52**, 1, 954 966, 2020 , 《SIAM数学分析杂志》, 无 - (). [40] J. Wolf, *On the local regularity of suitable weak solutions to the generalized Navier-Stokes equations*, 《Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.》, 61, 149-171, (2015).

TongKeun Chang: Department of Mathematics, Yonsei University, 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul, South Korea 120-749*Email address*: chang7357@yonsei.ac.krKyungKeun Kang : Department of Mathematics, Yonsei University, 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul, SouthKorea 120-749*Email address*: kkang@yonsei.ac.kr ChanHong Min : Department of Mathematics, Yonsei University, 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul, South Korea 120-749*Email address*: chopinmin1@yonsei.ac.kr