arXiv:2602.05860v1 [math.RA] 5 Feb 2026

SIMPLE n-李泊松代数

FARUKH MASHUROV

摘要：设 $(A, \cdot, \omega)$ 是域为零特征域上的一个单 n-李泊松代数，$1 \in A$. 然后我们证明 n-李代数 $A^{[1]}/(A^{[1]} \cap Z)$ 是单的，其中 $A^{[1]}$ 表示导出的 n-李理想，Z 是 n-李代数 (A, ω) 的中心。

1. 引言

1985 年，V.T. Filippov 引入了 n-李代数，作为李代数 [15]的推广。这些代数因其与 Nambu 提出的哈密顿力学推广 [25], （后来由 Takhtajan [28] 以数学形式化为 Nambu 力学）相关而受到关注。此后，n-李代数已成为数学与物理学交叉研究的一个重要领域。

一个 n-李代数 是将李代数的概念推广到 n 元运算的一种结构。具体而言，域 F 上的一个 n- 李代数是一个向量空间 L，其上定义了一个 n 元反对称括号运算：

$$\omega(\cdot, \cdot, \dots, \cdot) : L \times L \times \cdots \times L \to L,$$

使得对于所有 x_1、x_2、.....、x_n、y_2、.....、$y_n \in L$，以下广义雅可比恒等式成立：

$$\omega(\omega(x_1, x_2, \dots, x_n), y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \omega(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \omega(x_i, y_2, \dots, y_n), x_{i+1}, \dots, x_n).$$

n-李代数的上同调方法由 Takhtajan 发起，后经 Gautheron、Daletsky 等人进一步完善 [10, 17, 28, 29], ，他们研究了变形理论以及与莱布尼茨代数的联系。此后，变形与上同调的理论得到蓬勃发展，其中包括形式一参数变形[23]、态射上同调 [3], 以及由李代数 [2]诱导的结构。

Filippov 的奠基性著作 [15, 16]给出了若干 n-李代数的关键例子，尤其包括：

- $(n+1)$ 维向量积代数 A_{n+1};

2020 数学主题分类。17A40, 17A42, 17B63。关键词和短语。n-李代数，单代数，n-李泊松代数，n 元代数。

- 定义在交换结合代数 A上的雅可比代数，该代数具有 n交换导子 D_1，……， D_n，乘法定义如下：

$$Jac(u_1,u_2,\dots,u_n)=\begin{vmatrix} D_1u_1 & \cdots & D_1u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_nu_1 & \cdots & D_nu_n \end{vmatrix},$$

对所有 u_1,u_2、……、 $u_n\in A$.

Dzhumadil'daev 给出了另一个重要的无限维例子[13],，其中仅使用 $n-1$ 交换导子 D_1、……、 D_{n-1}，其 n 元括号由下式确定

$$W(u_1,u_2,\dots,u_n)=\begin{vmatrix} u_1 & \cdots & u_n \\ D_1u_1 & \cdots & D_1u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n-1}u_1 & \cdots & D_{n-1}u_n \end{vmatrix},$$

对所有 u_1,u_2、……、 $u_n\in A$.

有限维 n-李代数的结构理论由 [16,20, 21, 22] 发展，相关参考文献亦见其中。特别地，Ling 在 [22] 证明，在代数闭域F 上，特征为 0 的 有限维 n-李代数中只有一个单李代数。向量积代数 A_{n+1} 的有限维与无限维不可约最高权表示在 [5, 14]中得到了研究。

Filippov 和 Pozhidaev 引入了一类单项式 n-李代数 $A_G(f,t)$[16, 26], ，并在 [27]中建立了单性准则。Cantarini 和 Kac [8, 9]对域 F 上特征为 0 的所有简单线性紧 n-李超代数以及（广义） n-李-泊松代数进行了分类。他们对简单n-李代数的分类包含四个例子：其中一个是 $n+1$维向量积 n-李代数，其余三个是无限维 n-李代数，其中两个先前由 Filippov 和 Dzhumadil'daev 引入。在简单广义 n-李-泊松代数的分类中，他们证明，任意简单线性紧广义 n-李-泊松代数都等价于 Filippov 或 Dzhumadil'daev 引入的代数 [9]。这两个无限维简单线性紧 n-李代数的所有不可约连续表示均已在 [6]和 [7]中分类。

已经发展出若干种从现有的 n-李结构构造 $(n+1)$-李代数的方法 [4, 18]。 [11] 概述了李代数的各种 n 元推广，包括 n- 李代数、 n-Leibniz 代数和广义泊松结构，以及它们在数学物理中的应用和上同调性质。作者在[24]中研究了转置泊松 n-李代数的简单性。特别地，研究表明，转置泊松 n-李代数 $(A,\ \cdot,\ \omega)$ 是简单的，当且仅当 $(A,\ \omega)$ 作为 n-李代数是简单的 [24]。

本文证明， [1] 和 [19] 中的主定理类似结果对 n-李泊松代数也成立。

1.1. **定理**。 设$(A, , \omega)$ 是零特征域上的一个简单 n-李泊松代数， $1 \in A$. 那么 n-李代数 $A^{[1]}/(A^{[1]} \cap Z)$ 是简单的。

全文中，我们假设 $(A, \cdot, \omega)$ 是特征为零的域上的一个简单 n-李泊松代数，并且 $1 \in A$。

2. 主要结果

Let A 是域 F 上的一个结合交换代数。一个 n-线性映射

$$\omega : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n} \longrightarrow A$$

若一对 (A, ω) 构成一个 n-李代数，且该括号满足莱布尼茨法则，则称其为一个 n元泊松括号

$$\omega(ab, u_2, \ldots, u_n) = a\,\omega(b, u_2, \ldots, u_n) + \omega(a, u_2, \ldots, u_n)\,b \tag{1}$$

对所有 $a, b, u_2, \ldots, u_n \in A$ 均成立。配备这种括号的代数称为n-李泊松代数。

在每个 n-李代数泊松代数中，都成立以下恒等式:

$$\omega(ab, c, u_3, \ldots, u_n) = \omega(a, bc, u_3, \ldots, u_n) + \omega(b, ac, u_3, \ldots, u_n). \tag{2}$$

若理想 $I \subseteq A$ 满足以下条件，则称其为 n-元泊松理想:

$$\omega(I, A, \ldots, A) \subseteq I.$$

不含非平凡 n-元泊松理想的 n-李代数泊松代数称为单代数。记为

$$Z = \{\, a \in A \mid \omega(a, A, \ldots, A) = 0 \,\}$$

n-李代数的中心（A， ω）。

对于任意 a_2，...， $a_n \in A$，考虑伴随算子

$$\mathrm{ad}(a_2, \ldots, a_n) : A \longrightarrow A, \qquad \mathrm{ad}(a_2, \ldots, a_n)(b) = \omega(b, a_2, \ldots, a_n).$$

根据莱布尼茨法则（1），每个算子 $ad(a_2，\ ...，\ a_n)$ 都是结合代数（A， $\cdot$）的导子。

最后，定义理想导出列如下:

$$A^{[0]} = A, \qquad A^{[i+1]} = \omega(A^{[i]}, A^{[i]}, \ldots, A^{[i]}), \quad i \geq 0.$$

接下来，我们重述 [1] 中建立的若干引理。为清晰起见，我们在 n 元乘法的背景下改写这些结果。

2.1. **引理**。 设 $(A, \cdot, \omega)$ 是一个简单的 n-*Lie* 泊松代数。那么，结合交换代数 A不含非零幂零元。

证明。 由于算子 ad 是交换结合代数A的导子。因此，证明与 [1], 中的引理 1 相同，结论得证。

□

2.2. **引理**。 设$(A, , \omega)$是一个简单的 n-李泊松代数。设 $a_2, \ldots, a_n \in A$和 $m \geq 1$。若

$$ad(a_2, \ldots, a_n)^m = 0,$$

then

$$ad(a_2, \ldots, a_n) = 0.$$

证明。 证明与 [1] 中的引理 5 相同。令 $b \in A$，并设

$$b_1 = \mathrm{ad}(a_2, \ldots, a_n)^{m-2}(b).$$

事实上，应用迭代导子公式

$$ad(a_2, \ldots, a_n)^m(b_1^m) = m!\,\omega(b_1, a_2, \ldots, a_n)^m + \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=m \\ (k_1,\ldots,\ k_m)\neq(1,\ldots,1)}} ad(a_2, \ldots, a_n)^{k_1}(b_1) \cdots ad(a_2, \ldots, a_n)^{k_m}(b_1),$$

然后利用引理 2.1，即得所需结果。

□

若 U 满足 $\omega(U, U, \ldots\ldots, U) = (0)$。，则称其为阿贝尔的。

2.3.**引理**。设 U 是代数 $A^{[1]}$. 的阿贝尔理想，则

$$\omega(A, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}, U) = (0).$$

证明。我们对变量 k 的个数进行归纳法，证明该命题，其中 k 来自 $A^{[1]} = \omega(A, \ldots, A)$。也就是说，对于 $0 \leq k \leq n-2$，我们证明

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-1}) = (0).$$

If $k = 0$，那么对于任意元素 $a_2, \ldots, a_n \in U$ 和 $a_1 \in A$，我们有

$$ad(a_2, \ldots, a_n)^3(a_1) = \omega(\omega(\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n) \in$$
$$\omega(\omega(\omega(A, \ldots A), U, U, \ldots, U), U, U, \ldots, U) \subseteq \omega(U, U, U \ldots, U) = (0).$$

由引理 2.2

$$ad(a_2, \ldots, a_n)(A) = \omega(A, a_2, \ldots, a_n) = (0). \tag{3}$$

现在，我们证明

$$\omega(A, A^{[1]}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-2}) = (0).$$

同样，对于任意元素 $a_1 \in A$， $a_2 \in A^{[1]}$， $a_3, \ldots, a_n \in U$，根据 (3)，我们有

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_n)^3(a_1) = \omega(\omega(\omega(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_2, a_3 \ldots, a_n), a_2, a_3, \ldots, a_n) \in$$
$$\omega(\omega(A^{[1]}, A^{[1]}, U, \ldots, U), A^{[1]}, U, \ldots, U) \subseteq \omega(U, U \ldots, U, A) = (0).$$

根据引理 2.2

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_n)(A) = \omega(A, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (0). \tag{4}$$

假设对于所有满足 $1 \leq k \leq n-3$ 的 k，我们都知道

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-1}) = (0).$$

接下来，我们需要证明

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-2}) = (0).$$

对于 $a_1 \in A, a_2 \ldots, a_{k+2} \in A^{[1]}$ 和 $a_{k+3}, \ldots, a_n \in U$，我们有

$$ad(a_2, \ldots, a_n)^3(a_1) = \omega(\omega(\omega(a_1, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n) \in$$
$$\omega(\omega(A^{[1]}, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-2}), \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-2}) \subseteq$$
$$\omega(U, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-2}) \subseteq$$
$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U, \ldots, U}_{n-k-1}) = (0).$$

根据引理 2.2

$$ad(a_2, \ldots, a_{n-1}, u)(A) = \omega(A, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}, U) = (0),$$

这就完成了该引理的证明。

□

2.4.**引理**。设 U 是代数 $A^{[1]}$. 的一个阿贝尔理想，则

$$\omega(A, \ldots, A, U) = (0).$$

证明。与前一个引理类似，我们对变量 k 从 A 开始的数量进行归纳法证明，并使用引理 2.2 和引理 2.3。也就是说，对于 $1 \leq k \leq n-1$，我们证明

$$\omega(\underbrace{A, \ldots, A}_{k}, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{n-k-1}, U) = (0).$$

情形 $k = 1$ 由引理 2.3 得出。我们来证明，对于 $k = 2$.

令 a_1，$a_2 \in A$，$a_3 \ldots$，$a_{n-1} \in A^{[1]}$，$u \in U$，根据引理 2.3，有

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u)^2(a_1) = \omega(\omega(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u), a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u) \in$$
$$\omega(A, A^{[1]}, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}, U) = (0).$$

根据引理 2.2

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u)(a_1) = \omega(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u) = (0).$$

我们有

$$\omega(A, A, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}, U) = (0). \tag{5}$$

假设对于所有满足 $1 \leq k \leq n-2$ 的 k，我们知道

$$\omega(\underbrace{A,\dots,A}_{k},\underbrace{A^{[1]},\dots,A^{[1]}}_{n-k-1},U)=0.$$

接下来，我们需要证明

$$\omega(\underbrace{A,\dots,A}_{k+1},\underbrace{A^{[1]},\dots,A^{[1]}}_{n-k-2},U)=0.$$

对于 $a_1,\dots,a_{k+1}\in A$, $a_{k+2},\dots,a_{n-1}\in A^{[1]}, u\in U$，由引理 2.3 可得

$$ad(a_2,a_3,\dots,a_{n-1},u)^2(a_1)=\omega(\omega(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-1},u),a_2,a_3,\dots,a_{n-1},u)\in$$
$$\omega(A^{[1]},\underbrace{A,\dots,A}_{k},\underbrace{A^{[1]},\dots,A^{[1]}}_{n-k-1},U)=(0).$$

由引理 2.2

$$ad(a_2,a_3,\dots,a_{n-1},u)(a_1)=\omega(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{n-1},u)=(0). \tag{6}$$

因此,

$$\omega(\underbrace{A,\dots,A}_{k+1},\underbrace{A^{[1]},\dots,A^{[1]}}_{n-k-2},U)=0.$$

□

对于子空间 $X\subset A$，我们记

$$id_A(X)=X+AX$$

A中由 X生成的理想。设 U是李代数 ω（A， A，……， A）的一个理想。我们将理想的降导列定义为

$$U^{[0]}=U,\qquad U^{[i+1]}=\omega(U^{[i]},U^{[i]},\dots,U^{[i]})\quad (i\geq 0).$$

2.5. **引理**。 设 U 是代数 $A^{[1]}$ 的一个理想，且满足 $U^{[3]}=(0)$。则

$$\omega(A,A,\dots,A,U^{[1]})=(0).$$

证明。 n-李代数 $A^{[1]}$ 的理想 $U^{[2]}$ 是交换的。因此由引理 2.4

$$\omega(U^{[2]},A,\dots,A)=(0).$$

设 u_2，……， $u_n\in U^{[1]}$,

$$ad(u_2,\dots,u_n)^4(A)=\omega(\omega(\omega(\omega(A,u_2,\dots,u_n),u_2,\dots,u_n),u_2,\dots,u_n),u_2,\dots,u_n)$$
$$\subseteq\omega(\omega(U^{[1]},\dots,U^{[1]}),U^{[1]},\dots,U^{[1]})\subseteq\omega(U^{[2]},U^{[1]},\cdots,U^{[1]})$$
$$\subseteq\omega(U^{[2]},A,\cdots,A)=(0).$$

由引理 2.2 可知

$$\omega(A,U^{[1]},\cdots,U^{[1]})=(0).$$

首先，对于 $0 \leq k \leq n-2$，我们证明

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-1}) = (0).$$

设 $k = 1$ 与 $a_1 \in A$， $a_2 \in A^{[1]}$， $a_3 \ldots$， $a_n \in U^{[1]}$，并由引理 2.3，我们有

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_n)^3(a_1) =$$
$$\omega(\omega(\omega(a_1, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n) \in$$
$$\omega(\omega(A^{[1]}, A^{[1]}, U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}), A^{[1]}, U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}) \subseteq$$
$$\omega(U^{[1]}, A^{[1]}, U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}) = (0).$$

由引理 2.2，我们有

$$\omega(A, A^{[1]}, U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}) = (0).$$

假设对所有满足 $1 \leq k \leq n-3$ 的 k，我们知道

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-1}) = (0).$$

于是，我们需要证明

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-2}) = (0).$$

对 $a_1 \in A$， $a_2 \ldots$， $a_{k+2} \in A^{[1]}$ 与 a_{k+3}，……，$a_n \in U^{[1]}$，我们有

$$ad(a_2, \ldots, a_n)^3(a_1) =$$
$$\omega(\omega(\omega(a_1, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n), a_2, \ldots, a_n) \in$$
$$\omega(\omega(A^{[1]}, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-2}), \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-2}) \subseteq$$
$$\omega(U^{[1]}, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k+1}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-2}) \subseteq$$
$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-1}) = (0).$$

因此，我们证明了对于 $0 \leq k \leq n-2$,

$$\omega(A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{k}, \underbrace{U^{[1]}, \ldots, U^{[1]}}_{n-k-1}) = (0). \tag{7}$$

现在，令 $a_1, a_2 \in A, a_3 \ldots, a_{n-1} \in A^{[1]}$, $a_n \in U^{[1]}$, 根据 (7)，我们有

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)^2(a_1) = \omega(\omega(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n), a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u_n) \in$$
$$\omega(A^{[1]}, A, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}, U^{[1]}) = (0).$$

由引理 2.2

$$ad(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u_n)(a_1) = \omega(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, u_n) = (0). \tag{8}$$

我们有

$$\omega(A, A, A^{[1]}, \dots, A^{[1]}, U^{[1]}) = (0).$$

假设对于所有满足 $1 \leq k \leq n-3$ 的 k，我们知道

$$\omega(\underbrace{A, \dots, A}_{k}, \underbrace{A^{[1]}, \dots, A^{[1]}}_{n-k-1}, U^{[1]}) = 0.$$

那么，我们需要证明

$$\omega(\underbrace{A, \dots, A}_{k+1}, \underbrace{A^{[1]}, \dots, A^{[1]}}_{n-k-2}, U^{[1]}) = 0.$$

F或者 $a_1, \dots, a_{k+1} \in A$, $a_{k+2}, \dots, a_{n-1} \in A^{[1]}, a_n \in U^{[1]}$, 根据假设，我们有

$$ad\,(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)^{\,2}\,(a_1) \;= \omega\,(\omega\,(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, u)\quad a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, u) \;\in$$

$$\omega(A^{[1]}, \underbrace{A, \dots, A}_{k}, \underbrace{A^{[1]}, \dots, A^{[1]}}_{n-k-2}, U^{[1]}) = (0)。$$

根据引理 2.2

$$ad(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, u_n)(a_1) = \omega(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, u_n) = (0).$$

因此,

$$\omega(\underbrace{A, \dots, A}_{k+1}, \underbrace{A^{[1]}, \dots, A^{[1]}}_{n-k-2}, U^{[1]}) = 0.$$

□

2.6. **引理**。 设 U 是代数 $A^{[1]}$ 的一个理想，使得 $U^{[3]} = (0)$。则

$$\omega(A, \dots, A, U) = (0).$$

证明。 令 u_2、.....、 $u_n \in U$，则由引理 2.5 可得

$$ad(u_2, \dots, u_n)^4(A) = \omega(\omega(\omega(\omega(A, u_2, \dots, u_n), u_2, \dots, u_n), u_2, \dots, u_n), u_2, \dots, u_n) \subseteq$$

$$\omega(\omega(U, \dots, U), U, \dots, U) \subseteq \omega(U^{[1]}, U, \cdots, U) \subseteq \omega(U^{[1]}, A, \cdots, A) = (0).$$

由引理 2.2 可得

$$\omega(A, U, \cdots, U) = (0).$$

重复引理 2.5 证明中的步骤，可得

$$\omega(\underbrace{A, \dots, A}_{k}, \underbrace{A^{[1]}, \dots, A^{[1]}}_{n-k-1}, U) = 0,$$

对每个 $0 \leq k \leq n-1$.

□

下面的引理是 [1] 中引理 2 的类似结果。

2.7. **引理**。 $\omega\,(id_A\,(U^{[3]})\quad A,\ \cdots,\ A) \subseteq U.$

证明。对于 n-李代数 $A^{[1]}$ 的任意理想 I，根据广义雅可比恒等式，有

$$\omega(\omega(I,I,\cdots,I),A,\cdots,A)\subseteq\omega(\omega(I,A,\cdots,A),I,\cdots,I)\subseteq I.$$

因此，

$$\omega(U^{[i+1]},A,\cdots,A)\subseteq U^{[i]},\text{ for } i\geq 0.$$

根据恒等式 (2)

$$\begin{array}{c}\omega(u\ \omega(a,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)=\\ \omega(u,\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n)b,b_2,\cdots,b_n)+\omega(\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n),ub,b_2,\cdots,b_n)\end{array}\tag{9}$$

对于 $a,b,u,u_i,b_j\in A\,(i=3,\ldots,n,j=2,3,\ldots,n)$，由 (1) 可得

$$\omega(\omega(au,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)=$$

$$\omega(a\ \omega(u,v,u_3,\cdots,u_n)\ b,b_2,\cdots,b_n)\ +\omega(u\ \omega(a,v,u_3,\cdots,u_n)\ b,b_2,\cdots,b_n)。$$

将恒等式 (9) 应用于右侧第二项，得到

$$\omega(\omega(au,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)=\omega(a\ \omega(u,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)+$$

$$\omega(u,\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n)b,b_2,\cdots,b_n)+\omega(\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n),ub,b_2,\cdots,b_n).$$

Hence,

$$\begin{array}{c}\omega(a\ \omega(u,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)=\omega(\omega(au,v,u_3,\cdots,u_n),b,b_2,\cdots,b_n)-\\ \omega(u,\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n)b,b_2,\cdots,b_n)-\omega(\omega(a,v,u_3,\cdots,u_n),ub,b_2,\cdots,b_n).\end{array}$$

右侧第一项和第三项属于 $\omega(\omega(v,A,\cdots,A)\ A,\cdots,A)$，第二个加项属于 $(,A,A,\cdots,A)$。

若 $u,\ v,\ u_3,\ \ldots\ldots,\ u_n\in U^{[2]}$，则由上面的注记可知

$$\omega(v,A,\cdots,A)+\omega(u,A,\cdots,A)\subseteq U^{[1]}$$

and

$$\omega(\omega(v,A,\cdots,A),A,\cdots,A)\subseteq\omega(U^{[1]},A,\cdots,A)\subseteq U^{[0]}=U.$$

因此，

$$\omega(id_A(U^{[3]}),A,\cdots,A)\subseteq U,$$

从而完成了引理的证明。

□

以下引理是引理 3（见 [1],）的一个 n 元类似结果，其证明需要新的技巧。

2.8. **引理**。设 $I\subseteq A$ 是一个非零的（结合交换）理想，使得

$$\omega(I,A^{[1]},\ldots,A^{[1]})\subseteq I.$$

于是 $I=A$。

证明。 令 $\sqrt{I}$ 为代数 A 中模I. 幂零的所有元素的集合。也就是说,

$$\sqrt{I} = \{\, a \in A \mid a^n \in I \text{ for some } n \geq 1 \,\}.$$

这是 A 的一个理想，而 $\sqrt{I}/\overline{I}$ 是结合交换代数 A/I 的幂零根。

L令 d 为 A 的一个导子，使得 $d(I) \subseteq I$。那么 d 诱导出一个导子

$$\overline{d} : A/I \longrightarrow A/I.$$

由于特征为零的域上的代数 A/I 的幂零根在 A/I [12]的所有导子作用下保持不变,我们有

$$\overline{d}(\sqrt{I}/I) \subseteq \sqrt{I}/I,$$

因此 $d(\sqrt{I}) \subseteq \sqrt{I}$。取 $\overline{d} = ad(x_1, \ldots, x_{n-1})$，其中 $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \omega(A, A, \ldots, A)$，得到

$$\omega(\sqrt{I}, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}) \subseteq \sqrt{I}.$$

如果 $\sqrt{I} = A$，那么 $\overline{1} \in \sqrt{I}$，所以 $\mathbf{1}$ 模 I 幂零。因此 $I = A$。于是，必要时用 $\sqrt{I}$ 替换 I，从现在起我们可以假设

$$\sqrt{I} = I.$$

对于 $a \in A, a_3, \ldots, a_n \in A^{[1]}$, 和 $u \in I$，我们有

$$\omega(\omega(u, a^2, a_3, \ldots, a_n), u, a_3, \ldots, a_n) =$$

$$-2\omega(u, a\ \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n), a_3, \ldots, a_n) =$$

$$-2(\omega(u, a, a_3, \ldots, a_n)^2 + \omega(u, \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n), a_3, \ldots, a_n)a).$$

因此 $\omega(u, a, a_3, \ldots, a_n)^2 \in I, \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n) \in \sqrt{I} = I$. 我们有 $\omega(I, A, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}) \subseteq I$.

下一步，对于 $a, a_3 \in A, a_4, \ldots, a_n \in A^{[1]}, u \in I$，我们有

$$\omega(\omega(u, a^2, a_3, \ldots, a_n), u, a_3, \ldots, a_n) =$$

$$-2\omega(u, a\ \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n), a_3, \ldots, a_n) =$$

$$-2(\omega(u, a, a_3, \ldots, a_n)^2 + \omega(u, \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n), a_3, \ldots, a_n)a).$$

因此 $\omega(u, a, a_3, \ldots, a_n)^2 \in I, \omega(u, a, a_3, \ldots, a_n) \in \sqrt{I} = \overline{I}$，以及

$$\omega(A, A, \underbrace{A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}}_{n-3}, I) \subseteq I.$$

通过归纳推理，最终得到 $\omega(I,\ A,\ \ldots\ldots,\ A) \subseteq I$，即 I 是 A. 的一个 n 元泊松理想。由于 $A,\ \cdot,\ \omega$ 是简单的 n-李泊松代数，我们得出 $I = A$。引理证毕。

□

定理 1.1 的证明 假设 U 是 n-李代数 $A^{[1]}$. 的真理想。令 $I = id_A(U^{[3]})$。显然,

$$\omega(I, A^{[1]}, A^{[1]}, \ldots, A^{[1]}) \subseteq I.$$

若 $U^{[3]} \neq 0$，则由引理 2.8 得到 $I = A.$。因此，由引理 2.7

$$\omega(A, A, \ldots, A) \subseteq U.$$

因此，我们有 $U^{[3]} = 0.$

最后，由引理 2.6，$A^{[1]}$ 的每个满足 $U^{[3]} = 0$ 的理想 U 都包含于中心 Z 中。

□

致谢

作者衷心感谢 Efim Zelmanov 教授提出了促成本研究的问题。本研究是在作者于南方科技大学（SUSTech）进行博士后研究期间完成的。作者也感谢审稿人提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] Alahmadi A. 与 Alsulami H.，泊松括号李代数的单性，arXiv 预印本 arXiv:1905.13571（2019）。[2] Arnlind J., Kitouni A., Makhlouf A., Silvestrov S.，由李代数诱导的 3-Lie 代数的结构与上同调。载于：代数、几何与数学物理，Springer，123–144（2014）。[3] Arfa A., Fraj N.B., Makhlouf A.，n-李代数态射的上同调与形变。《几何与物理杂志》，132，64–74（2018）。[4] Bai R., Wu Y., Li J., Zhou H.，由 n-李代数构造 $(n+1)$-李代数。《物理学杂志 A：数学与理论》，45(47)，475206（2012）。[5] Balibanu D., van de Leur J.，单 n-李代数的不可约最高权表示。《变换群》，17(3)，593–613（2012）。[6] Boyallian C., Meinardi V.，W 型单线性紧 n-李超代数的不可约连续表示。《代数杂志》，490，493–517（2017）。[7] Boyallian C., Meinardi V.，S 型单线性紧 n-李超代数的不可约连续表示。《代数与应用杂志》，18(2)，1950036（2019）。[8] Cantarini N., Kac V.，单线性紧 n-李超代数的分类。《数学物理通讯》，298，833–853（2010）。[9] Cantarini N., Kac V.，线性紧单 Nambu-Poisson 代数的分类。《数学物理杂志》，57(5)，051701（2016）。[10] Daletskii Y.L., Takhtajan L.A.，Nambu 代数的 Leibniz 结构与李代数结构。《数学物理快报》，39，127–141（1997）。[11] De Azcárraga J.A., Izquierdo M.，n 元代数：综述及其应用。《物理学杂志 A：数学与理论》，43，293001（2010）。[12] Dixmier J.，包络代数，北荷兰出版公司，纽约，1977。[13] Dzhumadildaev A.S.，雅可比代数的恒等式与导子。《当代数学》，315，245–278（2002）。

[14] Dzhumadildaev A.S.，向量积 n-李代数的表示。《代数通讯》，32(9)，3315–3326（2004）。[15] Filippov V.T.， n-李代数。《西伯利亚数学杂志》，26(6)，879–891（1985）。[16] Filippov V.T.，论雅可比的 n-李代数。《西伯利亚数学杂志》，39(3)，573–581（1998）。[17] Gautheron P.，关于 Nambu 力学的若干注记。《数学物理快报》，37(1)，103–116（1996）。[18] Jumaniyozov D., Omirov B.，无限维 n-李代数的新例子。《线性与多重线性代数》，71(2)，206–225（2023）。[19] Herstein I.N.，单结合环中的 Lie 结构与 Jordan 结构，《美国数学会通报》，第67卷，第6期（1961），517-531。[20] Kasymov S.M.，论 n-李代数理论。《代数与逻辑》，26(3)，155–166（1987）。[21] Kasymov S.M.，论 n-李代数的幂零元与幂零子集。《西伯利亚数学杂志》，32(6)，77–80（1991）。[22] Ling W.X.，论 n-李代数的结构。博士论文，锡根大学（1993）。[23] Makhlouf A.，论 n-李代数的形变。载于：非结合代数与非交换代数与算子理论，Springer 数学与统计会议论文集 160，55–81（2016）。[24] Mashurov F.，论转置泊松 n-李代数，arXiv 预印本 arXiv:2501.01714（2025）。[25] Nambu Y.，广义哈密顿力学。《物理评论 D》，7，2405–2412（1973）。[26] Pozhidaev A.P.，单项式 n-李代数。《代数与逻辑》，37，307–322（1998）。[27] Pozhidaev A.P.，单 n-李代数。《代数与逻辑》，38，181–192（1999）。[28] Takhtajan L.，论广义 Nambu 力学基础。《数学物理通讯》，160，295–315（1994）。[29] Takhtajan L.，Chevalley–Eilenberg 复形的高阶类似物与 Lie 代数变形理论。《圣彼得堡数学杂志》，6，429–437（1995）。电子邮箱：f.mashurov@gmail.com SICM，南方科技大学，深圳，518055，中国

SDU大学 ，卡斯克伦 ，哈萨克斯坦