arXiv:2602.05886v1 [math.PR] 5 Feb 2026

伊辛磁化场与高斯自由场

Tomás Alcalde López*、Lorca Heeney* 和 Marcin Lis*

2026年2月6日

摘要

我们在一个平面区域中构造了连续统高斯自由场（GFF）与临界伊辛磁化场（IMF）之间的一种自然耦合。事实上，我们证明，具有 + 边界条件的两个相互独立的伊辛磁化场，以及具有自由边界条件的两个相互独立的伊辛磁化场，都是单个高斯自由场实例与一列相互独立的抛硬币结果的确定性函数。这一构造应被视为玻色化现象的延伸；据我们所知，此种存在性此前从未被预言过。

我们通过研究新颖的离散结构，在连续统中得到主要结果。我们的出发点是一种耦合，它类似于伊辛模型与 Fortuin–Kasteleyn随机簇模型之间的 Edwards–Sokal耦合，不过其中后者由一种不同的渗流模型所取代，该模型源自双重随机电流模型。通过取该耦合在临界性处的标度极限，我们获得了一个连续统 Edwards–Sokal型表示：用 Aru、Sepúlveda 和 Werner 引入的高斯自由场的某些二值集来表示伊辛磁化场。

目录

1 引言 **2**
1.1 主要结果 .41.2 进一步讨论与背景 .101.3 阿什金–泰勒模型的猜想 .141.4 关于证明 .17

2 离散耦合 **20**
2.1 定义与主要性质 .202.2 高度函数 .282.3 向阿什金–泰勒模型的推广 .30

3 表示的性质 **32**
3.1 相关不等式 .323.2 RSW 理论 .38

*维也纳工业大学。电子邮箱：{tomas.alcalde, lorca.heeney-brockett, marcin.lis}@tuwien.ac.at

3.3 无限簇测度的构造 .42

4 簇面积测度的收敛 484.1 概述与近似方案 .494.2 主要估计的证明 .524.3 连续统面积测度的可测性.57

5 IMF 的收敛及与高斯自由场的耦合 58
5.1 耦合与联合收敛 .595.2 测度的识别与共形协变性 .635.3 阿什金-泰勒磁化场 .65

A 伊辛关联的估计 67

B 随机变量空间 68

C [39] 69中的收敛结果

1 引言

在这项工作中，我们揭示了两种平面随机场之间的内在联系，它们在随机共形几何中都发挥着核心作用——连续统高斯自由场 （GFF）和伊辛磁化场 （IMF）。前者是一个普适对象，在离域相中，它是离散高度函数模型的标度极限（尽管在许多情况下这一结论仍属猜想） [14, 21, 39, 52, 65]。在物理学中，它是自由（非相互作用）玻色场论的一个模型；在数学中，它则是众多理论赖以建立的基础，例如虚几何 [78–80], 高斯乘性混沌 [20,60,68,90]和刘维尔量子引力 [43,91]。另一方面，IMF 是著名的伊辛模型在临界点处的离散磁化场的标度极限 [25, 26, 31]。

更准确地说，区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中具有零边界条件的高斯自由场 h 是一种随机高斯场，其协方差核是布朗运动在 D 中发生边界 ∂D处被杀死时的格林函数 G_D ；因此，它是一个共形不变对象（有关高斯自由场的全面介绍，请参见 [22] ）。由于 G_D 在对角线上发散，该场过于粗糙，无法将其视为随机函数，因此只能将其视为作用于测试函数的随机施瓦茨分布：对于支撑在 D中的光滑函数 f， g ， h 分别与 f和 g配对所得的值，记为 $(h,\ f)$ 和 $(h,\ g)$，是协方差为

$$\mathbb{E}[(h,f)(h,g)] = \int_D \int_D G_D(x,y) f(x) g(y)\, dx\, dy.$$

在 Aru、Sepúlveda 和 Werner 的精彩研究中 [11, 12], （这些研究对我们的讨论至关重要），他们证明 GFF 具有丰富的内在几何对象结构，这些对象称为**二值集**。对于 a， $b > 0$ 和 $a + b \geqslant 2\lambda$，其中 $\lambda = \pi/2$ 是（按照本文采用的归一化）GFF 的**高度间隙**，其定义见 [93], ，它们的边界 $\mathcal{L}_{-a,\ b}$ 是 D中由可数多个互不交叉、类似分形的环组成的集合。尽管场本身不是一个函数，仍可将这些环直观地看作场在 $-a$ 和 b处的水平线。

我们工作的主要创新之处在于证明，取 a和 b 的特定值的二值集可通过几何表示产生 IMF：将场分解为这些二值集的“面积”测度的带符号和，其中符号由相互独立的抛硬币决定。事实上，我们能够将四个 IMF（两对彼此独立的 IMF）与同一个 GFF 实例耦合。由此直接可知，IMF 是 GFF 和这些符号的可测函数。此外，我们证明，取 a和 b不同值的二值集定义了一族与 GFF 相关的单参数连续场，并猜想它们是临界阿什金–泰勒 模型的连续磁化场。

我们通过取伊辛模型的一种新表示的标度极限，得到主要结果。这种表示类似于伊辛模型与 FK-伊辛模型之间的 Edwards–Sokal耦合 [44, 47] （后者也称为簇权重为 $q = 2$ 的 Fortuin-Kasteleyn 随机簇模型），但这里由另一种以双随机电流（DRC）模型定义的渗流模型取代了后者。这是由 Griffiths、Hurst 和 Sherman 引入的、对伊辛关联函数（乘积）的经典图形表示 [56], ；Aizenman、Duminil-Copin 等人成功地将其用于研究平面和高维伊辛模型（及相关模型） [2, 3, 5–7, 39, 42]。Duminil-Copin、Qian 和第三位作者 [38, 39] 最近证明，临界双重随机电流的标度极限由二值集的一种特定迭代给出。我们的结果以此为基础，也可视为对 Camia、Garban 和 Newman [24, 25] 所建立的 IMF 与平面随机几何之间联系的拓展；该联系超越了具有对偶参数 $\kappa = 3$ 和 $\kappa = 16/3$ 的共形环系综，并将高斯自由场纳入其中。

我们强调，我们用高斯自由场（GFF）表示 IMF 的方式并非 一种局部表示，例如 GFF 的自由玻色子共形场论中的顶点算子 。事实上，物理学中的玻色化 框架将伊辛磁化场描述为扭曲场 ，而非 GFF 的顶点算子 [33, 76, 104]。在玻色化的轨形共形场论 描述中，这两类场分别属于两个不同的扇区——扭曲扇区和非扭曲扇区。与顶点算子不同，扭曲场并非 GFF 的“局部函数”；构造扭曲场时，需要改变 GFF 所在区域的拓扑，具体做法是考虑一个在扭曲场插入点周围分支的双重覆盖 [33]。因此，在离散情形下，扭曲场更像 Kadanoff-Ceva 意义上的无序算子 [62] ，会改变离散模型的状态空间；而顶点算子则对应模型真正的随机自由度。在这项工作中，我们实现了轨形共形场论中扭曲场与 GFF 本身及其顶点算子之间自然的概率耦合，并将扭曲场构造成真正的随机分布（其中包括稍后将定义的临界 XOR-伊辛模型的标度极限 [8, 60], ）。

在本文准备期间，我们得知，主要定理1.2 也曾由 Aru 和 Lupu 提出猜想；他们在二点函数匹配的层面为该猜想提供了证据。他们的工作建立在磁化场的扭曲场描述之上（见第1.2节），以及近期通过高斯自由场中的拓扑事件来诠释此类场的研究 [74]。详情请参阅他们即将发表的工作 [9] 。

1.1 主要结果

我们先回顾伊辛模型的定义。该模型的历史可追溯至一个多世纪前 Lenz 的奠基性工作 [70]。设 $G = (V,\ E)$ 为一个有限图。耦合常数为 $J \geqslant 0$ 且具有自由边界条件的伊辛模型，是定义在自旋构型 $\sigma \in \{\pm 1\}^V$ 上的一个概率测度，其定义如下：

$$\mathbb{P}_{G,J}(\sigma) \propto \prod_{uv \in E} \exp\left(J\sigma_u\sigma_v\right). \tag{1.1}$$

带有 $+$ 边界条件的模型通过指定顶点的一个特定子集来定义，并要求 σ 为 $+1$。

要在单连通区域 $D \subset \mathbb{C}$中定义 IMF，首先考虑一列离散区域近似 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$。这里我们滥用记号，也用 D_δ表示这些图的顶点集。我们考虑定义在 D_δ 上的伊辛模型 σ_δ，其耦合常数取临界 [85]值

$$J_c = \frac{1}{2}\log(1+\sqrt{2}), \tag{1.2}$$

在 D_δ的边界顶点上施加自由边界条件或 $+$边界条件。每个自旋构型 $\sigma = \sigma_\delta \in \{\pm 1\}^{D_\delta}$ 都可以看作一个作用于测试函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 上的场（广义函数），其定义如下：

$$(\sigma, f) := \delta^2 \sum_{v \in D_\delta} f(v)\sigma_v, \tag{1.3}$$

其中，D_δ 的顶点与平面中的相应点相对应。Chelkak、Hongler 和 Izyruov 的突破性结果 [31] 表明，在自由或 $+$边界条件下，自旋关联函数的标度极限 $\delta \to 0$ 存在且共形协变。进而，Camia、Garban 和 Newman 的研究 [25] 表明，这直接意味着极限

$$\lim_{\delta \to 0} \delta^{-1/8}\sigma_\delta =: \Phi_D \tag{1.4}$$

在适当的广义函数空间中（并且对 ∂D 仅作非常温和的正则性假设）按分布存在。上面的极限被定义为 IMF。

我们强调，本文所采用的方法并不依赖于离散 IMF 的标度极限的存在性，而是给出了一种新的证明，仅要求伊辛模型的单点函数收敛。这在 [25, 第 2], 节的几何构造中已经如此；事实上，我们的方法在思想上与之相似，但也存在一些关键差异，我们将在第4.1节中深入讨论。

连续统耦合的陈述。 我们首先陈述一个高斯自由场（GFF）与四个临界伊辛磁化场（IMF）之间的耦合的存在性。需要注意的是，不存在同时对所有四个伊辛磁化场进行耦合的规范方式：符号如何依赖于 $+$ 以及自由边界条件场之间始终存在任意选择——见注 1.3。

定理 1.1（由一个高斯自由场和独立抛硬币得到四个伊辛磁化场）。设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个若尔当区域。设 h 是 D 中的一个具有零边界条件的高斯自由场，并设 $\xi = (\xi_k)_{k\geqslant 0}$是独立同分布的对称 $\{\pm 1\}$-值随机变量。则存在（显式的）确定性可测函数 Φ^+、 $\tilde{\Phi}^+$、 Φ^{f}、 $\tilde{\Phi}^{\mathrm{f}}$，使得

- $\Phi^+(h,\xi)$ 与 $\tilde{\Phi}^+(h,\xi)$ 服从带 $+$ 边界条件的两个独立伊辛磁化场的分布，
- $\Phi^{\mathrm{f}}(h,\xi)$ 与 $\tilde{\Phi}^{\mathrm{f}}(h,\xi)$ 服从带自由边界条件的两个独立伊辛磁化场的分布。

如前所述，定理 1.1中的显式函数由符号测度之和给出，其中每一个都是高斯自由场的可测函数。这正是下一陈述的内容。为便于阐述，我们随后说明如何对测度及其支撑集进行抽样。

定理 1.2（通过高斯自由场的二值集表示伊辛磁化场）。设 $D \subset \mathbb{C}$、 h 与$(\xi^+)_{k\geqslant 1}$、$(\xi^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$如上。存在符号$(\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$、$(\tau_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$与测度$(\mu_k^+)_{k\geqslant 0}$、$(\mu_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$，使得

$$\Phi^+ = \mu_0^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^+ \mu_k^+, \quad \tilde{\Phi}^+ = \mu_0^+ + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^+ \tau_k^+ \mu_k^+, \quad \Phi^{\mathrm{f}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{\mathrm{f}} \mu_k^{\mathrm{f}}, \quad \tilde{\Phi}^{\mathrm{f}} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{\mathrm{f}} \tau_k^{\mathrm{f}} \mu_k^{\mathrm{f}}, \quad (1.5)$$

是定理 *1.1*中的伊辛磁化场。此外，

- 这些和几乎必然在索伯列夫空间 $H^s{}_{loc}(D)$ 中收敛，对任意 $s < -1$ 均成立。
- 求和顺序按照相应测度的支撑集 $(\mathcal{C}_k^+)_{k\geqslant 0}$、$(\mathcal{C}_{\mathrm{f}k})_{k\geqslant 1}$ 的直径递减排列。
- 这些测度是其支撑集的可测函数，而这些支撑集又是 h的可测函数。
- 这些符号 $(\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$、$(\tau_{\mathrm{f}k})_{k\geqslant 1}$ 是 h 的可测函数。

注 1.3。在定理 1.2的表述中，我们选择针对不同的边界条件使用不同的抛硬币结果。这是一个任意但自然的选择；即使选择使用相同的抛硬币结果（例如如此），该表述仍然成立。

注 1.4. 形如（1.5）的分解对于 IMF 以外的场也是已知的。例如，Aru、Lupu 和 Sepúlveda 的近期工作表明，高斯自由场本身允许类似的分解，并进一步证明它作为度量图高斯自由场之分解的标度极限出现 [10]。类似地，在第一作者与 Sepúlveda [8], 的工作中表明，高斯自由场的复乘性混沌的实部和虚部可以按类似方式分解。事实上，这些场是阿什金–泰勒极化场的（对非相互作用情形为猜想的）标度极限，见第 1.3 节。

现在我们来说明如何得到这些支撑集，我们将其称为（连续统）簇，即作为 h 的可测函数。我们现在给出的描述是该迭代的一个略微简化的版本，其中我们只关心作为闭集的簇的分布，而不涉及 h 在其上的边界值。完整迭代见第 5 节和图 8 ，以及符号 $(\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$、$(\tau_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$ 的定义。

我们用 $\mathbb{A}_{-a,\,b} \equiv \mathbb{A}_{-a,\,b}(h)$ 表示高斯自由场 h 在 D 中满足零边界条件时，其边界值为 $\{-a,b\}^{-}$ 的双值集 [11, 12]。回顾一下，这些是与 ∂D 相连的 D 的闭子集，使得 $D \setminus \mathbb{A}_{-a}$ 的连通分支的边界$_{,\,b}$ 定义了一个

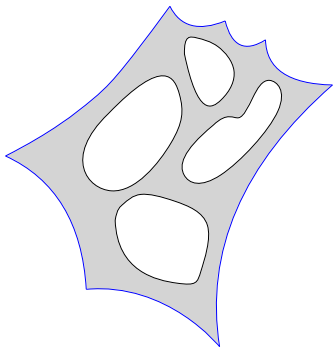


图 1：双值集 $\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$是某个蓝色环所围区域内、具有零边界条件的高斯自由场的双值集，以灰色阴影标出。定理1.2 中的分解所得到的每个簇都具有这种形式。

可数并 $\mathcal{L}_{-a,\ b}$ 个环（即闭简单曲线），位于 D 中。从启发式角度看，这些环应被视为高斯自由场的 $\{-a,b\}$ 水平线，它们是标准布朗运动离开区间 $[-a,b]$ 的退出时刻在二维中的类比。更精确地说，每个 $\ell\in\mathcal{L}_{-a,\ b}$ 都可以关联一个标签 $c(\ell)\in\{-a,b\}$，使得以下强马尔可夫性质成立：在给定 ℓ 的条件下，将 h 限制在由 ℓ 环绕的区域 $O(\ell)$ 上，所得场为

$$h^{\ell}+c(\ell),$$

其中，h^{ℓ} 的分布是区域 $O(\ell)$ 上具有零边界条件的高斯自由场的分布。

在边界值满足 $a,\ b\geqslant 0$ 和 $a+b\geqslant 2\lambda$ 的条件下，[12, 命题 2],证明了二值集的存在性和唯一性；我们回顾一下，$\lambda=\pi/2$ 是高斯自由场 [12,93]的高度间隙。此外，[11, 定理 4.1] 证明，$\mathcal{L}_{-a,\ b}$ 中的环彼此接触，当且仅当 $a+b<4\lambda$。我们特别关注集合$\mathcal{L}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$；已知根据 [12, 命题 1]，它与参数为 $\kappa=4$ 、在 [95, 96]中定义的共形环系 CLE_4 具有相同的分布。等价地，双值集 $\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}$ 与 CLE_4 的地毯 具有相同的分布（即不被 CLE_4, 中的任何环包围的点集，或其所有环之并的闭包）。

定理1.2 的分解中的每个簇都由以下双值集给出：$\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^{\ell})$ 它是若尔当区域中高斯自由场的双值集，该区域由某个环 ℓ 定义（在 $+$边界条件下，该环可能是初始区域的边界 ∂D D），见图1。簇的探索过程如下：

$(+)$ **对于 $+$ 边界条件（图 2）：**

(1.+) 边界簇为 $\mathcal{C}_0^{+}=\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h)$。

(2.+) 设 $\gamma\in\mathcal{L}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h)$。每个环 $\ell\in\mathcal{L}_{-2\lambda,\ (2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^{\gamma})$ 都对应一个簇 $\mathcal{C}_{\ell}^{+}=\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^{\ell})$。

（3.+) 迭代地，设 $\mathcal{C}_{\ell}^{+}=\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^{\ell})$，其中环为 ℓ。对每个 $\gamma\in\mathcal{L}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^{\ell})$ 应用（2.+)。

最后，按直径从大到小重新排列 $\{\mathcal{C}_{\ell}^{+}\}$，得到 $(\mathcal{C}_{k}^{+})_{k\geqslant 1}$。

(自由)对于自由边界条件（图3）：

(1.f) 每个环 $\ell \in \mathcal{L}_{-\sqrt{2\lambda},\ \sqrt{2\lambda}}(h)$ 都对应一个簇 $\mathcal{C}^{\mathrm{f}}_{\ell} = \mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^{\ell})$。(

2.f) 按照 (3.+) 中的方法迭代。

最后，按照直径递减的顺序重新排列 $\{\mathcal{C}^{\mathrm{f}}_{\ell}\}$，得到 $(\mathcal{C}^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$。

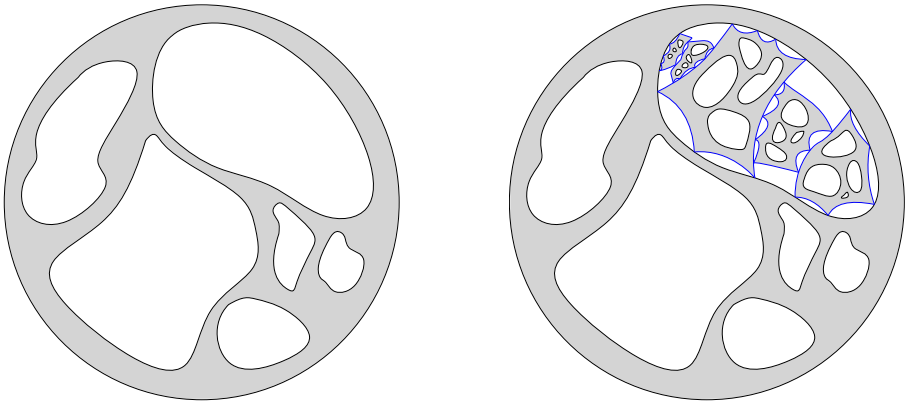


图2：边界条件下的一些簇。左侧显示的是边界簇 $\mathcal{C}^{+}_{0} = \mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h)$，并以灰色阴影标出。右侧则在仅有的一个环 $\gamma \in \mathcal{L}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h)$ 内额外执行了步骤（2.+）。每个以蓝色标出的 $\ell \in \mathcal{L}_{-2\lambda,\ (2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^{\gamma})$ 都对应一个以灰色阴影标出的唯一簇，该簇的外边界为 ℓ。

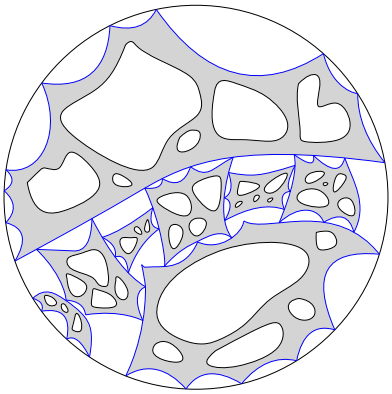


图3：自由边界条件下的一些簇。图中仅展示步骤（1.f）。每个以蓝色标出的环 $\ell \in \mathcal{L}_{-\sqrt{2\lambda},\ \sqrt{2\lambda}}$ 都对应一个以灰色阴影标出的簇。

这些簇 $(\mathcal{C}^{+}_{k})_{k\geqslant 0}$ 两两不交，簇 $(\mathcal{C}^{\mathrm{f}}_{k})_{k\geqslant 1}$也同样如此，但不同集合中的簇可能重叠。

注 1.5. 请注意，在迭代 (+)中，一旦得到边界簇 $\mathcal{C}_0^+$，迭代过程就会在 $\mathcal{L}_{-2\lambda,2\lambda}(h)$ 的每个环内，完全按照（自由边界）的方式进行（对数值作常数平移后）。特别地，限制在环内部的 + 边界 IMF $\Phi^+ \ell \in \mathcal{L}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的分布与该区域内的自由边界 IMF 相同。与 IMF 的 FK-Ising 分解中的相应结论不同，这种空间马尔可夫性质是在标度极限中涌现的，在离散耦合中并不存在。

我们在连续统中的最终结果表明，测度 $(\mu_k^+)_{k\geqslant 0}$ 与 $(\mu_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$ 应被视为其（分形）支撑集的“面积”测度。也就是说，我们通过盒计数得到这些测度的一个非常直接的定义，并利用 [77, 定理 1.2] 将它们识别为 CLE_4的地毯中唯一的共形协变测度。我们强调，（1.6）中极限的存在性本身已非平凡，并将作为某些至关重要的离散情形输入的推论而得到。

定理 1.6（测度的识别）。设 $\mathcal{C}$ 为$(\mathcal{C}_k^+)_{k\geqslant 0}$ 或$(\mathcal{C}_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$中的任一簇，对应于$\mathrm{CLE}_4$ 在某个（随机）若尔当区域 D中的地毯。设 $K \subset D$ 为任一紧子集，并设 $N_\varepsilon(K \cap \mathcal{C})$ 为 $\varepsilon\mathbb{Z}^2$ 中与 $K \cap \mathcal{C}$相交的方框个数。则，

$$\mu_{\mathcal{C}}[K] = \lim_{\varepsilon\to 0} \beta\varepsilon^{2-1/8} N_\varepsilon(K \cap \mathcal{C}), \tag{1.6}$$

其中极限在 $L^2(\mathbb{P})$ 存在，而 $\beta \in (0,\infty)$ 是一个归一化[1] 常数。

此外，该测度在相差一个乘性常数的意义下，由指数为 $d =$ 维度$_H(\mathcal{C}) = 2 - 1/8$ 的 *Miller-Schoug* 公理唯一刻画。

如 [77, 注 1.3], 所述，由此可知，如果 CLE_4 地毯的 $(2-1/8)$维明可夫斯基内容存在且其期望局部有限，那么它就是定理 1.2中的测度的一个常数倍。

离散耦合与收敛的陈述。 尽管上述所有陈述都只涉及连续统中的对象，但其证明几乎完全依赖于离散情形中的对应对象。耦合的核心是定理 1.9 中对伊辛模型新表示法的观察，我们在第 2.1 节给出两种不同的证明。

在精确陈述之前，我们先引入一些记号。给定一个图 G，我们分别用$V(G)$ 和 $E(G)$ 表示它的顶点集和边集。对于子集 $S \subset V(G)$，我们用 $E(S)$ 表示两端点都属于 S 的边。当 G 是嵌入平面中的有限连通平面图时，令 G^* 为其（强）对偶图，$G^\dagger$ 为其弱对偶图，即删除了与外部面对应顶点后的对偶图。我们还用 ∂G表示 G 中位于其无界面上的顶点集合。

De定义 1.7（抛硬币）。对于任意渗流构型 $\omega \subset E(G)$，我们将 b y

$$\mathscr{S}(\omega)$$

表示向 ω 的每个簇（即连通分支）独立地赋予一个取值为 $\{\pm 1\}$ 的对称自旋。这会得到 $V(G)$ 上的一个自旋构型，其取值为该顶点所属簇的符号。对于相同的过程，我们记作 $\mathscr{S}^+(\omega)$，但与前者不同的是，每个与 ∂G 相交的簇总是被赋予自旋 $+1$。

[1] 该常数满足 $\mathbb{E}[\mu_{\mathcal{C}}[K]] = \mathfrak{C}\, 2^{1/4} \int_K \mathrm{CR}(z,D)^{-1/8} dz$，其中 $\mathfrak{C} = 2^{5/48} e^{3/2\zeta'(-1)}$ 是一个依赖于格的常数 [31, 32]。

De定义 1.8. 给定 $\eta \subset E(G)$，令 $\eta^* \subset E(G^*)$ 为其 对偶补集，定义如下：

$$e \in \eta \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^\dagger \notin \eta^*,$$

其中 $e^\dagger$ 是 e的对偶边。注意， $\eta \supset E(\partial G)$当且仅当 $\eta^* \subset E(G^\dagger)$。

定理 1.9 （替代 Edwards–Sokal 耦合）。 设 G 为一个有限连通平面图。设 $\hat{}\mathbf{n}^\dagger$ 无源双重随机电流的迹 $\mathbf{n}^\dagger$ 在 G^* 上，具有自由边界条件，耦合常数为 $J^\dagger$： $E(G^\dagger) \to [0,\infty)$，如定义 2.2。定义 ω 为其对偶补集

$$\omega = (\widehat{\mathbf{n}}^\dagger)^*. \tag{1.7}$$

则， $\mathscr{S}(\omega)$ 服从在 G 上具有自由边界条件的伊辛模型的分布，耦合常数为 J： $E(G) \to [0,\infty)$，它们与 $J^\dagger$ 通过 *Kramers-Wannier* 对偶性相关联 (2.1)。
类似地，设 $\hat{}\mathbf{n}^\dagger$ 为无源双重随机电流$\mathbf{n}^\dagger$ 现在在弱对偶$G^\dagger$ 上的迹，具有自由边界条件及耦合常数 $J^\dagger$。再定义 $\omega = \hat{}\mathbf{n}^\dagger$ 为其对偶补集。则 $\mathscr{S}^+(\omega)$ 服从 G 上伊辛模型的分布，该模型具有 $+$ 边界条件（施加于 ∂G ），且耦合常数 J 与上文相同。

事实上，要明确地定义满足上述ω 性质*Edwards–Sokal* 性质的渗流模型，并不需要采用平面设定，参见定义2.6。此外，在推导该模型的所有必要性质时，包括 FKG 型不等式和 RSW 结论，这种替代且更一般的定义将证明更易于处理。

本文中，我们始终采用所谓的主耦合的一种扩展，该扩展最初由 [39] 提出（另见 [73]）。下面简要介绍其主要性质，更多细节及等价构造请参见第2.1节。首先，将一对

$$(\mathbf{n}, \mathbf{n}^\dagger) \tag{1.8}$$

无源双随机电流分别采用 G中的连线边界条件和 $G^\dagger$中的自由边界条件进行耦合，使二者互不交叉（也就是说，如果某条原边$\mathbf{n}$中存在，则其对偶边在$\mathbf{n}^\dagger$中不存在，反之亦然）。我们将推迟给出双重随机电流连线边界条件的正式定义（定义2.2），但需指出，这涉及取消其在 ∂G的顶点上无源的要求。这两个构型各自定义了一个自旋模型

$$\tau = \mathscr{S}^+(\mathbf{n}) \quad \text{and} \quad \tau^\dagger = \mathscr{S}(\mathbf{n}^\dagger),$$

其分布与异或伊辛模型相同（即两个相互独立的伊辛模型之积的分布）。进而，通过施加零边界条件并将其梯度定义为下式，可定义高度函数 H： $V(G) \cup V(G^\dagger) \to \mathbb{Z} \cup (1/2 + \mathbb{Z})$

$$H(u^\dagger) - H(u) = \frac{1}{2}\tau(u)\tau^\dagger(u^\dagger), \tag{1.9}$$

对于 $u \in V(G)$ 和 $u^\dagger \in V(G^\dagger)$。这是来自 [39] 的主耦合内容。按照 (1.7)，取流的对偶补集对其进行扩展，可以定义这对 $(\omega,\ \omega^\dagger)$，并利用定理1.9定义两个伊辛模型

$$\sigma = \mathscr{S}^+(\omega) \quad \text{and} \quad \sigma^\dagger = \mathscr{S}(\omega^\dagger),$$

分别在 G 上采用 $+$ 边界条件，以及在 $G^\dagger$ 上采用自由边界条件。最后，只需令下式成立，就可以再得到两个伊辛场

$$\tilde{\sigma} = \sigma\tau \quad \text{and} \quad \tilde{\sigma}^\dagger = \sigma^\dagger\tau^\dagger,$$

它们必须分别独立于 σ 和 $\sigma^\dagger$。将伊辛自旋纳入主耦合，是我们研究的出发点。

下面的陈述拓展了 [38, 39] 中的收敛结果，并给出了离散模型收敛到其连续对应物的联合收敛。不过，我们并未证明两个异或伊辛模型的联合收敛。第一作者与 Sepúlveda [8], 在合作研究中完成了这项工作，证明它们分别是极限高斯自由场的复乘性混沌的实部和虚部。请注意，此处的高斯自由场采用了不同于 [38, 39], 中的归一化方式，因此极限中出现的乘性常数也有所不同。

定理 1.10. *(临界性下的联合标度极限)* 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为若尔当区域，其离散区域近似为 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$。在临界性下，当 $\delta \to 0$ 时，

$$\big(h_\delta,\ \omega_\delta,\ \omega_\delta^\dagger,\ \delta^{-1/8}\sigma_\delta,\ \delta^{-1/8}\tilde{\sigma}_\delta,\ \delta^{-1/8}\sigma_\delta^\dagger,\ \delta^{-1/8}\tilde{\sigma}_\delta^\dagger\big) \xrightarrow{(d)} \big(\frac{1}{\pi\sqrt{2}}h,\ \omega,\ \omega^\dagger,\ \Phi,\ \tilde{\Phi},\ \Phi^\dagger,\ \tilde{\Phi}^\dagger\big),$$

其中，离散自旋构型 σ_δ，$\tilde{\sigma}_\delta$，$\sigma_\delta^\dagger$，$\tilde{\sigma}_\delta^\dagger$ 被视为 (1.3) 中的随机分布；h 是 D中的零边界条件高斯自由场；ω 和 $\omega^\dagger$ 的簇如 (+) 和 (自由)所述；伊辛磁化场的分解见定理 *1.2*。收敛所采用的具体拓扑见附录 *B*。

注记 1.11. 我们还指出，我们的方法允许将具有不同边界条件（包括Dobrushin边界条件）的多个伊辛磁化场通过单个高斯自由场实例耦合起来。此外，定理1.10提示了（其精神类似于来自 [81]的CLE渗流的）高斯自由场与（多个）CLE_3 以及SLE_3, 之间的自然耦合，它们是 $+1$ 与 -1 自旋在临界伊辛模型 [19, 30]中的界面的标度极限。这两个方向都将在未来的工作中加以探讨。

1.2 进一步的讨论与背景

本节的目的有两方面。首先，我们介绍Ashkin-Teller 模型，并说明我们的主要结果如何纳入一个更为广阔的图景，这激发了我们在第1.3节中提出的全部猜想。其次，我们回顾关于此前研究IMF [24, 25] 的方法以及玻色化的严格数学描述的部分文献。

设 $G = (V,\ E)$为一个有限图。Ashkin-Teller（AT）模型 [13] 具有耦合常数 $J \geqslant 0,\ U \in \mathbb{R}$ 以及自由/自由边界条件，它是自旋构型对$(\sigma,\ \tilde{\sigma}) \in \{-1, 1\}^V \times \{-1, 1\}^V$上的概率测度，由

$$\mathbb{P}_{G,J,U}(\sigma, \tilde{\sigma}) \propto \prod_{uv \in E} \exp\big(J(\sigma_u\sigma_v + \tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v) + U\sigma_u\sigma_v\tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v\big). \tag{1.10}$$

在 $+/+$ 边界条件下的测度定义方式与伊辛模型相同，即指定顶点的一个子集，并要求其中的 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 均为$+1$。单自旋构型 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 称为磁化强度 自旋，而

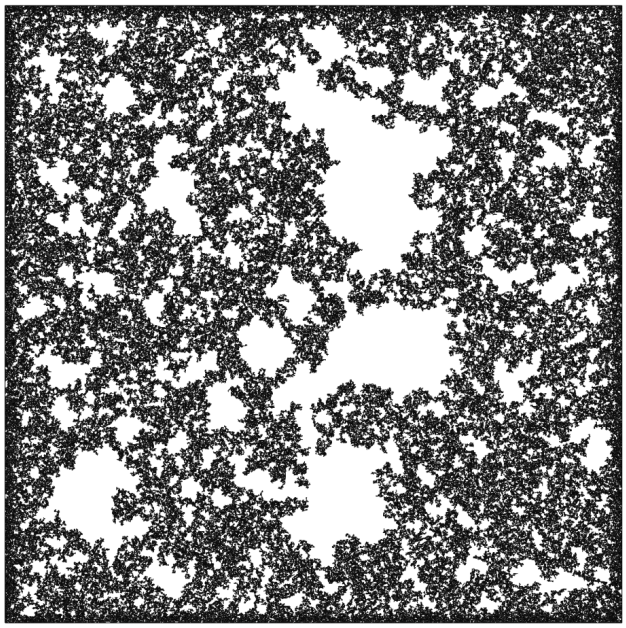


图 4：在 1000x1000 网格上对渗流 ω 边界簇的模拟。该边界簇的分布收敛到 CLE_4地毯的分布。

（逐坐标的）乘积自旋构型 $\tau = \sigma\tilde{\sigma}$ 称为极化 自旋。在自由费米子线 $U = 0$ 上，自旋 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 成为两个相互独立、耦合常数为 J的伊辛模型，而极化自旋传统上称为*XOR*-伊辛模型。

AT 模型的临界线 [15] 定义为

$$\sinh(2J) = e^{-2U}, \qquad J \geqslant U. \tag{1.11}$$

物理学文献 [15,33,84] 中曾预测，该模型具有沿临界线连续变化的显式临界指数，并且当$\delta \to 0$ 时存在共形协变的标度极限。特别地，给定一个区域 $D \subset \mathbb{C}$ 及其离散区域近似 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$，预测下列极限存在且共形协变：

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1/8} \langle\sigma_{x_\delta}\rangle^+_{D_\delta,U} =: \langle\sigma_x\rangle^+_{D,U} \qquad \text{and} \qquad \lim_{\delta\to 0} \delta^{-1/(2g)} \langle\tau_{x_\delta}\rangle^+_{D_\delta,U} =: \langle\tau_x\rangle^+_{D,U}, \tag{1.12}$$

其中$\langle\cdot\rangle^+_{D_\delta,\ U}$ 表示关于临界模型$\mathbb{P}^+_{D_\delta,\ J_c(U)\ U}$ 的期望，模型采用 $+/+$边界条件； $x_\delta \in D_\delta$ 距某个固定的 $x \in D$为 $O(\delta)$。极化的临界指数为

$$g := \frac{8}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}(1+\exp(4U))^{1/2}\right) \in (4/3, 4]. \tag{1.13}$$

有趣的是，磁化场的临界指数 σ 是常数，且等于 $1/8$，而极化指数则不同。正如前文所述，对于 $U = 0$，由于其具有很强的可解性，Chelkak、

Hongler 和 Izyurov [31]最近在一项突破性工作中严格证明了上述收敛。尽管已知临界线上的 AT 模型与 六顶点模型 有紧密联系，而后者同样是精确可解的 [15]（尽管是在较弱的意义上），但在临界自由费米子点之外，式（1.12）中的结论仍超出了严格证明所能达到的范围。

我们对 AT 模型的预测有一个重要特点：它从概念上解释了整个临界线上的数值 $1/8$ 。具体而言，我们将其与双值集 $\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}$ 的豪斯多夫维数等于 $2-1/8$ [83, 92, 94]这一事实联系起来。无论临界线上的点为何，该集合都会出现在我们对连续统AT场的猜想性几何表示中。此外，预测指数 g 沿临界线的变化，对应于高度间隙为 $2\sqrt{2}$ 的二值集在 (+) 和 (自由) 中被高度间隙为 $2\sqrt{g}$ 的二值集取代；后者的维度为 $2-1/(2g)$ [92]。精确表述见猜想 1.2-1.3。

根据（1.12），并按照（1.3）将离散构型视为分布，我们预期这些极限

$$\lim_{\delta\to 0}\delta^{-1/8}\sigma_\delta =: \Phi_D, \qquad \text{and} \qquad \lim_{\delta\to 0}\delta^{-1/(2g)}\tau_\delta =: \tau_D \tag{1.14}$$

在广义函数的适当空间中考察时，同样以分布的意义存在。除了$U=0$这一情形之外，我们的贡献之一是提出一个明确的猜想，用适当的二值集描述该场 Φ_D 。将 τ_D 识别为高斯自由场（或虚乘性混沌这一数学术语中所称的对象 [60]的顶点算子，直接源于玻色化，并且已在物理学文献中以非严格方式得到确立 [15, 61, 84]。我们在猜想1.1中重新表述了这一联系；对于伊辛模型，该联系已经得到确立 [60]。

在 [24, 25, 28] 中，Edwards–Sokal耦合被用于从几何角度研究IMF。该耦合表明，要在 G 上抽样伊辛模型，可以先抽样FK-伊辛模型的一个构型 $\omega^{\mathrm{FK}}\subset E(G)$，然后在每个簇上抛掷硬币。过去十五年间，正方格子上的临界FK-伊辛模型得到了广泛研究。得益于精确可解性和正关联性等优良特征，人们取得了一系列突破，包括完备的RSW理论 [36]，以及共形不变标度极限的证明 [64, 97]。特别地，研究表明，D_δ 上所有簇的边界所组成的集合收敛到共形环系CLE$_{16/3}$ [64] 在 D中的构型，这进而使得对连续统伊辛场 [24, 25]进行完全几何化的描述成为可能。我们注意到，CLE$_{16/3}$ 的骨架维度也已知为 $2-1/8$ [82]，因此磁化强度的临界指数为为何它必须等于CLE$_4$的地毯维度提供了一个很好的概念性解释。

我们实现主要结果的路径确实与 [24, 25], 相似，但 ω DRC 对偶补集的研究在许多方面有所不同，这一点很快就会明朗。两种不同的渗流模型概率律竟然都满足 Edwards–Sokal 性质，甚至可能令人惊讶。不过，第三位作者的研究中早已出现了一个在一般平面设定下具有相同效果的观察 [71, 定理 3。2] 而且 Ivan Hejný 的硕士论文也明确陈述了这一点 [58]。事后看来，我们的方法与 [55], 中的方法密切相关；正如该文所述，它符合 Pfister 和 Velenik 引入的阿什金–泰勒模型 FK 表示框架 [88]（尽管其耦合常数不在该文所考虑的范围内）。我们将在第1.3节开头进一步阐述这一点。

对于平面图的情形，可以将我们的耦合视为对 Zuber 和 Itzykson 开创的伊辛模型玻色化的拓展 [104] ，其数学处理还见于其他文献 [23,35,37]。在连续统中，这一理论建立了伊辛关联函数平方（即异或伊辛关联函数）与高斯自由场顶点算子关联函数之间的精确恒等式。在 [31, 32], 的基础上，连续统关联函数的完整图景已在 [16]中得以完备。在离散情形中，这对应于两个独立的伊辛模型副本与一个二聚体模型之间的二分原图装饰图上的组合关系 [23, 35, 37]。这类二聚体模型可通过其对应的高度函数视为随机曲面模型，其中异或伊辛场由该函数的奇偶性给出。自 Kenyon 的开创性工作以来 [65], ，众所周知，二聚体高度函数在标度极限下收敛到高斯自由场。耐人寻味的是，最早将伊辛模型表示为二聚体模型的工作可追溯至 Fisher [45], ，他将单个伊辛模型副本映射为装饰图上的二聚体模型。然而，该装饰图是非二分的，因此不对应高度函数，也就不属于玻色化框架。此外，前述工作均未预测单个伊辛模型如何纳入异或伊辛场与高度函数之间的耦合。我们的贡献弥补了这一不足。

就（二聚体）高度函数的收敛而言，本文特别关注临界异或伊辛高度函数收敛到高斯自由场 [39], ，这也说明了为何将两个伊辛模型与一个二聚体模型之间的组合映射称为玻色化。Duminil-Copin 与第三位作者 [37]的工作已通过将 DRC 与异或伊辛模型及其相应的高度函数共同耦合，隐含地迈出了这方面的一步。这又受到 [71]中提出的 DRC 模型交替流表示的启发。在 [39] 中， [37] 所述的耦合被扩展为主耦合（上一节曾简要概述），涵盖原始与对偶双随机电流、异或伊辛模型以及高度函数。此外， [39] 中还发现，DRC 模型本身（即其对偶补集之外的模型）通过 Edwards–Sokal 过程与异或伊辛模型耦合。这与 FK-伊辛模型不同：其对偶补集也是 FK-伊辛模型，因此二者都与同一个伊辛模型耦合。与此同时， [73]还将这一结果推广到了 AT 模型（包括 [72], 中定义的AT 随机电流、AT 极化场及其相应的高度函数）。

Duminil-Copin、Qian 和第三位作者证明了 [38, 39] 临界主耦合存在联合标度极限，其中高度函数收敛到高斯自由场，而 DRC 的簇的外边界和内边界则收敛到由该高斯自由场的双值集所产生的某些环——参见定理1.14。我们再次强调，本文引入的耦合以 [38, 39] 的设定为起点，并如定理1.9所述，通过加入磁化场来推进。正是这一陈述中的对偶关系，使我们能够借助 [38, 39]的结果，识别我们渗流模型中簇的标度极限。

最后，我们提及另一种研究平面自旋系统的方法，它可追溯至 Peierls 的工作 [87], 。他将自旋构型诠释为分隔 $+1$ 和 -1 自旋的一组界面。对于具有所谓 多布鲁申 边界条件的临界伊辛模型，研究表明，连接两个边界点的单个界面会收敛到 Schramm–Loewner演化 SLE$_3$ [30], ；而对于 $+$ 边界条件，整组环会收敛到 CLE$_3$ [19]。异或伊辛模型中类似界面的标度极限

已由 Wilson 预测 [102], , 其应由某些双值集合的环来描述，且这些集合的边界值不同于迄今所研究的边界值。这一观点得到离散玻色化图景的支持：异或伊辛模型的界面实际上是离散高度函数的水平线 [23, 35]。

我们回顾一下，共形环系 CLE$_\kappa$ for $\kappa \in (8/3,8)$ 是由可数多个随机分形非自交叉环组成的集合，它们由共形不变性和一种空间马尔可夫性质 [96] 唯一确定。同样，我们已经知道，双值集的环也具有某种马尔可夫性质，不过此时是相对于底层高斯自由场而言的。共形不变性和马尔可夫性质通常应当是临界模型中曲线标度极限的特征，因此，这两个族自然成为（异或）伊辛界面极限的候选对象。

另一方面，σ 和 $\tilde{\sigma}$ 构型的界面，在远离自由费米子点的临界 AT 模型中，即使在离散情形下也不具有自然的空间马尔可夫性质。事实上，即使对回路上某个自旋的取值进行条件化，外部的信息仍可通过与另一种自旋的相互作用流入回路内部。因此，目前无法预测这些界面的标度极限。我们通过猜想填补这一空白（见猜想 1.4）：与临界 AT 磁化界面对应的连续曲线由对双值集进行抛硬币过程得到，随后取两种自旋取值之间的界面。这与 [81] 中所述的 CLE 渗流过程类似，我们计划在未来的工作中探索这一方向。

1.3 阿什金–泰勒模型的猜想

基于第三位作者近期的工作 [71–73], , 我们发现一般阿什金–泰勒模型也存在一个完全类似的离散耦合（证明见第2.3节）。具体而言，G 上的双重随机流对应物是*AT* 电流$\mathbf{n} = (\mathbf{n}_{\text{odd}}, \mathbf{n}_{\text{even}})$，其定义见 [72], , 其分布由下式给出：

$$\mathbb{P}_{\text{AT}}(\widehat{\mathbf{n}}) \propto 2^{k(\widehat{\mathbf{n}})} x^{|\mathbf{n}_{\text{odd}}|} y^{|\mathbf{n}_{\text{even}}|}, \tag{1.15}$$

其中 $k(\widehat{\mathbf{n}})$ 是 $\widehat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}_{\text{odd}} \cup \mathbf{n}_{\text{even}}$的簇数，$\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 与$\mathbf{n}_{\text{even}}$ 互不相交，并且$\mathbf{n}_{\text{odd}}$被限制为在 $V(G)$ (即$\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 是偶子图 G)。与（1.10）相比，这些参数满足

$$x = e^{2U} \sinh(2J), \quad \text{and} \quad y = e^{2U} \cosh(2J) - 1.$$

正如 [71] 中对 $U = 0$所证明的，流 $\mathbf{n}$ 是无源双重随机电流的投影（定义为从 $E(G)$ 到 $\{0, 1, 2, \ldots\}$的函数，见定义 2.2），投影到其取奇数和正偶数值的边集合上，分别得到 $\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 和 $\mathbf{n}_{\text{even}}$。对于每个这样的流，都可以关联一个高度函数 h，称为嵌套场。它的定义方式与 Duminil-Copin 和第三作者在 [37]中为非相互作用情形引入的高度函数相同。它是定义在图的面上的整数值函数，仅当跨越 $\mathbf{n}_{\text{odd}}$的一条边时，相邻面之间的函数值才会相差± 1；此外，属于 $\mathbf{n}$ 的不同簇的边所对应的增量相互独立。精确定义见 [37], ；关于与 (1.9) 等价的另一种定义，见第 2.2 节和第 2.3 节。

原始与对偶AT电流、相应的原始与对偶嵌套场以及两个极化场之间的一种耦合见 [73]。将磁化场纳入其中的扩展，针对正方格子上的自对偶模型见 [55, 命题 8。1] ；对于一般的平面图和耦合常数，则见 [72,命题 13]。因此，本文针对情形$U = 0$ 在离散层面所描述的所有依分布恒等式（尤其是识别标度极限所需的各种空间马尔可夫性质），对于一般 AT 模型中的相应对象也同样成立。揭示这一丰富结构，为下文所述的 AT 模型进一步研究开辟了新方向。精确陈述的证明可见 [72,73] ，或可由此处给出的公式直接推广得到。

这种耦合体现玻色化现象的一个特殊特征是，极化场是对偶嵌套场的复指数。下文的一个猜想将体现这一点。此外，已知原始与对偶高度函数的联合律与相关六顶点模型 中高度函数的联合律相同（例如参见 [55, 73]）。再结合物理学的预测，即后者收敛到高斯自由场的一个明确常数倍数 [15, 61, 84],，便可对 AT 模型的临界行为提出以下精确猜想。

第一个猜想重申了高度函数的收敛性，以及极化场的玻色化关系。

猜想 1.1。设 $D \subset \mathbb{C}$ 为一个若尔当区域，其离散区域近似为 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$。在临界线（1.11）上的每一点，当 $\delta \to 0$时，AT 电流在D_δ 上的嵌套场，在 $+/+$ 或自由/自由边界条件下收敛到

$$\frac{1}{2\lambda\sqrt{g}}\, h = \frac{1}{\pi\sqrt{g}}\, h,$$

其中 h 是在 D中的零边界条件高斯自由场，且 g 定义于（1.13）。此外，分别在 $+/+$ 和自由/自由边界条件下的极化场收敛到

$$\cos\left(h/\sqrt{g}\right) \quad \text{and} \quad \sin\left(h/\sqrt{g}\right),$$

对应于参数为 虚高斯乘性混沌，其参数为 $\alpha(g) = 1/\sqrt{g} \in [1/2, \sqrt{3}/2) \subset [0, \sqrt{2}]$.

第二个（也是首个新颖的）猜想直接类比于 [38, 39] 的主要结果。

猜想 1.2。定理 1.14 几乎逐字的类比也适用于临界线（1.11）上各点处由（1.15）定义的 Ashkin–Teller电流，唯一的区别在于，每次显式出现 $\sqrt{2}$时，都必须替换为（1.13）中定义的 $\sqrt{g}$。特别是，$\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda} \equiv$CLE$_4$ 在这条临界线上具有普适的标度极限，而迭代中使用的其余两个二值集具有如下形式

$$\mathbb{A}_{-2\lambda,(2\sqrt{g}-2)\lambda}, \ \mathbb{A}_{(2-2\sqrt{g})\lambda,2\lambda} \quad \text{or} \quad \mathbb{A}_{-\sqrt{g}\lambda,\sqrt{g}\lambda}.$$

我们再次强调，簇的最外层边界收敛到 CLE$_4$，这是经典猜想的一种几何类比（实际上承载了更多信息）：磁化场的指数在整条临界线上都是常数，并且等于 $1/8$ （例如参见 [15]）。

备注 1.12。回顾一下，在临界曲线的端点 $J = U$ 处，我们有 $g = 4$。在这种情况下，迭代中的所有集合实际上都是 CLE_4。这与以下事实一致：AT 模型的分布变为四态波茨模型的分布，而相应的流 $\hat{\mathbf{n}}$ 则变为簇权重为 $q = 4$的临界 FK 随机簇模型。前者可直接通过检查哈密顿量得出。后者可通过注意到（1.15）中的两个权重 x 和 y都等于 1 看出；这反过来意味着，当人们忘记 $\mathbf{n}$ 的哪些边属于 $\mathbf{n}_{\mathrm{odd}}$ 、哪些边属于 $\mathbf{n}_{\mathrm{even}}$时，由于 $\mathbf{n}$ 的偶子图总数，会额外出现一个组合因子 $2^{|\mathbf{n}|+k(\mathbf{n})}$ （例如参见 [71, 引理 4.2]）。特别地，这给出了一个与 $4^{k(\mathbf{n})}2^{|\mathbf{n}|}$成比例的总权重，而这正是临界FK(4)随机簇模型的权重 [17]。因此，我们的猜想是 Sheffield [95] 猜想的推广：临界 FK(4) 模型中簇的外边界和内边界在标度极限下收敛到 CLE_4's。

下一个猜想是对我们的主要结果，即定理 1.1 和1.2 的推广，并预言了连续阿什金-泰勒磁化场的几何分解。

猜想 1.3。 定理1.2 的表述，对于迭代 (+)和 (自由) 的几乎逐字对应版本，在临界线 1.14（1.11）上的每一点处，对由（$\sqrt{2}$ ）定义的阿什金-泰勒磁化场均成立；唯一的区别是，每一处显式出现的 $\sqrt{g}$ 都必须再次替换为由（1.13）定义的。

我们相信，本文所采用的方法具有稳健性，因此一旦猜想 1.3 和猜想 1.2 中关于高度函数的收敛性 1.1 得到证明，猜想 1.3 也将能够得到证明。上述表述的一部分是：相关的场在连续统中定义良好，而这一点事实上已由我们证明。

命题 1.13。 与(1.5)中的级数类似，但在相关二值集的定义中将 $\sqrt{2}$ 替换为 $\sqrt{g}$ 所得的级数几乎必然收敛，并且在 L^2 中收敛，其中 $g \neq 4$ *(*或等价地，$J \neq U$*)*。

我们特别指出，猜想1.3由 Aru 和 Lupu 独立提出，并将发表于他们即将发表的工作 [9], 中；他们能够计算该场的二点函数。这表明，要严格证明 AT 磁化场的自旋-自旋关联函数的收敛性与共形协变性，一种可能的途径是证明猜想1.1-1.2(我们再次认为，这足以确立猜想1.3)，然后运用他们的结果。

作为最后一个猜想，我们描述一种连续渗流过程，沿袭 [81],的思路，它应能刻画 AT 磁化场界面的标度极限。给定猜想1.2，这一猜想不过是离散表示的连续统对应版本：将该场表示为 AT 电流对偶补集的形式。即使对于 $U = 0$，这也揭示了 CLE_3 与高斯自由场的二值集之间一个非常有趣的联系。

猜想 1.4。 考虑猜想1.1 中所述分解的簇+/+ 边界条件。对每个簇各掷一次公平硬币，赋予其值 $+1$ 或 -1，但边界簇赋予值 $+1$。若两个取值为 $+1$ （分别为 -1）的簇彼此接触，则称它们属于同一个 $\oplus$-簇（分别为 $\ominus$-簇）。那么，阿什金-泰勒磁化场的最外层界面的分布由 $\ominus$-簇的最外层外边界给出。全部界面集合通过迭代方式定义。

1.4 关于证明

现在我们来讨论证明上述主要结果所需的全部输入。我们这样做，是希望找出将我们的论证推广到 Ashkin-Teller 模型所需的最小一组已有结果。

我们证明中的首个关键依据，是 [38,39] 中对连续统簇的识别。简言之，DRC 的簇对应于定理 1.2 中所描述簇的"补集"。具体而言，它们由高度间隙为 $2\sqrt{2}\lambda$ 的双值集给出。我们直接用簇来陈述这一结果（而非像 [38,39] 中那样用其外边界和内边界来陈述），见附录 C。

定理 1.14 (临界双随机电流 [38, 39]的收敛)。设 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个若尔当区域，其离散区域近似为 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$。设 $(\mathcal{C}_k^\delta)_{k\geqslant 0}$ 和 $((\mathcal{C}_k^\delta)^\dagger)_{k\geqslant 1}$ 分别是在 D_δ 中具有连线边界条件、在 $D_\delta^\dagger$ 中具有自由边界条件的一对双随机电流的簇，并按照 (1.8) 进行耦合。设 H_δ 是由 (1.9) 定义的相关高度函数。在临界状态下，当 $\delta \to 0$,

$$\big(H_\delta, (\mathcal{C}_k^\delta)_{k\geqslant 0}, ((\mathcal{C}_k^\delta)^\dagger)_{k\geqslant 1}\big) \xrightarrow{(d)} \big(\frac{1}{\pi\sqrt{2}}h, (\mathcal{C}_k)_{k\geqslant 0}, (\mathcal{C}_k^\dagger)_{k\geqslant 1}\big),$$

其中 h 是具有零边界条件的高斯自由场，$(\mathcal{C}_k)^{k\geqslant 0}$,$(\mathcal{C}_k^\dagger)^{k\geqslant 1}$ 是通过将以下迭代按直径大小降序重新排序得到的：

对于连线边界条件：

(1.w) 边界簇为 $\mathcal{C}_0 = \mathbb{A}_{-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda}(h)$。 *(2.w)* 令 $\ell \in \mathcal{L}_{-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda}(h)$。每个环 $\gamma \in \mathcal{L}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$ 都对应一个簇$\mathcal{C}_\gamma = \mathbb{A}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$。 *(3.w)* 迭代地，令 $\mathcal{C}_\gamma = \mathbb{A}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$，其中某个环为 γ。应用 *(2.w)*，但这次对每个$\ell \in \mathcal{L}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$进行。

对于自由边界条件：

(1.f) Every loop $\gamma \in \mathcal{L}_{-2\lambda,2\lambda}(h)$ *is given a cluster* $\mathcal{C}_\gamma^\dagger = \mathbb{A}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$.

(2.f) 按照 *(3.w)* 的方式迭代。

作为第二项输入的一部分，我们再次强调，我们不使用 Chelkak、Hongler 和 Izyurov 关于所有k点自旋关联函数的收敛性 [31]。相反，我们只需要单点函数极限的存在性。我们利用其显式表达式证明定理 1.6的唯一性部分。

定理 1.15 （单点函数的收敛性 [31]）。设 D 为有界单连通区域，其离散区域近似为 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$。在临界点处，对于任意 $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1/8}\mathbb{E}_{D_\delta}^+[\sigma_\delta(z)] = \mathfrak{C}\ 2^{1/4}\ \mathrm{CR}(z,D)^{-1/8}$$

对所有满足 $d(z,\partial D) > \varepsilon$的点 z，该结论均匀成立，其中 $\mathrm{CR}(z,D)$ 表示从 z观察到的 D 的共形半径。

最后，定理1.6 的唯一性部分通过验证 [77, 定理1。2] 中提出的公理得以证明，这些公理用于刻画支撑在某些

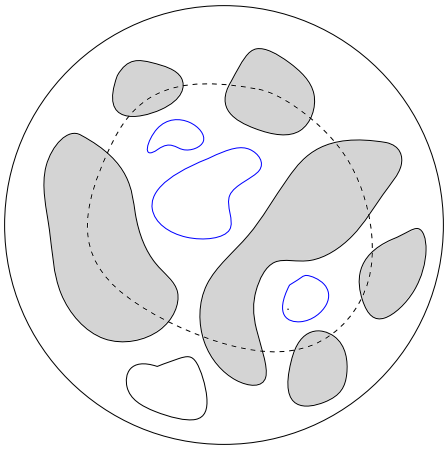


图5：虚线是单连通区域 U 的边界。移除 $\mathcal{C}$ 中所有同时与 U 的内部和外部相交的环后，它定义了一个具有两个连通分支的区域 $U^{\mathcal{C}}$。CLE_4 的马尔可夫性质表明，在 $U^{\mathcal{C}}$ 的每个连通分支中，蓝色环的分布分别是（相互独立的）CLE_4 。

CLE_κ 对应的 $\kappa \in (8/3,\ 8)$ 上的地毯/骨架的测度的唯一性。下面，我们给出 [77]中陈述的一个修订版本。为适用于我们的情形，关键的修改是将对测度共形协变性的假设改为仅假设强度测度具有共形协变性。这基本上可由 [77]中的同一证明推出。

在符号表示上，设 $\mathcal{C}$ 是单连通区域 D 中 CLE_4 的地毯。给定一个开单连通集合 $U \subset D$，我们令 $U^{\mathcal{C}}$ 表示这样得到的集合：从 U 中去除与 U 和 $D\backslash U$ 相交的 $\mathcal{C}$ 中各环的内部并集的闭包后的补集。CLE_4 的马尔可夫性质表明，对于 $U^{\mathcal{C}}$ 的任意连通分支 V，在给定 $\mathcal{C} \cap V^c$ 的条件下，$\mathcal{C}$ 在 V 上的条件分布是新区域 V 中的 CLE_4 地毯。这如图5所示。我们以固定区域 D 的形式陈述了该定理，这等价于 [77][2] 中的表述。

定理 1.16 (测度的唯一刻画)。 设 D 是一个单连通区域。考虑一对 $(\mathcal{C}, \mu)$ 上的一个分布，其中 $\mathcal{C}$ 的分布是区域 D 内 CLE_4 地毯的分布，而 μ 是支撑在集合 $\mathcal{C}$ 上的测度。此外，假设 $(\mathcal{C}, \mu)$ 的联合分布满足：

1.（可测性）测度 μ 关于 $\mathcal{C}$是可测的。*2.*（局部有限性）对于每个紧集 $K \subset D$，$\mathbb{E}[\mu（K）] < \infty$。*3.*（马尔可夫性质）对于任意开单连通集合 $U \subset D$ 以及$U^{\mathcal{C}}$的任意分支 V，在给定 $\mathcal{C} \cap V^c$和 $\mu|_{V^c}$的条件下，$\mu|_V$的条件分布仅依赖于 V。*4.*（强度测度的共形协变性）令 U、V如上。对于任意 f：$D \to \mathbb{R}$

[2]事实上，一旦一对 $(\mathcal{C}_D, \mu_D)$ 满足 D 中的唯一性公理，那么对于任意共形映射 ψ：$D \to \tilde{D}$，由 $\mathcal{C}_{\tilde{D}} = \psi(\mathcal{C}_D)$ 和推前测度 $\mu_{\tilde{D}} = \psi_*(|\psi'|^d \mu_D)$ 构成的配对 $(\mathcal{C}_{\tilde{D}}, \mu_{\tilde{D}})$ 也满足 $\tilde{D}$ 中的公理。这直接源于 CLE_4 的共形不变性以及一个简单的链式法则计算。

在 V 中具有紧支撑的任意共形映射 $\varphi:\ D \to V$，

$$\mathbb{E}\left[\mu[f\circ\varphi^{-1}] \mid V\right] = \int_D |\varphi'(z)|^d f(z)\mathrm{d}\mathbb{E}\left[\mu\right](z).$$

那么，$(\mathcal{C},\mu)$ 上的分布（除乘性常数外）唯一确定，且等于 /77/中构造的测度。特别地，该测度具有共形协变性。

除了这三项输入之外，证明的其余部分基本上是自足的。正如前面所暗示的，这一论证的主要难点在于证明：离散 IMF 关于渗流 ω_δ 和 $\omega_\delta^\dagger$ 的可测性，在取标度极限 $\delta\to 0$时仍得以保留。具体而言，我们将在每个离散簇 $\mathcal{C}^\delta$ 上定义一族（经过适当重整化的）计数测度 $\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta}$，并集中精力证明这些测度的极限 $\mu_{\mathcal{C}}$ 关于连续统簇 $\mathcal{C}$可测。尽管这看起来似乎只是一个技术性问题，但若没有这一点，我们就无法将离散情形中的耦合转化为我们关于 IMF 的表示，即用高斯自由场的双值集来表示 IMF。证明本身的主要新意如下。

- 一种证明可测性的新论证，基于 [25,50]的方法。它采用了类似于（1.6）中的盒计数近似，而不是通过环带穿越进行近似。
- 我们证明，极限 $\mu_{\mathcal{C}}$ 关于簇 $\mathcal{C}$ 本身是可测的，而不仅仅是关于完整极限 ω可测。这正是我们能够确定定理 1.6中的极限测度的原因。

- 我们开发了新的工具，以规避这一反复出现的问题：ω_δ 的分布并不确定满足FKG不等式。我们还通过将 [59] 近期的论证调整到我们的情形，构造了 ω_δ 的IIC 测度。

概要。 本文组织如下。在第 2.1–2.2 节中，我们介绍离散耦合的几种等价构造，并证明定理 1.9。随后，我们在第 2.3节讨论向 Ashkin-Teller 模型的推广。之后，在第 3.1–3.2 节中，我们致力于推导渗流模型最重要的性质：FKG不等式的替代形式以及标准 RSW 理论估计。这些性质将在第 3.3 节中用于构造该模型的初生无限簇（IIC）测度。具备所有这些性质后，我们将在第 4节中证明关键估计（定理 4.6），可以将其视为定理 1.6的离散版本。这将推出：离散簇的面积测度的标度极限关于连续统簇是可测的。这是从离散情形过渡到连续统所需的关键输入；我们将在第 5 节中完成这一过渡，并证明定理1.1–1.2–1.6–1.10。

致谢。 我们感谢 Lukas Schoug 友好地与我们讨论定理 1.16 中的修订表述。我们感谢 Christophe Garban 就第 3.3 节中无限簇测度的构造进行有益的讨论。我们也感谢 Nathanaël Berestycki 对论文初稿提出宝贵意见。最后，TAL 感谢 Avelio Sepúlveda 与我们进行了许多有益的交流。

本研究部分由奥地利科学基金（FWF）项目P36298“自旋、环与场”资助。ML的研究亦得到奥地利科学基金（FWF）项目F1002“离散随机结构：计数与标度极限”的支持。TAL感谢维也纳数学学院（VSM）一项资助的支持。

2 离散耦合

2.1 定义和主要性质

设 $G = (V(G), E(G))$为一个有限连通图。对任意顶点子集 $S \subset V(G)$，我们用 $E(S)$表示两端点均包含于 S的那些边。我们考虑一族铁磁耦合常数 $J: E(G) \to [0, \infty)$。

我们还固定 $V^+ \subset V(G)$ 为顶点的一个（可能为空的）连通子集，并令 $E^+ = E(V^+)$。这些集合将用于对 $+$ 自旋构型施加 V^+ 边界条件，以及对 E^+ 渗流构型施加连线边界条件。

下面我们通常假设 G是平面的并嵌入于平面中，并将∂G 写作与 G 的外部面相邻的顶点集合。接着，我们将 G^* 记为 G 的对偶图，将 $G^\dagger$ 记为 G的弱对偶，即删除了对应于 G外部面的顶点后的（强）对偶图。对于那些依赖于平面性的陈述，我们还将额外假设 V^+ 要么为空，要么等于 ∂G。

Giv对于任意耦合常数 J，存在定义在 $J^\dagger$ 上的唯一对偶耦合常数族 $G^\dagger$ 其中 h 通过以下关系定义

$$\tanh(J^\dagger_{(uv)^\dagger}) = \exp(-2J_{uv}), \tag{2.1}$$

对每个 $uv \in E(G)$，其中 $(uv)^\dagger$ 是 uv的对偶边。注意，映射 $J \mapsto J^\dagger$ 是一个对合，其唯一不动点给出式（1.2）中的自对偶耦合常数，它们在正方格子上是临界的。

给定 $A \subset V(G)$，我们将满足 $\sigma_v = +1$ 对所有 $v \in A$ 成立的自旋构型 σ 的集合定义为 $\Sigma^A: V \mapsto \{\pm 1\}$。

定义 2.1（伊辛模型）。在 V^+ 上具有 $+$ 边界条件的**伊辛模型** 是自旋构型 σ 上的概率测度 $\mathbb{P}^+_G = \mathbb{P}^+_{G,J}: V(G) \to \{\pm 1\}$，定义如下：

$$\mathbb{P}^+_G(\sigma) \propto \mathbf{1}(\sigma \in \Sigma^{V^+}) \exp\Big(\sum_{uv \in E(G)} J_{uv}\sigma_u\sigma_v\Big).$$

当集合 V^+ 为空时，我们则称模型具有**自由** 边界条件，并记作 $\mathbb{P}^{\mathrm{f}}_G$。

我们立即将测度扩展到包含第二个独立同分布的伊辛模型 $\tilde{\sigma}$,

$$\mathbb{P}^+_G(\sigma, \tilde{\sigma}) \propto \mathbf{1}(\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma^{V^+}) \exp\Big(\sum_{uv \in E} J_{uv}(\sigma_u\sigma_v + \tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v)\Big). \tag{2.2}$$

这是阿什金–泰勒模型在 $U = 0$ 下的非相互作用版本，乘积自旋记作

$$\tau = \sigma\tilde{\sigma}.$$

τ 在 $\mathbb{P}^+_G$（分别为 $\mathbb{P}^{\mathrm{f}}_G$）下的边缘分布称为带有 $+/+$（分别为自由/自由）边界条件的**异或伊辛模型**。

定义 2.2（双重随机电流）。 流是一个映射$\mathbf{n}$： $E(G) \mapsto \{0,1,2,\ldots\}$。我们用 $\partial\mathbf{n} \subseteq V(G)$表示其源点的集合，

$$\partial\mathbf{n} = \left\{ u \in V(G) \setminus V^+ \;\middle|\; \textstyle\sum_{v:\ uv\in E(G)} \mathbf{n}_{uv} \text{ is odd} \right\}. \tag{2.3}$$

对于 $A \subseteq V(G)$，我们用 Ω_A 表示所有源点为 A 的流的集合。我们通过如下方式定义流上的权重 $w = w_J$：

$$w(\mathbf{n}) = \prod_{uv\in E(G)} \frac{J_{uv}^{\mathbf{n}_{uv}}}{\mathbf{n}_{uv}!}. \tag{2.4}$$

每当 A、$B \subseteq V(G)$ 的大小均为偶数时，带有源点 A、B 的双随机电流（*DRC*）概率测度$\mathbb{P}^{A,B}_{G,J}$，定义为$\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$, 的分布，其中$\mathbf{n}_1$ 和$\mathbf{n}_2$ 分别独立地从 Ω_A 和 Ω_B 中按权重 w_J 成比例抽样。

本文主要关注的情形是 $A = B = \emptyset$；此时我们称这些流为无源点流。当 V^+ 为空时，称该模型具有自由边界条件；否则称其具有连线边界条件。$\mathbf{n}$ 的迹 $\widehat{\mathbf{n}}$ 是一个渗流构型，定义如下：

$$\widehat{\mathbf{n}} = \{uv \in E(G) \mid \mathbf{n}_{uv} > 0\}.$$

我们将$\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 和$\mathbf{n}_{\text{even}}$ 定义为 $\widehat{\mathbf{n}}$ 的子集，分别对应$\mathbf{n}$ 取奇值和偶值的部分。

这种带连线边界条件的随机流定义并非最标准的定义，但很自然。源点集合（2.3）是通过按通常方式展开具有 $+$ 边界条件的伊辛模型在 V^+上的配分函数得到的。约束条件 $\partial\mathbf{n} = \emptyset$ 确保

$$\textstyle\sum_{u\in V^+} \sum_{v:\ uv\in E(G)} \mathbf{n}_{uv} \text{ is even},$$

因此，在将 E^+ 中的边收缩，并将 V^+ 中的所有顶点合并为一个顶点所得到的图上考察时，该流完全没有源点。

给定一个自旋构型 σ： $V(G) \to \{\pm 1\}$，记作

$$\xi^{\pm}(\sigma) = \{uv \in E(G) \mid \sigma_u = \sigma_v = \pm 1\}$$

并定义 $\xi(\sigma) = \xi^+(\sigma) \cup \xi^-(\sigma)$。当 G 是平面图时， $\xi(\sigma)$ 的对偶补集是 σ 的轮廓（区域壁）表示，记作

$$\partial\sigma = \xi(\sigma)^* = \{(uv)^* \in E(G^*) \mid \sigma_u \neq \sigma_v\}. \tag{2.5}$$

在继续之前，我们简要回顾 FK-伊辛模型的定义，并请参阅 [57]了解完整介绍。我们通过令 $\omega^{\mathrm{FK}} \in \{0,1\}^E$ 等于以下内容来定义

$$\omega^{\mathrm{FK}} = \xi(\sigma) \cap \eta', \tag{2.6}$$

其中 $\sigma \sim \mathbb{P}^+_G$ 和 η' 是根据参数为.....的（非齐次）伯努利键渗流独立于 σ 抽样得到的

$$p'_{uv} = 1 - \exp(-2J_{uv})$$

对于 $uv \in E(G)\setminus E^+$ 以及 $p'_{uv}=1$ （即始终开放）而言， $uv \in E^+$。 ω^{FK} 的分布记为 $\phi^+_G = \phi^+_{G,J}$，其显式形式为

$$\phi^+_G(\omega^{\mathrm{FK}}) \propto 2^{k(\omega^{\mathrm{FK}})} \prod_{uv\in\omega^{\mathrm{FK}}} p'_{uv} \prod_{uv\notin\omega^{\mathrm{FK}}} (1-p'_{uv}), \tag{2.7}$$

其中， $k(\omega^{\mathrm{FK}})$ 是 $(V(G)\ \omega^{\mathrm{FK}})$ 的连通分支数，包括孤立顶点。与上文一样，当 V^+ 为空时，我们记作 ϕ^{f}_G，并称该模型采用**自由**边界条件。否则，我们称边界条件为**连线**边界条件，并注意到 $\omega^{\mathrm{FK}} \supseteq E^+$。注意，根据构造，对于连线边界条件， V^+ 将属于 ω^{FK} 中唯一的一个簇。

现在我们陈述 Edwards 和 Sokal 定理，该定理阐明了 FK-Ising 渗流模型与 Ising 自旋模型之间的关系。在此之前，我们先回顾（并略作推广）定义 $\mathscr{S}$1.7 中引入的记号

De定义 2.3（抛硬币）。对于任意渗流构型 $\omega \subset E(G)$，我们记 b y

$$\mathscr{S}(\omega)$$

将独立且对称的 $\{\pm1\}$ 值自旋分配给 ω 的每个簇；而 $\mathscr{S}^+(\omega)$ 表示采用相同的步骤，但凡与 V^+ 相交的簇都始终分配自旋 $+1$。

定义 2.4. 若概率测度 P 在 $\{0,1\}^{E(G)}$ 上具有 ***Edwards–Sokal*** 性质 （带有 $+$ 边界条件），则称之为如此；当 $\omega\sim P$时， $\mathscr{S}^+(\omega)$ 服从在 G 上的伊辛模型（带有 $+$边界条件）的分布。

定理 2.5 (Edwards–Sokal [44])**.** 在耦合 (ω^{FK},σ) 由 (2.6)定义的条件下，给定ω^{FK}，在以下子集上服从均匀分布： Σ^{V^+} 其中 的每个簇都具有常值自旋。特别地，分布 ϕ^+_G 具有 ***Edwards-Sokal*** 性质。

在许多研究中，利用 FK-伊辛模型及其渗流视角来理解伊辛模型的行为是一个反复出现的主题。其原因之一是，测度 ϕ^+_G 具有许多良好的性质。我们将在此重点讨论其中两项，它们对我们将发挥重要作用。第一项是对偶性下的行为。

- （**对偶性**）设 G 为一个平面图，并设 $\omega_{\mathrm{FK}} \sim \phi^+_{G,J}$。那么 $(\omega_{\mathrm{FK}})^* \sim \phi_{\mathrm{f}\,G^\dagger,\,J^\dagger}$。

在具有自对偶耦合常数的正方格子上，对合 $\omega^{\mathrm{FK}} \leftrightarrow (\omega^{\mathrm{FK}})^*$ 因此只会改变测度的边界条件。第二个重要性质在任意有限图 G 上都成立。

- （**FKG**）分布 $\phi^+_{G,J}$ 满足 FKG不等式，并且关于 J 随机递增。

我们将在第 3.1 节进一步讨论 FKG不等式及其推论。这两个性质结合起来非常强大，例如可以用来证明伊辛模型在 $\mathbb{Z}^2$ 上的相变是连续的 [101]。

现在我们给出主要定义。这是 G 上的伊辛模型与 $E(G)$上的渗流模型之间的一种耦合，记作 ω。首先，将 $\mathbb{P}^+_G$ 扩展为包含一个独立的伯努利键渗流 $\eta\subset E(G)$，其（非均匀）参数为

$$p_{uv} = 1-\exp(-4J_{uv})$$

对于 $uv \in E(G) \setminus E^+$，以及 $uv \in E^+$的 $p_{uv} = 1$（即始终开放）。

定义 2.6。定义测度

$$\mathbb{P}_G^+(\sigma, \tilde{\sigma}, \eta) \propto \mathbf{1}(\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma^{V^+}) \exp\Big(\sum_{uv \in E(G)} J_{uv}(\sigma_u \sigma_v + \tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_v) \Big) \prod_{uv \in \eta} p_{uv} \prod_{uv \notin \eta} (1 - p_{uv}).$$

在集合 $\{\pm 1\}^V \times \{\pm 1\}^V \times \{0,1\}^{E(G)}$ 上，并通过设定构造 $\omega \subset E(G)$

$$\omega = \xi(\sigma) \cap \xi(\tilde{\sigma}) \cap \eta. \tag{2.8}$$

自由测度和接线测度的定义与之前相同；再次注意，在接线模型中 $\omega \supseteq E^+$。

首先观察到，两个自旋 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 在 ω的任意一个簇上都必须为常数，因此它们的乘积 τ也如此。这促使我们引入一种基于 τ符号的分解，

$$\omega = \omega^+ \cup \omega^-,$$

其中我们设 $\omega^\pm = \omega \cap \xi^\pm(\tau)$。注意，$\omega^+$ 和 ω^- 实际上是顶点不交的，因此我们可以将其视为对 的簇进行分解。对(ω^+, ω^-) 将在第3节中发挥重要作用。

现在我们可以陈述本节的主要定理：对(σ, ω) 满足 Edwards–Sokal 性质的耦合，正如定理2.5中的 FK-伊辛模型一样。

定理 2.7（新 Edwards–Sokal耦合）。在 $\mathbb{P}_G^+$ 定义 *2.6* 的耦合中，并在给定 ω的条件下，σ 的分布在 Σ^{V^+} 中满足以下条件的子集上均匀分布：ω 的每个簇都具有常值自旋。特别地，ω 的分布具有 *Edwards–Sokal* 性质。

乍看之下，伊辛模型存在多个具有 Edwards-Sokal 性质的渗流测度，或许令人惊讶。这一现象最早在 [98] 中被发现，并在 [46][3]中得到进一步研究。我们构造了一个适用于任意有限图 G的此类测度的显式族（通常不同于 FK-伊辛模型），且这些测度随耦合常数 J连续变化。更多示例请见注2.15，那里给出了一个范围更广的示例类。

关系 $\sigma \sim \mathscr{S}^+(\omega)$ 的一个经典推论是，将 ω 的连接事件与 σ 中的自旋关联联系起来的恒等式。特别地，我们将频繁用到

$$\mathbb{E}_G^+[\sigma_x] = \mathbb{P}_G^+(x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} \partial G) \tag{2.9}$$

and

$$\mathbb{E}_G^+[\sigma_x \sigma_y] = \mathbb{P}_G^+(x \overset{\omega}{\longleftrightarrow} y), \tag{2.10}$$

对于任意 $x, y \in G$。这里，标准记号 $\overset{\omega}{\longleftrightarrow}$ 表示两侧属于 ω的同一个连通分支。在继续讨论之前，我们再介绍一个可能会让读者感到意外的结果。其证明很简单，留待本节末尾给出。

命题 2.8。设 G为一个平面图。

- （连线边界条件）令$\mathbf{n} \sim \mathbb{P}^{\emptyset, \overset{\emptyset}{G^\dagger}, J^\dagger}$ 为弱对偶图上的双重随机流，且满足自由边界条件。则，$\widehat{\ }\mathbf{n}$ 的对偶补集 $\widehat{\ }\mathbf{n}^*$ 与 $\omega \sim \mathbb{P}_G^+$ 具有相同的分布。

[3]我们建议使用“Edwards-Sokal 性质”这一术语，以区别于“divide-and-colour 表示法”，并要求它们所诱导的划分是图的连通子集。

- （自由边界条件）令$\mathbf{n} \sim \mathbb{P}^{\emptyset}_{G^*, J^\dagger}$ 为强对偶图上的双重随机流，且满足自由边界条件。则，$\widehat{\mathbf{n}}$的对偶补集 $\widehat{\mathbf{n}}^*$ 与 $\omega \sim \mathbb{P}_{fG}$具有相同的分布。

对于平面图，定理2.7 可以概括如下：在双重随机电流的对偶补集的各个簇上抛硬币，所得结果服从一个伊辛模型。这不应与以下事实混淆：对双重随机电流本身（即不是其对偶补集）执行相同的步骤，所得结果则服从 XOR-伊辛模型的分布 [73]。

下一个结果建立了 ω 与双重随机电流之间的联系，该联系在任意有限图上都成立 G。在第2.2节中，我们将利用它进一步扩展这种耦合。我们将该结果表述为 ω的另一种定义。

定义 2.9。令 G 为任意有限图。我们构造 $(\mathbf{n}\ \omega, \tau, \sigma)$ 的一个耦合 $\mathbb{P}^{+}_{G}$，其中 $\mathbf{n} \in \Omega_{\emptyset}$、$\omega \in \{0,1\}^{E(G)}$ 和 $\tau, \sigma \in \{\pm 1\}^{V(G)}$，具体如下。

(1) 在连线边界条件下，对双重随机电流 $\mathbf{n} \sim \mathbb{P}^{\emptyset}_{,G^{\emptyset}}$ 进行采样。

(2) 通过设置 $\tau = \mathscr{S}^{+}(\widehat{\mathbf{n}})$ 来抽样 $\tau \in \{\pm 1\}^{V(G)}$。

(3) 抽样一个独立的键渗流 η，其参数为 $1 - \exp(-2J_{uv})$。

(4) 令

$$\omega = \widehat{\mathbf{n}} \cup (\eta \cap \xi(\tau)),$$

(5) 通过设置 $\sigma = \mathscr{S}^{+}(\omega)$ 来抽样 $\sigma \in \{\pm 1\}^{V(G)}$。

关键在于，定义 $(\omega,\ \sigma,\ \tau\sigma)$ 2.9 中的耦合 恰好与定义 $(\omega,\ \sigma,\ \tilde{\sigma})$ 2.6 中的耦合完全一致。利用命题 2.12中的类似论证不难验证这一点，留给感兴趣的读者。

注 2.10。 上述关于 ω 的分布的描述，应与已知的单重随机电流和 FK-伊辛模型 [7,75]之间的耦合进行比较。类似地，按照与定义 2.9 中完全相同的步骤，只是从带源双重随机电流测度开始

$$\mathbf{n} \sim \mathbb{P}^{A,\emptyset}_{G}$$

将得到按照条件测度 $\mathbb{P}_G(\cdot \mid \omega \in \mathcal{F}_A)$ 抽取的 ω，其中 $\mathcal{F}_A$ 是指 ω 的簇在子集 A（其大小为偶数）的顶点上诱导出偶分划这一事件。

现在我们将给出定理 2.7 的两种证明。第一种证明适用于任意有限图 G，并将在过程中介绍耦合的其他方面，这些方面之后还会用到。第二种证明则利用命题 2.8，通过运用随机电流模型的切换引理来证明平面图上的结果。后者的一个版本见于 Ivan Hejný 的硕士论文 [58]，该论文直接基于 [71]。 在 [67]（同样使用 [71]）中也有一个类似的表述。

在第一种证明中，乘积 τ 对于理解 σ 与 ω 之间的耦合至关重要。我们先从一个只涉及这一对 $(\sigma,\ \tau)$ 的观察开始。

引理 2.11. 设 $(\sigma, \tilde{\sigma})$ 是两个如 (2.2) 所述的相互独立的伊辛模型，并令 $\tau = \sigma\tilde{\sigma}$。那么，在给定 τ的条件下，σ仍服从定义在 G上的伊辛模型分布，但现在具有依赖于 τ的

耦合常数 J^τ 由下式给出

$$J^\tau_{uv} = 2 \times \mathbf{1}(uv \in \xi(\tau))J_{uv}$$

对每个 $uv \in E(G)$。

证明。 我们只需重新整理出现在 (2.2) 中的哈密顿量,

$$J_{uv}(\sigma_u\sigma_v + \tilde{\sigma}_u\tilde{\sigma}_v) = 2 \times \mathbf{1}(\tau_u = \tau_v)J_{uv}\sigma_u\sigma_v, \tag{2.11}$$

由此，该结果是不言自明的。 □

注意，由于 (2.11) 形式简单，我们可以将其解释为限制在子图 $\xi(\tau)$ 上、且耦合常数为 $2J$ 的伊辛模型。例如，这意味着 σ 限制在 $\{\tau = -1\}$ 与 $\{\tau = +1\}$ 上的状态变为条件独立。有了该引理，我们现在可以清楚地阐明该耦合的结构。

命题 2.12。 考虑耦合 $\mathbb{P}^+_G$ 在给定 τ 时的条件分布：

1. 二元组 (ω, σ) 的（条件）分布，即为耦合常数为 J^τ 的伊辛模型与 *FK*-伊辛模型之间的 (2.6) 。特别地， ω 的条件分布是 $\phi^+_{G,\,J^\tau}$。*2.* 两个渗流 ω^+ 与 ω^- （条件）独立，并分别按照测度 $\phi^+_{G\,,\,J^\tau}$ 分布，该测度分别限制在子图 $\xi^+(\tau)$ 与 $\xi^-(\tau)$ 上。

利用命题 2.12，我们还可以给出耦合 $\mathbb{P}$中这一对 $(\tau,\ \omega)$ 的显式密度,

$$\mathbb{P}^+_G((\tau,\omega)) \propto \mathbf{1}(\tau \in \Sigma^{V^+}, \omega \subseteq \xi(\tau)) \times 2^{k(\omega)} \prod_{uv\in\omega} p_{uv} \prod_{uv\in\xi(\tau)\setminus\omega} (1-p_{uv}) \tag{2.12}$$

$$\propto \mathbf{1}(\tau \in \Sigma^{V^+}, \omega \subseteq \xi(\tau)) \times \exp(-\sum_{uv\in E(G)} J\tau_u\tau_v) \times 2^{k(\omega)} \prod_{uv\in\omega} p_{uv} \prod_{uv\notin\omega} (1-p_{uv}).$$

这将在 第 3.1 节中使用。在证明该结果之前，我们先说明它如何推出定理 2.7 .

定理 *2.7* 的第一种证明。 根据命题2.12和定理 2.5，我们看到，在给定 ω 和 τ的条件下， σ 在 $\Sigma^{\partial G}$ 中那些在 ω 的簇上保持常值的自旋构型之间均匀分布。由于该分布与 τ 无关，因此即使不对τ进行条件化，这一结论仍然成立，从而证明了该结果。 □

命题 *2.12* 的证明。 注意，定义（2.8）也可以等价地写作 as

$$\omega = \xi(\sigma) \cap \xi(\tau) \cap \eta, \tag{2.13}$$

并回忆一下， η 在每条边 uv 上独立地以概率 $1 - \exp(-4J_{uv})$开启。特别地，我们看到， $\xi(\tau) \cap \eta$ 可以解释为（在给定 τ的条件下）参数为.....的伯努利键渗流

$$1 - \exp(-2J^\tau_{uv}).$$

利用引理2.11，我们现在可以将（2.13）准确地认定为我们在（2.6）中给出的 FK-伊辛模型定义。与 ω^- 的独立性是 FK-伊辛模型的性质；从（2.7）可以明显看出，区域不同连通分支上的限制彼此独立。 □

现在我们转向定理2.7的第二个证明，并限制在 G 为平面的情形。我们证明 + 边界条件下 ∂G的结果，尽管对于自由边界条件，论证几乎完全相同。我们将使用双重随机电流模型的两个性质。

第一条性质与切换引理密切相关。自 [56] 中提出以来，该引理一直是研究随机流和伊辛模型的重要工具。我们所用的略微推广版本可见于 [7,引理 2.1][4]。对于任意图 H，记 $\mathcal{E}(H)$ 为 H 的偶 （或欧拉）子图的集合（即诱导出的顶点度数均为偶数的子图）。当 $\mathbf{n}$ 为一个流时，我们将其视为一个多重图，其中每条边有 $\mathbf{n}_e$ 个副本$e \in E(G)$，并将 $\mathcal{E}(\mathbf{n})$ 视为$\mathbf{n}$的偶数子多重图集合。我们令$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$按照 $\mathbb{P}^{\emptyset}_{G}{}^{\emptyset}_{J}$, 进行抽样。

- **（切换引理）**在给定$\mathbf{n}$的条件下，$\mathbf{n}_1$ 在 $\mathcal{E}(\mathbf{n})$ 上服从均匀分布。

我们的第二条性质涉及伊辛模型的 Kramers-Wannier 对偶性。当 G为平面图时，以下两个集合之间存在一一对应关系： $\Sigma^{\partial G}$ 满足+ 边界条件的自旋构型集合（定义在 ∂G 上），以及集合 $\mathcal{E}(G^\dagger)$ ，即弱对偶图的偶子图集合 $G^\dagger$。该双射通过将每个 $\sigma \in \Sigma^{\partial G}$ 与其畴壁展开 $\partial\sigma$ 相匹配来定义（回顾式 (2.5)）。设$\mathbf{n}$ 为定义在 $G^\dagger$ 上的单重随机流，其抽样概率正比于权重 $w_{J^\dagger}$。

- **（单个流的奇部）** $(\mathbf{n}_1)_{\text{奇部}}$的分布与 $\partial\sigma$ 在 $\sigma \sim \mathbb{P}^+_G$ 下的分布相同。

这一结果可见于 [7,定理 3.2] 的证明中。

注 2.13。 我们之后会用到一个类似的事实：整个双重电流 $\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 的奇部是异或伊辛模型 τ的畴壁展开。这是由于二者等价，

$$\mathbf{n}_{\text{odd}} = (\mathbf{n}_1)_{\text{odd}} \triangle (\mathbf{n}_2)_{\text{odd}} \quad \text{and} \quad \tau = \sigma\tilde{\sigma}.$$

定理 2.7 的第二种证明。 取 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \sim \mathbb{P}^{\emptyset}_{G^\dagger, J^\dagger}$。接着令 $\omega = (\widehat{\mathbf{n}})^*$，根据命题 2.8 ，它的分布与在 $\mathbb{P}^+_G$ 下的分布相同。我们的目标是确定 $\mathscr{S}^+(\omega)$ 的分布。

根据上文所述的对应关系，自旋构型 $\sigma \in \Sigma^{\partial G}$ 在 ω 的簇上为常值这一条件，等价于集合 $\mathcal{E}(\mathbf{n})$。因此，利用 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 的对应关系，只需证明：给定 $\mathbf{n}$ 后，$(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 的分布在 $\mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$ 上均匀分布。我们将证明，一旦得到下面这个简单的组合事实，这便可由 $\mathbf{n}_1$ 的分布在 $\mathcal{E}(\mathbf{n})$ 上均匀分布这一性质推出（即切换引理）。

- 固定任意一个流$\mathbf{n}$。映射 π：$\mathcal{E}(\mathbf{n}) \to \mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$，它将任意偶数子多重图投影到其奇数边集合 $\pi(\mathbf{m}) = \mathbf{m}_{\text{奇数}}$，对于 $\mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$ 中的任意元素，其原像数量都相同。

确实，对于任意 $\eta \in \mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$， π-原像的数量可按每条边分解，且由下式给出

$$\prod_{e\in\eta}\left(\sum_{\substack{1\leqslant m\leqslant \mathbf{n}_e\\ m \text{ odd}}}\binom{\mathbf{n}_e}{m}\right)\prod_{e\notin\eta}\left(\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant \mathbf{n}_e\\ m \text{ even}}}\binom{\mathbf{n}_e}{m}\right) = 2^{\sum_e(\mathbf{n}_e-1)},$$

[4]注意，文中指出，对于任意固定的$\mathbf{k} \in \mathcal{E}(\mathbf{n})$，$\mathbf{n}_1$ 的条件分布在$\mathbf{n}_1 \mapsto \mathbf{n}_1 \triangle \mathbf{k}$ 下保持不变。由于该映射是 $\mathcal{E}(\mathbf{n})$ 上的双射，这与我们在此使用的版本等价。

它与[5] 的 η相互独立。这恰好是确保$(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 仍然服从均匀分布（此时是在集合 $\mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$上）的适当条件，证明完毕。 □

注 2.14。 从计算费米子无序算符（它们对应于对偶上的序算符）的关联函数这一角度来看，观察到在双重随机流的对偶补集的簇上抛硬币会产生伊辛模型的分布，这一点可以由 [7, 39, 72], 推出，从而为定理 2.7提供了第三种证明。

注 2.15。 细心的读者会注意到，上述证明实际上可以推广到按照测度 $\mathbb{P}^{A,\emptyset}_{G^\dagger}$ 抽样得到的双重随机流 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ （即源点为 $\partial\mathbf{n}_1 = A$ 和 $\partial\mathbf{n}_2 = \emptyset$），其中任意子集 $A \subset V$ 均可。也就是说，仍然具有这样的性质：给定 $\mathbf{n}$ 后，$(\mathbf{n}_2)_{\text{odd}}$ 在 $\mathcal{E}(\widehat{\mathbf{n}})$ 上服从均匀分布。这便产生了一大类具有 Edwards-Sokal 性质的测度。有趣的是，利用 $\phi_{G,J}$ 的自对偶性以及一个显式凸分解，可以证明 FK-Ising 测度在这一类中是非极端的

$$\phi^{\mathrm{f}}_{G,J} = \sum_{A \subset V} \alpha_A \times \mathbb{P}^{A,\emptyset}_{G,J}\left(\widehat{\mathbf{n}} \in \cdot\right), \tag{2.14}$$

其中系数满足$\sum_A \alpha_A = 1$ 与$\alpha_A \propto \mathbb{E}^{\mathrm{f}}_{G,J}[\prod_{v\in A}\sigma_v]$。这些观察是耦合具有不同边界条件的伊辛模型的起点，相关内容将在后续工作中出现。

命题2.8的证明。我们令$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ 为弱对偶 $G^\dagger$上的双重随机电流模型。取（2.8）的对偶后，

$$\omega^* = \partial\sigma \cup \partial\tilde{\sigma} \cup \eta^*.$$

我们将这些项分别与该分解等同起来

$$\widehat{\mathbf{n}} = (\mathbf{n}_1)_{\text{odd}} \cup (\mathbf{n}_2)_{\text{odd}} \cup ((\mathbf{n}_1)_{\text{even}} \cap (\mathbf{n}_2)_{\text{even}}).$$

回顾可知，$(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 的分布与 $\partial\sigma$ 相同，因此我们可以关注最后一项。由定义（2.4）可见，在给定$(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$的条件下，属于 $(\mathbf{n}_1)_{\text{even}}$ 的边是在 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 的补集中以参数

$$\tanh J^\dagger_{uv} = \exp(-2J_{uv}).$$

因此，在同时给定 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 与 $(\mathbf{n}_2)_{\text{odd}}$的条件下，属于 $(\mathbf{n}_1)_{\text{even}} \cap (\mathbf{n}_2)_{\text{even}}$的那些边是在 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}} \cup (\mathbf{n}_2)_{\text{odd}}$ 的补集中以参数

$$(\tanh J^\dagger_{uv})^2 = 1 - (1 - \exp(-4J_{uv})).$$

根据（2.1），这恰好与 η^* 的分布一致，证明完毕。 □

[5]这里我们用到了经典恒等式 $1 - 1 = 0$。

2.2 高度函数

在本节中，我们固定 G 为平面。我们的目标是说明如何将伊辛模型的耦合扩展到包含离散高度函数 H，它将是 IMF 与高斯自由场耦合的离散类比。该高度函数等价于自由费米子点处的六顶点高度函数。在参数范围 $1 \leqslant c \leqslant 2$ 内证明六顶点高度函数的离域曾是一个重要的公开难题，如今已通过多项研究得到解决。目前，有界区域内预期的高斯自由场收敛性仅在自由费米子点处得到证明，相关工作由 [38,39]完成。我们将在第 2.3 节进一步探讨它与六顶点模型的关系。

我们所使用的高度函数由 [37] 引入，而有限区域中的收敛性则在 [39] 中得到证明。我们将逐步构造这一耦合；与 [39] 中的方法不同，此处不涉及到二聚体模型的组合映射（不过读者应注意，二聚体模型对于证明所需的高斯自由场收敛性至关重要）。

首先注意，当 G是平面图时，定义 2.9 中给出的构造可以完全对偶化。从现在起，每当我们提到随机流 $\mathbf{n}$ 时，只考虑它在 $(\mathbf{n}_{\text{odd}},\mathbf{n}_{\text{even}})$ 上的投影，因为流的精确值不会起到任何作用。我们也始终在原始图 $+$ 上施加边界条件，并在弱对偶 G上施加自由边界条件 $G^{\dagger}$[6]。

定义 2.16。设 G 为平面图。

(1) 完全按照定义 $(\mathbf{n}\ \omega, \tau, \sigma)$ 2.9 构造耦合。

(2) 定义（在我们独立选取的一次全局自旋翻转的意义下） $\tau^{\dagger} \in \{\pm 1\}^{V(G^{\dagger})}$ by

$$\partial\tau^{\dagger} = \mathbf{n}_{\text{odd}}.$$

(3) 令 $\omega^{\dagger} = \widehat{\mathbf{n}}^{*}$，并由以下两个条件定义$\mathbf{n}^{\dagger}$

$$\widehat{\mathbf{n}}^{\dagger} = \omega^{*} \quad \text{and} \quad \mathbf{n}^{\dagger}_{\text{odd}} = \partial\tau.$$

(4) 通过令 $\sigma = \mathscr{S}(\omega^{\dagger})$来定义 $\sigma^{\dagger} \in \{\pm 1\}^{V(G^{\dagger})}$，并定义

$$\tilde{\sigma}^{\dagger} = \sigma^{\dagger}\tau^{\dagger}.$$

该定义有若干技术细节：

- 在步骤 (3) 中，这两个条件是相容的，因为 $\partial\tau$ 是偶子图，并且$\partial\tau \subset \omega^{*}$（因为 τ 在 ω的簇上为常数）。
- 在步骤（4）中，重要的是，每个 $\omega^{\dagger}$ 簇上的符号彼此独立，并且与$\mathbf{n}$独立。不过，这里存在一个歧义：这些符号不必与用于构造 σ的符号相互独立。在这个意义上，不存在一个将全部四个伊辛模型耦合起来的规范方式。由于这是最简单的做法，我们可以选择让这些符号与其他一切都完全独立；不过，这不会起任何作用。

[6]这与 [39]的约定相反

It r还需证明，对偶图上引入的对象具有所需的边缘分布 .

- 的边缘分布$\mathbf{n}^\dagger$ 是定义在 $G^\dagger$ 上的双重随机电流，其边界条件为自由边界条件，耦合常数为 $J^\dagger$。这就是命题2.8 和注释2.13的内容。
- 的边缘分布 $\tau^\dagger$ 是定义在 $G^\dagger$ 上的 XOR-伊辛模型，其边界条件为自由边界条件，耦合常数为 $J^\dagger$，同样由注释2.13可知。
- 边缘分布 $\sigma^\dagger$ 和 $\tilde{\sigma}^\dagger$ 是定义在 $G^\dagger$ 上的独立伊辛模型，具有自由边界条件和耦合常数 $J^\dagger$。从定理2.7的第二个证明可以看出这一点。事实上，在给定$\mathbf{n}$的条件下， $\partial\sigma^\dagger$ 的分布（它在全局符号之外决定了 $\sigma^\dagger$ ）等于在（$\mathbf{n}_1$）奇数 上的条件分布，即：

$$\partial\sigma^\dagger \sim (\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}.$$

由于 $\partial\tau^\dagger = \mathbf{n}_{\text{odd}}$，如注释2.13所述， $\partial\tilde{\sigma}^\dagger$ 的条件分布于是为$(\mathbf{n}_2)_{\text{odd}}$，即：

$$\partial\tilde{\sigma}^\dagger \sim (\mathbf{n}_2)_{\text{odd}}.$$

因此，无条件联合分布（$\partial\sigma^\dagger$， $\partial\tilde{\sigma}^\dagger$）与（（$\mathbf{n}_1$）$_{\text{odd}}$， （$\mathbf{n}_2$）$_{\text{odd}}$）相同；然而，$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$ 按构造彼此独立，这就证明了该结论。

我们注意到对（$\mathbf{n}^\dagger$， $\tau^\dagger$， $\omega^\dagger$， $\sigma^\dagger$）的耦合是定义2.9中耦合的另一个实例，现处于自由边界条件下。特别地，在给定$\mathbf{n}^\dagger$时， $\tau^\dagger$ 的分布即为$\mathscr{S}$（$\widehat{\ }\mathbf{n}^\dagger$）的分布。

这一构造的一个特别重要的推论是，所得二元组（τ， $\tau^\dagger$）满足一致性条件：绝不会同时

$$\tau_u \neq \tau_v \quad \text{and} \quad \tau^\dagger_{u^\dagger} \neq \tau^\dagger_{v^\dagger} \tag{2.15}$$

出现于互为对偶的一对边 $uv \in E$（G）与 $u^\dagger v^\dagger \in E$（$G^\dagger$）。要看出这一点，注意在该构造中 $\widehat{\ }\mathbf{n} \subset \omega$，因此 $\widehat{\ }\mathbf{n}$ 与 $\widehat{\ }\mathbf{n}^\dagger$ （并且特别地$\mathbf{n}_{\text{odd}}$ 与$\mathbf{n}^\dagger$ 为奇数）绝不会相交。

我们现在可以给出高度函数 H的显式定义。设 $G^\diamondsuit$ 为 G的菱形图。这是一个平面二分图，其顶点集为 V（G）$\cup V$（$G^\dagger$），并且当且仅当 $u \in V$（G）是与面 $u^\dagger \in V$（$G^\dagger$）关联的顶点时， u 与 $u^\dagger$ 之间有一条边。

定义 2.17。 我们定义 H 为唯一函数 $H\colon V(G^\diamondsuit) \to \frac{1}{2}\mathbb{Z}$，使得 $H|_{\partial G} = 0$，且对于每个与面 $u^\dagger \in V(G^\dagger)$ 相邻的 $u \in V(G)$，都有

$$H_{u^\dagger} - H_u = \frac{1}{2}\tau_u\tau^\dagger_{u^\dagger}.$$

不难验证，用这条局部规则来定义 H 是全局一致的。事实上，只需检查相关的 1-形式在 $G^\diamondsuit$的各个面周围是闭的，也就是说，对于每一对彼此对偶的边 $uv \in E$（G）和 $u^\dagger v^\dagger \in E$（$G^\dagger$），检查它在$uu^\dagger vv^\dagger$ 四环周围是闭的。我们只需注意到

$$\frac{1}{2}(\tau_u\tau^\dagger_{u^\dagger} - \tau^\dagger_{u^\dagger}\tau_v + \tau_v\tau^\dagger_{v^\dagger} - \tau^\dagger_{v^\dagger}\tau_u) = \frac{1}{2}(\tau_u - \tau_v)(\tau^\dagger_{u^\dagger} - \tau^\dagger_{v^\dagger}), \tag{2.16}$$

根据一致性条件（2.15），该项必为零。从定义也可直接看出 H 在 G上取整数值，在 $G^\dagger$上取半整数值。此外，我们有

$$\tau_u = (-1)^{H_u} \quad \text{and} \quad \tau^\dagger_{u^\dagger} = (-1)^{H_{u^\dagger}-1/2}.$$

这是对两个连续极化场的一种实现的离散类比（它们分别满足+ 和自由边界条件），即将适当缩放的高斯自由场取余弦和正弦（参见猜想 1.1和 [8]）。

至此，我们已经定义了定理1.10陈述中出现的所有离散对象之间的完整耦合：

$$(\sigma, \tilde{\sigma}, \sigma^\dagger, \tilde{\sigma}^\dagger, \tau, \tau^\dagger, \mathbf{n}, \mathbf{n}^\dagger, \omega, \omega^\dagger, H).$$

（$(H,\ \tau,\ \tau^\dagger,\ \mathbf{n},\ \mathbf{n}^\dagger)$（即不包括任何伊辛模型的耦合）见 [39]，文中将其称为主耦合。我们强调，这种耦合的若干局部方面此前已在文献中出现；我们在备注 2.22中列出了这些实例。

备注 2.18。我们指出，当 G 和 $G^\dagger$ 是正方格子的适当子集时，图 $G^\diamond$ 是正方格子的另一个子集，而六顶点箭头构型定义在该图的对偶图上。此处给出的 H 定义与六顶点高度函数的通常定义相差一个因子$1/2$ （例如，参见 [54]；其中该函数在二部图分解 $\mathbb{Z}^2$的两个子集上分别始终取偶数和奇数值，对应于此处的 $V(G^\diamond) = V(G) \cup V(G^\dagger)$ ）。

2.3 推广到阿什金–泰勒模型

现在我们将耦合 $\mathbb{P}^+_G$ 推广到阿什金-泰勒模型的相互作用版本。我们将仅考虑满足以下条件的情形：

$$J_{uv} \geqslant 0 \quad \text{and} \quad \cosh(2J_{uv}) \geqslant e^{-2U_{uv}} \tag{2.17}$$

对每条边 $uv \in E(G)$都成立。读者应注意，第二个不等式通常写成等价的形式

$$\tanh(U_{uv}) \geqslant -(\tanh(J_{uv}))^2.$$

实际上，耦合的定义和定理 2.20 都不要求这一限制。然而，只有在此范围内，阿什金-泰勒模型才具有对偶关系 [88]。这是一个从 (J, U) 到一对 $(J^\dagger, U^\dagger)$ 的映射，后者也满足 (2.17)。我们注意到，自对偶线

$$\sinh(2J_{uv}) = e^{-2U_{uv}}$$

始终满足 (2.17)，并且是对偶映射的不动点唯一所在的直线。这也是已知阿什金-泰勒自旋模型具有关联不等式的范围 [88],；我们在这一一般设定下给出的命题 3.1 的证明将依赖于这一限制。以下是定义 2.6 的推广。

定义 2.19。定义测度

$$\mathbb{P}^+_G(\sigma, \tilde{\sigma}, \eta) \propto \mathbf{1}(\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma^{V^+}) \exp\Big(\sum_{uv \in E(G)} J_{uv}(\sigma_u \sigma_v + \tilde{\sigma}_u \tilde{\sigma}_v) + U_{uv} \tau_u \tau_v \Big) \prod_{uv \in \eta} p_{uv} \prod_{uv \notin \eta} (1 - p_{uv})$$

在集合 $\{\pm1\}^V \times \{\pm1\}^V \times \{0,1\}^{E(G)}$ 上，通过设定以下内容来构造 $\omega \subset E(G)$

$$\omega = \xi(\sigma) \cap \xi(\tilde{\sigma}) \cap \eta. \tag{2.18}$$

注意，参数 $p = 1 - \exp(-4J)$ 与之前相同，且不依赖于 U 的取值。定理 2.7 在相互作用模型中仍然成立。

定理 2.20。 在耦合 $\mathbb{P}_G^+$ 下，给定 ω时， σ 的分布在所有于 ω的簇上取常值的自旋构型 $\sigma \in \Sigma^{\partial G}$ 中均匀分布。特别地， $\sigma \sim \mathscr{S}^+(\omega)$。

这一结果的证明方法与定理2.7类似。关键在于，我们只将测度乘以一个依赖于 τ 的因子，因此，给定 τ 时的分布性质（特别是引理 2.11）不受影响。

如果图 G 是平面的，且满足（2.17），那么也有一个与命题2.8类似的结果。事实上，可以将 ω^* 与第 $(J^\dagger, U^\dagger)$ 节 1.3中引入的、具有相同分布和权重的 Ashkin-Teller随机流对应起来。对应关系的具体细节留给读者。

注记2.21。 正如 [54, 73], 中所探讨的，渗流模型的行为会沿着自对偶线发生变化。

1. 在章节 $J \geqslant U$中，存在一种超对偶 。也就是说， $\omega \sim \mathbb{P}_G^+$ 与 $\omega^\dagger \sim \mathbb{P}_{G^\dagger}^{\mathrm{f}}$ 之间存在一种耦合，使得

$$\omega \subset (\omega^\dagger)^* \quad \text{and} \quad \omega^\dagger \supset \omega^*$$

也就是说，每一对原始-对偶边对都至少被 ω 或 $\omega^\dagger$之一覆盖。

2. 在点 $J = U$处， ω 的分布等于临界FK(4) 随机簇模型，并且恰好是自对偶的。3. 在自对偶线的另一侧 $J \leqslant U$ ，模型则表现出次对偶。此外，已知渗流模型 ω 在$J \leqslant U$时满足FKG不等式，而在 $J > U$ 时则不满足（见第3.1节）。

有趣的是，这一变化恰好发生在六顶点模型本身从非局域行为转变为局域行为之时。

备注 第 2.22 节。下面列出这一耦合此前曾出现过的若干场合 .

- 据我们所知，$(\sigma, \tilde{\sigma}, \tau, \omega)$ 的耦合首次出现在 [29, 方程（7）] 中 Ashkin-Teller 模型的 $U \geqslant 0$ 区域。
- $(\tau, \tau^\dagger, \omega^*, (\omega^\dagger)^*, H)$ 的耦合，即对每个渗流取对偶，出现在文献 [73] 中。

- $(\sigma, \tilde{\sigma}, \tau, \omega, 2H)$ 的耦合也明确出现在文献 [55] 中，具体是在 $\mathbb{Z}^2$ 上的六顶点模型背景下（对应于 Ashkin-Teller 模型的自对偶线）。
- $(\tau, \tau^\dagger, \omega, \omega^\dagger, 2H)$ 的耦合正是 [54, 定义 4.5] 中为研究正方格子上六顶点模型的离域而引入的耦合。记号之间的对应由 $(\tau, \tau^\dagger, \omega, \omega^\dagger) \leftrightarrow (\sigma^\bullet, \sigma^\circ, \xi^\bullet, \xi^\circ)$ 给出。在那里，上文提到的超对偶性质被关键地用于得出六顶点高度函数的离域。

注记 2.23. 这一耦合向其他情形的推广，包括多布鲁申边界条件以及更一般的边界条件，将出现在未来的工作中。

3 表示的性质

3.1 关联不等式

在本节中，我们将研究测度 $\mathbb{P}_G^+$ （定义 2.19）的 FKG性质。我们的论证反复涉及的一个问题是，分布 ω 并不知晓满足 FKG不等式。事实上，人们通常预期双重随机流（等价地， ω）不满足 FKG不等式，尽管要完全排除这种可能性目前似乎仍是一个开放问题 [67]。

本节的结果可以被视为克服这一障碍的一种方法。第一个结果为分解 (ω^+, ω^-)恢复了一类特定的 FKG不等式。该结果源自 [54]的精彩工作。随后，我们证明了一个技术性扩展，从而可以将其应用于第 3.3 节中无限簇的构造。然后，我们陈述并证明一个简单的关联不等式，它将使我们能够消除一个递增事件与一个递减事件之间的关联。

我们首先关注测度 $\mathbb{P}_G^+$ 的 FKG性质。简要回顾一下，取值于一个（有限）偏序集 $(\mathcal{X}, \leqslant)$ 中的随机变量 $X \sim \mu$ 具有 **FKG性质** ，如果对于任意两个递增函数 $f, g:\ \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$,

$$\mu\left[f(X)g(X)\right] \geqslant \mu[f(X)]\mathbb{E}[g(X)].$$

我们将考虑的偏序集只有自旋构型空间 $\{\pm 1\}^V$ 和键构型空间 $\{0,1\}^E$ ，它们都带有自然序，以及这些空间的各种乘积。对于任意子集 $S \subset V$ 或 $H \subset E$，我们用记号 τ_S 或 ω_H^+ 表示限制 $\tau|_S$ 或 $\omega^+|_H$ 。

本节最重要的结果涉及三元组 $(\tau,\ \omega^+,\ \omega^-)$ 在分布 $\mathbb{P}_G^+$ 下的分布。我们用记号 $(\tau,\ \omega^+,\ -\omega^-)$ 表示所考虑的三元组属于偏序集

$$\{\pm 1\}^V \times \{0,1\}^E \times \{0,1\}^E,$$

其序关系为 $(\tau_1,\ \omega_1^+,\ \omega_2^-) \leqslant (\tau_2,\ \omega_2^+,\ \omega_2^-)$，当且仅当 $\tau_1 \leqslant \tau_2$、 $\omega_1^+ \leqslant \omega_2^+$和 $\omega_1^- \geqslant \omega_2^-$成立。也就是说，我们反转了第三个分量上的序，并且若函数 f 在 $\tau,\ \omega^+,\ -\omega^-$中对 τ和 ω^+ 递增、对 ω^-递减，则称其为递增函数。

命题 3.1。 定义 $\mathbb{P}_G^+$ 中的耦合 *2.19*具有以下随机性质：

1. 三元组 $(\tau, \omega^+, -\omega^-)$ 具有 *FKG*性质。*2.* ω 的边界簇 $\mathcal{C}_0$ 具有 *FKG*性质。

第一条性质应理解为：各自而言， ω^+ 和 ω^- 具有 FKG性质，但二者之间负相关 。这弥补了传统 FKG不等式无法适用于并集 $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$的不足。命题 3.1 中的第二条性质是第一条性质的直接推论（因为边界簇 $\mathcal{C}_0$ 是 ω^+的递增函数），但它格外有用，值得单独强调。

命题3.1 的结果 [54], 在其中以正方格子上的六顶点自旋表示来表述。在那里，这种精妙的 FKG 结构是推导六顶点高度函数离域性质的关键。我们在此回顾这一证明，以使其完备，并且

因为它是后续内容的重要组成部分。这是以下三个重要事实的推论：

(1) τ 上的边缘分布具有 FKG性质，见引理 3.7。(2) 渗流 ω^+ 和 ω^- 在给定 τ的条件下相互独立。(3) 给定 τ， ω^+(分别是 ω^-) 的条件分布关于 τ是递增的（分别是递减的）。

当 $U \geqslant 0$ 时，这些事实中的第一个已在 [29, 引理 1] 中得到证明。沿着正方格子的整条自对偶曲线，这一事实也已在 [55]和 [54] 中得到证明。后面的这些证明只是表面上用到了平面对偶性，而将其推广到一般情形，正是我们在此给出的证明。第二个和第三个事实依赖于命题2.12中阐明的耦合结构。事实上，它们是 FK-伊辛模型$\phi_{G,\ J}$ 在图上的一般性质的推论： G 的不同连通分支之间的独立性，以及分布关于 J 的单调性。结合起来，这三个事实可以依次应用，从而得出三元组 (τ， ω^+, $-\omega^-$) 满足 FKG不等式。

我们还注意到，上述第一条和第三条事实意味着，在测度 $\mathbb{P}^+$ （或者显然地，在 $\mathbb{P}^{\mathrm{f}}$）下，存在随机支配

$$\omega^+ \succeq \omega^-. \tag{3.1}$$

注3.2。 之所以 ω 不能直接满足 FKG，主要是因为在参数范围$J > U$内， τ每个簇的自旋在给定 ω的条件下，服从一个 反铁磁伊辛模型的分布，并且每个簇上的自旋都被限制为常数（见（2.12））。需要指出的是，命题 3.1 并不能直接排除 ω 满足 FKG 的可能性。例如，若 （ω^+, ω^-）表示 FK-伊辛模型中簇的两种符号，那么这一对 （ω^+， $-\omega^-$）以及它们的并集 $\omega^+ \cup \omega^-$ 都满足 FKG不等式。

接下来的结果将用于证明，构型（τ， ω^+）可以以一种合适的方式进行探索，同时在每个阶段都保持 FKG不等式。探索算法（有时也称为决策树）与 FKG不等式的结合，近来已被用于研究渗流模型的各种方法中 [40,41,53]。迄今为止，相关应用通常局限于单调测度，这是一种严格强于满足 FKG不等式的性质。若测度 μ 在 $\{0,1\}^E$ 上满足以下条件，则称其为单调测度：

(1) 设 $X \sim \mu$。对于每个子集 $H \subset E$，条件测度

$$\mu(X \in \cdot \mid X_H)$$

关于 $X_H \in \{0,1\}^H$ 随机递增。

只要测度 μ 严格为正[7] ，该条件就等价于另一个条件：(2) 设 $X \sim \mu$。对于每个子集 $H \subset E$ 和 $X_H \in \{0,1\}^H$，条件测度

$$\mu(X \in \cdot \mid X_H)$$

具有 FKG性质。

[7]读者应注意，由于硬核约束，我们考虑的各种测度并非总是为正条件 s.

关于单调测度这一概念及其他等价刻画的详细介绍，请参阅 [57] 。条件（1）和（2）的结合将在第3.3节的论证中发挥重要作用。应将它们理解为：可以对 X 进行部分探索，同时确保各种关联不等式仍然成立。

遗憾的是，我们无法证明 ω^+ 的分布是单调的。不过，以下结果足以满足我们的需要。该结果指出，可以通过一种特定方式探索联合对 $(\tau,\ \omega^+)$，从而保持 FKG 不等式。

引理 3.3. 设 $S \subset V$ 和 $H \subset E(G)$ 满足约束 $H \subset E(S)$。那么，条件测度

$$\mathbb{P}_G^+((\tau,\omega^+) \in \cdot \mid \tau_S, w_H^+),$$

满足 *FKG* 不等式，并且 [8] 关于(τ_S,ω_H^+)随机递增。

注 3.4. 约束 $H \subset E(S)$ 对我们的论证至关重要；否则我们不知道如何证明该结果（甚至无法确定该结果是否成立）。这对我们的探索过程意味着，在确定一条新边的状态时，必须先确保已经确定该边两个端点上的 τ-自旋，然后才能继续。

现在我们转而讨论关于 ω 的一个相关性引理。虽然这并非绝对必要，但它有助于简化定理4.6的证明，而且可能具有更广泛的用途。我们引入以下定义。

定义 3.5 （原始事件）。 递增事件 A 若满足以下条件，则称为 ω 的原始事件：对于任意 $\omega \in A$ 以及对 ω 中各簇的任意着色，仍存在一个满足 A的单色子集。

这个定义应理解为：存在一个簇作为事件 A的“见证”。与平面渗流标准 RSW 理论相关的大多数递增事件（例如关于两个集合 A 和 B的事件 $A \leftrightarrow B$ ）都可看作原始事件。这个定义的用处如下。对于任意递增原始事件 A，若对每个$\zeta \in \{\pm 1\}$设 $A^\zeta = \{\omega^\zeta \in A\}$ ，则有如下简单的包含关系

$$A \subset A^+ \cup A^-.$$

注意，对于只取决于单个顶点的簇的事件 x 例如，此时有精确分解 $A = A^+ \sqcup A^-$。总之，若 A 是任意递增原始事件，则还利用（ 3.1 ）

$$\mathbb{P}(\omega^+ \in A) \leqslant \mathbb{P}(\omega \in A) \leqslant 2\mathbb{P}(\omega^+ \in A). \tag{3.2}$$

当与 ω^+ 和 ω^-的联合 FKG 性质结合使用时，这将成为一种非常有用的比较工具。

引理 3.6 （反相关引理）。 设 A 是一个递增的原始事件， B 是一个递减事件。那么，

$$\mathbb{P}(\omega \in A \cap B) \leqslant 2\mathbb{P}(\omega^- \in B)\mathbb{P}(\omega \in A).$$

证明。 利用并集界以及包含关系 $A \subset A^+ \cup A^-$ （因为 A 是原始的）和 $B \subset B^\pm$（因为 B 是递减的），

$$\mathbb{P}(\omega \in A \cap B) \leqslant \mathbb{P}(A^+ \cap B^+) + \mathbb{P}(A^- \cap B^-).$$

[8] 注意，t 在没有对 H 和 S施加约束的情况下，该陈述中的 FKG 部分还将推出随机序关系。 加上这一约束后，这一推论就不再显而易见了。

现在，我们可以应用命题 3.1 中的 FKG性质以及随机支配$\omega^+ \succeq \omega^-$ 来推导出这一结果。

□

本节余下部分将用于证明引理 3.3 和引理 3.7 ，这两个证明略显繁琐。我们选择采用定义 2.19中的一般 Ashkin-Teller耦合设定，其中耦合常数满足（2.17）这一条件至关重要。

关于记号，给定任意 $\omega_H^+ \in \{0,1\}^H$，我们将 $V(\omega_H^+)$ 定义为与 ω_H^+ 中某条开放边相接的顶点集合。此外，令 ν 为在 $\mathbb{P}_G^+$ 下 τ 上的边缘分布。回想一下，若测度 ν 定义在 $\{\pm 1\}^V$ 上，则称其满足 FKG格条件，当且仅当

$$\nu(\tau \vee \tau)\nu(\tau \wedge \tau') \geqslant \nu(\tau)\nu(\tau') \tag{3.3}$$

for 每个 τ， $\tau' \in \{\pm 1\}^V$。当 ν 为正时，这足以保证 FKG 性质 [48, 57].

引理3.7。 边缘分布 ν 满足 *FKG* 格条件。

证明。 我们的首要目标是明确给出 ν 的分布定义。我们考虑映射$x = (x_e)_{e\in E} \mapsto Z_G(x)$，其中 $0 \leqslant x_e \leqslant 1$，定义如下：

$$Z_G(x) = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^V} \mathbf{1}(\sigma \in \Sigma^{V^+}) x(\sigma),$$

其中，对于任意自旋 $\sigma \in \{\pm 1\}^V$和耦合常数 $x: E \to [0,1]$，我们记

$$x(\sigma) = \prod_{\substack{uv \in E \\ \sigma_u \neq \sigma_v}} x_{uv}.$$

由引理2.11可知，边缘分布 ν 的显式表达式为

$$\nu(\tau) \propto \mathbf{1}(\tau \in \Sigma^{V^+}) \times y(\tau) \times Z_G(x_\tau^+) \times Z_G(x_\tau^-). \tag{3.4}$$

其中

$$y_{uv} = \exp(-2(J_{uv} + U_{uv})) \tag{3.5}$$

and

$$x_\tau^\pm = \begin{cases} x_{uv} = \exp(-4J_{uv}) & \text{if } \tau_u = \tau_v = \pm 1, \\ 1 \quad \text{otherwise}, \end{cases} \tag{3.6}$$

对于每个 $uv \in E(G)$。我们将分别考察式 (3.3) 的格条件对式 (3.4) 中三个因子的影响。

(1) 项 $y(\tau)$。众所周知，只要 $0 \leqslant y \leqslant 1$ （即该模型具有铁磁性），就满足 FKG 格条件：

$$y(\tau \vee \tau')y(\tau \wedge \tau') \geqslant y(\tau)y(\tau'). \tag{3.7}$$

仅凭这一点还不足以证明该结果，因此我们需要更精确地进行论述。我们引入边集

$$\mathcal{E}_{\tau,\tau'} = \{uv \in E(G) \mid uv \notin \xi(\tau), uv \notin \xi(\tau'), \tau_u \neq \tau_u'\}.$$

于是有如下精确恒等式，

$$y(\tau\vee\tau')y(\tau\wedge\tau')=\left(\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}}\frac{1}{y_{uv}^2}\right)y(\tau)y(\tau'). \tag{3.8}$$

(2) 项 $Z_G(x_\tau^+)$。我们需要配分函数 $Z_G(x)$ 满足两个性质。

首先是 FKG 格条件 [69, 引理 6。1]，

$$Z_G(x\vee x')Z_G(x\wedge x')\geqslant Z_G(x)Z_G(x'), \tag{3.9}$$

对任意 $0\leqslant x,\ x'\leqslant 1$。第二个性质是不等式

$$Z_G(x')\geqslant\prod_{uv\in E}\frac{1+x'_{uv}}{1+x_{uv}}\times Z_G(x) \tag{3.10}$$

对于 $0\leqslant x'\leqslant x\leqslant 1$[9]。为了证明（3.10），我们可以对不等式积分来论证

$$\frac{\partial}{\partial x_{uv}}\log Z_G(x)=\frac{1}{2x_{uv}}(1-\langle\sigma_u\sigma_v\rangle_x^+)\leqslant\frac{1}{2x_{uv}}\left(1-\langle\sigma_u\sigma_v\rangle_{x'}^+\right)\leqslant\frac{1}{1+x_{uv}}, \tag{3.11}$$

其中 $x'_{uv}=x_{uv}$ 但除此之外 $x'_{zw}=1$。（3.11）中的第一个不等式由伊辛自旋关联的单调性得出，第二个不等式则可直接计算得到。

虽然 $x^+_{\tau\wedge\tau'}=x^+_\tau\vee x^+_{\tau'}$ 确实成立，但通常只能得到不等式

$$x^+_{\tau\vee\tau'}\leqslant x^+_\tau\wedge x^+_{\tau'}.$$

应用（3.10），我们得到

$$Z_G(x^+_{\tau\vee\tau'})\geqslant\left(\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}}\frac{1+x_{uv}}{2}\right)Z_G(x^+_\tau\wedge x^+_{\tau'}).$$

现在可以使用（3.9），从而得到

$$Z_G(x^+_{\tau\vee\tau'})Z_G(x^+_{\tau\wedge\tau'})\geqslant\left(\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}}\frac{1+x_{uv}}{2}\right)\times Z_G(x^+_\tau)Z_G(x^-_{\tau'}). \tag{3.12}$$

同样的推理（交换 $\wedge$和 $\vee$的角色）也表明，这个不等式对项 $Z_G(x_\tau^-)$ 同样成立。

现在我们可以结合（3.8）和（3.12），得到

$$\nu(\tau\vee\tau')\nu(\tau\wedge\tau')\geqslant\left(\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}}\frac{1+x_{uv}}{2y_{uv}}\right)^2\nu(\tau)\nu(\tau').$$

因此，只要满足 $1+x_{uv}\geqslant 2y_{uv}$，该条件就成立；这与（2.17）等价。 □

[9]请注意，这个不等式与映射的平凡单调性相反 $x\mapsto Z_G(x)$。在平面情形下，(3.10) 可由 Kramers-Wannier 对偶性以及对偶配分函数的上述单调性立即推出。

引理 *3.3* 的证明。 根据命题 2.12，在 ω^+ 下，给定 $\mathbb{P}_G^+$ 后 $(\tau,\ \omega_H^+)$ 的条件分布就是 FK-Ising 测度

$$\mathbb{P}_G^+(\omega^+ \in \cdot \mid \tau, \omega_H^+) = \phi^+_{\xi^+(\tau),2J}(\cdot \mid \omega_H^+),$$

它仍满足 FKG 不等式，并且关于 ω_H^+ 和 τ 都是随机递增的。因此，接下来只需证明条件分布

$$\mathbb{P}_G^+(\tau \in \cdot \mid \tau_S, \omega_H^+)$$

满足 FKG 不等式，并且关于变量对 (τ_S, ω_H^+) 递增。为此，我们在 $\{\pm 1\}^V$ 上引入一族由 $\omega_H^+ \in \{0,1\}^H$ 参数化的辅助测度，其定义如下：

$$\mu^{\omega_H^+}(\tau) \propto \mathbf{1}(\tau \in \Sigma^{V^+ \cup V(\omega_H^+)}) \times y(\tau) \times Z(x^+_{\tau,\omega_H^+}) \times Z(x_\tau^-).$$

这里，

$$(x^+_{\tau,\omega_H^+})_{uv} = \begin{cases} \mathbf{1}(uv \notin \omega_H^+) & \text{if } uv \in H, \\ (x_\tau^+)_{uv} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 x_τ^+, x_τ^- 的定义与式（3.6）中相同，而 y 的定义见式（3.5）。我们分两步进行。

步骤 1。 我们提出如下结论。给定 τ_S 和 ω_H^+，条件分布与上述辅助测度一致，即

$$\mathbb{P}_G^+(\tau \in \cdot \mid \tau_S, \omega_H^+) = \mu^{\omega_H^+}(\,\cdot \mid \tau_S), \tag{3.13}$$

对任意 $\tau_S \in \{\pm 1\}^S$ 和 $\omega_H^+ \in \{0,1\}^H$ 均成立。注意，若不对 τ_S 进行条件化，则此结论并不成立，因为我们不会对 ω_H^+ 条件下 τ_S 本身的分布作出任何说明。限制条件 $H \subset E(S)$ 也正是在此处发挥作用。检查式（2.12）中的密度即可得出该结论。

我们现在说明，只需验证以下（广义）FKG 格条件：对于任意 $\eta,\ \eta' \in \{0,1\}^H$ 使得 $\eta \geqslant \eta'$，不等式

$$\mu^{\eta}(\tau \vee \tau')\mu^{\eta'}(\tau \wedge \tau') \geqslant \mu^{\eta}(\tau)\mu^{\eta'}(\tau') \tag{3.14}$$

对所有 $\tau,\ \tau' \in \{\pm 1\}^V$ 均成立。事实上，这足以推出分布

$$\mu^{\omega_H^+}(\,\cdot \mid \tau_S)$$

满足 FKG不等式，且对以下两者均为递增函数 ω_H^+ 和 τ_S [57]，结合恒等式（3.13），这正是我们所要的。

步骤 2。 现在我们通过类似于引理 3.7 的证明，来验证不等式（3.14）。首先，简单观察可知，如果 $\tau \in \Sigma^{V^+ \cup V\ (\eta)}$ 且 $\tau' \in \Sigma^{V^+ \cup V\ (\eta')}$，那么必有

$$\tau \wedge \tau' \in \Sigma^{V^+ \cup V(\eta')} \text{ and } \tau \vee \tau' \in \Sigma^{V^+ \cup V(\eta)},$$

由于排序 $\eta \geqslant \eta'$。我们现在转向耦合常数 $(x^+_{\tau,\eta})$，我们记得每当 $uv \in H$ 时它们与 τ 无关。重要的观察是

$$(x^+_{\tau\vee\tau',\eta})_{uv} = (x^+_{\tau,\eta} \wedge x^+_{\tau',\eta'})_{uv} \quad \text{and } (x^+_{\tau\wedge\tau',\eta'})_{uv} = (x^+_{\tau,\eta} \vee x^+_{\tau',\eta})_{uv}$$

当 $uv \in H$，由于排序 $\eta \geqslant \eta'$。因此，我们有（论证完全如同（3.10）在E（G）$\setminus H$ 上，然后使用（3.9））

$$Z_G(x^+_{\tau\vee\tau',\eta})Z_G(x^+_{\tau\wedge\tau',\eta'}) \geqslant \left(\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}\setminus H}\frac{1+x_{uv}}{2}\right)\times Z_G(x^+_{\tau,\eta})Z_G(x^+_{\tau',\eta'}). \tag{3.15}$$

Th $Z(x^-_\tau)$对应的不等式与之前完全相同。综上，我们推得 t

$$\mu^\eta(\tau\vee\tau')\mu^{\eta'}(\tau\wedge\tau') \geqslant \prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}\setminus H}\left(\frac{1+x_{uv}}{2y_{uv}}\right)^2\prod_{uv\in\mathcal{E}_{\tau,\tau'}\cap H}\left(\frac{1+x_{uv}}{2y^2_{uv}}\right)\mu^\eta(\tau)\mu^{\eta'}(\tau'), \tag{3.16}$$

因此，3.14）在处于（2.17）所述范围时成立。 □

注3.8。我们现在想提及一种上述方法的替代方案，这原本是我们打算采用的方法。定义（2.18）乍看之下表明，最显而易见的做法是根据每个簇上 ω 的联合自旋，将其分解为四个顶点不交的子集：（σ，$\tilde{\sigma}$）分别对应每个簇上的联合自旋：

$$\omega = \omega^{++}\cup\omega^{--}\cup\omega^{+-}\cup\omega^{-+}.$$

现在显然，ω^{++}，例如，是三元组（σ，$\tilde{\sigma}$，η）的直接递增函数，因此满足 FKG 不等式。采用这种方法，可以直接推出每个子集的 FKG性质，以及它们之间的各种关联。我们也可以继续采用这种分解，并仍然证明所有结果（例如见注3.20 ）。最终，处理分解（ω^+，ω^-）更为简单，这种分解已在 [54], 中出现过；不过我们认为，另一种方法（结合引理3.6等不等式）在其他情形下或许也有用，例如研究单重随机电流的对偶。

3.2 RSW理论

本节陈述并证明证明定理 4.6 所需的最基本的 RSW 理论。值得注意的是，关于双重随机流的强得多的穿越结果已在 [38]中确立，但我们并不依赖这些结果。我们还要提到，[54] 中也针对渗流 ω^+，ω^- 在自对偶线的部分区间 $U \leqslant J$上发展了 RSW 结果；这对于沿着猜想 1.3 的方向推广我们的工作，可能会非常有用。

我们引入一些专用于正方格子的记号。我们始终只考虑区域 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$，它们是 $\mathbb{Z}^2$中有限个面组成的连通并集。令 $\partial\Lambda$为与顶点 $v \notin \Lambda$相邻的顶点集合 $u \in \Lambda$。此外，我们要求此类区域的边界（$\partial\Lambda$，$E(\partial\Lambda)$）始终连通。若 Γ 是某个区域可能的边界边（即 $\mathbb{Z}^2$中顶点不自交的边闭合路径），则称 Γ 为 $\mathbb{Z}^2$ 的一个回路，并用 Γ 表示满足 $E(\partial\Gamma) = \Gamma$的唯一区域。我们最常用的区域例子是方框 Λ_n，对每个 $n \geqslant 1$ 定义如下：

$$\Lambda_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x|, |y| \leqslant n-1\right\}.$$

除非另有说明，测度 $\mathbb{P}^+_\Lambda$ 始终指图上的耦合$(\Lambda,\ E(\Lambda))$ 其 $+$ 边界条件施加于 $\partial\Lambda$，且耦合常数固定为 (1.2) 中给出的临界值。

在讨论交叉估计之前，我们还需要测度 $\mathbb{P}_\Lambda^+$ 的另外两个性质。第一个性质或许是研究平面渗流最重要的工具。

- （**马尔可夫性质**）令 Γ为 $\partial\Lambda$中的任意回路。在条件分布下
$$\mathbb{P}_\Lambda^+(\cdot \mid \Gamma \text{ is } \omega\text{-open}),$$
限制在 Γ 的顶点和边上的三元组（σ，$\tilde{\sigma}$，ω）由 $\mathbb{P}_\Gamma^+$ 给出,¯唯一可能的例外是必须翻转 σ 和 σ' 的全局符号（这不会影响 ω），以确保它们在 Γ上是 $+/+$ 。

特别地， $\omega|_\Gamma$ 和 $\omega|_{\Lambda\setminus\Gamma}$ 的状态在给定 Γ 为- ω-开放的条件下相互独立。我们经常利用这一点从外部探索一个回路，从而不会透露回路内部的任何信息。注意，与 ϕ_G不同，对于 ω-闭割集并不存在马尔可夫性质（例如，在发现整个 ω-簇之后）。我们还需要的另一个性质是空间混合估计。我们只会在引理 3.13的证明中使用这一性质。

- （**空间混合**）存在常数 c，$C>0$，使得对于任意 $n\geqslant 1$、$\Lambda\supset\Lambda_{2n}$ 以及仅取决于 Λ_n（分别为 $\Lambda\setminus\Lambda_{2n}$）中状态的事件 A（分别为 B），我们有
$$c\times\mathbb{P}_\Lambda^+(A)\mathbb{P}_\Lambda^+(B)\leqslant\mathbb{P}_\Lambda^+(A\cap B)\leqslant C\times\mathbb{P}_\Lambda^+(A)\mathbb{P}_\Lambda^+(B). \tag{3.17}$$

为证明这两个性质，我们采用一种共同的方法，借助三元组 $(\sigma、\tilde{\sigma}、\eta)$ 的类似性质，再利用简单关系 $\omega=\xi(\sigma)\cap\xi(\tilde{\sigma})\cap\eta$ 将其推广到 ω。对于第一个性质，我们可以利用伊辛模型的马尔可夫性质，并注意到如果 Γ 是 ω-开通的，那么 σ 和 $\tilde{\sigma}$ 在 Γ上必然都是常数。类似地，第二个性质可直接归结为临界伊辛模型的一个混合估计，这类估计早已为人所知（关于 FK-伊辛模型的混合结论，参见例如 [99] 或 [36, 40] ）。

注释 3.9。 我们指出，类似的策略也可用于证明正方格子上的（无源）临界随机流$\mathbf{n}_1$ 的混合结论：只需证明 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}$ 的混合性（因为 $(\mathbf{n}_1)_{\text{even}}$ 是在其基础上进行的稀疏化），而这可通过恒等关系 $(\mathbf{n}_1)_{\text{odd}}=\partial\sigma$ 以及伊辛模型的混合性推导得到。平面随机流模型的其他更强混合性质已在 [38] 中得到证明。

注释 3.10。 由于临界伊辛模型也已知多项式混合陈述（参见 [36, 40] 中关于 FK-伊辛模型的类似证明），我们本可以改进这一结果，不过本文并不需要这一改进。

我们将 $A(n,N)$ 定义为存在一条环绕环域$\Lambda_N\setminus\Lambda_n$的开回路这一事件。已知（可由 [38]的结果推导出）
$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^2}\left(\omega\notin A(n,N)\right)=\mathbb{P}^{\emptyset,\emptyset}_{(\mathbb{Z}^2)^*}\left(\Lambda_n^\dagger\overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow}\partial\Lambda_N^\dagger\right)\asymp\left(\frac{n}{N}\right)^{1/4}. \tag{3.18}$$

请注意，这里 $1/4$ 是双重随机电流的单臂指数，而 ω 的单臂指数则是 $1/8$ ，这是由于它与伊辛模型的联系。双重随机电流因此成为一个有趣的（临界）平面模型示例：它不是自对偶的，而且其单臂指数与对偶单臂指数不同。本文不依赖于（3.18）或 [38] 中的任何其他结果。

相反，我们陈述并证明以下结果，随后将通过迭代提升，将在 ω^+ 或 ω^- 中不存在任何回路的概率估计为多项式级别的上界（但不显式给出）。

一个大环域中的情形。这个 ω^+对偶单臂指数，我们不知道如何明确确定它（见备注3.14），将成为定理4.6中的主要误差项。鉴于引理3.6 以及 ω不满足 FKG 不等式，我们还将很有必要推导出 ω^- 的对偶单臂指数上界。

引理 3.11（回路的存在性）。 存在一个常数 $c>0$，使得对于任意 $n \geqslant 1$以及任意包含 Λ_{2n}的区域 Λ，

$$\mathbb{P}_{\Lambda}^{+}(\omega^{+} \in A(n,2n)) \geqslant c.$$

此外，当 $\Lambda \supset \Lambda_{4n}$ 时，$\mathbb{P}_{\Lambda}^{+}$（$\omega^{-} \in A$（n, $2n$））$\geqslant c$。

证明。 注意，事件 $A(n,\ 2n)$ 是初等的。因此，

$$\mathbb{P}_{\Lambda}(\omega^{+} \in A(n,2n)) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{P}_{\Lambda}(\omega \in A(n,2n)).$$

令 $\mathbb{P}^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}$ 为区域 $\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n$ 上的自由测度。由双重随机流 [38, 的已知单调性（引理 3.2]）可得

$$\mathbb{P}_{\Lambda}^{+}(\omega \in A(n,2n)) \geqslant \mathbb{P}^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(\omega \in A(n,2n)).$$

最后，这个概率与自由边界 FK-Ising 测度$\phi^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}$之间存在一个精确的恒等关系，

$$\mathbb{P}^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(\omega \in A(n,2n)) = 1-(1-\phi^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(A(n,2n)))^2 \geqslant \phi^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(A(n,2n)).$$

事实上，由 ω 与 $\mathbf{n}$ 之间的对偶关系可得，

$$1-\mathbb{P}^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(\omega \in A(n,2n)) = \mathbb{P}^{\emptyset,\emptyset}_{(\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n)^*}\left(\Lambda_n \overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow} \Lambda_{2n}^c\right)$$

其中 $(\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n)^*$ 是完整的（即非弱）对偶，而该事件表示$\mathbf{n}$ 连接内侧面与外部面。于是，将连接事件写成自旋关联（见.....），并利用 FK-伊辛模型的自对偶性，可得

$$\mathbb{P}^{\emptyset,\emptyset}_{(\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n)^*}\left(\Lambda_n \overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow} \Lambda_{2n}^c\right) = (1-\phi^{\mathrm{f}}_{\Lambda_{2n}\setminus\Lambda_n}(A(n,2n)))^2.$$

该结论由 FK-伊辛模型的 RSW 性质立即推出 [36]。关于 ω^- 的结论可通过应用式（3.17）中的混合结果得到，因此我们要求Λ 的边界不能离得太近。

□

注 3.12。 当 $\partial\Lambda$ 与 $\partial\Lambda_{2n}$ 相距足够远时，可以证明相应的上界。这里的微妙之处在于，平面双重随机流不满足关于区域均匀成立的 RSW 结果。特别是，概率

$$\mathbb{P}^{\emptyset,\emptyset}_{\Lambda}(\Lambda_n \overset{\mathbf{n}}{\longleftrightarrow} \partial\Lambda_{2n})$$

对于所有 $n \geqslant 1$，当 $\Lambda=\Lambda_{2n}$ 时并非均匀为正；但对于某个固定的 $\varepsilon>0$，当 $\Lambda \supset \Lambda_{(2+\varepsilon)n}$ 时则为正（即只有当自由边界在宏观尺度上相距甚远时） [38]。这也是带有 $q=4$ 的随机簇模型的预期行为，因为这两个模型中大簇外边界的标度极限都是 CLE_4, ，其环已知不会接触区域的边界。

引理 3.13 (对偶单臂指数)。 存在 $\alpha, C > 0$ ，使得对于所有 $\zeta \in \{\pm 1\}, N \geqslant n \geqslant 1$ 以及任意 $\Lambda \supset \Lambda_N$,

$$\mathbb{P}_{\Lambda}^{+}\left(\omega^{\zeta} \notin A(n, N)\right) \leqslant C\left(\frac{n}{N}\right)^{\alpha}.$$

证明。 论证是标准的，只需应用引理 3.11 以及 $\mathbb{P}_{\Lambda}^{+}$ 的空间混合性质，即可证明存在这样一组尺度：在这些尺度上，出现 $\omega^{\pm}$-回路的事件随机占优于一个具有一致正密度的点过程。 □

注 3.14。 不难导出所需的拟乘法性，从而证明对偶单臂指数 α 在 ω^{+}下的存在性。接下来，α 的精确值是一个有趣的问题，尤其是因为它构成了定理 4.6中的主要误差项。利用它与 τ 之间的关系以及 FKG性质（命题 3.1），可以证明它必定满足 $\alpha \leqslant 1/8$。如果 $\alpha = 1/8$ 这一取值成立，那么模型 ω^{+} 就会在如下意义上“近似自对偶”：单臂指数与对偶单臂指数相等。然而，通常而言，将 FKG不等式应用于臂指数时会得到多项式改进 [18, 51, 89], ，这表明 $\alpha < 1/8$或许成立。

设某个整数 $n \geqslant 1$ 和两个顶点 a， $b \in \Lambda$ 满足：两个方框$a + \Lambda_{2n}$ 和 $b + \Lambda_{2n}$ 均包含于 Λ 中，且互不相交。在这种情况下，我们定义

$$A = a + \Lambda_n \quad \text{and} \quad B = b + \Lambda_n,$$

两个大小为 $n \geqslant 1$的方框。下一个命题讨论连接事件 $\{A \leftrightarrow B\}$的概率。其证明是对 FKG不等式以及上文回路存在性的界的标准应用。该命题将使我们能够把尖锐的点到点连接概率估计（由（2.10）推得）转化为盒到盒连接的估计。若存在一个通用常数 $X \lesssim Y$ 使得 $C > 0$ ，则记 $X \leqslant CY$；若 $X \asymp Y$，则记 $X \lesssim Y$。 $Y \lesssim X$。

命题 3.15 （盒到盒连接估计）。 存在一个常数 $C > 0$ ，使得以下结论成立。设 Λ 是一个区域，其中包含两个满足上述条件的方框 A 和 B 。那么，

$$\mathbb{P}_{\Lambda}(A \leftrightarrow B) \leqslant C n^{1/4-4} \mathbb{E}_{\Lambda}\left[\sum_{x \in A, y \in B} \sigma_x \sigma_y\right].$$

证明。 我们还定义

$$A' = a + \Lambda_{2n} \quad \text{and} \quad B' = b + \Lambda_{2n},$$

令 Γ_A 和 Γ_B 分别为环域 $A' \setminus A$ 和 $B' \setminus B$ 中的最外层 ω^{+}-开回路（如果存在）。令 $C_{A,B}$ 表示 Γ_A 和 Γ_B 都存在且

$$\Gamma_A \overset{\omega^{+}}{\longleftrightarrow} \Gamma_B.$$

由（3.2）、FKG不等式和引理 3.11 可得

$$\mathbb{P}(A \leftrightarrow B) \leqslant 2\mathbb{P}(A \overset{\omega^{+}}{\longleftrightarrow} B) \lesssim \mathbb{P}(C_{A,B}).$$

通过对 ω 外部 Γ_A 和 Γ_B的状态进行条件化，

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in A,y\in B}\mathbf{1}(x\overset{\omega^+}{\longleftrightarrow}y)\right]\geqslant\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(C_{A,B})\mathbb{E}\left[\sum_{x\in A}\mathbf{1}(x\overset{\omega^+}{\longleftrightarrow}\Gamma_A)\mid\Gamma_A\right]\mathbb{E}\left[\sum_{y\in B}\mathbf{1}(y\overset{\omega^+}{\longleftrightarrow}\Gamma_B)\mid\Gamma_B\right]\right].$$

因此，根据边界簇的 FKG性质（或者在本例中，仅仅根据区域内伊辛自旋关联的单调性），

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in A}\mathbf{1}(x\overset{\omega^+}{\longleftrightarrow}\Gamma_A)\mid\Gamma_A\right]\geqslant\mathbb{E}^+_{\Lambda_{2n}}\left[\sum_{x\in\Lambda_n}\sigma_x\right]\gtrsim n^{2-1/8},$$

其中最后一个估计包含在引理 A.3 中。对盒 B 应用相同的论证并重新整理所有项，即得到所需的不等式。 □

3.3 IIC 测度的构造

在本节中，我们构造 ω 的初生无限簇 （或 IIC）测度，也就是说，我们证明在适当的意义下，极限

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}^+_{\Lambda_N}(\cdot\mid o\overset{\omega}{\longleftrightarrow}\partial\Lambda_N)$$

存在。这是渗流理论中的一个经典问题，Kesten 首先在 [66] 伯努利渗流的情形下解决了该问题。对于相依渗流模型，这类结果并不多见，但近年来各种模型都取得了进展 [86]。构造合适的 IIC 测度是 L^2 中所引入的论证的一个重要方面。该测度用于说明：从介观尺度观察时，宏观簇的行为会高度集中在 IIC 测度附近。正是这种集中将在定理 4.6的证明中发挥关键作用。在 [50]，中，分析主要集中于构造伯努利点渗流的关键测度。对于关键测度，相应的输入是构造一个在交替 四臂 事件条件下的无限体积测度。在那里，使用逐尺度耦合论证证明了这种测度的存在性。该分析十分复杂，并且需要对臂事件估计进行一定的分离；不过，对于单臂情形（这与簇测度相关），也有人提出了一种更简单的方法 [50, 命题 5。2]虽然可以利用第 ω 3.2节中的 RSW理论将这一方法推广到 [59]，但我们采取另一种方法。我们利用 [59]中最近引入的一个论证。该论证基于一个简单且显式的耦合，通过对偶一臂指数证明趋于 IIC 测度的定量收敛。该论证原本针对伯努利点渗流，但可以直接推广到键构型上的任意单调测度。在克服了因不知道 ω^+ 具有单调性而产生的一个小困难后，我们的论证将几乎完全遵循 [59] 。我们将证明的结果如下。

命题 3.16 （IIC 测度的存在性）。 存在 $C,\alpha>0$ ，使得下述结论成立。对于每个 $N\geqslant k\geqslant n\geqslant 1$ 和每个区域 $\Lambda\supset\Lambda_N$，测度

$$\omega^{(1)}\sim\mathbb{P}^+_{\Lambda_N}(\cdot\mid\Lambda_n\overset{\omega}{\longleftrightarrow}\Lambda_N)\quad and\quad\omega^{(2)}\sim\mathbb{P}^+_{\Lambda}(\cdot\mid\Lambda_n\overset{\omega}{\longleftrightarrow}\Lambda)$$

可以进行耦合，使得以概率 $1-C(\frac{k}{N})^\alpha$ ，它们满足：

- $\omega(1)$ 和 $\omega(2)$ 的限制在 Λ_k 内一致；此外，边界簇 $\mathcal{C}_0(\omega(1))$ 和 $\mathcal{C}_0(\omega(2))$ 的限制在 Λ_k内也一致。

作为命题 3.16的推论，我们可以将极限测度记为[10]，即 $N \to \infty$。

$$\mathbb{P}^+_{\mathbb{Z}^2}(\cdot \mid \Lambda_n \xleftrightarrow{\omega} \infty).$$

在第 4 节中，我们将使用这一测度定义一个量 β，它应被解释为无限簇在该测度下的“密度” $\mathcal{C}_0$。更准确地说，我们预期，由于无限簇 $\mathcal{C}_0$ 被条件化为与盒 Λ_n相交，因此 $|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n|$ 将与 $n^{2-1/8}$同阶。事实上，我们将证明

$$\mathbb{E}^+_{\mathbb{Z}^2}\left[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \mid \Lambda_n \leftrightarrow \infty\right] = (\beta + o(1))n^{2-1/8},$$

对某个常数 $\beta > 0$而言成立。该极限的存在性将用到下面的引理，而该引理本身是命题 3.16的一个简单推论。

引理 3.17（簇与盒相交估计）。存在常数 C、$\alpha > 0$，使得对任意 $N' \geqslant N \geqslant n \geqslant 1$,

$$\left|\mathbb{E}^+_{\Lambda_{N'}}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \mid \Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_{N'}] - \mathbb{E}^+_{\Lambda_N}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \mid \Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_N]\right| \leqslant Cn^{2-1/8}(\frac{n}{N})^{\alpha/2}.$$

证明。利用命题 3.16 中的耦合以及柯西-施瓦茨不等式，我们可推出

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}_{\Lambda_{N'}}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \mid \Lambda_n \longleftrightarrow \partial\Lambda_{N'}] - \mathbb{E}_{\Lambda_N}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \mid \Lambda_n \longleftrightarrow \partial\Lambda_N]| \\ &\quad \lesssim (\frac{n}{N})^{\alpha_1/2}\sqrt{\mathbb{E}_{\Lambda_{N'}}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n|^2 \mid \Lambda_n \longleftrightarrow \partial\Lambda_{N'}] + \mathbb{E}_{\Lambda_N}[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n|^2 \mid \Lambda_n \longleftrightarrow \partial\Lambda_N]}. \quad (3.19)\end{aligned}$$

接着，根据边界簇的 FKG性质（命题 3.1），我们可以将其与边界条件在 $\partial\Lambda_n$ 上为黏结的情形进行比较，

$$\mathbb{E}_{\Lambda_N}\left[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n|^2 \mid \Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda_N\right] \leqslant \mathbb{E}_{\Lambda_n}\left[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n|^2\right] \leqslant \sum_{x,y\in\Lambda_n} \mathbb{P}_{\Lambda_n}(x \leftrightarrow y),$$

因此我们可以使用引理 A.2 得出结论。 □

现在我们来详细说明这个基于探索算法的耦合论证。基本思路很容易理解，但要把细节形式化会有些繁琐。我们推荐参阅 [59] 以及 [40, 命题 2。6]，其中给出了一个风格相似的论证。与这些证明相比，主要的额外困难在于我们不知道 ω^+是单调的，因此必须改为对这一对使用引理 3.3 $(\tau,\ \omega^+)$。

我们固定陈述中所述的 $N \geqslant k \geqslant n \geqslant 1$。首先要注意的是，对于每个区域 Λ，在测度 $\mathbb{P}^+_\Lambda$ 下，事件 $\Lambda_n \xleftrightarrow{\omega} \partial\Lambda$ 既相对于 ω^+ 可测，也是关于 ω^+的递增事件。我们将令

$$X = (\tau, \omega^+)$$

[10]我们注意到，无限簇的其他定义（我们不会使用）很容易证明其存在且彼此一致
与此　　将这一结果与第3.2节中的 RSW估计值相结合。

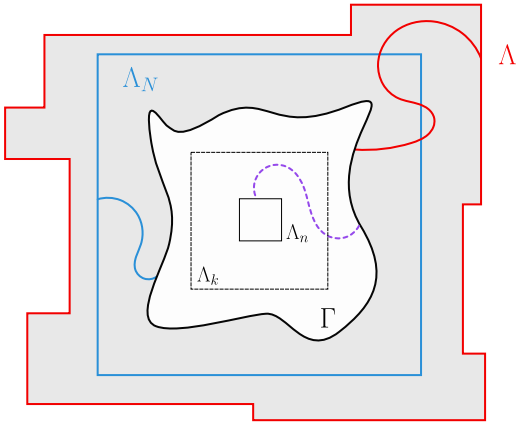


图 6：命题 3.16 证明示意图。对 $X^{(3)}$ （蓝色）的探索和对 $X^{(1)}$ （红色）的探索展示至发现最外侧$(\omega^+)^{(3)}$-开回路 Γ （黑色）为止。此时，只有阴影区域内的构型状态是已知的。紫色虚线臂表示从这一时刻起，可以对两个构型 $X^{(1)}$ 和$X^{(2)}$ 进行抽样，使它们在 Γ内完全一致。

并暂且只关注 X 的分布。实际上，我们将耦合的不是两个而是三个构型 $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$ ，其边缘分布为

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= (\tau^{(1)}, (\omega^+)^{(1)}) \sim \mathbb{P}^+_{\Lambda_N}(\cdot \mid \Lambda_n \xleftrightarrow{\omega} \Lambda_N) \\ X^{(2)} &= (\tau^{(2)}, (\omega^+)^{(2)}) \sim \mathbb{P}^+_{\Lambda}(\cdot \mid \Lambda_n \xleftrightarrow{\omega} \Lambda) \\ X^{(3)} &= (\tau^{(3)}, (\omega^+)^{(3)}) \sim \mathbb{P}^+_{\Lambda}(\cdot). \end{aligned}$$

实际上，我们将按照等价测度对 $X^{(1)}$ 进行抽样

$$\mathbb{P}^+_{\Lambda}(\cdot \mid \Lambda_n \xleftrightarrow{\omega} \Lambda_N, \omega^+_{E(\partial\Lambda_N \cup \Lambda \setminus \Lambda_N)} = 1)$$

使其扩展到区域 Λ ，并且仍可视为在递增事件条件下的分布 $X^{(3)}$ 。该耦合具有如下性质：

$$X^{(1)} \geqslant X^{(3)} \quad \text{and} \quad X^{(2)} \geqslant X^{(3)}. \tag{3.20}$$

根据 FKG不等式（命题 3.1），这样的耦合确实存在。为给出一个显式耦合，我们将从边界 $X^{(1)}$、$X^{(2)}$、$X^{(3)}$ 开始，向内探索 $\partial\Lambda$ 、3.20）所要求的序关系将通过归纳应用引理 3.3 得到。关键步骤是以高概率确保在到达盒 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 之前两者完全一致，因此我们的耦合符合要求。

现在，让我们进一步谈谈这个关键步骤。我们的计划是找到一条环绕环域 $\Lambda_N \setminus \Lambda_k$ 且完全$(\omega^+)^{(3)}$ 开放的回路；根据引理 3.13 ，这种情况将以

高概率发生。由 (3.20) 可知，它在 $(\omega^+)^{(1)}$ 和 $(\omega^+)^{(3)}$中也必定是开放的。接下来可以这样论证：如果从外部发现这样一条回路 Γ 在 $(\omega^+)^{(1)}$ 和 $(\omega^+)^{(2)}$中都开放，那么， $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 在 Γ 内部的分布完全相同。事实上，结合 $\mathbb{P}_\Lambda^+$ 的马尔可夫性质，找到 Γ 后，条件化便可以解耦，因此这就等同于 $\Lambda_n \leftrightarrow \Gamma$。于是，可以完成耦合，同时确保 $\omega^{(1)}$ 和$\omega^{(2)}$ 在 Γ内部完全一致。

现在我们将详细说明如何运用引理3.3来探索构型，同时保持顺序不变。我们只说明 $X^{(2)} \geqslant X^{(3)}$ 的情形，另一种情形的处理方法类似。假设我们已经在同一个顶点集合 S 上探索了 $\tau^{(2)}$和 $\tau^{(3)}$的状态，并且在同一个边集 H 上探索了$(\omega^+)^{(2)}$ 和$(\omega^+)^{(3)}$ 的状态，其中$H \subset E(S)$。作为归纳假设，我们可以假定到目前为止，顺序符合要求，

$$\tau_S^{(2)} \geqslant \tau_S^{(3)} \quad \text{and} \quad (\omega^+)_H^{(2)} \geqslant (\omega^+)_H^{(3)}. \tag{3.21}$$

现在我们将抽样一条边 $e \notin H$的状态。为简单起见，我们假设已经有$H \cup \{e\} \subset E(S)$（否则请参见算法的第 2 阶段）。为了在保持 $X^{(2)} \geqslant X^{(3)}$的同时继续进行耦合，我们需要证明：在给定目前观察到的所有信息后，该边在$(\omega^+)^{(2)}$ 中为开放状态的条件概率至少与其在$(\omega^+)^{(3)}$中为开放状态的条件概率一样大。事实上，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_\Lambda^+(\omega_e^+ = 1 \mid \Lambda_n \overset{\omega^+}{\longleftrightarrow} \partial\Lambda, \tau_S = \tau_S^{(2)}, \omega_H^+ = (\omega^+)_H^{(2)}) \\
&\quad \geqslant \mathbb{P}_\Lambda^+(\omega_e^+ = 1 \mid \tau_S = \tau_S^{(2)}, \omega_H^+ = (\omega^+)_H^{(2)}) \\
&\quad \geqslant \mathbb{P}_\Lambda^+(\omega_e^+ = 1 \mid \tau_S = \tau_S^{(3)}, \omega_H^+ = (\omega^+)_H^{(3)}).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

这里，我们应用了引理 3.3 的两个方面（使用了关于 S 和 H的假设）。在第一个不等式中，我们使用了条件测度

$$\mathbb{P}_\Lambda^+(X \in \cdot \mid \tau_S = \tau_S^{(2)}, \omega_H^+ = (\omega^+)_H^{(2)})$$

具有 FKG性质，并且事件 $\{\omega_e^+ = 1\}$ 和 $\{\Lambda_n \overset{\omega^+}{\longleftrightarrow} \partial\Lambda\}$ 是递增的。在第二个不等式中，我们应用了条件测度的序关系以及（3.21）。

注 3.18。 引入第三个构型和随机支配，是绕开 [25, 引理 2.9],中不完备论证的一种特别巧妙的方法；该论证声称，可以直接对不同区域中的两个条件测度进行排序。感谢 Christophe Garban 就这一问题展开讨论。

注 3.19。 如 [59], 中所述，这一策略仅适用于平面情形，因为在该情形下，以高概率存在能够将事件解耦的“开曲面”。在维度 $d \geqslant 4$中，可以使用定义 2.9 中的耦合以及随机电流的混合结果 [5] 来构造 IIC 的一个版本（这一次极限 $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}^d}(\cdot \mid o \overset{\omega}{\longleftrightarrow} x)$ 当 $|x| \to \infty$时），其方式类似于 [86]。

注3.20。 秉承注3.8的思路，我们现在简要介绍一种替代方法。事件$\Lambda_n \leftrightarrow \partial\Lambda$ 必须由构型 ω^{++} 实现。特别地，它是三元组 $(\sigma, \tilde{\sigma}, \eta)$ 的一个递增事件，我们知道该三元组的分布具有单调性（它是三个满足 FKG 格条件的正测度的乘积）。因此，我们也可以按顺序同时探索这三个测度中的$(\sigma, \tilde{\sigma}, \eta)$。耦合的失败率

于是由概率控制：$(\omega^{++})^{(3)} \notin A(k,N)$，该概率虽然较大，但仍可轻易证明其按多项式速度衰减。

命题的证明 *3.16*。现在我们给出实施上述策略所需的细节。我们只需考虑耦合 (τ,ω^{+}) 上的概率律这一任务，并将抽样 ω^{-} 推迟到最后。

我们在一个扩大的概率空间上工作，该空间配备了一组相互独立的随机变量 $(U_e)_{e\in E(\Lambda)},(U_v)_{v\in\Lambda}$，它们在 $[0,1]$, 上取均匀分布值，并按 Λ 的每条边和每个顶点编索引。整个耦合将由这些初始随机性确定性地构造出来。为简化记号，我们将每个 $1\leqslant i\leqslant 3$ 对应的 $X^{(i)}$ 的边缘分布记为 $\mu^{(i)}$。为了描述算法的状态，我们将使用一个序列 $(S_t,H_t)_{t\geqslant 0}$，其中 $S_t\subset\Lambda$，并且对每个 $t\geqslant 0$，$H_t\subset E(\Lambda)$。我们明确设定

$$S_0=\partial\Lambda \quad \text{and} \quad H_0=E(S_0).$$

重要的是，我们始终有 $H_t\subset E(S_t)$。现在我们来描述算法的每个步骤。在每个阶段，我们只会在 S_t 上发现 $\tau^{(i)}$ 的状态，而只会在 H_t 上发现 $(\omega^{+})^{(i)}$ 的状态。

令 $t\geqslant 0$。算法的每一步分为三个阶段。第一阶段是选择下一条 e_{t+1} 边，将其加入 H_t。我们希望以这样的方式进行：先完全揭示 $\Lambda_N\setminus\Lambda_n$ 中最外层的 $(\omega^{+})^{(3)}$-开回路，然后再进入该回路。最好先由读者自行确信这一点确实可行（一个非正式但自然的策略是使用“右手规则”探索 $(\omega^{+})^{(3)}$ 的簇），不过我们将在下面将其中一种方案形式化。

阶段 1。我们首先选择 $e_{t+1}=uv\in E(\Lambda)\setminus H_t$（如果该集合为空，则算法结束），使得至少有一个端点（例如 u）根据以下规则属于 S_t：我们可以以任意方式选择这样的 e_{t+1} 边，但不能优先选择（即始终首先选择）其对偶边 e^{*}_{t+1} 的至少一个端点与该集合中的 $\Lambda^{*}\setminus\Lambda^{*}_N$ 相连的任何边

$$((\omega^{+})^{(3)}_{H_t})^{*}=\left\{e^{*}\in E(\Lambda^{*})\mid e\in H_t,(\omega^{+})^{(3)}_{e}=0\right\}.$$

注意，该条件对 $E(\Lambda)\setminus E(\Lambda_N)$ 中的任意边始终成立。我们令 $H_{t+1}=H_t\cup\{e\}$。

阶段 2. 仅当 e_{t+1} 的另一端点 v 尚未属于 S_t 时，本阶段才相关，否则可直接跳至下一阶段。我们令 $S_{t+1}=S_t\cup\{v\}$ 并抽样

$$\tau^{(i)}=\begin{cases}+1 & \text{if}\quad U_v\leqslant\mu^{(i)}(\tau_v=+1\mid\tau_{S_t}=\tau^{(i)}_{S_t},\omega^{+}_{H_t}=(\omega^{+})^{(i)}_{H_t}),\\ -1 & \text{else.}\end{cases}$$

对每个 $1\leqslant i\leqslant 3$。现在可见，给定 $\tau^{(j}_{S_t}\geqslant\tau^{(3))}_{S_t}$ 与 $(\omega^{+})^{(j)}_{H_t}\geqslant(\omega^{+})^{(3)}_{H_t}$，则必有

$$\tau^{(j)}_v\geqslant\tau^{(3)}_v$$

对于每个 $j\in\{1,2\}$。由于 $H_t\subset E(S_t)$，这可通过使用引理 3.3 并按照式（3.22）中的论证得出。注意，若 $j=1$ 且 $v\in\Lambda\setminus\Lambda_N$，则 $\tau^{(1)}_v=+1$，无需证明。

第3阶段。我们取

$$(\omega^+)_e^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad U_e \leqslant \mu^{(i)}(\omega_e^+ = 1 \mid \tau_{S_{t+1}} = \tau_{S_{t+1}}^{(i)}, \omega_{H_t}^+ = (\omega^+)_{H_t}^{(i)}), \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant 3$。我们知道 $H_t \subset E(S_{t+1})$ 由于第二阶段，因此我们可以再次按照（3.22）中的论证，推得

$$(\omega^+)_e^{(j)} \geqslant (\omega^+)_e^{(3)}.$$

和之前一样，如果 $j = 1$ 且 $e \notin E(\Lambda_N)$，那么 $(\omega^+)_e^{(1)} = 1$ ，无需证明。我们可以继续算法的新一步，并确信仍然满足以下排序关系

$$(\tau_{S_{t+1}}^{(j)}, (\omega^+)_{H_{t+1}}^{(j)}) \geqslant (\tau_{S_{t+1}}^{(3)}, (\omega^+)_{H_{t+1}}^{(3)}).$$

现在假设算法已经结束。首先，很容易验证每个 $X^{(i)}$ 都具有所需的边缘分布（例如参见 [41, 引理 2.1] ），因此我们构造出了一个真正的耦合。现在我们来考察该耦合是否成功。我们引入事件 G ：存在一个 Γ 环绕环域 $\Lambda_N \setminus \Lambda_n$ ，且 Γ 完全是 $(\omega^+)^{(3)}$ 开边。对于最外侧的此类回路 Γ，必定存在某个时刻 $T \geqslant 0$ ，使得 $\Gamma \subset H_T$ ，但是

$$V(\overline{\Gamma}) \cap S_T = V(\Gamma) \quad \text{and} \quad E(\overline{\Gamma}) \cap H_T = \Gamma.$$

也就是说，在时间 T ，算法尚未探索回路 Γ内部 $\tau^{(i)}$ 的状态（因此 $(\omega^+)^{(i)}$）。如果该回路是 $(\omega^+)^{(3)}$ 开回路，那么它在 $(\omega^+)^{(1)}$ 和 $(\omega^+)^{(2)}$ 中也同样是开回路。正如前面所论证的，给定时间 T 的探索， Γ 中两者 $X^{(2)}$ 和 $X^{(3)}$ 的条件分布恰好是

$$\mathbb{P}_{\overline{\Gamma}}^+(\cdot \mid \Lambda_n \xleftrightarrow{\omega^+} \Gamma).$$

如前所述，这里我们用到了未条件化测度 $\mathbb{P}_G^+$ 的马尔可夫性质，而开回路 Γ 的存在性使得在 $\mu^{(1)}$ 和 $\mu^{(2)}$中的条件化相互解耦。因此，（由于随机变量 U 对每个构型都是相同的）可得

$$X^{(1)}|_{\overline{\Gamma}} = X^{(2)}|_{\overline{\Gamma}}.$$

算法结束时，我们可以（对每个构型）考虑在给定 $X = (\tau, \omega^+)$的条件下， ω^- 的分布。这就是随机簇测度 $\phi_{\xi^-(\tau)\,2J}$，因此可立即得到：在事件 G上，$(\omega^-)^{(1)}$ 与 $(\omega^-)^{(2)}$ 的条件分布（投影到 Λ_k后）相同。因此，也可以将它们采样为相同。

最后只需指出，事件 G 不发生的概率为

$$\mathbb{P}\left((\omega^+)^{(3)} \notin A(k, N)\right) = \mathbb{P}_\Lambda^+(\omega^+ \notin A(k, N)),$$

因此，我们可以应用引理3.13 中的界来完成定理的证明，并注意到我们的耦合具备所有所需性质。

□

4 簇面积测度的收敛

设 D 是一个若尔当区域。设 $D_\delta \subset \mathbb{Z}^2$ 是 D 的离散区域近似，定义见（B.1）。例如，一个自然的选择是令 D_δ 为 $\delta\mathbb{Z}^2$ 的导出子图，其中每个顶点对应于与 D相交的一个对偶面。本节中，我们假设这些区域的边界是非分形的，具体含义如下：

定义 4.1. 若与 ∂D 相交的 ε-方框（即边长为 ε的正方形）的个数为 $O(\varepsilon^{-1})$阶，则称若尔当区域 D 为非分形的。

实际上，我们所给出的论证只需稍作改动，便可适用于边界维数严格小于 $2-1/8$的情形；这是最优的，但对我们的目的而言并非必要。

此外，我们只考虑临界耦合常数 J_c 如（1.2）以及 +边界条件，并采用简记

$$\mathbb{P}_\delta \equiv \mathbb{P}^+_{D_\delta}.$$

我们在注4.9 中说明自由边界条件的情形，并在注4.7中说明分形区域的情形。回顾离散 IMF 的定义为

$$\Phi_\delta := \delta^{2-1/8} \sum_{v \in D_\delta} \sigma_v^\delta \boldsymbol{\delta}_v, \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}_v$ 是 v处的狄拉克质量，并且该场应被解释为某个负指标索博列夫空间中的测度或分布（背景见附录B）。定理1.9 使我们可将 IMF 改写为[11]

$$\Phi_\delta = \sum_{\mathcal{C}^\delta} \xi_{\mathcal{C}^\delta} \mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta},$$

其中，求和遍及 $\mathcal{C}^\delta$ 中 D_δ 上的所有簇 ω_δ，并且

$$\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta} = \delta^{2-1/8} \sum_{v \in \mathcal{C}^\delta} \boldsymbol{\delta}_v$$

是簇 $\mathcal{C}^\delta$的（重整化）离散“面积”测度。为简化记号，我们也将$\mathcal{C}^\delta$ 记作簇的 δ-扩张，即 D 的闭子集，它是所有与属于该簇的顶点相对应的对偶面之并。这样，我们便可将簇视为取值于 D 的所有闭子集构成的集合中的随机变量；该集合可赋予标准的豪斯多夫度量及其相应的 Borel σ-代数。特别地，我们可以将 $\mathcal{F}_\mathcal{C}$ 记作由某个簇 $\mathcal{C}$生成的 σ-代数。更多细节请参见附录 B-C 。最后，我们按直径从大到小为簇排序，并将它们编为集合 $(\mathcal{C}_k^\delta)_{k\geqslant 0}$中的元素。

本节旨在证明以下定理。

定理 4.2（面积测度的收敛）。设 D 为任意一个边界非分形的若尔当区域。固定 $k \geqslant 0$。当 $\delta \to 0$ 时，

$$(\mathcal{C}_k^\delta, \mu^\delta_{\mathcal{C}_k^\delta}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{C}_k, \mu_{\mathcal{C}_k}),$$

[11]回想一下，边界簇被确定性地赋予标签 $\xi = +1$。

其中，簇关于豪斯多夫度量收敛，测度弱收敛。此外，极限测度 $\mu_{\mathcal{C}_k}$ 是 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_k}$的可测函数。

第一步是证明这些测度的子序列极限的存在性。

命题 4.3。 设 D 是一个边界为非分形边界的若尔当区域。固定 $k \geqslant 0$。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个紧子集 $K \subset D$，使得

$$\limsup_{\delta \to 0} \mathbb{E}[\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}(D \setminus K)^2] < \varepsilon.$$

特别地，存在一个分布意义下的子序列弱极限。

*Pr*证明。 任取满足 $d(K,\ \partial D) \geqslant \varepsilon > 0$ 的 K。直接展开可得 t

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\delta}[\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}(D \setminus K)^2] &= \delta^{4-1/4} \sum_{x,y \in D_{\delta} \setminus K} \mathbb{P}_{\delta}(x \overset{\mathcal{C}^{\delta}_k}{\longleftrightarrow} y) \\
&\leqslant \delta^{4-1/4} \sum_{x,y \in D_{\delta} \setminus K} \mathbb{P}_{\delta}(x \overset{\omega^{\delta}}{\longleftrightarrow} y) \\
&\leqslant \delta^{4-1/4} \sum_{\substack{x,y \in D_{\delta} \\ \mathrm{d}(x,\partial D_{\delta}), d(y,\partial D_{\delta}) \leqslant \varepsilon}} \mathbb{E}^{\delta}[\sigma_x \sigma_y],
\end{aligned}$$

由此我们可以使用引理 A.3 得到

$$\limsup_{\delta \to 0} \mathbb{E}_{\delta}[\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}(D \setminus K)^2] = O(\varepsilon^{2-1/4}).$$

□

4.1 概述与近似方案

定理4.2 的证明深受以下工作的启发： L^2-近似论证，该论证由 [50], 提出，其动机是研究伯努利渗流枢轴点集合上支撑的测度的标度。此方法也贯穿于 [24, 25] ，用于证明一个类似的几何分解：将 IMF 表示为支撑在嵌套 CLE 簇上的测度。16/3然而，此处给出的证明与 [24, 25] 存在一些关键差异，这些差异有助于更深入地理解极限测度。现在我们将详细说明这些差异。

在 [25], 遵循 [50], 的过程中，核心思路是引入<стиle id='3'>环域测度的概念。对于给定的环域，它是环域内侧面中与外部在 ω_{δ} 中连通的点的数量（经过适当的重归一化）。 [25] 中的论证首先要证明，给定环域的环域测度在 $\delta \to 0$ 时收敛，且其极限关于 ω_{δ}中穿越事件的标度极限[12] 可测。

为此，他们将环域内部划分为大小为 ε_1 的方框，其中 $\varepsilon_1 \gg \delta$，并考虑环域测度的一种粗粒化变体：与穿越环域的一个簇相交的 ε_1-盒的数量（经过适当重整化），再乘以因子 $\beta(\varepsilon_1)$。

[12]注意 使用 在论文 [25] 中，他们采用 Schramm-Smirnov 穿越拓扑，而在这里我们采用被视为闭集的簇上的豪斯多夫度量。

我们稍后将讨论这个因子的重要性，见（4.2）。一旦证明当 $\delta,\ \varepsilon_1 \to 0$ 时，这确实是一个良好的近似，由于该近似量仅取决于介观穿越事件，因此环域测度的极限必定相对于穿越事件的极限可测。这也意味着，在标度极限下，IMF 关于穿越事件可测，但尚未证明 IMF 可以分解为 $\mathrm{CLE}_{16/3}$的簇所对应的部分。

分解[13] 的存在性已于 [24] 最终确定。对于固定簇 $\mathcal{C}^\delta$，证明了通过将集合 K 铺砌成固定比例和尺寸 ε_2 的环域，并令 $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1 \gg \delta$，然后对铺砌中的每个环域的环域测度求和，可以很好地近似集合 $\mathcal{C}^\delta \cap K$ 的簇测度。这就是 [24, 命题 8.4]的内容。利用这一近似以及 [25], 中环域测度的收敛性，他们证明簇测度本身确实收敛，且其极限关于穿越事件的完整标度极限可测。

我们的方法不使用环域测度。相反，我们采用更直接的途径。我们只考虑一个 介观尺度 $\varepsilon \gg \delta$，并将平面铺砌成 ε-盒。给定一个簇 $\mathcal{C}^\delta$ 和一个集合 K，我们只需计算与 $\mathcal{C}^\delta \cap K$相交的 ε-盒的数量（并进行适当的重整化），再乘以因子 β，即可近似其簇测度。我们利用每个簇在豪斯多夫度量下的收敛性，证明这一近似量恰好收敛到与 $\mathcal{C} \cap K$相交的 ε-盒的相应数量，而这显然关于极限簇可测。这是我们方法的第一个成果：

- 我们证明，连续统弧测度 $\mu_{\mathcal{C}}$ 关于 $\mathcal{C}$ 本身是可测的，而不仅仅是全部簇集合的标度极限。

这对我们将簇测度识别为 [77] 中所构造的测度至关重要。我们能够证明这一点，是因为我们的逼近量直接依赖于簇 $\mathcal{C}$ 本身；而对于环域测度，其底层事件是一个穿越事件，必须在不参照该簇的情况下加以定义。另一项改进如下：

- 我们给出极限测度的显式表达式（回顾定理 1.6）。

其原因之一在于因子 β 并不依赖于尺度 ε，尽管有可能对 [50, 引理 4.7] 加以改编，从而证明 $\beta(\varepsilon)$ 随着 $\varepsilon \to 0$ 收敛，其效果实质上相同。在此，我们为 β 的存在性给出一个新证明（命题 4.4），它是 IIC 测度的存在性与单自旋关联函数收敛性的简单结合。为证明相应的 $\beta(\varepsilon)$ 在 [25, 方程 (2.23)],中的存在性，他们必须改编 [50] 的“比率极限定理”方法，并依赖于 FK-伊辛模型的半平面指数。

最后，我们认为，直接采用我们的方法能使论证在许多方面更加简洁。作为证据，我们并未依赖任何关于臂事件的准乘性估计，而 [24,25]两篇论文都使用了这类估计。在 L^2 估计的不同阶段，我们也大幅简化了分析——例如，在处理不满足某个局部唯一性事件的方框时，我们使用了引理3.6中的简单相关性不等式。

现在让我们进一步介绍所采用的 L^2-近似，尤其希望

[13]请注意，在 [25]中，有界区域内的 IMF 是按我们这里的方式定义的。不过，在 [24] 中，他们只考虑全平面 IMF，然后再将其限制到有界区域。

阐明 β 的关键作用。为简化说明，我们着重将这一策略用于研究边界簇的大小。具体来说，我们考察

$$X = X^\delta = \delta^{2-1/8}|\mathcal{C}_0^\delta|.$$

对于某个 $\varepsilon \gg \delta$，将平面铺砌为 ε-盒，并作如下分解

$$X^\delta = \delta^{2-1/8} \sum_{A^\varepsilon} |\mathcal{C}_0^\delta \cap A^\varepsilon|,$$

其中求和遍历铺砌中的所有方框。粗粒化近似量仅取决于簇 $\mathcal{C}_0^\delta$ 的大尺度几何结构，其值为与之相交的 ε-盒的数量。也就是说，我们令

$$Y = Y^{\delta,\varepsilon} = \beta\varepsilon^{2-1/8} \sum_{A^\varepsilon} \mathbf{1}(A^\varepsilon \cap \mathcal{C}_0^\delta),$$

其中我们还乘以一个固定的正数 β。关于为何采用正确的标度4.2 是 $\delta^{2-1/8}$ 和 $\varepsilon^{2-1/8}$，请参见第 4.2 节开头的讨论。一旦我们证明

$$X^\delta \approx Y^{\delta,\varepsilon}$$

当 $\delta \to 0$ 趋于……，随后 $\varepsilon \to 0$ 趋于……时，我们可以将由簇 $\mathcal{C}_0^\delta$ 的收敛得到的 $Y^{\delta,\varepsilon}$ 关于 $\delta \to 0$ 的收敛提升，从而证明 X^δ 的收敛。

常数 β 的选取至关重要，以确保 X 与 Y 接近。显而易见的起点是选择该常数，使 X 与 Y 的一阶矩相等。也就是说，我们希望

$$\delta^{2-1/8}\mathbb{E}_\delta\left[|\mathcal{C}_0^\delta \cap A^\varepsilon| \mid \mathcal{C}_0^\delta \cap A^\varepsilon \neq \emptyset\right] = (1 + o(1))\beta, \tag{4.2}$$

对于一个“典型”盒 A^ε （在我们的铺砌之中）。我们再次强调，这一选择将自然地由 IIC 构造在第 3.3 节中给出，参见命题 4.4。有了这一选择，我们旨在证明

$$\mathbb{E}_\delta\left[(X^\delta - Y^{\delta,\varepsilon})^2\right] = o(1).$$

当然，这是证明的核心，而策略将是分解

$$X^\delta - Y^{\delta,\varepsilon} = \sum_{A^\varepsilon} (\delta^{2-1/8}|\mathcal{C}_0^\delta \cap A^\varepsilon| - \beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(\mathcal{C}_0^\delta \cap A^\varepsilon)),$$

并证明，对应于彼此相距较远的方框的那些项是近似独立的。这里我们将使用命题 3.16 再次推出这一空间去相关，并论证大簇的行为将在介观尺度上围绕 IIC 测度急剧集中。

在严格建立近似方案之前，我们先推导出正确的参数β。为便于证明，我们暂不考虑网格尺寸 δ，但此后当然可以适当地对一切重新缩放。

命题 4.4（存在性：β）。设 $m \geqslant n \geqslant 1$。极限

$$\beta = \lim_{m/n\to\infty, n\to\infty} n^{1/8-2}\mathbb{E}_{\Lambda_m}\left[|\mathcal{C}_0 \cap \Lambda_n| \big| \Lambda_n \overset{\omega}{\longleftrightarrow} \Lambda_m\right]$$

存在且属于$(0, \infty)$。

证明。定义

$$\beta(n,m) := n^{1/8-2}\mathbb{E}_{\Lambda_m}\left[|\mathcal{C}_0\cap\Lambda_n||\Lambda_n \overset{\omega}{\longleftrightarrow} \Lambda_m\right].$$

于是，命题3.17 等价于如下估计

$$|\beta(n,m)-\beta(n,m')| \leqslant C\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha'}, \tag{4.3}$$

对某个常数 $C>0$ 与 $m'\geqslant m$。我们首先针对稍作修改的版本 $\beta'(n,k)=\beta(n,kn)$（其中 n, $k\geqslant 1$）证明相应的极限。我们将由两个预备事实推出这一点。

(1) $\beta'(n,k)$ 的极限 $k\to\infty$ 一致地关于 n 存在。

这是（4.3）的直接推论。

(2) 对每个 $k\geqslant 1$, $\beta'(n,k)$ 的极限 $n\to\infty$ 存在。

为证明这一点，我们可以将 $\beta'(n,k)$ 展开为

$$\beta'(n,k)=\frac{n^{1/8-2}\mathbb{E}_{\Lambda_{kn}}\left[|\mathcal{C}_0\cap\Lambda_n|\right]}{\mathbb{P}_{\Lambda_{kn}}(\Lambda_n\longleftrightarrow\partial\Lambda_{kn})}$$

分子就是伊辛模型的重整化单点函数，它在 $n\to\infty$ 时由定理 1.15 以及一个直接的控制收敛论证而收敛。一个简单的论证（见引理4.10 及附录 C 的细节），利用ω 的簇的收敛，表明分母也收敛到 CLE_4 地毯中相应的连接概率。也就是说，

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}_{\Lambda_{kn}}(\Lambda_n\longleftrightarrow\partial\Lambda_{kn})=\mathbb{P}_{S_k}\left(S_1\cap\mathrm{CLE}_4\neq\emptyset\right),$$

其中 CLE_4 表示其在正方形区域 S_k 中、边长为 $k\geqslant 1$ 的地毯。综合使用 (1) 与 (2)，我们可以对二重序列 $(\beta'(n,k))_{n,k\geqslant 1}$ 应用摩尔–奥斯古德定理，从而看出极限

$$\beta=\lim_{\substack{n\to\infty\\ k\to\infty}}\beta'(n,k)$$

存在。再次应用（4.3），我们推出 β（n, m）具有相同的极限。 □

注 4.5. 分子的收敛是我们唯一援引定理 1.15 的陈述。因此，正如所声称的，我们的论证给出了离散 IMF 收敛的证明，且该证明并不依赖于所有 n点关联函数的收敛。在 [25]中亦是如此。

4.2 主要估计的证明

我们严格证明上一节所描述的近似。设 $\varepsilon_n=2^{-n}$ 为介观尺度序列，并设 $\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}_n$ 为将平面铺砌成边长为ε_n的方框的铺砌，使得不同的近似彼此兼容。我们常将每个$A\in\mathcal{A}_n$ 与其离散对应物 $A\cap D_\delta$视为相同，并假设每个 $A\cap D_\delta$ 都完全相同（即忽略晶格效应）。此外，我们用简写 $A\cap\mathcal{C}_k^\delta$ 表示$A\cap\mathcal{C}_k^\delta\neq\emptyset$这一事件。

定理 4.6。 设 D 为一个非分形域。设 $k \geqslant 0$。对于任意连续函数 $f \in C(D)$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{\delta\to 0} \mathbb{E}_\delta \left[\left(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f] - \beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}^\delta_k) \right)^2 \right] = 0,$$

其中 f_A 是盒 A中 f 的平均值。

在开始证明之前，我们先简要说明标度 $\varepsilon_n^{2-1/8}$为何会出现。特别地，我们将证明这两项的量级大致相同，且均匀有界 $\delta \to 0$ ，然后$n \to \infty$。仿照命题4.3的证明，

$$\mathbb{E}_\delta \left[\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[D]^2 \right] \leqslant \delta^{4-1/4} \sum_{x,y\in D_\delta} \mathbb{E}_\delta[\sigma_x\sigma_y].$$

类似地，上述不等式的粗粒化版本为

$$\mathbb{E}_\delta \left[\left(\beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}^\delta_k) \right)^2 \right] \leqslant \beta^2\varepsilon_n^{4-1/4} \sum_{A,B\in\mathcal{A}_n} \mathbb{P}_\delta(A \cap \mathcal{C}^\delta_k, B \cap \mathcal{C}^\delta_k).$$

一个重要但初等的观察是，如果两个事件 $A\cap\mathcal{C}^\delta_k$和 $B\cap\mathcal{C}^\delta_k$都发生，那么必然有 $A \longleftrightarrow B$。因此，我们可以应用[14] 命题3.15 得到

$$\varepsilon_n^{4-1/4}\mathbb{P}_\delta(A \cap \mathcal{C}^\delta_k, B \cap \mathcal{C}^\delta_k) \leqslant \varepsilon_n^{4-1/4}\mathbb{P}_\delta(A \overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow} B) \lesssim \delta^{4-1/4} \sum_{x\in A, y\in B} \mathbb{E}_\delta[\sigma_x\sigma_y].$$

综上，

$$\mathbb{E}_\delta \left[\left(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[D]^2 + \beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}^\delta_k) \right)^2 \right] \lesssim \delta^{4-1/4} \sum_{x,y\in D_\delta} \mathbb{E}_\delta[\sigma_x\sigma_y], \tag{4.4}$$

由引理A.3可知，该量有界。

证明。 作为简写，我们记作 $\varepsilon_n = \varepsilon$ 和 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\delta$。

步骤 1。**黎曼逼近**。 我们首先将关于连续函数 f 的断言简化为一个纯粹关于二进方框的命题。通过分解

$$\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f] = \sum_{A\in\mathcal{A}_\varepsilon} \mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f\mathbf{1}_A],$$

我们可以将其与黎曼和逼近进行比较，并证明

$$\mathbb{E} \left[\left(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f] - \sum_{A\in\mathcal{A}_\varepsilon} f_A \mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[A] \right)^2 \right] \leqslant \sup_{A\in\mathcal{A}_\varepsilon} \operatorname{osc}_A(f)^2 \mathbb{E} \left[\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[D]^2 \right]. \tag{4.5}$$

[14]至少 当两个盒彼此之间及与边界的距离都大于 $2\varepsilon_n$ 时，以及剩余部分 盒化情形可以处理，我们很快就会看到

由引理 A.2，第二个因子有界，其界为 $\delta \to 0$，且第一个因子随 $\varepsilon \to 0$ 消失，因为 f 是（绝对）连续的。因此，仍需分析

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{A\in\mathcal{A}_\varepsilon} f_A\left(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}1(A\cap\mathcal{C}^\delta_k)\right)\right)^2\right]. \tag{4.6}$$

由于 f 有界，在下文中我们可以忽略前置因子 f_A。

步骤 2. 充分分离的方框。 我们从简单的不等式开始

$$(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}^\delta_k))(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[B]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(B\cap\mathcal{C}^\delta_k)) \tag{4.7}$$

$$\leqslant \delta^{4-1/4}\sum_{x\in A,y\in B}\mathbf{1}(x\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}y)+\beta^2\varepsilon^{4-1/4}\mathbf{1}(A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}B), \tag{4.8}$$

其中我们略去了负的交叉项。注意，这类交叉项实际上可能对我们有帮助（特别是，上面的左端可能为负，而右端为正），但我们只在证明的最后一步才依赖这些抵消。设

$$\mathcal{G}^2_\varepsilon=\left\{(A,B)\in\mathcal{A}_\varepsilon\times\mathcal{A}_\varepsilon \mid \mathrm{d}(A,\partial D),\mathrm{d}(B,\partial D),\mathrm{d}(A,B)\geqslant 10\varepsilon^{1/3}\right\}$$

为与边界以及彼此之间都“足够”远的方框对所成的集合。我们现在证明，可以安全地忽略不属于 $\mathcal{G}^2_\varepsilon$ 的方框对，它们在后面会带来问题。在使用（4.6）之后，我们可以应用引理A.3 和引理A.4 来证明

$$\delta^{4-1/4}\sum_{(A,B)\notin\mathcal{G}^2_\varepsilon}\sum_{x\in A,y\in B}\mathbb{P}\left(x\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}y\right)\longrightarrow 0$$

当 $\varepsilon\to 0$时关于 δ 一致成立。对于另一项，利用 ∂D的正则性，一个非常简单的盒计数论证便足以证明

$$\varepsilon^{4-1/4}\sum_{(A,B)\notin\mathcal{G}^2_\varepsilon}\mathbb{P}(A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}B)\leqslant\varepsilon^{4-1/4}|(\mathcal{A}_\varepsilon\times\mathcal{A}_\varepsilon)\setminus\mathcal{G}^2_\varepsilon|\longrightarrow 0$$

当 $\varepsilon\to 0$时。

步骤 3. 具有唯一大型簇的方框。对于每个盒 $A\in\mathcal{A}_\varepsilon$，我们定义一个事件$U_A$，它属于一种局部唯一性事件，并证明我们可以进一步舍弃任意一对（A，B）$\in\mathcal{G}^2_\varepsilon$，其中至少有一个盒不满足该事件。令

$$U_A=\left\{\text{ there is an }\omega_\delta\text{-open circuit in the annulus } A(\varepsilon^{1/3})\setminus A(\varepsilon^{2/3})\right\},$$

其中我们将 A（R）记作边长为 R 且与 A同心的盒。在事件发生时，我们取 Γ_A 为最外层的此类回路。见图7。

再次使用（4.8），

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(U_A^c)(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}^\delta_k))(\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[B]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(B\cap\mathcal{C}^\delta_k))\right] \tag{4.9}$$

$$\leqslant\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(U_A^c)\left(\delta^{4-1/4}\sum_{x\in A,y\in B}\mathbf{1}(x\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}y)+\beta^2\varepsilon^{4-1/4}\mathbf{1}(A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}B)\right)\right]. \tag{4.10}$$

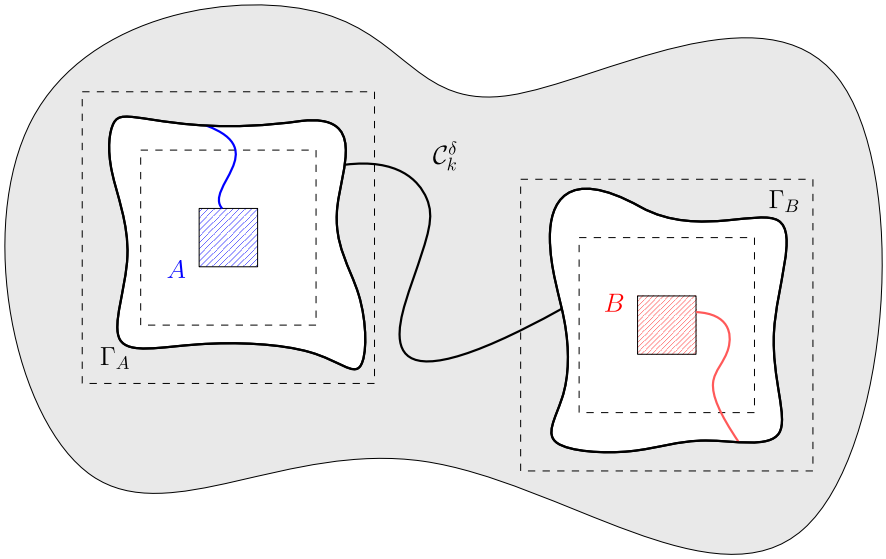


图 7：一对盒（A，B）$\in \mathcal{G}_\varepsilon^2$ 满足事件 U_A 和 U_B。虚线对应于外半径为 $\varepsilon^{1/3}$、内半径为 $\varepsilon^{2/3}$的环域。事件 $\{A \longleftrightarrow \Gamma_A\}$，$\{B \longleftrightarrow \Gamma_B\}$，$\{\Gamma_A \longleftrightarrow \Gamma_B\}$ 也得到满足。灰色区域中的构型状态为 $\mathcal{F}_{AB}$。

现在应用引理 3.6，使事件 U_A^c 与以下任一原始事件去相关$\{x \longleftrightarrow y\}$ 或 $\{A \longleftrightarrow B\}$，从而上述表达式有如下上界：

$$2 \times \mathbb{P}(\omega_\delta^- \notin U_A) \times \left(\delta^{4-1/4} \sum_{x \in A, y \in B} \mathbb{P}(x \overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow} y) + \beta^2 \varepsilon^{4-1/4} \mathbb{P}(A \overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow} B) \right). \tag{4.11}$$

根据引理 3.13，以高概率存在 ω_δ^- -回路，特别地，

$$\mathbb{P}(\omega_\delta^- \notin U_A) = o(1)$$

对 δ一致地，当 $\varepsilon \to 0$时。对 $(A,\ B) \in \mathcal{G}_\varepsilon^2$求和后，由（4.4）可知，4.11）中的剩余因子有界。综上，只需考虑

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(AB) \in \mathcal{G}_\varepsilon^2} \mathbf{1}(U_{A,B}) \left(\mu_{\mathcal{C}_k^\delta}^\delta[A] - \beta \varepsilon^{2-1/8} \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}_k^\delta) \right) \left(\mu_{\mathcal{C}_k^\delta}^\delta[B] - \beta \varepsilon^{2-1/8} \mathbf{1}(B \cap \mathcal{C}_k^\delta) \right) \right], \tag{4.12}$$

其中记 $U_{AB} = U_A \cap U_B$。

步骤 4. 应用 IIC 估计。 这构成了证明的核心。其思想是利用 IIC 构造来论证宏观簇的介观结构高度集中，并且在大距离上彼此去相关。

在事件 U_{AB} 上，至多存在一个同时与 A 和 B 相交的簇。因此，

$$\mathbf{1}(U_{AB})\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}^{\delta}_k)\right)\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[B]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(B\cap\mathcal{C}^{\delta}_k)\right)$$
$$=\mathbf{1}(\Gamma_A\overset{\mathcal{C}^{\delta}_k}{\longleftrightarrow}\Gamma_B,U_{AB})\times\mathbf{1}(A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_A)\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\right)\times\mathbf{1}(B\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_B)\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[B]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\right). \tag{4.13}$$

我们定义 $\mathcal{F}_{AB}$ 为 ω_δ 在两个回路之外的集合上的限制所包含的信息 Γ_A和 Γ_B。关键在于，(4.13) 中的第一个因子关于 $\mathcal{F}_{AB}$可测。注意，这里隐含地声称，某簇是第 k大簇这一事件也关于 $\mathcal{F}_{AB}$可测；这确实成立，因为簇的直径不会受其在开回路内部形状的影响，而且内部没有其他簇会更大。由于各回路的内部Γ_A， Γ_B 互不相交，给定 $\mathcal{F}_{AB}$后， $\omega_\delta|_{\Gamma_A}$ 和 $\omega_\delta|_{\Gamma_A}$ 的状态条件独立。此外，它们分别服从测度 $\mathbb{P}_{\Gamma_A}$ 和 $\mathbb{P}_{\Gamma_A}$。–因此，我们可以分别考虑 A 和 B 的贡献，并进一步分解

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}(A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_A)\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\right)\mid\mathcal{F}_{AB}\right]=$$
$$\mathbb{P}\left[A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_A\mid\mathcal{F}_{AB}\right]\times\mathbb{E}_{\overline{\Gamma_A}}\left[\delta^{2-1/8}|A\cap\mathcal{C}_0^{\Gamma_A}|-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mid A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_A\right], \tag{4.14}$$

其中 $\mathcal{C}_0^{\Gamma_A}$用来表示在新测度下，簇 $\mathcal{C}^{\delta}_k$ 充当边界簇这一事实。现在，我们运用精心选取的 β 以及命题 4.4 和引理3.17 ，推得

$$\mathbb{E}_{\overline{\Gamma_A}}\left[\delta^{2-1/8}|A\cap\mathcal{C}_0^{\Gamma_A}|-\beta\varepsilon^{2-1/8}\middle|A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}\Gamma_A\right]=o(\varepsilon^{2-1/8}),$$

关于 δ一致成立。对盒 B也有等价估计，并且在撤销条件化之后，我们得知

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(A,B)\in\mathcal{G}^2_\varepsilon}\mathbf{1}(U_{AB})\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[A]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}^{\delta}_k)\right)\left(\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}[B]-\beta\varepsilon^{2-1/8}\mathbf{1}(B\cap\mathcal{C}^{\delta}_k)\right)\right] \tag{4.15}$$
$$=o(1)\ \varepsilon^{4-1/4}\mathbb{E}\left[\sum_{A,B\in\mathcal{A}_\varepsilon}\mathbf{1}(U_{AB},A\overset{\omega_\delta}{\longleftrightarrow}B)\right]. \tag{4.16}$$

至此证明结束，因为该非消失因子以（4.4）为界。 □

注 4.7. 上述证明的第二步表明，在对 ∂D作一些非常温和的正则性假设的条件下，可以从第一性原理处理边界问题，尽管方式并非最优。如果 D 的边界是分形的，则可以转而得到这些测度的弱收敛。具体而言，与命题4.3 的证明中相同的论证表明，对任意紧子集$K\subset D$,

$$\limsup_{\delta\to0}\mathbb{E}_\delta[\mu^{\delta}_{\mathcal{C}^{\delta}_k}(K)^2]<\infty,$$

在定理 4.6 的证明过程中，通过取 $f\in C_c(D)$为定义在 D 中的具有紧支撑的连续函数，避开所有边界问题。

注释 4.8。 定理 4.6的陈述对 $f = \mathbf{1}_K$也成立，其中 $K \subset D$ 是任意紧子集。只需证明

$$\mathbb{E}_\delta \left[\left(\sum_{\substack{A \in \mathcal{A}_\varepsilon \\ A \cap \partial K}} \delta^{2-1/8} \mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[A] \right)^2 \right] = o(1),$$

这可通过运用引理 A.1进行直接论证得出。

注记 4.9. 对于自由边界条件，可以验证，一个几乎完全相同（实际上更简单）的证明同样成立。事实上，在适当的地方，自由边界条件下所需的任何估计，都可以由定义在适当更大区域上的 $+$边界条件下的估计所控制。

4.3 连续统面积测度的可测性

下面将所有结果结合起来，并运用定理 4.6 证明定理 4.2。簇的收敛性已在定理1.14 （另见引理 C.1）中确立，因此还需证明，离散测度的任意子序列标度极限都是 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_k}$的可测函数。以下结论均假设存在一个耦合，使得几乎必然收敛成立；根据斯科罗霍德表示定理，我们知道这样的耦合确实存在。

引理 4.10. 设 $\mathbb{P}$ 为一个耦合，使得集合$(\mathcal{C}^\delta_k)_{k\geqslant 0}$ 收敛到$(\mathcal{C}_k)_{k\geqslant 0}$ $\mathbb{P}$，且对几乎所有 $\delta \to 0$均成立。固定 $k \geqslant 0$ 和一个大小为 ε_n的二进方框 $A \in \mathcal{A}$，其中 $n \geqslant 1$任意。则，

$$\mathbf{1}(\mathcal{C}^\delta_k \cap A) \longrightarrow \mathbf{1}(\mathcal{C}_k \cap A),$$

$\mathbb{P}$-几乎必然地，当 $\delta \to 0$ 时。

证明。 见附录C。 □

命题 4.11。 设 $\mathbb{P}$ 是一个耦合，使得集合 $(\mathcal{C}^\delta_k)_{k\geqslant 0}$ 在 $\mathbb{P}$-几乎必然意义下，当 $\delta \to 0$时收敛到 $(\mathcal{C}_k)_{k\geqslant 0}$。固定 $k \geqslant 0$ 和 $f \in C(D)$。则，

$$\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f] \longrightarrow \mu_{\mathcal{C}_k}[f]$$

在 $L^2(\mathbb{P})$ 中，当 $\delta \to 0$时作为极限存在。此外，极限 $\mu_{\mathcal{C}_k}$ 关于 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_k}$可测。

证明。 根据定理 4.6，我们有

$$\mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta_k}[f] - \beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}^\delta_k) \longrightarrow 0$$

在 $L^2(\mathbb{P})$ 当 $\delta \to 0$，然后 $n \to \infty$。对于 n 固定的情形，上面的和只涉及有限多个盒，应用引理4.10可得

$$\beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}^\delta_k) \longrightarrow \beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A \in \mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A \cap \mathcal{C}_k)$$

几乎必然且在 $L^2(\mathbb{P})$ 当 $\delta \to 0$。此外，再次应用定理 4.6 可知序列

$$\Big(\beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}_k)\Big)_{n\geqslant 1} \tag{4.17}$$

在 $L^2(\mathbb{P})$ 中是柯西的，因而收敛。综上，我们得到

$$\mu_{\mathcal{C}_k}[f] := \lim_{\delta\to 0} \mu^{\delta}_{\mathcal{C}_k^\delta}[f] = \lim_{n\to\infty} \beta\varepsilon_n^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{A}_n} f_A \mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}_k)$$

作为 $L^2(\mathbb{P})$ 中的极限存在。由于序列（4.17）关于 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_k}$ 可测，结论成立。

□

定理 4.2 的证明现在可由标准的唯一性论证得出。我们写出该论证的完整细节，因为在下文中还会反复使用。

定理 4.2 的证明。 固定 $k \geqslant 0$ 并将其从记号中省略。结合定理 1.14 和命题 4.3，我们知道联合分布 $(\mathcal{C}^\delta, \mu^\delta_{\mathcal{C}^\delta})$ 是紧的：存在一个子序列 (δ_n)以及一个测度 μ 使得

$$(\mathcal{C}^{\delta_n}, \mu^{\delta_n}_{\mathcal{C}^{\delta_n}}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{C}, \mu),$$

其中 $\mathcal{C}$ 是定理 1.14中所描述的适当 CLE_4 地毯。现在，只需证明对于任意其他的收敛子序列 (δ_k)，其极限为

$$(\mathcal{C}^{\delta_k}, \mu^{\delta_k}_{\mathcal{C}^{\delta_k}}) \xrightarrow{(d)} (\mathcal{C}, \mu^*), \tag{4.18}$$

有 $(\mathcal{C}, \mu^*) \overset{(d)}{=} (\mathcal{C}, \mu)$。注意，这里使用了极限 $\mathcal{C}$ 与子序列无关（事实上是显式给出的）这一事实，该事实由定理 1.14 得出。

考虑（4.18）中的极限。根据斯科罗霍德表示定理，存在一个联合耦合 $\mathbb{P}$ 使得收敛 $\mathbb{P}$几乎必然成立。特别地，对任意 $f \in C(D)$，

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{\delta_k}_{\mathcal{C}^{\delta_k}}[f] = \mu^*[f] \quad \text{a.s.} \tag{4.19}$$

此外，在这样的耦合中，我们可以利用命题4.11 得出

$$\lim_{k\to\infty} \mu^{\delta_k}_{\mathcal{C}^{\delta_k}}[f] = \lim_{\varepsilon\to 0} \beta\varepsilon^{2-1/8} \sum_{A\in\mathcal{Q}_f} f_A \mathbf{1}_{\{A\cap\mathcal{C}\}} =: \mu_{\mathcal{C}}[f] \tag{4.20}$$

作为 $L^2(\mathbb{P})$中的极限存在。结合（4.19）和（4.20），我们得到

$$\mu^*[f] = \mu_{\mathcal{C}}[f]$$

作为 $\mathcal{C}$ 的可测函数。由于此函数（至关重要地）与子序列（δ_k）无关，极限分布的唯一性便得以成立。

□

5 IMF 的收敛及与高斯自由场的耦合

本节将证明第 1 节中陈述的所有主要结果。我们首先处理关于与高斯自由场耦合的所有陈述，以及离散耦合的联合收敛。随后，我们将识别这些测度并证明其余的结论。

5.1 耦合与联合收敛

为完整起见，我们陈述 IMF 的紧性，并概述证明。有关 Sobolev 空间的更多背景知识，请参阅附录 B。

命题 5.1 ([25,49])。 设 D 是一个边界非分形的若尔当区域。对于 $s<-1$，$(\Phi_\delta)_{\delta>0}$ 的分布关于拓扑 $H^s(\mathbb{C})$是紧的。

证明。 根据 Rellich-Kondrachov 嵌入定理，只需证明

$$\limsup_{\delta\to 0}\mathbb{E}_\delta[\|\Phi_\delta\|^2_{H^s(\mathbb{C})}]<\infty.$$

由于我们可以将期望范数展开为

$$\int_{\mathbb{C}}(1+|\xi|^2)^s\mathbb{E}_\delta[|\hat{\Phi}^\delta(\xi)|^2]d\xi=\int_{\mathbb{C}}(1+|\xi|^2)^s\mathbb{E}_\delta[|\Phi_\delta(e^{-2\pi i\xi\cdot})|^2]d\xi,$$

并且根据我们对 $s<-1$ 的选择，只需证明对于任意正函数 $f\in L^\infty(\mathbb{C})$,

$$\limsup_{\delta\to 0}\mathbb{E}_\delta[\Phi^\delta[f]^2]<\infty.$$

这由引理 A.2得出。 □

注记 5.2. 根据 [49] 中的结果，指数 $s<-1$ 可提高至 $s<-1/8$。然而，狄拉克质量属于索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{C})$ 当且仅当 $s<-1$，因此我们需要修改离散伊辛磁化场的定义。为了与我们使用测度的方法相符，并出于简洁考虑，我们不追求指数的最优性。

现在我们证明单个伊辛磁化场及其 Edwards-Sokal 表示的收敛，并证明它们与高斯自由场的联合耦合。随后便可直接得到四个伊辛磁化场的联合耦合。以下证明中给出的所有论证，都是处理自旋场 [10,24,25,27] 的 Edwards-Sokal 表示（的标度极限）时的标准做法。下文不再明确说明收敛所用的拓扑，希望读者此时已经清楚。

引理 5.3. 设 D 是一个边界非分形的若尔当区域。那么，当 $\delta\to 0$ 时，

$$(H_\delta,\Phi_\delta,(\mathcal{C}_k^\delta)_{k=0}^\infty,(\mu_k^\delta)_{k=0}^\infty)\xrightarrow{(d)}(h/(\pi\sqrt{2}),\Phi,(\mathcal{C}_k)_{k=0}^\infty,(\mu_k)_{k=0}^\infty).$$

此外，

$$\Phi=\mu_0+\sum_{k=1}^\infty\xi_k\mu_k,$$

其中收敛几乎必然成立，并且在适当的索伯列夫空间中以 $L^2(\mathbb{P})$ 收敛。

证明。 固定 $N\geqslant 1$ 并令指标 $s<-1$。结合定理 1.14、定理 4.2和命题 5.1，我们可以取一个子序列（仍记作原记号），并应用斯科罗霍德表示定理，将其转移到一个公共概率空间上，在该空间中

$$(H_\delta,\Phi_\delta,(\mathcal{C}_k^\delta)_{k=0}^\infty,(\mu_k^\delta)_{k=0}^\infty,(\xi_k)_{k=0}^\infty)\longrightarrow(h/(\pi\sqrt{2}),\Phi^*,(\mathcal{C}_k)_{k=0}^\infty,(\mu_k)_{k=0}^\infty,(\xi_k)_{k=0}^\infty)$$

几乎必然。注意，我们（显然）还包含了与其他所有变量独立的独立同分布符号 $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$ 。此外，除 Φ^* 外，所得到的所有极限都是唯一的。

在离散情形下，对于任意 $N \geqslant 1$，我们可以写成

$$\Phi_\delta = \mu_0^\delta + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k^\delta + R_N^\delta,$$

其中 R_N^δ 只是一个余项。由于 $s < -1$，测度的弱收敛显然蕴含 c 在 $H^s(\mathbb{C})$ 中的收敛。因此，作为有限和，

$$\mu_0^\delta + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k^\delta \longrightarrow \mu_0 + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k$$

几乎必然且在 $L^2(\mathbb{P})$当 $\delta \to 0$时。作为两个收敛项之差，我们还可以得出结论： $R_N^\delta \longrightarrow R_N^*$ 当 $\delta \to 0$ 时几乎必然成立。对于每个截断 $\rho > 0$ ，几乎必然存在一个有限的 [15] 数 $N \equiv N(\rho)$ 个直径大于 ρ的簇。由引理 A.4，于是可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_N^*[f]^2] &\leqslant \limsup_{\delta\to 0} \mathbb{E}_\delta\Big[\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_k^\delta[f]^2\Big] \\
&= \limsup_{\delta\to 0} \mathbb{E}_\delta\Big[\sum_{k:\ \operatorname{diam}(\mathcal{C}_k^\delta)<\rho} \mu_k^\delta[f]^2\Big] \\
&\leqslant \|f\|_\infty^2 \limsup_{\delta\to 0} \delta^{4-1/4}\ \mathbb{E}_\delta\Big[\sum_{\substack{x,y\in D_\delta \\ \mathrm{d}(x,y)\leqslant\rho}} \sigma_x\sigma_y\Big] \\
&\leqslant C\|f\|_\infty^2 \rho^{2-1/4} \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad \rho \to 0,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

对任意 $f \in H^{-s}(\mathbb{C})$。由于符号 $(\xi_k)_{k\geqslant 0}$ 是独立同分布且对称的，

$$\mathbb{E}[\Phi^*[f]^2] = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}[\mu_k[f]^2] + \mathbb{E}[R_N^*[f]^2],$$

因此（5.1）推出

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mu_k[f]^2] < \infty.$$

特别地，

$$\mu_0[f] + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k[f] \longrightarrow \Phi^*[f]$$

几乎必然地，并且当 $N \to \infty$ 时在 $L^2(\mathbb{P})$ 中收敛。可以使用一个标准论证，将针对固定测试函数的收敛提升为在 $H^s(\mathbb{C})$ 中的收敛。

[15] 这是由 Aizenman-Burchard 判据得出的 [4], 该判据由 DRC [38, 定理 1.1]满足。直接证在连续统中的定义可参见 [8,命题 6.1]。

最后，由于我们已将 Φ^* 写成 h 和相互独立的符号$(\xi_k)_{k\geqslant 0}$的可测函数，并且对于任何子序列极限，该函数都相同，因此我们得出联合收敛，正如定理4.2的证明中所示。

□

注 5.4. 与注4.7类似，当 D 具有分形边界时，很容易得到关于 $H^s_{loc}(D)$ 的收敛，其中 $s<-1$。

在证明主要定理 1.1-1.2-1.10之前，我们详细说明自旋 $(\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$和 $(\tau_k^{\mathrm{f}})_{k\geqslant 1}$的定义。为了利用 [38, 39]的结果，并使其与相应簇上的离散 XOR-伊辛自旋取值相匹配，我们用二值集的标签来定义它们。用 $\mathcal{L}^+_{-a,b}$ 表示 $\mathcal{L}_{-a,b}$ 中边界值为 b的环的集合，迭代如下：

(+) </style}对于 +边界条件：

(1.+) 边界簇为 $\mathcal{C}_0^+=\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h)$。该簇的标签为 $c^+_{\mathcal{C}_0^+}=-1$.

(2.+) 令 $\gamma\in\mathcal{L}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h)$。

(a) 若 $\gamma\in\mathcal{L}^+_{-2\lambda,2\lambda}(h)$，则为每个环 $\ell\in\mathcal{L}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$ 指定一个簇 $\mathcal{C}_\ell^+=\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$。该簇的标签为

$$c^+_{\mathcal{C}_\ell^+}=\begin{cases}+1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^+_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma),\\ -1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^-_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma).\end{cases}\tag{5.2}$$

(b) 若 $\gamma\in\mathcal{L}^-_{-2\lambda,2\lambda}(h)$，则为每个环 $\ell\in\mathcal{L}_{-(2\sqrt{2}-2)\lambda,2\lambda}(h^\gamma)$ 指定一个簇 $\mathcal{C}_\ell^+=\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$。该簇的标签为

$$c^+_{\mathcal{C}_\ell^+}=\begin{cases}+1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^-_{-(2\sqrt{2}-2)\lambda,2\lambda}(h^\gamma),\\ -1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^+_{-(2\sqrt{2}-2)\lambda,2\lambda}(h^\gamma).\end{cases}\tag{5.3}$$

(3.+) 迭代地，令 $\mathcal{C}_\ell^+=\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$，其中某个环为 ℓ。对每个 $\gamma\in\mathcal{L}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$ 应用 **(2.+)**。定义自旋

$$\tau^+_{\mathcal{C}_\ell^+}=\prod_j(-c^+_{\mathcal{C}_j^+}),$$

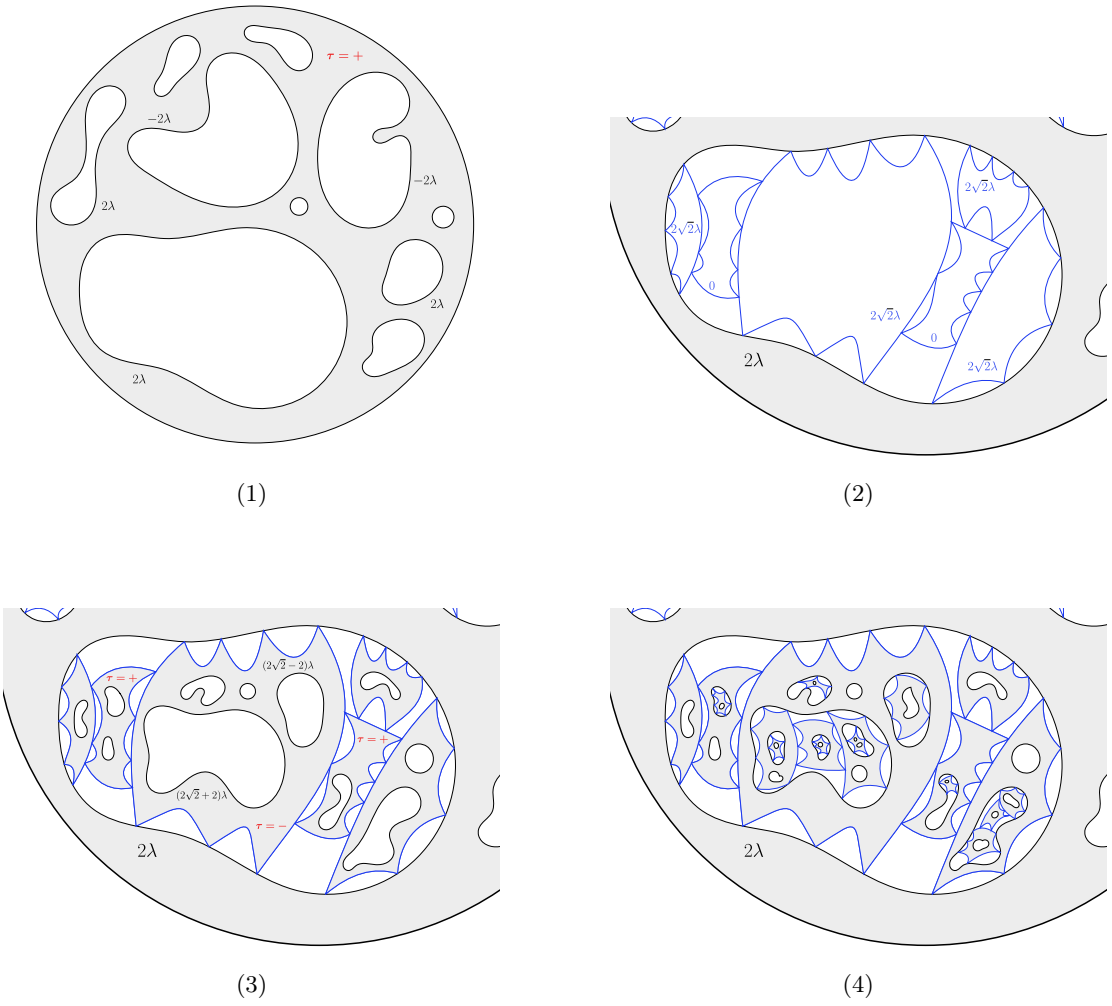
其中，乘积遍历所有外边界包围着 $\mathcal{C}_\ell^+$ 的簇，包括簇 $\mathcal{C}_\ell^+$ 本身。

（自由）自由边界条件：

（1.f）每个环 $\ell\in\mathcal{L}_{-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda}(h)$ 都赋予一个簇 $\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{f}}=\mathbb{A}_{-2\lambda,\ 2\lambda}(h^\ell)$。标签为

$$c^{\mathrm{f}}_{\mathcal{C}_\ell^{\mathrm{f}}}=\begin{cases}+1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^+_{-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda}(h),\\ -1 & \text{if } \ell\in\mathcal{L}^-_{-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda}(h).\end{cases}$$

（2.f）按照（3.+）中的方式迭代。以相同方式定义 $\tau^{\mathrm{f}}_{\mathcal{C}^{\mathrm{f}}}$。



(1) (2)

(3) (4)

图 8：对簇 $(\mathcal{C}_k^+)_{k\geqslant 0}$ 的探索步骤示意图，簇以灰色阴影标出。每当首次发现一个簇时，其 τ^+–自旋以红色显示。(1) 边界簇为 $\mathcal{C}_0^+ = \mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h)$。(2) 我们聚焦于单个环 $\gamma \in \mathcal{L}^+_{-2\lambda,2\lambda}(h)$，其边界值为 2λ。每个环 $\ell \in \mathcal{L}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$（以蓝色标出）都将对应一个簇。请注意，这些环的边界值必须如图所示，且偶环不能与边界接触。(3) 我们发现每个蓝色环 $\ell \in \mathcal{L}_{-2\lambda,(2\sqrt{2}-2)\lambda}(h^\gamma)$ 内部的簇，其中每个簇的形式为 $\mathbb{A}_{-2\lambda,2\lambda}(h^\ell)$。请注意 τ^+–自旋与标签之间的对应关系。(4) 在每个环内迭代地定义嵌套簇（尽管此处未展示所有迭代）。我们强调，集合 $(\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$ 实际上仅关于簇的几何结构可测，见注5.5。

现在我们可以开始证明主要结果。

定理 *1.1-1.2-1.10*的证明。 只需证明定理1.10中所述的联合收敛，以及显式表示式（1.5）。

记（Φ_δ^+，$\tilde{\Phi}_\delta^+$）为具有 $+$ 边界条件的 D_δ 上的离散 IMF 对。对于任意 $k \geqslant 1$，簇 $\mathcal{C}_k^\delta$ 的外边界由对偶图上耦合 DRC 的一个内边界给出。如 [39], 中所述，每个这样的内边界都对应一个标签 c_k^δ，该标签根据对偶 DRC 的奇偶性定义。特别地，其定义方式使得

$$\tau_k^{\delta,+} = -\prod_j c_{\mathcal{C}_j^+}^+,$$

其中，乘积再次遍历所有外边界包围着 $\mathcal{C}^{\delta,\ +}_{\ k}$ 的簇。两个场及其分解的联合收敛由以下观察结果得出：

1. 根据 [39, 定理 6.2 - 6.4], ，标签 $(c^{\delta,\ +}_{\ k})_{k\geqslant 1}$ 的分布联合收敛于 $(c_k^+)_{k\geqslant 1}$的分布，其定义如上。2. 离散 IMF 也满足与（1.5）类似的分解。并且两个场彼此独立。3. $(\xi_k\tau_k^+)_{k\geqslant 1}$ 的分布仍然是独立同分布的抛硬币结果，因此引理 5.3 适用于 $\tilde{\Phi}_\delta^+$。

四个伊辛磁化场的联合收敛可用类似的方法证明，即结合定理 1.14 与引理5.3，并注意到注 4.9。

□

注5.5。 标签 $(c_k^+)_{k\geqslant 0}$，从而自旋 $(\tau_k^+)_{k\geqslant 0}$，不仅是 h 的可测函数，也是集合 $(\mathcal{C}_k^+)_{k\geqslant 0}$ 的可测函数。事实上，根据 [11, 定理 4.1], ，当两个自旋 τ_k^+ 和 $\tau_{k'}^+$ 分别对应于两个彼此接触的簇时，它们必定不同；而所有接触前一个 CLE$_4$ 的簇都必须具有相同的自旋。然而，在离散情形中，奇偶性标签并非 仅仅 是簇的几何结构的可测函数。如注 3.2 中所述，给定簇 $\tau^{\delta,\ +}$ 后，自旋的分布 ω_δ 服从反铁磁伊辛模型（相互作用与公共边界的大小成正比），因此可以合理地认为，在极限中存活下来的彼此接触的宏观簇永远不会具有相同的标签。

5.2 测度的识别与共形协变性

我们首先比较一下我们的测度与簇 $\mathcal{C}$ 的 d 维明可夫斯基内容。我们沿用 [103] 中的定义。对于任意闭集合 $S \subset \mathbb{C}$， S 的 d 维明可夫斯基内容定义为

$$\mathrm{Cont}_d(S) := \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{d-2}\mathrm{Leb}(B(S,\varepsilon)), \tag{5.4}$$

前提是该极限存在。这里，勒贝格测度是二维勒贝格测度，而 $B(S,\ \varepsilon)$ 是集合 S 的 ε-邻域扩张。可以将这个定义理解为d维面积的推广。此外，测度 $\mathcal{M}$ 是 d维明可夫斯基内容测度

在 s 中的 S ome 区域 D，如果它是一个支撑在 $D\cap S$ 中的测度，并且对于每个紧集 $K\subset D$ ，

$$\mathrm{Cont}(K\cap S)=\mathcal{M}_S(K)<\infty. \tag{5.5}$$

回顾一下， S 的明可夫斯基维数定义为

$$d:=\dim_M(S):=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log(N_\varepsilon(S))}{\log(1/\varepsilon)}$$

假设极限存在，其中 $N_\varepsilon(S)$表示与 S相交的 ε-盒的数量 S。类比于 (5.4)，自然可以定义 d维“盒”内容为

$$\mathrm{Box}_d(S)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^d N_\varepsilon(S). \tag{5.6}$$

事实上，这一定义体现了 d维面积的概念，其思路与明可夫斯基内容相同（并且与明可夫斯基维数的盒计数特性联系更为紧密）。不过请注意，(5.4)-(5.6) 中任一极限的存在，并不保证另一极限也存在。

在上一节中，我们证明了簇 $\mathcal{C}$ 的“盒”内容测度存在，且等于 $\mu_{\mathcal{C}}$ 的一个常数倍。也就是说，连续统测度确实是“面积”测度。尽管这一识别十分明确，我们仍选择进一步验证 [77] 中针对此类测度提出的唯一性公理。

定理 *1.6* 的证明。盒计数极限的存在性由命题4.11及备注 4.8给出。为证明唯一性，我们验证定理 1.16中的公理。

(i) 由定理 [16] 4.6可立即推出，或者直接由命题 4.3 得出。

(ii) 我们采用定理 1.16陈述中的相同记号。对于任意 $f\in C_c(V)$ ，

$$\mu_{\mathcal{C}}[f]=\lim_{\varepsilon\to 0}\beta\varepsilon^{2-1/8}\sum_{A\in\mathbb{A}_\varepsilon}f_A\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C})=\lim_{\varepsilon\to 0}\beta\varepsilon^{2-1/8}\sum_{A\in\mathbb{A}_\varepsilon}f_A\mathbf{1}(A\cap\mathcal{C}_V).$$

此外，给定 $\mathcal{C}\backslash\mathcal{C}_V$， $\mathcal{C}_V$的分布就是 V上的 CLE_4。特别地，右侧恰好是区域 V中该测度的定义。

(iii) 我们将证明一个稍强的结论，后文会用到。取两个若尔当区域 D $\tilde{}$ $\tilde{}$和 D，其中分别包含簇 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}$ 。给定 IMF 的（连续统）分解，

$$\mu_{\mathcal{C}}[f]=\mathbb{E}[\Phi^D[f]\mid\mathcal{F}_{\mathcal{C}}] \tag{5.7}$$

对任意 $f\in C_c(D)$。请注意，为使这一论证适用于边界簇测度以外的测度，我们允许使用任意若尔当区域（例如由簇的内边界所界定的区域）。特别地，根据定理 1.15，

$$\mathbb{E}[\mu_{\mathcal{C}}[f]]=\mathbb{E}[\Phi^D[f]]=2^{1/4}\mathfrak{C}\int_D\mathrm{CR}(z,D)^{-1/8}f(z)dz.$$

[16]注意， $\mathbb{C}$ 上的任何局部有限测度自动都是内正则且外正则的，因此我们已经可以提取出一些良好的性质。

˜ ˜对于任意保形的 $\varphi\colon\ D \to D$ 满足 $\varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mu_{\tilde{\mathcal{C}}}[f \circ \varphi^{-1}]] &= 2^{1/4}\mathfrak{C} \int_{\tilde{D}} \mathrm{CR}(z, \tilde{D})^{-1/8} f(\varphi^{-1}(z)) dz \\
&= 2^{1/4}\mathfrak{C} \int_{D} \mathrm{CR}(\varphi(w), \tilde{D})^{-1/8} f(w) |\varphi'(w)|^2 dw \\
&= 2^{1/4}\mathfrak{C} \int_{D} \mathrm{CR}(w, D)^{-1/8} f(w) |\varphi'(w)|^{2-1/8} dw \\
&= \int_{D} f(w) |\varphi'(w)|^{2-1/8} d\mathbb{E}[\mu_{\mathcal{C}}](z),
\end{aligned}$$

如所需。

□

注 5.6. 测度共形协变性的直接证明可沿用 [50, 第 6] 节中的相同论证。事实上，不难看出，我们的 L^2 近似不受旋转或平移 ε-格子的影响。实际上，我们发现这两种论证相差不远：这种 L^2 近似表明，测度与其期望非常接近，因此后者的共形协变性应当足以得出结论。

注 5.7. 共形协变性的证明隐含了以下马尔可夫性质陈述：给定某个簇 $\mathcal{C}$,

$$\Phi^{D}[f] = \Phi^{O(\mathcal{C})}[f]$$

对于所有 $f \in C_c(O(\mathcal{C}))$，其中 $O(\mathcal{C})$ 是由 $\mathcal{C}$ 的外边界围成的区域。

只要求定理 1.16 中强度测度具有共形协变性，实际上就可以仅凭 IMF 单点函数的共形协变性证明 IMF 的共形协变性（而无须要求所有矩都具有协方差）。事实上，定理1.16 意味着，公理 (1)-(4) 足以推出测度的共形协变性。由此可得

$$\begin{aligned}
\Phi^{\tilde{D}}[f \circ \varphi^{-1}] &= \mu_0^{\tilde{D}}[f \circ \varphi^{-1}] + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k^{\tilde{D}}[f \circ \varphi^{-1}] + R_N^{\tilde{D}}[f \circ \varphi^{-1}] \\
&= \mu_0^{D}[f|\varphi'|^{2-1/8}] + \sum_{k=1}^{N} \xi_k \mu_k^{D}[f|\varphi'|^{2-1/8}] + R_N^{\tilde{D}}[f \circ \varphi^{-1}].
\end{aligned}$$

但根据柯贝四分之一定理， D 中簇的直径与 D中簇的直径相当。特别地，第二行求和的尾部仍会在 $N \to \infty$时几乎必然趋于零。极限的分布与 $\Phi^{D}[f|\varphi'|^{2-1/8}]$相同，正如所需。

5.3 阿什金-泰勒磁化场

我们将最后这个简短的小节用于证明 AT 磁化场所猜想的标度极限是良定义的。

命题的证明 *1.13*。 设 $g \neq 4$。设 $(\mathcal{C}_k^g)^{k\geqslant 0}$ 为 $+$边界条件下的簇。回顾一下，它们的定义与定理1.2 几乎完全类似，只需将其中所有明确出现的 $\sqrt{2}$ 替换为 $\sqrt{g}$。设 $(\mu_k^g)^{k\geqslant 0}$ 为这些簇上的盒计数测度，定义见定理 1.6。我们证明无穷级数

$$\Psi^g = \mu_0^g + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^+ \mu_k^g \tag{5.8}$$

几乎必然收敛，并且在 L^2 中收敛。其余场的分解的收敛证明类似。

回顾一下，簇按照直径由大到小排序。此外，对于任意 g，根据 [8,命题 6，1]簇的集合是局部有限的。要证明（5.8）所需的收敛，只需证明对于任意 $f \in C_c(D)$，

$$\sum_{k=N}^{M} \mathbb{E}[\mu_k^g[f]^2] \longrightarrow 0$$

当 $M \to \infty$ 时，然后当 $N \to \infty$ 时。事实上，由于这是一个非负且单调的序列，只需证明

$$\sum_{k=N}^{M} \mathbb{E}[\mu_k^g[f]^2 \mid \mathcal{F}_{O_N}] \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.},$$

其中 $\mathcal{F}_{O_N}$ 是由簇 C_k^g 在 $k \geqslant N$时的最外层外边界 O_k 生成的 σ-代数。可以这样理解：对双值集的迭代进行条件化，并在发现直径小于某个 $\rho = \rho(N) > 0$的环时停止。由（5.7），

$$\mathbb{E}[\mu_k^g[f]^2 \mid \mathcal{F}_{O_N}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi^{O_k}[f] \mid \mathcal{F}_{\mathcal{C}_k^g}]^2 \mid \mathcal{F}_{O_N}] \leqslant \mathbb{E}[\Phi^{O_k}[f]^2 \mid \mathcal{F}_{O_N}]$$

其中 Φ^{O_k} 是由 O_k 围成的区域内的一个 IMF，且与其他所有对象独立。现在回顾一下，外边界 O_k 都由高度间隙为 $2\sqrt{g}\lambda$ 的双值集的环构成。关键的是，根据 [92], ，这些集合的豪斯多夫维数几乎必然等于

$$2 - \frac{1}{2g} < 2 - \frac{1}{8}$$

对于 $g < 4$。由于我们已固定区域中的条件化，因此可以将以下（确定性）结论应用于 $D_N = \cup_{k\geqslant N} O_k$，从而得出结论。

断言： 设 $D_N \subset D$ 是一个递减的区域序列（不一定连通），其连通分支的最大直径在 $N \to \infty$ 时趋于零。此外，假设 ∂D_N 的维度严格小于 $2 - 1/8$。那么，在 D_N 上伊辛模型的二点函数 [31] 满足，当 $N \to \infty$ 时，

$$\int_{D_N} \int_{D_N} \mathrm{CR}(z, D_N)^{-1/8} \mathrm{CR}(w, D_N)^{-1/8} \cosh((1/2) G_{D_N}(z, w))^{1/2} dz dw \longrightarrow 0.$$

为证明这一断言，我们将 $G_{D_N}(z,\ w) = -\log(|z-w|) + g_{D_N}(z,\ w)$，其中 g_{D_N} 是一个有界函数。忽略常数因子，上述积分的上界为

$$\int_{D_N}\int_{D_N} \mathrm{CR}(z,D_N)^{-1/8}\mathrm{CR}(w,D_N)^{-1/8}|z-w|^{-1/4}dzdw \\ + \int_{D_N}\int_{D_N} \mathrm{CR}(z,D_N)^{-1/8}\mathrm{CR}(w,D_N)^{-1/8}dzdw.$$

直接计算可知，在满足关于 ∂D_N 的维度假设时，所需的收敛成立。

□

注释 5.8。 从证明中可以看出，情形 $g = 4$，或等价地 $J = U$，需要格外谨慎。回想一下，磁化场与极化场具有相同分布的情形，恰恰就在这一点；人们猜想其分布为 $\cos((1/2)h)$。文献研究了该场的连续统分解，以及更一般的 $\cos(\alpha h)$ （对于任意 $\alpha \in (0,1)$）的连续统分解，见 [8]。

A 伊辛关联的估计

设 D 为一个具有非分形边界的若尔当区域，如定义 4.1 所述。设 $D_\delta \subset \delta\mathbb{Z}^2$为一个离散区域近似，如 (B.1) 所示。为推导全文所用的关联不等式，可以以下列 Onsager 型不等式为出发点。这两个界都可以由标准的 FK-伊辛论证以及 [36,第5]节中的结果推出。本节中的所有常数都只依赖于区域 D。

命题 A.1 ([49, 命题 3.10], [60, 引理 4.4])。 存在常数 $C > 0$，使得对于任意 $x, y \in D_\delta$,

(i) $\delta^{-1/8}\mathbb{E}^+_\delta[\sigma_x] \leqslant C\mathrm{d}(x,\partial D_\delta)^{-1/8}$,

(ii) $\delta^{-1/4}\mathbb{E}^+_\delta[\sigma_x\sigma_y] \leqslant C\left(|x-y| \wedge \mathrm{d}(x,\partial D_\delta)\right)^{-1/8}\left(|x-y| \wedge \mathrm{d}(y,\partial D_\delta)\right)^{-1/8}$.

这些界直接给出了引理 A.2–A.4中的所有上界。引理 A.2 中的下界可以利用 [36,引理 5.4、命题 5.5]来证明。需要强调的是，这些估计是众所周知的，例如在 [25]中各处的证明里都有出现。

引理 A.2. 存在 $C, c > 0$，使得

$$c \leqslant \delta^{2-1/8}\ \mathbb{E}^+_\delta\left[\sum_{x\in D_\delta}\sigma_x\right] \leqslant C.$$

and

$$c \leqslant \delta^{4-1/4}\ \mathbb{E}^+_\delta\left[\sum_{x,y\in D_\delta}\sigma_x\sigma_y\right] \leqslant C.$$

引理 A.3。 存在 $C > 0$，使得对于所有足够小的 $\varepsilon > 0$ 和 δ，

$$\delta^{4-1/4}\ \mathbb{E}^+_\delta\left[\sum_{\substack{x,y\in D_\delta\\ \mathrm{d}(x,\partial D_\delta)\leqslant\varepsilon}}\sigma_x\sigma_y\right] \leqslant C\varepsilon^{1-1/8}.$$

引理 A.4。 存在 $C>0$，使得对于所有足够小的 $\varepsilon>0$ 和 δ，

$$\delta^{4-1/4}\ \mathbb{E}_\delta^+\Bigg[\sum_{\substack{x,y\in D_\delta\\ \mathrm{d}(x,y)\leqslant\varepsilon}}\sigma_x\sigma_y\Bigg]\leqslant C\varepsilon^{2-1/4}.$$

B 随机变量空间

本节旨在严格定义我们在标度极限 $\delta\to 0$ 中所采用的各种拓扑，并介绍一些相关背景。

令 D 为一个若尔当区域。根据 [38,39], ，我们称 $D_\delta\subset\delta\mathbb{Z}^2$ 为离散区域近似，如果

$$d_\ell(\partial D^\delta,\partial D)\longrightarrow 0 \tag{B.1}$$

当 $\delta\to 0$ 时。任意两个环 γ_1、γ_2 之间的距离 d_ℓ 定义为

$$d_\ell(\gamma_1,\gamma_2):=\inf\sup_{t\in\mathbb{S}^1}|\gamma_1(t)-\gamma_2(t)|, \tag{B.2}$$

其中 下确界取遍所有通过 $\mathbb{S}^1$ 对环进行的连续双射参数化 .

收敛的拓扑由以下空间之一给出。再次强调，这些都是标准定义，例如可见 [24,50,60]。

(1) 环的集合： 设 $\mathsf{L}=\mathsf{L}(D)$ 为由局部有限的[17] 互不自接触的环组成的集合空间，这些环位于 D 中且彼此不交叉。此空间可赋予由度量 d_ℓ （见B.2）诱导的 Hausdorff 型度量。也就是说，我们定义

$$d_{\mathsf{L}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2):=\inf\{\varepsilon>0:\ \forall\gamma_1\in\mathcal{L}_1^\varepsilon\ \ \exists\gamma_2\in\mathcal{L}_2\ \ \text{s.t.}\ \ d_\ell(\gamma_1,\gamma_2)<\varepsilon\ \text{and viceversa}\},$$

其中 $\mathcal{L}^\epsilon$ 是 $\mathcal{L}$ 中直径大于 $\varepsilon>0$的环的（有限）集合。这与 [38,39]中的度量相同。空间 $(\mathsf{L}\ d_{\mathsf{L}})$ 是完备且可分的 [4]。此外，满足 Aizenman-Burchard 判据（在 [4]，中记为 **H1** ）的 L 中随机环集合序列 $(\mathcal{L}_n)_{n\geqslant 1}$，相对于度量 d_{L}是紧的，特别是收敛到一个局部有限的环集合。

(2) 闭集的集合： 令 $\mathsf{C}=\mathsf{C}(D)$ 表示 D 中局部有限闭子集集合所构成的空间。该空间可以配备一种度量，类似于 d_{L}，它是相对于 D 的闭子集上的标准豪斯多夫度量 d_H 定义的。也就是说，

$$d_{\mathsf{C}}(\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2):=\inf\{\varepsilon>0:\ \forall C_1\in\mathcal{C}_1^\varepsilon\ \ \exists C_2\in\mathcal{C}_2\ \ \text{s.t.}\ \ d_H(C_1,C_2)<\varepsilon\ \text{and viceversa}\}.$$

同样，空间 $(\mathsf{C}\ d_{\mathsf{C}})$ 是完备且可分的。关于度量 d_{L} 与 d_{C}之间的关系，参见引理C.1 。

(3) 测度收敛：令 $\mathsf{M}=\mathsf{M}(D)$ 表示支撑于D的有限测度空间。若测度序列 $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$ 关于弱拓扑收敛到 μ，则

$$\mu_n[f]\longrightarrow\mu[f]$$

[17]这意味着，对于每个 $\varepsilon>0$，集合中直径大于.....的环只有有限多个 ε.

对于每个连续有界函数 $f \in C_b(D)$。该拓扑可由度量诱导（例如普罗霍罗夫度量），并使 M 成为一个完备且可分的度量空间 [63, 引理 4。5]。测度序列 $(\mu_n)^{n\geqslant 1}$ 关于模糊拓扑收敛到 μ，当且仅当

$$\mu_n[g] \longrightarrow \mu[g]$$

对于每个在 D 中具有紧支撑的连续函数 $g \in C_c(D)$。同样，这种拓扑可度量化，使得 M 成为一个完备且可分的度量空间 [63, 引理 4.6]。一个标准事实是，弱收敛等价于弱收敛以及该序列的紧性。对于测度（可数）集合序列，收敛按坐标逐点理解。

(4) 索伯列夫空间：我们紧密遵循 [60]中的定义。令 $s \in \mathbb{R}$。索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{C})$ 定义为满足以下条件的温和分布空间 h

$$\|h\|^2_{H^s(\mathbb{C})} := \int_{\mathbb{C}} (1+|\xi|^2)^s |\hat{h}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

ˆ其中 h 是 h的傅里叶变换。空间 $H^s(\mathbb{C})$ 是一个可分希尔伯特空间。对于每个$s > 0$，空间 $H^{-s}(\mathbb{C})$ 是 $H^s(\mathbb{C})$ 在标准 $L^2(\mathbb{C})$对偶配对下的对偶。此外，空间 $H^{-s}(\mathbb{C})$ 是 $\mathbb{C}$中分布空间的子空间，也就是说，它是作用于 $C_c^\infty(\mathbb{C})$的连续线性函数空间。我们强调

(i) 狄拉克分布 δ_x 属于 $H^s(\mathbb{C})$，当且仅当 $s < -1$。任何紧支撑博雷尔测度也同样如此（因此，特别地，我们的离散面积测度也满足这一点）。

(ii) 存在从 $H^s(\mathbb{C})$ 到 $C_c(\mathbb{C})$ 的连续嵌入，当且仅当 $s > 1$。

基于这些 原因，我们取所有场在正则性为 $s < -1$ 的 Sobolev 空间中收敛 .

对于任意区域 $D \subset \mathbb{C}$，空间 $H^s(D)$ 通过限制来定义。也就是说，如果存在 $h \in H^s(\mathbb{C})$ 使得 $f = h|_D$，则 $f \in H^s(D)$。局部索伯列夫空间 $H^s_{loc}(D)$ 定义为满足以下条件的分布空间：对每个 $\psi \in C_c^\infty(D)$，都有 $h\psi \in H^s(\mathbb{C})$。关于 Sobolev 空间的更多背景知识，请参阅 [1],；另请参阅 [22, 34, 49, 60]，了解它们在类似情境中的应用。

C [39]中的收敛结果

本节旨在处理关于簇收敛的一些遗留技术问题，即将簇视为闭集时，关于豪斯多夫距离的收敛问题。特别地，我们给出引理4.10的证明。

对于一组环 $\mathcal{L} \in \mathrm{L}$，我们将由 $\mathcal{L}$诱导的地毯集合记为 $\mathcal{C}(\mathcal{L}) \in \mathsf{C}$。也就是说，这些闭集是通过将 $\mathcal{L}$ 中的嵌套环视为某个地毯的内边界和外边界交替出现而定义的。

引理 C.1。 设 $(\mathcal{L}_\delta)_{\delta>0}$ 是环集合序列，并且在度量 d_{L}下收敛于 $\mathcal{L}$。假设 $\mathcal{L}$ 中的环两两不交。那么，$(\mathcal{C}(\mathcal{L}_\delta))_{\delta>0}$ 在度量 d_{C}下收敛于 $\mathcal{C}(\mathcal{L})$。

证明。 这由 [100, 定理 3.5]得出。 □

集合 C 称与 A 相切，当且仅当 $C \cap A \neq \emptyset$ 且 $C \cap A^\circ = \emptyset$，其中 A° 是 A的内部 .

命题 C.2。 设 $(C_\delta)_{\delta>0}$ 是一个闭集序列，当 $\delta \to 0$ 时关于豪斯多夫度量收敛于 C 。固定一个盒 A ，并假设 C 不与 A相切。那么，

$$\mathbf{1}(C_\delta \cap A \neq \emptyset) \longrightarrow \mathbf{1}(C \cap A \neq \emptyset) \quad as \quad \delta \to 0.$$

证明。 首先，假设 $C \cap A = \emptyset$。于是， $d = d_H(C,\ A) > 0$，并且对于足够小的 δ，有 $d_H(C_\delta,\ C) < d/2$。因此， $d_H(C_\delta,\ A) > d/2$最终成立，从而结论得证。否则，必有 $C \cap A^\circ \neq \emptyset$。选取 $z \in C \cap A^\circ$ 和 $r > 0$，使得 $B(z,\ r) \subset A$。对于足够小的 δ，存在 $z_\delta \in C_\delta$ 使得 $|z_\delta - z| < r/2$。因此 $z_\delta \in B(z,\ r) \subset A$ 且$C_\delta \cap A \neq \emptyset$。 □

引理 C.3. 设 $A \subset D$ 为一个固定的（确定性）盒。设 $\mathcal{C}$ 为 D中一个CLE_4 的地毯。那么， $\mathcal{C}$ 几乎必然不与 A 相切。

证明。 我们采用[4] 以 $\mathrm{SLE}_4(-1,\ -1)$ 和 $\mathrm{SLE}_4(-1)$ 构造 CLE 的方法，该方法见 [12, 第 6]节。首先注意，若 $A \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$，则必有 $A \cap (D \setminus \mathcal{C}) \neq \emptyset$。特别地， A 必定与某条水平线相交 η，该水平线用于构造 CLE_4。

由 [78, 定理 1.3] （另见 [22,附录 A.3]），我们知道 η 是一条连续曲线；由上文可知，存在一个有限停时 τ 使得 $\eta_\tau \in \partial A$。此外，根据 [78, 定理 2.2]，，SDEs 的底层驱动系统会产生一个几乎必然连续的马尔可夫过程。在时刻 τ应用强马尔可夫性质，我们可以运用布卢门撒尔零一律得出，几乎必然有 $\eta([\tau, \infty]) \cap A^\circ \neq \emptyset$，由此完成证明。 □

引理的证明 *4.10*。 结合命题C.2和引理C.3即可立即得到。 □

参考文献

[1] Robert A Adams 和 John JF Fournier。*Sobolev* 空间，第 140 卷。Elsevier，2003年。[2] Michael Aizenman。场与伊辛模型的几何分析 I、II。86(1):1–48，1982年。[3] Michael Aizenman、David J. Barsky 和 Roberto Fernández。一般一类伊辛型模型中的相变是尖锐的。统计物理杂志，47(3-4):343–374，1987年。[4] Michael Aizenman 和 Almut Burchard。随机曲线的赫尔德正则性与维数界。《杜克数学杂志》，99:419–453，1998年。[5] Michael Aizenman 和 Hugo Duminil-Copin。临界四维伊辛模型及ϕ_4^4 模型标度极限的边缘平凡性。《数学年刊》，194(1):163–235，2021年。[6] Michael Aizenman、Hugo Duminil-Copin 和 Vladas Sidoravicius。随机电流与伊辛模型自发磁化的连续性。数学物理通讯，334(2):719–742，2015年。[7] Michael Aizenman、Hugo Duminil-Copin、Vincent Tassion 和 Simone Warzel。有限程相互作用二维伊辛模型中涌现的平面性。数学创刊，216(3):661–743，2019年。[8] Tomás Alcalde López 和 Avelio Sepúlveda。异或伊辛模型的游程分解。*arXiv* 预印本，2026年。[9] Juhan Aru 和 Titus Lupu。单位圆盘中的双点相关函数。 2026+。即将发表。[10] Juhan Aru、Titus Lupu 和 Avelio Sepúlveda。二维连续统高斯自由场的游程分解。*arXiv* 预印本 *arXiv:2304.03150*，2023年。[11] Juhan Aru 和 Avelio Sepúlveda。二维连续统高斯自由场的双值局部集：连通性、标签与诱导度量。《电子概率期刊》，23：论文编号 61，共 35 页，2018年。[12] Juhan Aru、Avelio Sepúlveda 和 Wendelin Werner。关于二维高斯自由场的有界型薄局部集。朱西厄数学研究所杂志，18(3):591–618，2019年。[13] Julius Ashkin 和 Edward Teller。具有四个分量的二维格点统计。《物理评论》，64(5-6):178，1943年。[14] Roland Bauerschmidt、Jiwoon Park 和 Pierre-François Rodriguez。离散高斯模型 I：高温下的重整化群流。概率年刊，52(4):1253–1359，2024年。[15] Rodney J Baxter。统计力学中的精确可解模型。Elsevier，2016年。[16]Baran Bayraktaroglu、Konstantin Izyurov、Tuomas Virtanen 和 Christian Webb。多重连通平面区域上临界伊辛模型初级场的玻色化。数学物理通讯，406(9):222，2025年。[17] Vincent Beffara 和 Hugo Duminil-Copin。二维随机簇模型的自对偶点是临界点。《概率论及相关领域》，

153(3):511 542 2012
–, .[18] Vincent Beffara 和 Pierre Nolin。关于二维临界渗流的单色臂指数。概率年刊，39(4):1286–1304，2011年。[19] Stéphane Benoist 和 Clément Hongler。临界伊辛界面的标度极限为 CLE_3。概率年刊，47(4):2049–2086，2019年。[20] Nathanaël Berestycki。高斯乘性混沌的初等方法。电子通讯概率，22:1–12，2017年。[21] Nathanaël Berestycki、Benoit Laslier 和 Gourab Ray。二聚体与虚几何。概率年刊，48(1):1–52，2020年。[22] Nathanaël Berestycki 和 Ellen Powell。高斯自由场与刘维尔量子引力。*arXiv* 预印本 *arXiv:2404.16642*，2024年。[23] Cédric Boutillier 和 Béatrice de Tilière。通过二分图二聚体表示异或伊辛环的高度。《电子概率期刊》，19(无):1–33，2014年。[24] Federico Camia、René Conijn 和 Demeter Kiss。渗流和 FK–伊辛模型的共形测度系综。载于概率论与统计物理漫游 *II*：布朗网络与渗流——*Charles M. Newman* 纪念文集，第44–89页。施普林格，2019年。[25] Federico Camia、Christophe Garban 和 Charles M Newman。平面伊辛磁化场 I：临界标度极限的唯一性。概率年刊，第528–571页，2015年。[26] Federico Camia、Christophe Garban 和 Charles M. Newman。平面伊辛磁化场 II：临界与近临界标度极限的性质。亨利·庞加莱研究所年刊：概率与统计，52(1):146–161，2016年。[27] Federico Camia、Jianping Jiang 和 Charles M Newman。共形测度系综与平面伊辛磁化：综述。*arXiv* 预印本 *arXiv:2009.08129*，2020年。[28] Federico Camia 和 Charles M Newman。伊辛（共形）场与簇面积测度。美国国家科学院院刊，106(14):5457–5463，2009年。[29] Lincoln Chayes、D McKellar 和 B Winn。在上的铁磁阿什金–泰勒模型的渗流与吉布斯态多重性。物理学*A*：数学与通用，31(45):9055，1998年。[30]Dmitry Chelkak、Hugo Duminil-Copin、Clément Hongler、Antti Kemppainen 和 Stanislav Smirnov。伊辛界面收敛到 Schramm 的 SLE 曲线。数学报告，352(2):157–161，2014年。[31] Dmitry Chelkak、Clément Hongler 和 Konstantin Izyurov。平面伊辛模型中自旋关联的共形不变性。《数学年刊》，第1087–1138页，2015年。[32] Dmitry Chelkak、Clément Hongler 和 Konstantin Izyurov。临界伊辛模型中初级场的关联。*arXiv* 预印本 *arXiv:2103.10263*，2021年。[33] Robbert Dijkgraaf、Erik Verlinde 和 Herman Verlinde。 $c = 1$ 黎曼曲面上的共形场论。数学物理通讯，115(4):649–690，1988年。

[34] Julien Dubédat。SLE 与自由场：配分函数和耦合。美国数学会杂志，22(4):995–1054，2009年。[35] Julien Dubédat。伊辛模型的精确玻色化。*arXiv* 预印本 *arXiv:1112.4399*，2011年。[36] Hugo Duminil-Copin、Clément Hongler 和 Pierre Nolin。二维 FK 伊辛模型的连接概率与 RSW 型界。纯粹与应用数学通讯，64(9):1165–1198，2011年。[37] Hugo Duminil-Copin 和 Marcin Lis。关于双随机电流嵌套场。概率论及其相关领域，175(3):937–955，2019年。[38] Hugo Duminil-Copin、Marcin Lis 和 Wei Qian。双随机电流的共形不变性 II：紧性与离散情形下的性质。*arXiv* 预印本 *arXiv:2107.12880*，2021年。[39] Hugo Duminil-Copin、Marcin Lis 和 Wei Qian。双随机电流的共形不变性 I：极限的识别。伦敦数学会会刊，130(1):e70022，2025年。[40] Hugo Duminil-Copin 和 Ioan Manolescu。平面随机簇模型：标度关系。载于《数学论坛：*Pi*》，第10卷，文章编号 e23。剑桥大学出版社，2022年。[41] Hugo Duminil-Copin、Aran Raoufi 和 Vincent Tassion。通过决策树证明随机簇模型和波茨模型的尖锐相变。《数学年刊》，189(1):75–99，2019年。[42] Hugo Duminil-Copin 和 Vincent Tassion。伯努利渗流与伊辛模型相变尖锐性的一个新证明。数学物理通讯，343(2):725–745，2016年。[43] Bertrand Duplantier 和 Scott Sheffield。刘维尔量子引力与 KPZ。数学创刊，185(2):333–393，2011年。[44] Robert G. Edwards 和 Alan D. Sokal。Fortuin–Kasteleyn–Swendsen–Wang 表示及蒙特卡洛算法的推广。物理评论 *D*，38:2009–2012，1988年9月。[45] Michael E. Fisher。平面伊辛模型的二聚体解。数学物理学杂志，7(10):1776–1781，1966年。[46] Malin P Forsström。伊辛模型的颜色表示。理论概率杂志，35(1):603–635，2022年。[47] Cees M. Fortuin 和 Pieter W. Kasteleyn。关于随机簇模型：I. 引言及与其他模型的关系。*Physica*，57(4):536–564，1972年。[48] Cees M Fortuin、Pieter W Kasteleyn 和 Jean Ginibre。若干偏序集上的关联不等式。数学物理通讯，22(2):89–103，1971年。[49] Marco Furlan 和 Jean-Christophe Mourrat。随机场的紧性判据及其在伊辛模型中的应用。2017年。[50] Christophe Garban、Gábor Pete 和 Oded Schramm。临界平面渗流的枢轴测度、簇测度与界面测度。美国数学会杂志，

26(4):939–1024，2013。

[51]Loïc Gassmann 和 Ioan Manolescu。平面 FK-渗流中的臂指数比较。*arXiv* 预印本 *arXiv:2410.23013*，2024年。[52] Alessandro Giuliani、Vieri Mastropietro 和 Fabio Lucio Toninelli。相互作用二聚体中的高度涨落。2017年。[53]Nikita Gladkov。渗流不等式与决策树。*arXiv* 预印本 *arXiv:2408.08457*，2024年。[54]Alexander Glazman 和 Piet Lammers。二维中的离域与连续性：Loop$O(2)$、六顶点模型和随机簇模型。《数学物理通讯》，406(5):1–59，2025年。[55] Alexander Glazman 和 Ron Peled。关于六顶点模型无序相与反铁电相之间的相变。《电子概率期刊》，28:1–53，2023年。[56] Robert B. Griffiths、Charles A. Hurst 和 Seymour Sherman。正外场下伊辛铁磁体磁化强度的凹性。《数学物理杂志》，11(3):790–795，1970年。[57] Geoffrey Grimmett。随机簇模型。载于《离散结构上的概率》，第73–123页。施普林格，2004年。[58] Ivan Hejný。平面伊辛模型——随机电流的颜色表示，2021年。[59] Malo Hillairet。平面渗流中初生无限簇的简洁定量构造。*arXiv* 预印本 *arXiv:2509.18852*，2025年。[60] Janne Junnila、Eero Saksman 和 Christian Webb。虚乘性混沌：矩、正则性及与伊辛模型的联系。《应用概率年刊》，30(5):第2099–2164页，2020年。[61] Leo P Kadanoff 和 Alan C Brown。Baxter 模型和阿什金–泰勒模型临界线上的关联函数。《物理学年鉴》，121(1-2):318–342，1979年。[62] Leo P Kadanoff 和 Horacio Ceva。二维伊辛模型算子代数的确定。《物理评论 *B*》，3(11):3918，1971年。[63] Olav Kallenberg 等。随机测度：理论与应用，第1卷。施普林格，2017年。[64] Antti Kemppainen 和 Stanislav Smirnov。随机簇模型中的共形不变性。II. 作为分枝 SLE 的完整标度极限。*arXiv* 预印本 *arXiv:1609.08527*，2016年。[65] Richard Kenyon。多米诺骨牌与高斯自由场。概率年刊，第1128–1137页，2001年。[66] Harry Kesten。二维渗流中的初生无限簇。《概率论及相关领域》，73(3):369–394，1986年。[67] Frederik Ravn Klausen。随机电流与 loop-o (1) 模型的单调性和耦合。*ALEA*，19:151–161，2022年。[68] Hubert Lacoin、Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas。复高斯乘性混沌

。数学物理通讯，337(2):569–632，2015年。[69] Piet Lammers 和 Sébastien Ott。固体上模型中的离域与绝对值 FKG。《概率论及相关领域》，188(1):63–87，2024年。[70] Wilhelm Lenz。对固体中磁现象的理解有所贡献。《物理学杂志》，21:613–615，1920年。[71] Marcin Lis。平面伊辛模型与全正性。《统计物理学杂志》，166(1):72–89，2017年。[72] Marcin Lis。平面阿什金–泰勒模型中的边界关联。《国际数学研究通知》，2022(13):9909–9940，2022年。[73] Marcin Lis。自旋、渗流与高度函数。《电子概率期刊》，27:1–21，2022年。[74] Titus Lupu。一种规范扭曲与拓扑条件化标量高斯自由场之间的等价关系。arXiv 预印本 arXiv:2209.07901，2022年。[75] Titus Lupu 和 Wendelin Werner。关于伊辛随机电流、伊辛-FK、环汤与高斯自由场的一则札记。2016年。[76] Daniel Mattis 和 Elliott Lieb。多费米子系统及其相关玻色子场的精确解。《数学物理学杂志》，6(2):304–312，1965年。[77] Jason Miller 和 Lukas Schoug。共形环系上共形协变体积测度的存在性与唯一性。载于《亨利·庞加莱研究所年刊（B辑）：概率与统计》，第60卷，第2267–2296页。亨利·庞加莱研究所，2024年。[78] Jason Miller 和 Scott Sheffield。虚几何 I：相互作用的 SLE。《概率论及相关领域》，164(3):553–705，2016年。[79] Jason Miller 和 Scott Sheffield。虚几何 II：SLE$_\kappa(\rho_1;\rho_2)$ 对于$\kappa \in (0,4)$ 的可逆性。《概率年刊》，44(3):1647–1722，2016年。[80] Jason Miller 和 Scott Sheffield。虚几何 III：SLE$_\kappa$ 对于 $\kappa \in (4,8)$ 的可逆性。《数学年刊》，第455–486页，2016年。[81] Jason Miller、Scott Sheffield 和 Wendelin Werner。CLE渗流。《数学论坛，Pi》，5:e4，2017年。[82] Jason Miller、Nike Sun 和 David B. Wilson。CLE垫片的豪斯多夫维数。《概率年刊》，42(4):1644–1665，2014年。[83] Serban Nacu 和 Wendelin Werner。随机汤、地毯与分形维数。《伦敦数学会杂志》，10，2011年。[84] Bernard Nienhuis。二维相变的库仑气体表述。《相变与临界现象》，11:1–53，1987年。[85] Lars Onsager。晶体统计 I：具有有序—无序相变的二维模型。《物理评论》，65(3-4):117，1944年。[86] Romain Panis。d 3 维中的 FK-伊辛模型初生无限簇与高维伊辛模型的磁化率。arXiv:2406.15243，2024年。

[87] Rudolf Peierls. 关于铁磁性的伊辛模型。剑桥哲学学会会刊，32:477–481，1936年。[88] Charles-Edouard Pfister 和 Yvan Velenik. Ashkin-Teller 模型的随机簇表示。《统计物理学杂志》，88(5):1295–1331，1997年9月。[89] Ritvik Ramanan Radhakrishnan 和 Vincent Tassion. 平面渗流中臂指数的严格不等式。*arXiv* 预印本 *arXiv:2410.23250*，2024年。[90] Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. 高斯乘性混沌及其应用：综述。《概率调查》，11(none):315–392，2014年。[91] Rémi Rhodes 和 Vincent Vargas. 刘维尔共形场论的概率方法：二十年发展。arXiv:2509.21053，2025年。[92] Lukas Schoug、Avelio Sepúlveda 和 Fredrik Viklund. 通过虚混沌研究二值集的维度。《国际数学研究通知》，2022(5):3219–3261，2022年。[93] Oded Schramm 和 Scott Sheffield. 二维离散高斯自由场的等高线。《数学学报》，202(1):21–137，2009年。[94] Oded Schramm、Scott Sheffield 和 David B. Wilson. 共形环系的共形半径。数学物理通讯，288(1):43–53，2009年。[95] Scott Sheffield. 探索树与共形环系。《杜克数学杂志》，147(1):79–129，2009年。[96] Scott Sheffield 和 Wendelin Werner. 共形环系：马尔可夫特征刻画与环汤构造。《数学年刊》，第1827–1917页，2012年。[97] Stanislav Smirnov. 随机簇模型中的共形不变性。I. 伊辛模型中的全纯费米子。《数学年刊》，第1435–1467页，2010年。[98] Jeffrey E Steif 和 Johan Tykesson. 广义分割与着色模型。*ALEA*，16:899–955，2019年。[99] Vincent Tassion 和 Hugo Vanneuville. 高温伊辛模型中穿越的噪声敏感性。*arXiv* 预印本 *arXiv:2505.11457*，2025年。[100] Tim van de Brug、Federico Camia 和 Marcin Lis. 随机游走环汤与共形环系。《概率论及相关领域》，166(1):553–584，2016年。[101] Wendelin Werner. 渗流与伊辛模型，第16卷。法国数学学会，巴黎，2009年。[102] David B. Wilson. 异或伊辛环与高斯自由场。arXiv:1102.3782，2011年。[103] Dapeng Zhan. SLE 环测度。《概率论及相关领域》，179(1):345–406，2021年。[104] Jean-Bernard Zuber 和 Claude Itzykson. 量子场论与二维伊辛模型。《物理评论*D*辑》，15(10):2875，1977年。