arXiv:2602.05898v1 [math.PR] 5 Feb 2026

基于非几何粗糙路径签名的通用逼近

MIHRIBAN CEYLAN、ANNA P. KWOSSEK 和 DAVID J. PR ¨OMEL

Abstract. 我们建立了一个通用逼近定理，适用于不一定是弱几何的粗糙路径签名。通过将时间及其粗糙路径括号项扩展到路径中，我们证明，由所得粗糙路径签名构成的线性泛函能够在紧集上一致逼近粗糙路径空间上的连续泛函。此外，我们基于 F¨ollmer 的一般逐路径随机积分 `构造了扩展路径的签名，其中包含路径上的二次变差项；特别是，这允许逐路径 Itˆo、Stratonovich 和反向 Itˆo 积分。在概率框架下，我们针对通过随机 Itˆo 积分定义、扩展了二次变差项的连续半鞅签名的线性泛函，得到一个通用逼近结果。数值示例展示了在数理金融的模型校准和期权定价背景下，将时间和二次变差扩展到路径中时签名的用途。

关键词： 签名；通用逼近；粗糙路径；逐路径随机积分；半鞅；模型校准；金融衍生品定价。

MSC 2020 分类： 主要分类：60L10；次要分类：60H05；60G17；91G6 0.

1. Introduction

现实世界动态或复杂数学模型中出现的许多量在解析上难以处理，因此在实践中，几乎不可避免地需要用更简单、数值上易于处理且可拟合数据的量来近似它们。就此而言，例如，对于机器学习任务、量化金融以及一般的数据分析而言，以高效且可计算的方式“忠实地”概括时间序列数据非常重要。为此，近年来，越来越活跃的一支研究方向致力于开发和应用基于路径签名的数据驱动方法；事实证明，路径签名是流式数据非常合适的特征映射。

在数理金融领域，其应用多种多样，其中包括欧洲期权资产定价 [Arr18, LNPA19, LNPA20] 和美式期权定价 [BFZ22, BHRS23, BPS25], 、市场异常检测 [AGTZ22], 、最优执行 [KLA20, CPASB22],、投资组合优化 [FHW23, CM25], 以及金融模型校准 [ASS21, CGSF23, CGMSF25]。关于这一快速发展的领域的全面论述，请参阅 [BdRHO25]。除数理金融外，基于签名的技术还应用于多种情境下的机器学习，包括计算机视觉、自然语言处理和医学数据分析；例如，参见 [CK26, ML25] 及其中的参考文献。

路径签名最早由陈 [Che57, Che77] 提出，在 Lyons [Lyo98], 开创的粗糙路径理论中发挥着重要作用。粗糙路径理论为分析由不规则信号驱动的复杂演化系统提供了丰富的数学框架。形式上，

Date: 2026年2月6日。

路径签名 $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$ 定义为路径 $X = (X^1, \dots, X^d)$ 对自身的所有迭代积分的集合，即

$$\int_{0<t_1<\ldots<t_n<T} \mathrm{d}X_{t_1}^{i_1} \cdots \mathrm{d}X_{t_n}^{i_n},$$

对 $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, d\}$ 及所有 $n \in \mathbb{N}$。假设积分在采用合适的积分概念时有定义，则签名能够有效地概括路径各分量的完整演化及其相互作用：众所周知，签名为路径提供了一种引人注目的非线性刻画，且在树状等价意义下是唯一的，见 [HL10, BGLY16]。值得注意的是，由于其丰富的代数结构，只要采用合适的积分概念，签名便具有引人注目的通用逼近性质：签名的线性泛函能够在紧集上任意精确地逼近路径的连续泛函，这类似于多项式逼近连续实值函数；例如，见 [LLN13, LNPA20, CPSF25]。这一通用性结果是大多数基于签名的方法的核心。

对于光滑路径 $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}^d$，签名通过黎曼–斯蒂尔切斯积分自然定义。然而，对于正则性较低的路径，例如布朗运动的样本路径，或更一般地说，半鞅的样本路径，则无法依赖黎曼–斯蒂尔切斯积分（或 Young 积分），通常会转而使用随机微积分。此时，积分的概念变得含糊不清，其中最常见的选择是 Itˆo 积分和 Stratonovich 积分。一旦固定了概率结构，便可以构造二阶迭代积分

$$\mathbb{X}_{s,t}^{(2)} := \left(\int_{s<t_1<t_2<t} \mathrm{d}X_{t_1}^{i_1} \mathrm{d}X_{t_2}^{i_2} \right)_{i_1,i_2 \in \{1,\ldots,d\}} \quad \text{for } s,t \in [0,T],$$

对于连续半鞅的几乎每条样本路径 X。

由于 Stratonovich 积分满足一阶微积分法则（光滑路径的黎曼–斯蒂尔切斯积分也如此），采用这种积分概念会产生一个弱几何粗糙路径 $(X, \mathbb{X}^{(2)})$，应当在粗糙路径理论的意义下理解；例如参见[LCL07、FV10]。在经典的粗糙路径文献中，（弱几何）粗糙路径的签名通过 Lyons 延拓定理 [LCL07]定义；参见定义 2.3，以及例如 [LLN13、CPSF25]。对弱几何粗糙路径进行增强后，我们便自然获得签名所需的代数性质和几何性质。特别地，签名是一个类群元素，因此满足洗牌性质。由此，签名分量的线性张成构成一个点分离代数。这又使我们能够应用 Stone–Weierstrass 定理，推出上述通用逼近性质。

在数理金融中，伊藤积分通常是更自然的随机积分选择，因为伊藤积分保留了鞅性质，而这也是无套利原则的基础，并且能提供清晰的金融解释——例如用于建模资本利得过程时。连续时间计量经济分析也倾向于使用伊藤积分；有关签名应用的例子，见 [BRSF25]；模型降阶也采用伊藤积分，例如 [BR24]所指出的那样。此外，与伊藤积分相关联的签名还可能带来统计优势；关于使用基于伊藤积分和基于斯特拉托诺维奇积分的签名时 Lasso估计量的统计一致性比较，见 [GWZZ25] 。

如果像上文那样构造二阶迭代积分 $\mathbb{X}^{(2)}$，但改用伊藤积分，那么得到的粗糙路径 $(X, \mathbb{X}^{(2)})$ 通常不是 弱几何的。相应的签名不是群样值路径，而是取值于扩展张量代数中的路径。具体而言，洗牌性质不成立，因此不能直接应用 Stone–Weierstrass 定理来推导通用逼近性质。

本文旨在给出适用于不一定是弱几何粗糙路径的粗糙路径签名的通用逼近定理。由此，我们为基于 Itˆo 签名的逼近提供了理论基础；从数理金融的角度来看，这种方法在概念上十分自然。此外，我们的工作也推动了近期一系列研究，这些研究致力于为一般粗糙路径的签名推导通用逼近结果。例如，参见 [HBS24]，其中给出了粗糙路径签名的多项式泛函的通用逼近结果；另请参见 [AF25],，他们基于 [Gub10]意义下的分支粗糙路径框架，研究了分支签名。

在第2节中，我们考虑不一定是弱几何粗糙路径的一般粗糙路径签名，并讨论 p-变差正则性情形，其中 $p \in (2, 3)$。我们证明，当路径通过时间及其粗糙路径括号扩展后，粗糙路径签名的线性泛函能够在紧集的子集上一致逼近粗糙路径空间上的连续泛函。更具体地说，鉴于半鞅的自然 Itˆo–Stratonovich 修正（另见 [BC19, BFT26]），我们的方法是从一条粗糙路径出发，用时间及其粗糙路径括号项扩展底层路径。随后，我们将扩展后的路径提升为粗糙路径，并通过 Lyons 延拓定理定义其签名。尽管这会增加路径的维数，却能确保所得签名满足所谓的拟洗牌性质（见命题 2.6），并且其各分量的线性张成确实构成一个点分离代数。因此，我们得以推出签名线性泛函的通用逼近性质；见定理 2.8。该通用逼近定理扩展了经典的弱几何粗糙路径签名通用逼近定理，并使我们能够将这类一般粗糙路径的签名作为连续路径泛函的线性回归基。为保证完整性，我们还在附录 A 中直接证明了时间扩展弱几何粗糙路径签名的通用逼近定理。

作为符合该框架的一个例子，在第3节中，我们引入一种通过一般路径随机积分构造的签名概念，它可以看作是 F¨ollmer 积分 [F¨ol81] 的推广。为此，我们利用路径性质γ-(RIE)，该性质已在 [DKP25], 中得到研究，并保证该路径——即对某个 $p \in (2,3)$ 连续且具有有限 p-变差的路径——典范地延拓为一个（未必弱几何的）粗糙路径，其中提升由黎曼和的极限给出。对于此类路径，我们将 γ-签名 定义为该典范粗糙路径的 Lyons 扩张，它与受控路径关于该粗糙路径的迭代粗糙积分的全体相一致。（我们在附录 C 中对一般连续 p-粗糙路径，$p \in (2,3)$，给出该陈述的严格证明。）我们指出，逐路径积分作为沿适当分割序列的一般黎曼和的极限而存在，从而为逐路径 Stratonovich、Itô 与反向 Itô 积分提供了一个统一框架。推论 3.10 随后陈述了由时间延拓的路径及其粗糙路径括号项的 γ-签名之线性泛函所对应的通用逼近性质。在此设定下，粗糙路径括号与 F¨ollmer 的路径二次变差概念密切相关。

在第4节中，确定性理论借助随机积分被转化到概率框架中。具体而言，我们考虑连续半鞅的 Itô 签名，即通过 Itô 积分定义的迭代积分全体，并得到由时间延拓的连续半鞅及其二次变差项的 Itô 签名之线性泛函的通用逼近定理；见推论 4.5。

现在可以提出这样一个问题：在实践中，额外用路径的二次（协）变差对路径进行扩展，究竟何时有利。因此，在第5节中，我们最后给出数值示例，简要展示在金融应用中使用 Itˆo 签名的影响：我们考虑对时间序列数据进行校准、收益近似，以及对自然依赖于二次变差的期权进行定价。

论文结构： 在第2节中，我们建立粗糙路径签名的框架，并利用不一定是弱几何的粗糙路径推导通用逼近定理，其中路径通过其粗糙路径括号项进行扩展。第3节介绍基于一般逐路径随机积分的 γ-签名概念，并给出相应的通用逼近结果。第4节将这些发现转化到连续半鞅的概率框架中，并得到连续半鞅 Itˆo 签名的通用逼近定理。第5节针对基于签名的方法在校准和期权定价中的应用开展数值实验，所用路径通过时间和二次变差进行扩展。最后，附录A–D包含延后给出的证明，以及粗糙路径理论中的辅助结果。

致谢： 作者谨此感谢 C. Cuchiero 在本文撰写过程中提出的宝贵建议。M. Ceylan 衷心感谢 Avicenna-Studienwerk（德国）博士奖学金项目提供的资助。

2. The signature of rough paths

我们首先回顾签名与粗糙路径理论中的一些基本内容，并将其分为代数概念和分析概念。更详细的介绍请参见 [LCL07, FV10]。

2.1. 签名的代数框架。

张量代数和 扩展张量代数在 $\mathbb{R}^d$ 定义如下：

$$T(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^{\otimes n} \qquad \text{and} \qquad T((\mathbb{R}^d)) := \prod_{n=0}^{\infty} (\mathbb{R}^d)^{\otimes n},$$

其中，$(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ 表示 $\mathbb{R}^d$的 n重张量积，约定$(\mathbb{R}^d)^{\otimes 0} := \mathbb{R}$。

我们赋予 $T((\mathbb{R}^d))$标准加法 $+$、张量乘法 $\otimes$ 和数乘，其中数乘定义为：对于 $=(a^{(n)})_{n=0}^{\infty}$，$=(b^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in T((\mathbb{R}^d))$，$\lambda \in \mathbb{R}$，令

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} := (a^{(n)}+b^{(n)})_{n=0}^{\infty}, \quad \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} := \left(\sum_{i+j=n} a^{(i)} \otimes b^{(j)} \right)_{n=0}^{\infty}, \quad \text{and} \quad \lambda\mathbf{a} := (\lambda a^{(n)})_{n=0}^{\infty}.$$

The这些运算在下文定义的 $T(\mathbb{R}^d)$ 和 $T^N(\mathbb{R}^d)$ 上诱导出类似的运算 .

我们注意到，$(T((\mathbb{R}^d))\ +,\ \cdot,\ \otimes)$ 是一个实非交换代数。单位元为 (1，0，……，0，……)。

设 $(e_1, \ldots\ldots, e_d)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的标准基。由$\{\mathbf{e}_1, \ldots\ldots, \mathbf{e}_d\}$ 生成的李代数，其中 $\mathbf{e}_i := (0, \ e_i, \ 0, \ldots\ldots) \in T(\mathbb{R}^d)$，以及交换子括号

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in T(\mathbb{R}^d),$$

称为 自由李代数 $\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d)$ over $\mathbb{R}^d$，例如参见 [FV10，第 7.3] 节。它是 $T_0((\mathbb{R}^d))$ 的一个子代数，其中我们对 $c \in \mathbb{R}$ 定义张量子代数 $T_c((\mathbb{R}^d)) := \{\mathbf{a} = (a^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in T((\mathbb{R}^d)) : \ a^{(0)} = c\}$。

自由李群 $G((\mathbb{R}^d)) := \exp(\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d))$ 定义为 $\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d)$ 的张量指数，也就是它在映射下的像

$$\exp_{\otimes} \colon T_0((\mathbb{R}^d)) \to T((\mathbb{R}^d)), \qquad \mathbf{a} \mapsto 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{a}^{\otimes k}.$$

$G((\mathbb{R}^d))$ 是 $T_1((\mathbb{R}^d))$ 的一个子群。事实上，$(G((\mathbb{R}^d)) \ \otimes)$ 是一个单位元为 $(1, \ 0, \ \ldots\ldots, \ 0, \ \ldots\ldots)$ 的群，并且对所有 $\mathbf{g} = \exp_{\otimes}(\mathbf{a}) \in G((\mathbb{R}^d))$，关于 $\otimes$ 的逆元为 $\mathbf{g}^{-1} = \exp_{\otimes}(-\mathbf{a})$，其中 $\mathbf{g} = \exp_{\otimes}(\mathbf{a}) \in G((\mathbb{R}^d))$。我们称 $G((\mathbb{R}^d))$ 中的元素为类群元元素。

对于 $N \in \mathbb{N}$， $\mathbb{R}^d$ 上的截断张量代数定义为

$$T^N(\mathbb{R}^d) := \bigoplus_{n=0}^{N} (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}.$$

对于任意一个 $= (a^{(n)})_{n=0}^{N} \in T^N(\mathbb{R}^d)$，我们令

$$|\mathbf{a}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} := \max_{n=0,\ldots,N} |a^{(n)}|_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}},$$

其中，我们用 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上的欧几里得范数，或（$\mathbb{R}^d$）$^{\otimes n}$ 表示某个 $n \in \mathbb{N}$。我们考虑映射 $\Pi_{(n)} \colon \ T((\mathbb{R}^d)) \ \to (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ 以及 $\Pi_N \colon \ T((\mathbb{R}^d)) \ \to T^N(\mathbb{R}^d)$，其中 $\Pi_{(n)}(\mathbf{a}) = a^{(n)}$ 和 $\Pi_N(\mathbf{a}) = (a^{(0)}, \ldots, a^{(N)})$，对于 $\mathbf{a} = (a^{(n)})_{n=0}^{\infty} \in T((\mathbb{R}^d))$。对于 $c \in \mathbb{R}$，我们令 $T_c^N(\mathbb{R}^d) := \{\Pi_N(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in T_c((\mathbb{R}^d))\}$。于是， $T_1^N(\mathbb{R}^d)$在截断至第 N 层的张量乘法 $\otimes$下构成一个李群。我们赋予 $T_1^N(\mathbb{R}^d)$以下度量

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := |\mathbf{a} - \mathbf{b}|_{T^N(\mathbb{R}^d)} = \max_{n=1,\ldots,N} |(a-b)^{(n)}|_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}},$$

for $\mathbf{a} = (a^{(n)})_{n=0}^{N}$， $\mathbf{b} = (b^{(n)})_{n=0}^{N} \in T_1^N(\mathbb{R}^d)$， 它由 $T^N(\mathbb{R}^d)$ 上的范数导出 .

自由幂零李代数 与自由幂零李群，其阶为 N 分别由$\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d) := \Pi_N(\mathfrak{g}(\mathbb{R}^d))$ 和 $G^N(\mathbb{R}^d) := \Pi_N(G((\mathbb{R}^d)))$ 定义。即，

$$\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] \oplus \ldots \oplus \underbrace{[\mathbb{R}^d, [\mathbb{R}^d, \ldots [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]]]}_{N-1 \text{ brackets}} \subseteq T_0^N(\mathbb{R}^d).$$

则 $G^N(\mathbb{R}^d)$ 是 $T_1^N(\mathbb{R}^d)$ 相对于 $\otimes$ 的一个子群。

通过截断张量代数中相应的（有限）幂级数定义截断张量指数，则有 $G^N(\mathbb{R}^d) = \exp_{\otimes}^N(\mathfrak{g}^N(\mathbb{R}^d))$。

现在，令 $I = (i_1, \ldots, i_{|I|})$ 为一个长度为 $|I|$（各项取自 $\{1, \ldots, d\}$）的多重指标。回忆 $\mathbb{R}^d$ 的标准基 $(e_1, \ldots, e_d)$，并设 $e_I := e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_{|I|}}$。若 $|I| = 1$，则设 $I' = \emptyset$，

若 $|I|\geq 1$, $I'=(i_1,\dots,i_{|I|-1})$。此外，我们用 $e_\emptyset$ 表示 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 0}$ 的基元素，并设$|\emptyset|:=0$。由此可将 $\mathbf{a}\in T((\mathbb{R}^d))$（以及 $\mathbf{a}\in T(\mathbb{R}^d)$) 写为

$$\mathbf{a}=\sum_{|I|\geq 0} a_I e_I,$$

对某个 $a_I\in\mathbb{R}$。

此外，对于 $\mathbf{a}\in T(\mathbb{R}^d)$ 和 $\mathbf{b}\in T((\mathbb{R}^d))$，我们令

$$\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle := \sum_{|I|\geq 0}\langle a_I, b_I\rangle.$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 定义为 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ 对每个 $n\geq 0$ 的内积。于是 $(e_I)^{\{I:|I|=n\}}$ 是 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ 关于该内积的标准正交基，并且我们记$a_I:=\langle e_I,\mathbf{a}\rangle:=\langle e_I,\Pi_{(|I|)}(\mathbf{a})\rangle$。

将 $\ell\in T(\mathbb{R}^d)$ 与线性泛函 $\langle\ell,\cdot\rangle\colon T((\mathbb{R}^d))\to\mathbb{R}$ 相关联，我们记

$$\langle \ell,\mathbf{a}\rangle := \sum_{0\leq|I|\leq N}\ell_I\langle e_I,\mathbf{a}\rangle,\qquad \mathbf{a}\in T((\mathbb{R}^d)),$$

对 $\ell=\sum_{0\leq|I|\leq N}\ell_I e_I$，其中 $\ell_I:=\langle e_I,\ell\rangle\in\mathbb{R}$且 $N\in\mathbb{N}_0$。

对于取值于 $\{1,\dots,d\}$ 的两个多重指标 $I=(i_1,\dots,i_{|I|})$ 和 $J=(j_1,\dots,j_{|J|})$，洗牌积递归定义为

$$e_I\sqcup\!\sqcup e_J := (e_{I'}\sqcup\!\sqcup e_J)\otimes e_{i_{|I|}}+(e_I\sqcup\!\sqcup e_{J'})\otimes e_{j_{|J|}},$$

其中 $e_I\sqcup\!\sqcup e_\emptyset:=e_\emptyset\sqcup\!\sqcup e_I:=e_I$。对于 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}\in T(\mathbb{R}^d)$，令

$$a\sqcup\!\sqcup b=\sum_{|I|,|J|\geq 0}a_I b_J(e_I\sqcup\!\sqcup e_J)$$

对于 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}\in T((\mathbb{R}^d))$，令

$$\langle e_I,\mathbf{a}\sqcup\!\sqcup\mathbf{b}\rangle=\langle e_I,\Pi_{(|I|)}(\mathbf{a})\Pi_{(|I|)}(\mathbf{b})\rangle.$$

对于所有 $\mathbf{a}\in G((\mathbb{R}^d))$，洗牌积性质 成立，即对于两个多重指标 $I=(i_1,\dots,i_{|I|})$ 和 $J=(j_1,\dots,j_{|J|})$，有

$$\langle e_I,\mathbf{a}\rangle\langle e_J,\mathbf{a}\rangle=\langle e_I\sqcup\!\sqcup e_J,\mathbf{a}\rangle.$$

2.2. 粗糙路径理论基础。 区间 $[s,t]$ 的分割 $\mathcal{P}$ 是包含端点 s 和 t 在内的有限点集，即，对某个 $N\in\mathbb{N}$ 有 $\mathcal{P}=\{s=u_0<u_1<\cdots<u_N=t\}$，其网格大小记为 $|\mathcal{P}|:=\max\{|u_{i+1}-u_i|:\ i=0,\dots,N-1\}$。

全文中，令 $T>0$ 为一个固定的有限时间范围。令 $\Delta_T:=\{(s,t)\in[0,T]^2:s\leq t\}$ 表示标准的二维单形。

我们用 $a\lesssim b$ 表示存在一个常数 $C>0$ 使得 $a\leq Cb$。常数 C 可能取决于赋范空间，例如取决于其维数或正则性参数。

对于赋范空间 $(E,|\cdot|)$，我们用 $C([0,T];E)$ 表示从$[0,T]$到 E的连续路径集合。对于 $X\in C([0,T];E)$，路径 X的上确界半范数为

$$\|X\|_\infty:=\sup_{t\in[0,T]}|X_t|,$$

对于 $p \geq 1$，路径 X 的 p-变差为

$$\|X\|_p := \|X\|_{p,[0,T]} \qquad \text{with} \qquad \|X\|_{p,[s,t]} := \left(\sup_{\mathcal{P} \subset [s,t]} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} |X_v - X_u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (s,t) \in \Delta_T,$$

其中，上确界取遍区间 $[s,t]$的所有可能分割 $\mathcal{P}$ 。回顾一下，给定路径 X，当且仅当存在控制函数 c使得[1]时，才有 $\|X\|_p < \infty$

$$\sup_{(u,v) \in \Delta_T} \frac{|X_v - X_u|^p}{c(u,v)} < \infty.$$

我们用 $C^{p\text{-var}} = C^{p\text{-var}}([0,T]; E)$ 表示满足$\|X\|_p < \infty$的路径 $X \in C([0,T]; E)$ 空间。此外，对于路径 $X \in C([0,T]; \mathbb{R}^d)$，我们常使用以下简写记号：

$$X_{s,t} := X_t - X_s, \qquad \text{for} \quad (s,t) \in \Delta_T.$$

对于 $r \geq 1$ 和双参数函数 $\mathbb{X}^{(2)}: \Delta_T \to E$，我们进一步定义

$$\|\mathbb{X}^{(2)}\|_r := \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{r,[0,T]} \qquad \text{with} \qquad \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{r,[s,t]} := \left(\sup_{\mathcal{P} \subset [s,t]} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} |\mathbb{X}^{(2)}_{u,v}|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (s,t) \in \Delta_T.$$

我们用 $C_2^{r\text{-var}} = C_2^{r\text{-var}}(\Delta_T; E)$ 表示满足 $\|\mathbb{X}^{(2)}\|_r < \infty$ 的连续函数 $\mathbb{X}^{(2)}: \Delta_T \to E$ 空间。

对于 $p \in [2,3)$，如果满足条件，则称一对 $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}^{(2)})$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的（连续）粗糙路径

(i) $X \in C^{p\text{-var}}([0,T]; \mathbb{R}^d)$ and $\mathbb{X}^{(2)} \in C_2^{\frac{p}{2}\text{-var}}(\Delta_T; \mathbb{R}^{d \times d})$, and

(ii) Chen's relation: $\mathbb{X}^{(2)}_{s,t} = \mathbb{X}^{(2)}_{s,u} + \mathbb{X}^{(2)}_{u,t} + X_{s,u} \otimes X_{u,t}$ holds for all $0 \leq s \leq u \leq t \leq T$.

用分量形式表示，条件 (ii) 表明，对于每个 i 和 j，均有 $(\mathbb{X}^{(2)})^{ij}_{s,t} = (\mathbb{X}^{(2)})^{ij}_{s,u} + (\mathbb{X}^{(2)})^{ij}_{u,t} + X^i_{s,u} X^j_{u,t}$。我们将粗糙路径空间记为 $\mathcal{C}^p = \mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^d)$。在空间 $\mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^d)$ 上，我们采用自然的半范数

$$\|\mathbf{X}\|_p := \|\mathbf{X}\|_{p,[0,T]} \qquad \text{with} \qquad \|\mathbf{X}\|_{p,[s,t]} := \|X\|_{p,[s,t]} + \|\mathbb{X}^{(2)}\|_{\frac{p}{2},[s,t]}$$

对于 $(s,\ t) \in \Delta_T$。

设 $p \in (2,3)$ 且 $q > 0$ 满足 $2/p + 1/q > 1$，并且 $X \in C^{p\text{-var}}([0,T]; \mathbb{R}^d)$。若一对 (Y, Y') 满足条件，则称其为受控路径 （相对于 X），

$Y \in C^{p\text{-var}}([0,T]; \mathbb{R}^{d \times n}), \quad Y' \in C^{q\text{-var}}([0,T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d \times n})), \quad \text{and} \quad R^Y \in C_2^{r\text{-var}}(\Delta_T; \mathbb{R}^{d \times n}),$

其中 R^Y 定义为

$$Y_{s,t} = Y'_s X_{s,t} + R^Y_{s,t} \qquad \text{for all} \quad (s,t) \in \Delta_T,$$

且 $1/r = 1/p + 1/q$。对于 $\mathbb{R}^{d \times n}$ 值受控路径构成的空间，我们记作 $\mathscr{C}^{p,X^q} = \mathscr{C}^{p}_{,X^q}([0,T]; \mathbb{R}^{d \times n})$；赋予该空间以下范数后，它成为一个巴拿赫空间

$$(Y, Y') \mapsto |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_{q,[0,T]} + \|R^Y\|_{r,[0,T]}.$$

当 $p = q$、 $r = \frac{p}{2}$ 时，我们记作 $\mathscr{C}^p_X = \mathscr{C}^{p,X^{\frac{p}{2}}}$。

[1]在此处及下文中，我们采用如下约定：$\frac{0}{0} := 0$。

Fur此外，对于 $p \geq 1$ 和 $N \in \mathbb{N}$， $\mathbb{X}^N$ 的 p-变差： $[0,T] \to T^N(\mathbb{R}^d)$ 定义为

$$\|\mathbb{X}^N\|_{p,[s,t]} := \max_{1\leq m\leq N} \sup_{\mathcal{P}\subset[s,t]} \left(\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} |\Pi_{(m)}(\mathbb{X}^N_{u,v})|^{\frac{p}{m}} \right)^{\frac{m}{p}}, \qquad (s,t) \in \Delta_T,$$

此处 $\mathbb{X}^N_{s,t} := (\mathbb{X}^N_s)^{-1} \otimes \mathbb{X}^N_t$、$(s,t) \in \Delta_T$，并记 $\|\mathbb{X}^N\|_p := \|\mathbb{X}^N\|_{p,[0,T]}$。

对于 $\mathbb{X}^N, \widetilde{\mathbb{X}}^N$： $[0,T] \to T^N(\mathbb{R}^d)$，我们定义 p-变差距离

$$\|\mathbb{X}^N; \widetilde{\mathbb{X}}^N\|_{p,[s,t]} := \|\mathbb{X}^N - \widetilde{\mathbb{X}}^N\|_{p,[s,t]}, \qquad (s,t) \in \Delta_T,$$

并记 $\|\mathbb{X}^N;\ \widetilde{\mathbb{X}}^N\|_p = \|\mathbb{X}^N;\ \widetilde{\mathbb{X}}^N\|_{p,[0,T]}$。

此外，连续函数 $\mathbb{X}^N$: $[0,T] \to T^N(\mathbb{R}^d)$ 称为乘法泛函，如果 $\mathbb{X}^0_{s,t} = 1$ 且陈关系成立：

$$\mathbb{X}^N_{s,u} \otimes \mathbb{X}^N_{u,t} = \mathbb{X}^N_{s,t}, \qquad 0 \leq s \leq u \leq t \leq T.$$

我们赋予 $G^N(\mathbb{R}^d)$ $T^N(\mathbb{R}^d)$ 的（非齐次）子空间拓扑。在文献中， $G^N(\mathbb{R}^d)$ 值路径的（齐次） p-变差通常根据 Carnot–Carath´eodory 度量来定义，例如参见 [FV10，第 8]章。这是合理的，因为 $G^N(\mathbb{R}^d)$ 上的诱导拓扑与 Carnot–Carath´eodory 度量所诱导的拓扑一致，例如参见 [FV10，第 8.1.2 节和第 8.1.3] 节。

连续路径 $\mathbb{X}^{\lfloor p\rfloor}$: $[0,T] \to G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d)$ 称为弱几何粗糙路径，若 $\mathbb{X}^{\lfloor p\rfloor}_0 = \mathbf{1}$ 且 $\|\mathbf{1};\ \mathbb{X}^{\lfloor p\rfloor}\|_p < \infty$，其中 $\mathbf{1} := (1,0,\ldots,0) \in T^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d)$。我们将弱几何连续粗糙路径空间记为 $C_o^{p\text{-var}} = C_o^{p\text{-var}}([0,T];\ G^{\lfloor p\rfloor}(\mathbb{R}^d))$，并赋予其度量 $\|\cdot;\ \cdot\|_p$。

粗糙路径成为弱几何粗糙路径的一个代数条件是：粗糙路径提升的对称部分由路径的增量决定。

引理 2.1. 设 $p \in (2,3)$。设 $(X, \mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d)$ 为连续粗糙路径，满足 $\mathbb{S}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,\cdot}) = \frac{1}{2} X_{0,\cdot} \otimes X_{0,\cdot}$, $t \in [0,T]$，其中我们考虑分解为对称部分与反对称部分，如下所示

$$\mathbb{X}^{(2)}_{0,t} = \mathbb{S}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t}) + \mathbb{A}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t}) := \frac{1}{2}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t} + (\mathbb{X}^{(2)}_{0,t})^\top) + \frac{1}{2}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t} - (\mathbb{X}^{(2)}_{0,t})^\top),$$

其中 $(\cdot)^\top$ 表示矩阵转置。于是 $\mathbb{X}^2$ 是一个弱几何粗糙路径，即$\mathbb{X}^2 \in C_o^{p\text{-var}}$，其中 $\mathbb{X}^2$ 定义为

$$\mathbb{X}^2_t := (1, X_{0,t}, \mathbb{X}^{(2)}_{0,t}), \qquad t \in [0,T].$$

证明。回顾一下， $G^2(\mathbb{R}^d) = \exp^2_\otimes(\mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^d))$，其中 $\mathfrak{g}^2(\mathbb{R}^d) = \{0\} \oplus \mathbb{R}^d \oplus [\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$。有 $[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d] = \operatorname{span}\{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i :\ 1 \leq i,j \leq d\}$。因此， $[\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d]$ 等于反对称 $d \times d$-矩阵的集合，由此可知，对于任意 $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{X}^2_t = \left(1, X_{0,t}, \frac{1}{2} X_{0,t} \otimes X_{0,t} + \mathbb{A}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t})\right) = \exp^2_\otimes(0, X_{0,t}, \mathbb{A}(\mathbb{X}^{(2)}_{0,t})) \in G^2(\mathbb{R}^d).$$

最后，由于$(X, \mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\ \mathbb{R}^d)$，特别有 $\|\mathbf{1};\ \mathbb{X}^2\|_p < \infty$。 □

注记 2.2. 该条件是“一阶微积分”的推论，因而在随机斯特拉托诺维奇积分的情形下成立。

2.3. 签名的定义与性质。根据 Lyons 延拓定理，例如参见 [LCL07，定理 3.7]，任何对 $m \geq \lfloor p \rfloor$ 具有有限p-变差的乘法泛函 $\mathbb{X}^m\colon [0,T] \to T^m(\mathbb{R}^d)$——即 $\mathbb{X}^{(i)}$、$i \leq m$ 具有由控制函数 c 控制的有限 p/i-变差——都可唯一延拓为一个乘法泛函 $\mathbb{X}\colon [0,T] \to T((\mathbb{R}^d))$，其对 $p \geq 1$ 具有有限 p-变差。更精确地说，对任意 $N > \lfloor p \rfloor$，存在唯一的连续函数 $\mathbb{X}^{(N)}\colon [0,T] \to (\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$，使得

$$(1, X_{0,\cdot}, \mathbb{X}^{(2)}, \dots, \mathbb{X}^{(\lfloor p \rfloor)}, \dots, \mathbb{X}^{(N)}, \dots) \in T((\mathbb{R}^d))$$

是一个具有有限 p-变差的乘法泛函，即对于任意N，$\Pi_N(\mathbb{X})$具有有限的 p-变差，且受 c控制，并称为 *Lyons* 扩张。

特别地，任意弱几何粗糙路径都存在唯一的扩张，使其成为一个取值于 $G^N(\mathbb{R}^d)$、具有有限 p-变差的路径，且满足 $N > \lfloor p \rfloor$；例如参见 [FV10，定理 9.5]，这使我们能够如下定义 X 的签名：

定义 2.3。设 $p \geq 1$ 和 $\mathbb{X}^{o,\lfloor p \rfloor} \in C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^{\lfloor p \rfloor}(\mathbb{R}^d))$。$X$ 的签名 定义为满足以下条件的唯一路径

$$\mathbb{X}^o\colon [0,T] \to G((\mathbb{R}^d)),$$

使得对所有 $N > \lfloor p \rfloor$，$\Pi_N(\mathbb{X}^o) = \mathbb{X}^{o,N}$，其中 $\mathbb{X}^{o,N}$表示 $\mathbb{X}^{o,\lfloor p \rfloor}$在$G^N(\mathbb{R}^d)$中的扩张。特别地，$\mathbb{X}^o$ 是由 *Lyons* 延拓定理指定的 $\mathbb{X}^{o,\lfloor p \rfloor}$ 的唯一路径扩张。

现在，设 $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^d)$，$p \in (2,3)$ 是一个粗糙路径，并设 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbf{X}$ 的 Lyons 扩张至 $T((\mathbb{R}^d))$，即 $\mathbb{X}\colon [0,T] \to T((\mathbb{R}^d))$。根据命题 C.1，它与相对于 $\mathbf{X}$ 的受控路径的迭代粗糙积分集合一致，也就是说，对于$N \geq 3$,

$$\mathbb{X}^{(N)}_{s,t} = \int_s^t \mathbb{X}^{(N-1)}_{s,r} \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}_r \qquad (s,t) \in \Delta_T.$$

粗糙积分在引理 D.1 和注 D.2 中定义。考虑 $G = X$，使得$G' = I_d$ 是单位矩阵且 $R^G = 0$，则该积分化简为受控路径 (F, F') 相对于粗糙路径 $\mathbf{X}$ 的经典粗糙积分。

此外，设 $[\mathbf{X}]_t := X_{0,t} \otimes X_{0,t} - (\mathbb{X}^{(2)}_{0,t} + (\mathbb{X}^{(2)}_{0,t})^\top)$，$t \in [0,T]$，为$\mathbf{X}$的粗糙路径括号，并令

$$Q(X) := ([\mathbf{X}]^{11}, \dots, [\mathbf{X}]^{1d}, [\mathbf{X}]^{22}, \dots, [\mathbf{X}]^{2d}, \dots, [\mathbf{X}]^{dd}).$$

我们定义 $\widehat{X} := (\cdot, X, Q(X)) \in C^{p\text{-var}}([0,T]; \mathbb{R}^{\hat{d}})$，其中 $\hat{d} = 1 + d + \frac{d(d+1)}{2}$，并注意到 $\widehat{X}$ 可以被规范地提升为粗糙路径 $\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^{\hat{d}})$，因为 $Q(X)$ 是有限 $p/2$-变差路径，因此 $(\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{s,t})^{ij} := \int_s^t \widehat{X}^i_{s,r} \,\mathrm{d}\, \widehat{X}^j_r$，对于 $i,j \notin \{1,\dots,d\}$，作为杨积分存在；而 $(\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{s,t})^{ij} := (\mathbb{X}^{(2)}_{s,t})^{ij}$，对于 $i,j = 1,\dots,d$。我们将 $\widehat{\mathbf{X}}$ 的 Lyons 扩张记为 $\widehat{\mathbb{X}}$。

我们用 $(e_0, e_1, \dots, e_d, \varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1d}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2d}, \dots, \varepsilon_{dd}) := (e_0, e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_{\hat{d}-1})$ 表示 $\mathbb{R}^{\hat{d}}$ 的标准基，即用指标 0 表示时间分量，并用 ε_{ij} 表示 $\widehat{X}$ 中对应于 $[\mathbf{X}]^{ij}$ 的分量，因此 $\langle \varepsilon_{ij}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle := [\mathbf{X}]^{ij}_t$，$i,j = 1,\dots,d, i \leq j$，$t \in [0,T]$。我们令 $\varepsilon_{ji} := \varepsilon_{ij}$，并注意到对于 $i \in \{0, d+1, \dots, \hat{d}-1\}$，$\langle e_I \otimes e_i, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle = \int_0^t \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_s \rangle \,\mathrm{d}\, \widehat{X}^i_s$可定义为关于 $\widehat{X}^i$的积分。

我们进一步指出，$t \mapsto \langle e_0, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle$ 是严格单调递增的。这是必要条件，以便 $\widehat{\mathbb{X}}_T$ 能够唯一确定$\mathbf{X}$，例如参见 [HL10、BGLY16]。

ˆ关于时间扩展的弱几何粗糙路径的签名，可参见定理 2.11 中条件 (iii) 的证明，其中有类似的论证 $\mathbb{X}^o$；关于由时间和粗糙路径括号项扩展的一般粗糙路径的签名ˆ，可参见定理 2.8 中条件 (iii) 的证明 $\mathbb{X}$。

此外，令 $\widehat{\mathbb{X}}^o$ 为 $(1, \widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)} + \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}])$ 的 Lyons 扩张，则它是一个群样值路径，即 $\widehat{\mathbb{X}}^o\colon [0,T] \to G((\mathbb{R}^{\hat{d}}))$，见定义 2.3。

ˆ将路径 X 扩展至 X，并加入粗糙路径括号项，可得非弱几何粗糙路径 $\mathbb{X}$ 的签名分量ˆ可表示为弱几何粗糙路径 $\mathbb{X}^o$ 的签名的线性泛函ˆ。

命题 *2.4.* 设 $X = (X, \mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^d)$，$p \in (2,3)$ 为一条粗糙路径，且 $\wideparen{X} := (\cdot, X, Q(X))$ 为通过时间和粗糙路径括号项扩展后的路径，并设 $\widehat{\wideparen{X}} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T]; \mathbb{R}^{\hat{d}})$ 为相应的粗糙路径。此外，令 $\widehat{\mathbb{X}}$ 为 $(1, \widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in C_o^{p\text{-var}}([0,T]; T^2(\mathbb{R}^{\hat{d}}))$ 的 *Lyons* 扩张。那么，对于任意多重指标 I，存在 $\hat{\ell}^I \in T(\mathbb{R}^d)$，使得

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle = \langle \ell^I, \widehat{\mathbb{X}}_t^o \rangle, \qquad t \in [0,T],$$

其中 $\widehat{\mathbb{X}}^o\colon [0,T] \to G((\mathbb{R}^{\hat{d}}))$ 表示作为 $(1, \widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)} + \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]) \in C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^2(\mathbb{R}^{\hat{d}}))$ 的 *Lyons* 扩张的群样值路径，且 ℓ^I 由下式递归定义

$$\ell^I := \ell^{I'} \otimes e_{i_{|I|}} - \frac{1}{2} \ell^{(I')'} \otimes \varepsilon_{i_{|I'|} i_{|I|}},$$

其中 $\ell^\emptyset := e_\emptyset$，$\ell^{(i_1)} := e_{(i_1)}$，且 $\varepsilon_{i_{|I'|} i_{|I|}} := 0$，对于 $i_{|I'|}, i_{|I|} \notin \{1, \dots, d\}$。

证明。我们对 $t = T$ 证明该命题。对于 $|I| = 0$ 与 $|I| = 1$，考虑 $\ell^I := e_I$，由 Lyons 扩张的定义，我们有 $\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle = \langle \ell^I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle$。

对于 $|I| = 2$，即 $I = (i_1, i_2)$，$i_1, i_2 \in \{0, \dots, \hat{d} - 1\}$，我们得到 $\ell^I = e_I - \frac{1}{2}\varepsilon_{i_1 i_2}$。

现在令 $|I| = 3$，即 $I = (i_1, i_2, i_3)$。然后，沿着 $[0,T]$ 的任意一个网格尺寸趋于零的分割序列 $\mathcal{P}$ 取极限，我们注意到

$$\begin{aligned}
&\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle \\
&\quad = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (\widehat{\mathbb{X}}_{0,u}^{(2)})^{i_1 i_2} \widehat{X}_{u,v}^{i_3} + \widehat{X}_{0,u}^{i_1} (\widehat{\mathbb{X}}_{u,v}^{(2)})^{i_2 i_3} \\
&\quad = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{[u,v] \in \mathcal{P}} (\widehat{\mathbb{X}}_{0,u}^{o,(2)})^{i_1 i_2} - \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]_{0,u}^{i_1 i_2}) \widehat{X}_{u,v}^{i_3} + \widehat{X}_{0,u}^{i_1} ((\widehat{\mathbb{X}}_{u,v}^{o,(2)})^{i_2 i_3} - \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]_{u,v}^{i_2 i_3}) \\
&\quad = \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T [\widehat{\mathbf{X}}]_{0,t}^{i_1 i_2} \, \mathrm{d}\widehat{X}_t^{i_3} - \frac{1}{2} \int_0^T \widehat{X}_{0,t}^{i_1} \, \mathrm{d}[\widehat{\mathbf{X}}]_t^{i_2 i_3} \\
&\quad = \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle - \frac{1}{2} \langle \varepsilon_{i_1 i_2} \otimes e_{i_3}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle - \frac{1}{2} \langle e_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2 i_3}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle \\
&\quad = \langle \ell^I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle,
\end{aligned}$$

对于 $\ell^I := e_I - \frac{1}{2}\varepsilon_{i_1 i_2} \otimes e_{i_3} - \frac{1}{2} e_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2 i_3} = \ell^{(i_1, i_2)} \otimes e_{i_3} - \frac{1}{2} e_{i_1} \otimes \varepsilon_{i_2 i_3}$，其中后两个ˆ积分是 Young 积分，因为 $[\mathbf{X}]$ 是有限 $p/2$-变差路径。我们采用归纳论证：假设该结论对任意 $n < N$、$N > 3$ 均成立，现在

let $n \geq N$。设 I是一个长度为 n、元素取自 $\{0,\dots,d-1\}$ 的多重指标。那么，

$$
\begin{aligned}
&\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T\rangle \\
&\quad= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \langle e_{I'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle \widehat{X}_{u,v}^{i_n} + \langle e_{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle (\widehat{\mathbb{X}}_{u,v}^{(2)})^{i_{n-1}i_n} \\
&\quad= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \langle \ell^{I'}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle \widehat{X}_{u,v}^{i_n} + \langle \ell^{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle ((\widehat{\mathbb{X}}_{u,v}^{o,(2)})^{i_{n-1}i_n} - \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]_{u,v}^{i_{n-1}i_n}) \\
&\quad= \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \langle \ell^{(I')'} \otimes e_{i_{n-1}}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle \widehat{X}_{u,v}^{i_n} - \frac{1}{2}\langle \ell^{((I')')'} \otimes \varepsilon_{i_{n-2}i_{n-1}}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle \widehat{X}_{u,v}^{i_n} \\
&\qquad+ \langle \ell^{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle (\widehat{\mathbb{X}}^{o,(2)})_{u,v}^{i_{n-1}i_n} - \frac{1}{2}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} \langle \ell^{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u^o\rangle [\widehat{\mathbf{X}}]_{u,v}^{i_{n-1}i_n} \\
&\quad= \langle \ell^{(I')'} \otimes e_{i_{n-1}} \otimes e_{i_n}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o\rangle - \frac{1}{2}\langle \ell^{((I')')'} \otimes \varepsilon_{i_{n-2}i_{n-1}} \otimes e_{i_n}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o\rangle - \frac{1}{2}\langle \ell^{(I')'} \otimes \varepsilon_{i_{n-1}i_n}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o\rangle \\
&\quad= \langle \ell^{I'} \otimes e_{i_n} - \frac{1}{2}\ell^{(I')'} \otimes \varepsilon_{i_{n-1}i_n}, \widehat{\mathbb{X}}_T^o\rangle,
\end{aligned}
$$

这里我们再次利用了关于 $[\mathbf{X}]$ 的积分存在这一点，因为 $[\mathbf{X}]$ 是有限 $p/2$-变差路径。□

弱几何粗糙路径 $(1, X, \mathbb{X}^{o,(2)})$ 的签名是一个群样值路径，因此满足洗牌性质。事实证明，将路径 X 通过粗糙路径括号项扩展为 X 后，通过 Lyons 扩张定义的签名具有所谓的准洗牌性质，参见 [Hof00]。这使我们能够在定理 2.8 中证明非弱几何粗糙路径签名的通用逼近定理。

定义 2.5。对于任意两个元素取自 $\{0,\dots,d-1\}$ 的多重指标 I、J，我们定义准洗牌积 为

$$e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_J = (e_{I'} \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_J) \otimes e_{i_{|I|}} + (e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'}) \otimes e_{j_{|J|}} + (e_{I'} \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'}) \otimes \varepsilon_{i_{|I|}j_{|J|}},$$

与 $e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_\emptyset = e_\emptyset \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_I = e_I$。

命题 *2.6*（准洗牌性质）。设 I, J 是两个取值于 $\{0,\dots,d-1\}$ 中的多重指标。设 $X = (X, \mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d)$，$p \in (2,3)$ 是一条粗糙路径，且 $\widehat{X} := (\cdot, X, Q(X))$ 是扩展路径。此外，设 $\widehat{\mathbb{X}}$ 是 $(1, \widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in C_o^{p\text{-var}}([0,T];T^2(\mathbb{R}^d))$ 的 *Lyons* 扩张。那么，

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle \langle e_J, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle = \langle e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_J, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle, \qquad t \in [0,T].$$

注 2.7. 要使准洗牌性质成立，实际上无需通过时间分量扩展路径 X，只需通过其粗糙路径方括号过程项 $Q(X)$ 扩展即可。

证明。由于 $\langle e_\emptyset, \mathbb{X}\rangle = 1$，当 $I = \emptyset$ 或 $J = \emptyset$ 时，结论立即成立。现在设$|I|+|J| = 2$，I，$J \neq \emptyset$，即 $I = (i)$、$J = (j)$、i，$j \in \{0,\dots,d-1\}$。那么，对于 $t \in [0,T]$，我们有

根据命题 2.4,

$$\begin{aligned}\langle e_i, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle\langle e_j, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle &= \langle e_i, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle\langle e_j, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \\ &= \langle e_i \sqcup\!\sqcup e_j, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \\ &= \langle e_{(i,j)}, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle + \langle e_{(j,i)}, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \\ &= \langle e_{(i,j)}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \frac{1}{2}\langle \varepsilon_{ij}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle e_{(j,i)}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \frac{1}{2}\langle \varepsilon_{ji}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle \\ &= \langle (e_i \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_\emptyset)\otimes e_j, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle (e_\emptyset \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_j)\otimes e_i, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle (e_\emptyset \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_\emptyset)\otimes \varepsilon_{ij}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle \\ &= \langle e_i \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_j, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle,\end{aligned}$$

其中我们注意到，对于 $i \le j$，$\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$；对于 i，$\varepsilon_{ij} = 0$，$j \notin \{1, \dots, d\}$.

我们采用归纳论证：假设该结论对任意满足 $|I|+|J|< n, n > 2$ 的 I，J 均成立，并令 I，J 满足 $|I|+|J|\le n$，I，$J \neq \emptyset$。

$\widehat{}$我们首先注意到，$\langle e_I$，$\mathbb{X}\rangle$ 是相对于 X 的受控路径。

$\widehat{}$我们将 $(Y,\ Y') \in \mathscr{C}^p_{\widehat{X}}$ 视为由 $Y \in C^{p\text{-var}}([0,T];\ \mathcal{L}(\mathbb{R}^d;\ \mathbb{R}^2))$ 给出的受控路径，其中

$$Y^{mn} = \begin{cases} \langle e_{I'}, \widehat{\mathbb{X}}\rangle, & \text{if } m = 1,\ n = i_{|I|}, \\ \langle e_{J'}, \widehat{\mathbb{X}}\rangle, & \text{if } m = 2,\ n = j_{|J|}, \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

由于 $\widehat{\mathbb{X}}^N_t := \int_0^t \widehat{\mathbb{X}}^{N-1}_r \otimes \mathrm{d}\,\widehat{}\,\mathbf{X}_r$ 是关于 $\widehat{}\,\mathbf{X} = (\hat{X},\ \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\ \mathbb{R}^{\hat{d}})$ 的粗糙积分，因此投影到张量积 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$, $\Pi_N(\widehat{\mathbb{X}}^N)$ 上，得到的是受控路径 $(\Pi_{N-1}(\widehat{\mathbb{X}}^N)\ \Pi_{N-2}(\widehat{\mathbb{X}}^N))$ 关于 $\widehat{}\,\mathbf{X}$ 的粗糙积分。也就是说，对于任意多重指标 I，我们有

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}\cap[0,t]} \langle e_{I'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle X^{i_{|I|}}_{u,v} + \langle e_{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle \widehat{\mathbb{X}}^{(2),i_{|I'|}i_{|I|}}_{u,v}.$$

特别地，它于是为 $Y'_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathcal{L}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^2))$，由 $(Y'_t)^{1ij} = \langle e_{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$ 当 $i = i_{|I'|}, j = i_{|I|}$ 时，以及 $(Y'_t)^{2ij} = \langle e_{(J')'}, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$ 当 $i = j_{|J'|}$，$j = j_{|J|}$ 时给出，$(Y'_t)^{mij} = 0$ 否则，$m = 1,2, \hat{}\,i$，$j = 0, \dots, d-1$。由此可知

$$Z_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}\cap[0,t]} Y_u X_{u,v} + Y'_u \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{u,v} = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[u,v]\in\mathcal{P}\cap[0,t]} \mathcal{Z}_{u,v},$$

with

$$\mathcal{Z}_{u,v} := (\langle e_{I'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle X^{i_{|I|}}_{u,v} + \langle e_{(I')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle \widehat{\mathbb{X}}^{(2),i_{|I'|}i_{|I|}}_{u,v}, \langle e_{J'_{ij}}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle X^{j_{|J|}}_{u,v} + \langle e_{(J')'}, \widehat{\mathbb{X}}_u\rangle \widehat{\mathbb{X}}^{(2),j_{|J'|}j_{|J|}}_{u,v})^\top,$$

其中我们用到了 $(Y'_u \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{u,v})^m = \sum_i \sum_j (Y'_u)^{mij} \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{u,v}{}^{ij}$。

那么，$Z := \int Y \mathrm{d}\,\widehat{}\,\mathbf{X}$ 是 Y相对于 $\widehat{}\,\mathbf{X}$的粗糙积分，等于 $Z = (Z^1,\ Z^2)^\top = (\langle e_I,\ \widehat{\mathbb{X}}\rangle,\ \langle e_J,\ \widehat{\mathbb{X}}\rangle)^\top$。

作为受控路径，Z 现在可以典范地提升为粗糙路径$\mathbf{Z} = (Z,\ \mathbb{Z})$，其中$\mathbb{Z}_{s,\ t} := \int_s^t Z_r \otimes Z_r - Z_s \otimes Z_{s,\ t}$，$(s,\ t) \in \Delta_T$，积分定义同引理 D.1。

利用粗糙路径的 It^o 公式，参见例如 [FH20，命题 5.8],，对于 $f(Z) = Z^1 \cdot Z^2$，由此我们得到

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle\langle e_J, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle = \int_0^t (Z^2, Z^1)_r \,\mathrm{d}\mathbf{Z}_r + \frac{1}{2}[\mathbf{Z}]^{12}_t + \frac{1}{2}[\mathbf{Z}]^{21}_t = \int_0^t (Z^2, Z^1)_r \,\mathrm{d}Z_r + [\mathbf{Z}]^{12}_t, \tag{2.1}$$

其中，后一个积分作为关于受控路径 $(Z,\ Y)$ 的粗糙积分是良定义的，另见 [ACLP23，引理 A.4]。

由于粗糙积分具有结合性，见 [ACLP23，命题 A.2]，，我们有

(2.2)
$$\begin{aligned}\int_0^t (Z^2,Z^1)_r \,\mathrm{d}Z_r &= \int_0^t (Z^2,Z^1)_r Y_r \,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{X}}_r \\ &= \int_0^t (0,\dots,0,\langle e_J,\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle\langle e_{I'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle,0,\dots,0,\langle e_I,\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle\langle e_{J'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle,0,\dots,0)\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{X}}_r \\ &= \int_0^t (0,\dots,0,\langle e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle,0,\dots,0,\langle e_I\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle,0,\dots,0)\,\mathrm{d}\widehat{\mathbf{X}}_r \\ &= \langle (e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'})\otimes e_{i_{|I|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle (e_I\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'})\otimes e_{j_{|J|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle,\end{aligned}$$

其中，在倒数第二步中我们使用了归纳假设。

根据定义，有 $e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'} = (e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{(I')})\otimes e_{i_{|I'|}} + (e_{J'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'})\otimes e_{j_{|J|}} + (e_{J'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{(I')})\otimes \widehat{\ }^{\varepsilon_{j_{|J|}i_{|I'|}}}$。因此，令 $U_t := (0,\dots,0,\langle e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'},\mathbb{X}_t\rangle,0,\dots,0,\langle e_I\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'},\mathbb{X}_t\rangle,0,\dots,0)$，我们注意到 $U'_t\in\mathcal{L}(\mathbb{R}\widehat{\ }^d;\ \mathcal{L}(\mathbb{R}\widehat{\ }^d;\ \mathbb{R}))$，其由 $(U'_t)^{i_{|I'|}j} = \langle e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{(I')},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$、$(U'_t)^{j_{|J|}j} = \langle e_{J'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$ 和 $(U'_t)^{kj} = \langle e_{J'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{(I')},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$ 给出，其中 k 满足 $e_k = \varepsilon_{j_{|J|}i_{|I'|}}$，且 $j = i_{|I|}$。对于 $j = j_{|J|}$，情况类似；否则为 $(U'_t)^{ij}=0$。按照与上述类似的论证，最后一步便得证。

此外，由 [ACLP23, 引理 B.1]，，我们有[2]

$$[\mathbf{Z}]_t = \int_0^t (Y_r\otimes Y_r)\,\mathrm{d}[\widehat{\mathbf{X}}]_r = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}} (Y_u\otimes Y_u)[\widehat{\mathbf{X}}]_{u,v},$$

根据 Y 的定义，我们得到

$$[\mathbf{Z}]_t^{12} = [\mathbf{Z}]_t^{21} = \int_0^t \langle e_{I'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle\langle e_{J'},\widehat{\mathbb{X}}_r\rangle\,\mathrm{d}[\widehat{\mathbf{X}}]_r^{i_{|I|}j_{|J|}} = \langle (e_{I'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'})\otimes\varepsilon_{i_{|I|}j_{|J|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle, \tag{2.3}$$

最后一步再次使用了归纳假设。

最后，结合 (2.1)、(2.2) 和 (2.3)，得到

$$\begin{aligned}\langle e_I,\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle\langle e_J,\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle &= \langle (e_J\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{I'})\otimes e_{i_{|I|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle (e_I\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'})\otimes e_{j_{|J|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle + \langle (e_{I'}\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_{J'})\otimes\varepsilon_{i_{|I|}j_{|J|}},\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle \\ &= \langle e_I\widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_J,\widehat{\mathbb{X}}_t\rangle.\end{aligned}$$

□

2.4.一般粗糙路径签名的通用逼近。 现在，我们通过 Lyons 提升，给出一般粗糙路径（即不一定是弱几何粗糙路径）签名的逐路径通用逼近定理，将经典结果扩展到更一般的签名类。证明基于 Stone–Weierstrass 定理的应用，该定理要求签名的线性张成构成一个代数，这里利用了拟洗牌性质。为此，我们在由时间和粗糙路径括号项扩展而成的粗糙路径子空间上表述通用逼近

[2]在写作 $Y_u\otimes Y_u$ 时，严格来说，我们指的是一个四阶张量，其 $ijk\ell$ 分量由 $[Y_u\otimes Y_u]^{ijk\ell} = (Y_u)^{ij}(Y_u)^{k\ell}$ 给出；我们将“乘法” $(Y_u\otimes Y_u)[\widehat{\ }\mathbf{X}]_{u,v}$ 理解为一个矩阵，其 ik 分量由 $[(Y_u\otimes Y_u)[\widehat{\ }\mathbf{X}]_{u,v}^{ik} = \sum_{j=1}^d\sum_{\ell=1}^d (Y_u)^{ij}(Y_u)^{k\ell}[\widehat{\ }\mathbf{X}]_{u,v}^{j\ell}$ 给出。

关于由时间和粗糙路径括号项扩张的粗糙路径子空间的定理，其定义为

$$\widehat{\mathcal{C}}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}}) := \{(\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}}) : (X,\mathbb{X}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d), \widehat{X} = (\cdot, X, Q(X))\}.$$

定理 2.8. 设 $p \in (2,\ 3)$，并设 $K \subset \widehat{\mathcal{C}}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}})$ 为关于粗糙路径范数有界的紧子集，并考虑连续函数 $f\colon\ K \to \mathbb{R}$。此外，对某个 $L > 0$，令 $K_L \subset K$ 为如下定义的子集

$$K_L := \{\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in K : \|(\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)})\|_p + \|[\widehat{\mathbf{X}}]\|_{\frac{p}{2}} \le L\}.$$

ˆ则对每一个 $\varepsilon > 0$，存在线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\sup_{\widehat{\mathbf{X}} \in K_L} |f(\widehat{\mathbf{X}}) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle| < \varepsilon,$$

where $\widehat{\mathbb{X}}$ 表示由 *Lyons* 延拓定理给出的 $\widehat{\ }\mathbf{X}$ 到 $T((\mathbb{R}^{\hat{d}}))$的签名 .

证明. 该结果通过对该集合应用 Stone–Weierstrass 定理得到

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}\{K_L \ni \widehat{\mathbf{X}} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle \in \mathbb{R} : I \in \{0,\dots,\hat{d}-1\}^N, N \in \mathbb{N}_0\}.$$

因此我们需要证明 $\mathcal{A}$

(i) 是 $C(K_L;\mathbb{R})$ 的一个向量子空间，(ii) 是一个子代数且包含一个非零常值函数，(iii) 分离点。

(i)：首先，我们注意到，任意粗糙路径 $\widehat{\ }\mathbf{X} = (\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}})$ 都可通过以下方式典范地延拓为一个弱几何粗糙路径

$$\begin{aligned}\iota\colon \widehat{\mathbf{X}} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} &:= (1, \widehat{X}_{0,\cdot}, \widehat{\mathbb{X}}^{o,(2)}_{0,\cdot}) \\ &:= (1, \widehat{X}_{0,\cdot}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{0,\cdot} + \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]),\end{aligned}$$

也就是说，$\iota(\widehat{\ }\mathbf{X}) \in (C_o^{p\text{-var}}([0,T];\ G^2(\mathbb{R}^{\hat{d}}))\ d_{p\text{-var}})$。此外，我们观察到，对任意 $\widehat{\ }\mathbf{X} \in K_L$，有

$$\|\widehat{\mathbb{X}}^{o,(2)}\|_{\frac{p}{2}} \le \|\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}\|_{\frac{p}{2}} + \|[\widehat{\mathbf{X}}]\|_{\frac{p}{2}} \le L,$$

$\widehat{\ }\quad\widehat{\ }$因此，我们可以将 K_L 嵌入 $\iota(K_L) := \{\iota(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in K_L\}$，它是 $C_o^{p\text{-var}}([0,T];\ G^2(\mathbb{R}^{\hat{d}}))$ 的紧集$K_L^2 := \{\widehat{\mathbb{X}}^{o,2}\colon\ \|\mathbf{1};\ \widehat{\mathbb{X}}^{o,2}\|_p \le L\}$ 的一个子集。

因为

$$(\mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}}), d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbf{X}} \mapsto [\widehat{\mathbf{X}}] \in (C^{\frac{p}{2}\text{-var}}([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}}), \|\cdot;\cdot\|_{\frac{p}{2}})$$

关于$d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}} := \|\cdot - \cdot\|_p + \|\cdot - \cdot\|_{\frac{p}{2}}$是连续的，见命题 D.4，我们注意到

$$(K, d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \mapsto (1, \widehat{X}_{0,\cdot}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{0,\cdot} + \frac{1}{2}[\widehat{\mathbf{X}}]) \in (C_o^{p\text{-var}}([0,T];T^2(\mathbb{R}^{\hat{d}})), d_{p\text{-var}})$$

是连续的，从而

$$(K_L, d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X},\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \in (\iota(K_L), d_{p\text{-var}})$$

是连续的。根据 [FV10，推论 9.11]，映射 $\widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_T \rangle$ 对于每个多重指标 I，关于 $d_{p\text{-var}}$ 在有界集合上连续。更确切地说，映射

$$(\iota(K_L), d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,N} \in (C_o^{p\text{-var}}([0,T];G^N(\mathbb{R}^{\hat{d}})), d_{p\text{-var}}),$$

is c关于 $d_{p\text{-var}}$ 连续，对每个 $N \geq 3$ 都成立。此外，求值映 p

$$(C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^N(\mathbb{R}^{\hat{d}})), d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,N} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}_T^{o,N} \in (G^N(\mathbb{R}^{\hat{d}}), \rho)$$

是连续的，其中 ρ 表示由 $T_1^N(\mathbb{R}^d)$ 上的范数所诱导的度量。这里，我们用到可以在 $G^N(\mathbb{R}^d)$ 上赋予度量 ρ，例如参见 [FV10，备注 7.31]。

由于对于任意多重指标 I， $\widehat{\mathbb{X}}^{o}{}_{,T}{}^{N} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle$ 都是连续的，因此我们可以得出映射

$$(G^N(\mathbb{R}^{\hat{d}}), \rho) \ni \widehat{\mathbb{X}}_T^{o,N} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle \in \mathbb{R}$$

是连续的，而且

$$(K_L, d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}) \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle \in \mathbb{R}.$$

根据命题 2.4，对于每个多重指标 $I \in \{0, \ldots, d-1\}^N$, $N \in \mathbb{N}_0$，都存在 $\ell^I \in T(\mathbb{R}^d)$，使得 $\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle = \langle \ell^I, \widehat{\mathbb{X}}_T^o \rangle$。由此最终可得

$$(K_L, d_{p,\frac{p}{2}\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbf{X}} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle \in \mathbb{R}$$

关于 $d_{p,\frac{p}{2}\text{-变差}}$是连续的。

(ii)：根据命题 2.6，准洗牌性质成立，因此 $\mathcal{A}$ 是一个子代数。此外，由于 $\langle e_\emptyset, \mathbb{X}_T \rangle = 1$, 它包含一个非零常值函数。

(iii)：对于点分离，考虑 $\widehat{\mathbf{X}} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)})$、 $\widehat{\mathbf{Y}} = (\widehat{Y}, \widehat{\mathbb{Y}}^{(2)}) \in K_L$，其中 $\widehat{\mathbf{X}} \neq \widehat{\mathbf{Y}}$。我们证明存在一个 $k \in \mathbb{N}$, $I \in \{0, \ldots, d-1\}^N$, $N \in \{0, 1, 2\}$，使得

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle \neq \langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}_T \rangle.$$

我们采用反证法进行证明。假设对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $I \in \{0, \ldots, d-1\}^N$,$N \in \{0, 1, 2\}$，都有

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle = \langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}_T \rangle.$$

我们首先注意到

$$\langle e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle = \frac{t^k}{k!}.$$

此外，利用 $\mathbb{X}$的准洗牌性质，见定义 2.5，我们有

$$\langle e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle = \langle e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle,$$

，因为 $\langle \varepsilon_{i0}, \mathbb{X} \rangle = 0$ 对任意 $i = 0$, ..., $d-1$，即准洗牌积与洗牌积重合。因此，例如由 [CPSF25，命题 C.5],

$$\langle (e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}_T \rangle = \int_0^T \langle e_I \widetilde{\sqcup\!\sqcup} e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle \langle e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle \frac{t^k}{k!} \, \mathrm{d}t.$$

类似地，我们有

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}_T \rangle = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{Y}}_t \rangle \frac{t^k}{k!} \, \mathrm{d}t.$$

By [Bre11，推论 4.24]，并且因为 $\langle e_I, \mathbb{X}_0 \rangle = \langle e_I, \mathbb{Y}_0 \rangle = 0$，由此可得

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle = \langle e_I, \widehat{\mathbb{Y}}_t \rangle,$$

对于所有 $t \in [0, T]$ 以及所有 $I \in \{0, \ldots, d-1\}^N$, $N \in \{0, 1, 2\}$。然而，这与 假设 $\mathbf{X}$、$\mathbf{Y}$ 彼此不同相矛盾。因此，我们可以得出结论： $\mathcal{A}$ 是点分离的。□

注 *2.9*。同样，在考虑停止粗糙路径的泛函时，也可以推出通用逼近性质。停止粗糙路径空间由 $\Lambda_T = \bigcup_{t\in[0,T]} \widehat{\mathcal{C}}^p([0,t];\mathbb{R}^{\nwarrow d})$ 定义，其半度量为 $d_{\Lambda_T}(\widehat{X}_{[0,t]}, \widehat{Y}_{[0,s]}) := |t - s| + d_{p\text{-var};[0,t\vee s]}(X^t_{[0,t\vee s]}, Y^s_{[0,t\vee s]})$。这里，$X_{[0,t]}$ 表示 X 在子区间 $[0,t]$，$t \le T$ 上的限制，其中 X 定义于 $[0,T]$；而 X^t 表示停止粗糙路径。更具体地说，X^t 是过程 $(X^t)_s = (s, X^t_s, Q(X^t_s))$，$s \in [0,T]$，也就是说，该过程停止路径 X 及方括号过程 $Q(X)$，但不停止时间扩展；X^t 表示 X^t的粗糙路径提升，类似定义见 *KLA20*、*CM25*、*BPS*25] 。由此，可以在紧集的子集上，用签名的线性泛函逼近非预见路径泛函 $f\colon \Lambda_T \to \mathbb{R}$。

注 2.10. 如果方括号过程严格递增，即 $t \mapsto [\mathbf{X}]_t$ 严格递增（至少对一个分量 $[\mathbf{X}]^{ij}$，i，$j \in \{1,\dots,d\}$而言），则只需通过方括号项扩展路径，因此只需考虑 $X = (X, Q(X))$。特别地，准洗牌性质和命题 *2.4* 仍然成立。此时，对于点分离，可对某个固定的 i，$j \in \{1,\dots,d\}$，$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup \varepsilon_{ij}^{\otimes k}) \otimes \varepsilon_{ij}, \widehat{\mathbb{X}}_T\rangle$，针对 $\langle \varepsilon_{ij}, \widehat{\mathbb{X}}^{\gamma,\pi}\rangle = [\mathbf{X}]^{ij}$，应用相同的论证。

并且，如果方括号过程表示为 X 的时间分量和路径分量的线性泛函，即 $[\mathbf{X}]^{ij}_t = \sum_{|I|\le 1} a^{ij}_I \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t\rangle$，其中 I 是取值于 $\{0,\dots,d\}$ 的多重指标，那么只需用时间扩展路径，也就是说，只需考虑 $X = (\cdot, X)$。

2.5. **关于弱几何粗糙路径逼近的讨论**。考虑弱几何粗糙路径时，显然可以应用定理 2.8，因为弱几何粗糙路径的粗糙路径括号等于零。因此，用粗糙路径括号扩展路径是多余的。在这种情况下，已知仅对时间扩展弱几何粗糙路径，通用逼近定理便成立。也就是说，在紧集上，时间扩展弱几何粗糙路径的连续泛函可以由其签名的线性泛函任意精确地逼近。

为完备起见，我们回顾并证明时间扩展弱几何粗糙路径的通用逼近定理。（直接证明见附录 A。）为此，我们考虑时间扩展弱几何粗糙路径的子空间，其定义为

$$\widehat{C}_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^2(\mathbb{R}^{1+d})) := \{\widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \in C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^2(\mathbb{R}^{1+d})) : \langle e_0, \widehat{\mathbb{X}}^{o,2}_t\rangle = t,\ t \in [0,T]\}.$$

定理 2.11. 设 $p \in (2,\ 3)$。设 $K \subset \widehat{C}_o^{p\text{-var}}([0,T];\ G^2(\mathbb{R}^{1+d}))$ 是关于 p-变差范数有界的紧子集，并考虑连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$。则对每个 $\varepsilon > 0$，存在线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^{1+d})$ 使得

$$\sup_{\widehat{\mathbb{X}}^{o,2}\in K} |f(\widehat{\mathbb{X}}^{o,2}) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle| < \varepsilon,$$

其中 $\widehat{\mathbb{X}}^o$ 表示 $\widehat{X} := \Pi_{(1)}(\widehat{\mathbb{X}}^{o,2})$的签名。

证明。 我们首先注意到，将弱几何粗糙路径视为粗糙路径空间的子集，与将其视为取值于 $G^2(\mathbb{R}^{1+d})$、具有有限 p-变差的连续路径空间，是等价的。随后应用定理 2.8 即可得到证明：弱几何粗糙路径的粗糙路径括号等于零。因此，当 $L > 0$ 足够大时，K_L 确实与 K 一致。由此，实际上^只需将扩展路径约化为 $X = (\cdot,\ X)$，即 $d = d + 1$，从而得出所述结论。□

3. The signature using general pathwise stochastic integration

本节给出一个符合上一节所建立框架的例子。我们基于路径假设性质 γ-(RIE) 引入签名的概念，该性质允许将逐路径（迭代）积分构造为一般黎曼和的极限。这是性质 (RIE) 的推广，而性质 (RIE) 已在 [DKP25] 中得到详细确立。现在我们给出本文所需的路径性质和相关陈述。关于证明以及对该路径性质一种等价且更直观的刻画，请参阅 [DKP25]。

3.1. 关于性质 γ-(RIE)。

性质 γ-(RIE)。 设 $X \in C([0,T];\ \mathbb{R}^d)$、 $\gamma \in [0,1]$、 $p \in (2,\ 3)$ 和 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是区间 $[0,T]$ 的分割序列，满足上确界$\{|X_{t_k^n,t_{k+1}^n}|:\ k=0,\ \ldots\ldots,\ N_n-1\}$ 收敛到0，当 $n\to\infty$ 时。我们假设

(i) 黎曼和

$$\int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\gamma,\pi^n} X_r := \sum_{k=0}^{N_n-1} (X_{t_k^n} + \gamma X_{t_k^n,t_{k+1}^n}) \otimes X_{t_k^n\wedge t, t_{k+1}^n\wedge t}, \quad t\in[0,T],$$

当 $n\to\infty$ 时一致收敛到一个极限，我们将其记为 $\int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r$，

(ii) 存在一个控制函数 c，使得

$$\sup_{(s,t)\in\Delta_T} \frac{|X_{s,t}|^p}{c(s,t)} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0\le k<\ell\le N_n} \frac{|(\int_0^{\cdot} X_r \otimes \mathrm{d}^{\gamma,\pi^n} X_r)_{t_k^n,t_\ell^n} - X_{t_k^n} \otimes X_{t_k^n,t_\ell^n}|^{\frac{p}{2}}}{c(t_k^n,t_\ell^n)} \lesssim 1. \tag{3.1}$$

我们称路径 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于 γ, p 和 π 满足性质 γ-(RIE)，如果 γ, p, π 和 X 合起来满足性质 γ-(RIE)。

命题 *3.1*（[*DKP*25] 中的命题 *2.9*）。设 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某些 $\gamma\in[0,1]$, $p\in(2,3)$ 以及分割序列 $\pi=(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 γ-(RIE)。那么，X 可规范地延拓为连续粗路径 $\mathbf{X}^{\gamma,\pi} := (X, \mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d)$，其中

$$\mathbb{X}_{s,t}^{\gamma,\pi,(2)} := \int_0^t X_r\otimes \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r - \int_0^s X_r \otimes \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r - X_s \otimes X_{s,t}, \qquad (s,t)\in\Delta_T. \tag{3.2}$$

我们注意到，$\mathbf{X}^{0,\pi}$ 对应于 Itô 粗糙路径提升，$\mathbf{X}^{\frac12,\pi}$ 对应于 Stratonovich 粗糙路径提升，而 $\mathbf{X}^{1,\pi}$ 对应于随机过程的逆向 Itô 粗糙路径提升，因为“迭代积分” $\mathbb{X}^{0,\pi,(2)}$、 $\mathbb{X}^{\frac12,\pi,(2)}$ 以及 $\mathbb{X}^{1,\pi,(2)}$ 分别作为左端点、中点与右端点黎曼和的极限给出，类似于随机 Itô 积分、Stratonovich 积分与逆向 Itô 积分，分别参见 [FH20 第5章。4] 关于布朗运动的逆向粗积分，以及第4节。

在对路径 X 假定性质 γ-(RIE) 时，我们将始终使用由 (3.2) 定义的粗糙路径 $\mathbf{X}^{\gamma,\pi} = (X, \mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)})$。

引理 3.2（引理 2.10，载于 [DKP25]）。假设 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某个 $\gamma\in[0,1]$、 $p\in(2,3)$ 以及分割序列 $\pi^n = \{0=t_0^n <$ 满足性质γ-(RIE) $\cdots < t_{N_n}^n = T\}$、 $n\in\mathbb{N}$。令 $1\le i,\ j\le d$，并对 $\gamma=\frac12$、 $[X^i,X^j]^{\gamma,\ \pi}:=0$，并对 $\gamma\neq\frac12$，

$$[X^i,X^j]_t^{\gamma,\pi} := X_t^iX_t^j - X_0^iX_0^j - \int_0^t X_r^i\,\mathrm{d}^{\gamma,\pi}X_r^j - \int_0^t X_r^j\,\mathrm{d}^{\gamma,\pi}X_r^i, \qquad t\in[0,T].$$

则， $[X^i, X^j]^{\gamma,\ \pi}$ 是一个连续函数，并且

$$[X^i, X^j]_t^{\gamma,\pi} = \lim_{n\to\infty} [X^i, X^j]_t^{\gamma,\pi^n} := \lim_{n\to\infty} (1-2\gamma) \sum_{k=0}^{N_n-1} X^i_{t_k^n\wedge t, t_{k+1}^n\wedge t} X^j_{t_k^n\wedge t, t_{k+1}^n\wedge t}, \quad t\in[0,T].$$

序列 $([X^i, X^j]^{\gamma,\pi^n})_{n\in\mathbb{N}}$ 具有一致有界的 1 阶变差，因此， $[X^i, X^j]^{\gamma,\pi}$ 具有有限的 1 阶变差。我们记 $[X]^{\gamma,\pi} = [X,X]^{\gamma}([X^i, X^j]^{\gamma,\pi})_{1\le i,j\le d}$，类似地，$[X]^{\gamma,\pi^n}$, $n\in\mathbb{N}$。

通过对 [ALP24 中命题 2.18], 稍作扩展（以允许非嵌套划分），粗糙路径的方括号过程 $[\mathbf{X}^{\gamma,\pi}]$与 $(1-2\gamma)[X]$一致，其中 $[X]$表示 X 沿 π 的二次变差，按 F¨ollmer [F¨ol81],的意义定义为 $[X]^{\gamma,\pi}$。

实际上，我们将继续在性质 γ-(RIE) 下工作，因为它更一般；不过，我们想简要指出它与性质 (RIE) 的理论联系。性质 (RIE) 已在 [PP16] 和 [ACLP23] 中引入。

性质 (RIE)。令 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$, $p\in(2,3)$, 和 $\pi=(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$（其中 $\pi^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{N_n}^n = T\}$, $n\in\mathbb{N}$）为区间 $[0,T]$ 上的一个分割序列，使得$\sup\{|X_{t_k^n,t_{k+1}^n}|\colon k=0,\ldots,N_n-1\}$ 当 $n\to\infty$ 时收敛至 0。我们假设

(i) 左端点黎曼和

$$\int_0^t X_r\otimes \mathrm{d}^{\pi^n} X_r := \sum_{k=0}^{N_n-1} X_{t_k^n}\otimes X_{t_k^n\wedge t, t_{k+1}^n\wedge t}, \quad t\in[0,T],$$

当 $n\to\infty$ 时一致收敛至一个极限，我们将其记为 $\int_0^t X_r\otimes \mathrm{d}^{\pi} X_r$,

(ii) 存在一个控制函数 c 使得

$$\sup_{(s,t)\in\Delta_T} \frac{|X_{s,t}|^p}{c(s,t)} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{0\le k<\ell\le N_n} \frac{|(\int_0^{\cdot} X_r\otimes \mathrm{d}^{\pi^n} X_r)_{t_k^n,t_\ell^n} - X_{t_k^n}\otimes X_{t_k^n,t_\ell^n}|^{\frac{p}{2}}}{c(t_k^n,t_\ell^n)} \lesssim 1.$$

我们称路径 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 关于 p 和 π 满足性质 (RIE)，如果 p, π和 X 共同满足性质 (RIE)。

引理 3.3（见 [DKP25]中的引理 2.16）。设 $X\in C([0,T];\mathbb{R}^d)$、$\gamma\in[0,1]$、$p\in$（2、3）以及$\pi=(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一个分割序列。

（*i*）设 $\gamma\neq\frac{1}{2}$。则， X 相对于 π 满足性质 （RIE） （*i*），当且仅当 X相对于 γ 和 π 满足性质 γ-（RIE） （*i*）；并且， X 相对于 p 和 π 满足性质 （RIE） （*ii*），当且仅当 X 相对于 γ、p 和π满足性质 γ-（RIE） （*ii*）。（*ii*）设 $\gamma=\frac{1}{2}$。如果 X 相对于 π满足性质 （RIE） （*i*），则 X 相对于 γ 和 π满足性质 γ-（RIE） （*i*）；并且，如果 X 相对于 p 和 π满足性质 （RIE） （*ii*），则 X 相对于 γ、p 和 π满足性质 γ-（RIE） （*ii*）。

类似于性质 (RIE)，参见 [AKLP25a, 命题 2.12], 性质 γ-(RIE) 在有限 q-变差路径的扰动下对于 $q\in$ (1，2) 是稳定的，而后者属于 Young 积分的范畴。以下引理的证明见附录 B。

引理 *3.4.* 假设 $X \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某个$\gamma \in [0,1]$, $p \in (2,3)$ 以及分割序列 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 γ-*(RIE)*。令 $\varphi \in C^{q\text{-var}}([0,T];\mathbb{R}^d)$ 对某个 $q \in [1,2)$，使得 $1/p + 1/q > 1$ 且 $\sup\{|\varphi_{t_k^n, t_{k+1}^n}|: k = 0, \dots, N_n - 1\}$ 收敛到 0 当 $n \to \infty$ 时。则路径 $X = X + \varphi$ 相对于 γ, p 以及 π 满足性质 γ-*(RIE)*。

3.2. **的 γ-签名**。我们现在证明，在性质 γ-(RIE)下，典范粗糙路径可以通过添加路径二次变差项修正为弱几何粗糙路径；在比较随机的伊藤积分与斯特拉托诺维奇积分时，这种做法似乎很自然。

引理 *3.5.* 假设 $X \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某个 $\gamma \in [0,1]$, $p \in (2,3)$ 及分割序列 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 γ-*(RIE)*。令 $(X, \mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,(2)}) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d)$ 为连续粗糙路径，其中 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,(2)}: \Delta_T \to \mathbb{R}^d$ 定义为

$$\mathbb{X}_{s,t}^{\gamma,\pi,o,(2)} := \mathbb{X}_{s,t}^{\gamma,\pi,(2)} + \frac{1}{2}[X]_{s,t}^{\gamma,\pi}, \qquad (s,t) \in \Delta_T,$$

其中 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)}$ 是命题 *3.1* 中定义的典范粗糙路径提升，且 $[X]^{\gamma,\pi}$ 在引理 *3.2* 中定义。于是，$\mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,2}: [0,T] \to G^2(\mathbb{R}^d)$ 是弱几何粗糙路径，其中我们定义

$$\mathbb{X}_t^{\gamma,\pi,o,2} := (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi,o,(2)}), \qquad t \in [0,T].$$

证明。由于 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)}$ 具有有限的 $\frac{p}{2}$-变差，且 $[X^i, X^j]^{\gamma,\pi}$ 具有有限的 1-变差，$\mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,(2)}$ 具有有限的 $\frac{p}{2}$-变差，见命题 3.1 和引理 3.2，特别是 $\|\mathbf{1}; \mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,2}\|_p < \infty$。

我们证明，对于任意 $t \in [0,T]$，有 $\mathbb{S}(\mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi\,o\,(2),,,}) = \frac{1}{2} X_{0,t} \otimes X_{0,t}$，其中 $\mathbb{S}$ 表示矩阵的对称部分。然后应用引理 2.1，证明即告完成。

根据定义，对任意 $1 \le i, j \le d$ 以及任意 $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
&(\mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi,o,(2)})^{ij} + (\mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi,o,(2)})^{ji} \\
&= \int_0^t X_r^i \,\mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r^j - X_0^i X_{0,t}^j + \frac{1}{2}[X^i, X^j]_t^{\gamma,\pi} + \int_0^t X_r^j \,\mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r^i - X_0^j X_{0,t}^i + \frac{1}{2}[X^j, X^i]_t^{\gamma,\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} (X_{t_k^n}^i + \gamma X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^i) X_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t}^j + (\frac{1}{2} - \gamma) X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^i X_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t}^j - X_0^i X_{0,t}^j \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} (X_{t_k^n}^j + \gamma X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^j) X_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t}^i + (\frac{1}{2} - \gamma) X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^j X_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t}^i - X_0^j X_{0,t}^i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} \frac{1}{2}(X_{t_k^n}^i + X_{t_{k+1}^n}^i) X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^j - X_0^i X_{0,t}^j \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} \frac{1}{2}(X_{t_k^n}^j + X_{t_{k+1}^n}^j) X_{t_k^n, t_{k+1}^n}^i - X_0^j X_{0,t}^i \\
&= X_t^i X_t^j - X_0^i X_0^j - X_0^i X_{0,t}^j - X_0^j X_{0,t}^i \\
&= X_{0,t}^i X_{0,t}^j.
\end{aligned}$$

□

注 3.6. 由于 $[X]^{\frac{1}{2},\,\pi}_{1}=0$，参见引理 *3.2*，我们注意到 $\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,o,\,(2)}=\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,(2)}$，这意味着 $(1,\ X_{0,\,\cdot},\ \mathbb{X}^{2,\,\pi,\,(2)}_{0,\,\cdot})\in C_o^{p\text{-var}}([0,T];\ G^2(\mathbb{R}^d))$。也就是说，*Stratonovich* 型粗糙路径确实是弱几何粗糙路径，这非常合理。

此外，对于任意 $\gamma\in[0,1]$，都有 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi,\,o,\,(2)}=\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,(2)}$。

注记 3.7。若 X 满足性质 γ-(RIE)，则可将定义 *2.3* 中定义的 X的签名 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi,\,o}$ 视为 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi,\,o,\,2}$的唯一路径扩张。于是，这与$\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,o}$一致，后者是$(1、\ X_{0,\,\cdot}、\ \mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,(2)})$的唯一路径扩张。

现在，我们将签名定义为与一条足够规则的路径相关联、在固定区间上所有迭代积分的集合。这里，我们利用性质 γ-(RIE) 及相应的迭代积分，从而为 Itô 型和 Stratonovich 型签名提供统一框架。

为此，我们假设路径 X 满足相对于 γ、p 和 π的性质 γ-(RIE)，并利用 Lyons 延拓定理在 $T((\mathbb{R}^d))$ 上定义 X 的签名 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi}$；例如参见 [LCL07，定理 3.7]。更准确地说，我们注意到 $(1,X_{0,\cdot},\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)})\colon[0,T]\to T^2(\mathbb{R}^d)$ 是一个有限 p-变差的乘法泛函，由 c控制，即$|X_{s,t}|\lesssim c(s,t)$，$|\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi\,(2),\,}_{s,t}|\lesssim c(s,t)$，$(s,t)\in\Delta_T$，其中 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi\,(2),}_{s,t}:=\int_0^t X_{0,r}\otimes\mathrm{d}^{\gamma,\pi}X_r:=\int_0^t X_r\otimes\mathrm{d}^{\gamma,\pi}X_r^s-X_0\otimes X_{0,t}$，且 c是满足 (3.1) 的控制函数，参见命题 3.1。应用 Lyons 延拓定理，对于每个 $N\geq 3$，都存在唯一的连续路径 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N)}\colon[0,T]\to(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$，使得

$$(1,X_{0,\cdot},\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)},\dots,\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N)},\dots)\in T((\mathbb{R}^d))$$

是一个具有有限 p-变差的乘法泛函，也就是说，特别地，$|\mathbb{X}^{\gamma,\,s^{(N)},\,t}|\lesssim c(s,\ t)^{\frac{N}{p}}$，$(s,-t)\in\Delta_T$，对任意 $N\geq 1$ 均成立。

命题 C.1 现在表明，Lyons 扩张 $\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi}\colon[0,T]\to T((\mathbb{R}^d))$ 与相对于 $\mathbf{X}^{\gamma,\,\pi}=(X,\ \mathbb{X}^{\gamma,\,\pi,\,(2)})$ 的受控路径的迭代粗糙积分所构成的集合一致，也就是说，对于 $N\geq 3$，

$$\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N)}_{s,t}=\int_s^t\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,r}\otimes\mathrm{d}\mathbf{X}^{\gamma,\pi}_r,\qquad(s,t)\in\Delta_T,$$

其中粗糙积分由引理 D.1 定义。

我们注意到，由定理 D.3 可知，该积分作为沿着 π 的黎曼和的极限而存在。此外，对于任意长度为 N 的多重指标 $I=(i_1,\ \dots,\ i_N)$，由于 $\langle e_I,\ \cdot\rangle\colon(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}\to\mathbb{R}$ 连续，我们观察到

$$\begin{aligned}\langle e_I,\mathbb{X}^{\gamma,\pi}_{s,t}\rangle&=\langle e_I,\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N)}_{s,t}\rangle\\&=\langle e_I,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N_n-1}(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k}+\gamma(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_{k+1}}-\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k}))\otimes X_{t^n_k\vee s,t^n_{k+1}\wedge t}\rangle\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N_n-1}\langle e_I,(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k}+\gamma(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_{k+1}}-\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k}))\otimes X_{t^n_k\vee s,t^n_{k+1}\wedge t}\rangle,\end{aligned}$$

对于 $(s,\ t)\in\Delta_T$。因此，

$$\langle e_I,\mathbb{X}^{\gamma,\pi}_{s,t}\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N_n-1}\langle e_{I'},\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k}+\gamma(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_{k+1}}-\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(N-1)}_{s,t^n_k})\rangle\,X^{i_N}_{t^n_k\vee s,t^n_{k+1}\wedge t},$$

由此可得

$$\langle e_I, \mathbb{X}_{s,t}^{\gamma,\pi}\rangle = \int_s^t \langle e_{I'}, \mathbb{X}_{s,r}^{\gamma,\pi}\rangle \, \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r^{i_N},$$

右侧的积分可定义为关于受控路径的粗糙积分，并且可表示为沿着 π的黎曼和的极限，参见引理 D.1、注 D.2 和定理 D.3，因为 $r \mapsto \langle e_{I'}, \mathbb{X}^{\gamma,s\ \pi,r}\rangle$ 是关于 $[s,t]$ 上的 X 的受控路径， X^{i_N} 也是如此。

这使我们能够如下定义 γ-签名 。

定义 3.8。 假设 $X \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某个$\gamma \in [0,1]$、 $p \in (2,3)$ 以及分割序列 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$满足性质 γ-(RIE) 。

我们递归地定义

$$\begin{aligned}
&\langle e_\emptyset, \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}\rangle := 1, \quad \langle e_I, \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}\rangle := X_{0,t}^{i_1}, \quad I = (i_1),\\
&\langle e_I, \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}\rangle := \int_0^t X_r^{i_1}\, \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r^{i_2} - X_0^{i_1} X_{0,t}^{i_2} = (\mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi,(2)})^{i_1 i_2}, \quad I = (i_1,i_2),\\
&\langle e_I, \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}\rangle := \int_0^t \langle e_{I'}, \mathbb{X}_r^{\gamma,\pi}\rangle \, \mathrm{d}^{\gamma,\pi} X_r^{i_{|I|}}\\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} (\langle e_{I'}, \mathbb{X}_{t_k^n}^{\gamma,\pi}\rangle + \gamma(\langle e_{I'}, \mathbb{X}_{t_{k+1}^n}^{\gamma,\pi}\rangle - \langle e_{I'}, \mathbb{X}_{t_k^n}^{\gamma,\pi}\rangle)) X_{t_k^n\wedge t, t_{k+1}^n\wedge t}^{i_{|I|}},
\end{aligned}$$

其中积分作为受控路径的粗糙积分存在，对 $I = (i_1,\ldots,i_{|I|})$、 $|I| > 2$ 和 $t \in [0,T]$ 而言。因此， $\mathbb{X}^{\gamma,\pi}\colon [0,T] \to T((\mathbb{R}^d))$ 定义良好，称为 γ-签名 X。其在 $T^N(\mathbb{R}^d)$ 上的投影 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,N}$由下式给出

$$\mathbb{X}_t^{\gamma,\pi,N} = \Pi_N(\mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}) = \sum_{|I|\le N} \langle e_I, \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}\rangle e_I,$$

并称为在第 N 级截断的 γ-签名 X，其对所有 $t \in [0,T]$ 都取值于 $T^N(\mathbb{R}^d)$。 γ-签名 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi}$ 的增量定义为

$$\mathbb{X}_{s,t}^{\gamma,\pi} := (\mathbb{X}_s^{\gamma,\pi})^{-1} \otimes \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi}, \qquad (s,t) \in \Delta_T.$$

注记 3.9. 注 *3.6* 指出

$$\Pi_2(\mathbb{X}_t^{\gamma,\pi,o}) = \mathbb{X}_t^{\gamma,\pi,o,2} = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}^{\gamma,\pi,o,(2)}) = (1, X_{0,t}, \mathbb{X}_{0,t}^{\frac{1}{2},\pi,(2)}) = \Pi_2(\mathbb{X}_t^{\frac{1}{2},\pi}),$$

也就是说，若 X 满足性质 γ-(RIE)，则对应的弱几何粗糙路径在第 2 级截断后的签名，与在第 2 级截断后的 $1/2$-签名 X 相同。此外，由于 γ-签名被定义为唯一的 *Lyons* 扩张，$1/2$-签名$\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\pi}$是一个群样值路径，即 $\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\pi}\ _{s,t} \in G((\mathbb{R}^d))$，并且与弱几何粗糙路径 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi,o,}{}^{2} = \mathbb{X}^{\frac{1}{2},\pi,o,}{}^{2} = (1, X_{0,\cdot}, \mathbb{X}^{\frac{1}{2},\pi})$的签名一致，见定义 *2.3*。

现在，假设 $X \in C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 相对于某个 $\gamma \in [0,1]$,$p \in (2,3)$ 和分割序列 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 γ-(RIE)。我们设

$$\widehat{X} := (\cdot, X, Q^{\gamma,\pi}(X)) \in C([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}}), \tag{3.3}$$

其中 $\hat{d} = 1 + d + d\ (d+1)\ 2$, 并且

$$Q^{\gamma,\pi}(X) := ([X^1,X^1]^{\gamma,\pi},\ldots,[X^1,X^d]^{\gamma,\pi},[X^2,X^2]^{\gamma,\pi},\ldots,[X^2,X^d]^{\gamma,\pi},\ldots,[X^d,X^d]^{\gamma,\pi}).$$

我们首先注意到，X 是通过粗糙路径括号和时间扩展得到的路径，正如第 2.3 节所介绍的，因为 $[\mathbf{X}^{\gamma,\pi}] = [X]^{\gamma,\pi}$。我们还回顾，引理 3.2 中有 $[X]^{\frac{1}{2},\pi} = 0$，也就是说，如果 $\gamma = \frac{1}{2}$，我们可以考虑 $\widehat{X} = (\cdot, X)$，并且有 $\widehat{d} = 1 + d$。

通过将引理 3.2 和引理 3.4 应用于 $(\cdot, 0, 0) + (0, X, 0) + (0, 0, Q^{\gamma,\pi}(X))$，可得 X 满足相对于 γ、p 和 π 的性质 γ-(RIE)。

和之前一样，我们用 $[X^i, X^j]$ 表示 $[X]$ 的分量 i, j，用 $\langle X^i, X^j \rangle$ 表示 $\langle X \rangle$ 的分量 i, j，$i, j = 1, \ldots, d$，$i \le j$，$t \in [0, T]$。

3.3. 一个关于 γ-签名的通用逼近定理。 作为定理 2.8 的一个例子，对于满足性质 γ-(RIE) 且对应于 $\gamma \in [0, 1]$、$\gamma \neq \frac{1}{2}$ 的路径，其 γ-签名具有通用逼近性质。

推论 3.10. 设 $\gamma \in [0, 1]$，$\gamma \neq \frac{1}{2}$，$p \in (2, 3)$ 以及 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是区间 $[0, T]$ 的一个分割序列。设 $K \subset \widehat{\mathcal{C}}^p([0, T]; \mathbb{R}^{\widehat{d}})$ 是一个关于粗糙路径范数有界的紧子集，并考虑一个连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$。此外，对某个 $L > 0$，令 $K_{\gamma,\pi,L} \subset K$ 为如下定义的子集

$$K_{\gamma,\pi,L} := \left\{ \widehat{\mathbf{X}}^{\gamma,\pi} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{\gamma,\pi,(2)}) \in K : \begin{array}{l} X \text{ satisfies Property } \gamma\text{-(RIE) relative to } \gamma, p \\ \text{and } \pi \text{ such that } \|(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{\gamma,\pi,(2)})\|_p + \|[\widehat{X}]^{\gamma,\pi}\|_{\frac{p}{2}} \le L \end{array} \right\}.$$

那么，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个线性泛函 $\ell^\gamma \in T(\mathbb{R}^d)$ 使得

$$\sup_{\widehat{\mathbf{X}}^{\gamma,\pi} \in K_{\gamma,\pi,L}} |f(\widehat{\mathbf{X}}^{\gamma,\pi}) - \langle \ell^\gamma, \widehat{\mathbb{X}}^{\gamma,\pi}_T \rangle| < \varepsilon,$$

其中 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi}$ 表示 X 的 γ-签名。

证明。我们只需验证 $K_{\gamma,\pi,L} \subset K_L$，其中 K_L 表示定理 2.8 中定义的集合。于是结论由定理 2.8 立即得出。

令 $\widehat{\mathbf{X}}^{\gamma,\pi} = (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{\gamma,\pi,(2)}) \in K_{\gamma,\pi,L}$。由于 X 相对于 γ, p 和 π 满足性质 γ-(RIE)，因此有 $\mathbf{X}^{\gamma,\pi} = (X, \mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)}) \in \mathcal{C}^p([0, T]; \mathbb{R}^d)$，见命题 3.1。此外，根据 [ALP24 的命题 2.18]，粗糙路径括号 $[\mathbf{X}^{\gamma,\pi}]$ 与 $(1 - 2\gamma)[X]$ 一致，其中 $[X]$ 表示 X 沿着 π 的 F¨ollmer 意义下的二次变差，等于 $[X]^{\gamma,\pi}$，由此得到 $[\mathbf{X}^{\gamma,\pi}] = [X]^{\gamma,\pi}$，即 $Q(X) = Q^{\gamma,\pi}(X)$。此外，X 满足性质 γ-(RIE)，见引理 3.4，因此 $[\mathbf{X}^{\gamma,\pi}] = [X]^{\gamma,\pi}$，进而有 $\mathbb{X}^{\gamma,\pi} \in K_L$。□

我们立即得到如下推论。假设该路径满足性质1/2-(RIE)，由注 3.6，Stratonovich 型提升是弱几何的，且该结论也直接适用于时间扩展的 Stratonovich 型签名。

推论 3.11. 设 $K \subset \widehat{C}_o^{p\text{-var}}([0, T]; G^2(\mathbb{R}^{1+d}))$ 为一个紧子集，关于 p-变差范数有界，并考虑连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$。进一步，定义

$$K_{\frac{1}{2},\pi} := \left\{ \widehat{\mathbb{X}}^2 \in K : \begin{array}{l} X \text{ satisfies Property } 1/2\text{-(RIE) relative to } p \text{ and } \pi \\ \text{such that } \widehat{\mathbb{X}}^{(1)} = \widehat{X}_{0,\cdot} \text{ and } \widehat{\mathbb{X}}^{(2)} = \widehat{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2},\pi,(2)} \end{array} \right\}.$$

那么对于每一个 $\varepsilon > 0$，存在一个线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^{1+d})$ 使得

$$\sup_{\widehat{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2},\pi,2} \in K_{\frac{1}{2},\pi}} |f(\widehat{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2},\pi,2}) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2},\pi}_T \rangle| < \varepsilon.$$

4. Application to continuous semimartingales

在本节中，我们将第2节和第3.3节中发展的确定性理论应用于连续半鞅。

事实上，采用随机积分的概念后，连续半鞅非常适用于签名理论。也就是说，可以将签名定义为通过随机积分得到的迭代积分集合。由于其遵循一阶微积分，通常考虑斯特拉托诺维奇积分；该积分几乎必然与 Lyons 提升一致，因此经典地蕴含了连续路径泛函的通用逼近定理。

在全文中，设 $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ 是一个 d 维连续半鞅，定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上，其滤子 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 满足通常条件，即完备性和右连续性。

定义 4.1. 设 X 是一个 d 维连续半鞅。其斯特拉托诺维奇签名 是取值于 $T_1((\mathbb{R}^d))$ 的随机过程 $\mathbb{X}^\circ = (\mathbb{X}^\circ_t)_{t\in[0,T]}$，其各分量递归定义如下：

$$\langle e_\emptyset, \mathbb{X}^\circ_t\rangle := 1, \qquad \langle e_I, \mathbb{X}^\circ_t\rangle := \int_0^t \langle e_{I'}, \mathbb{X}^\circ_r\rangle \circ \mathrm{d}X^{i_{|I|}}_r,$$

对每个 $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ 和 $t \in [0,T]$，其中 $\circ$ 表示 *Stratonovich* 积分。其在 $T^N(\mathbb{R}^d)$ 上的投影 $\mathbb{X}^{\circ,\leq N}$ 为

$$\mathbb{X}^{\circ,N}_t = \Pi_N(\mathbb{X}^\circ_t) = \sum_{|I|\leq N} \langle e_I, \mathbb{X}^\circ_t\rangle e_I,$$

并称为的 Stratonovich 签名，截断至第 N层，其取值于 $G^N(\mathbb{R}^d)$，对所有 $t \in [0,T]$均成立。*Stratonovich* 签名 $\mathbb{X}^\circ$ 的增量定义为

$$\mathbb{X}^\circ_{s,t} := (\mathbb{X}^\circ_s)^{-1} \otimes \mathbb{X}^\circ_t, \qquad (s,t) \in \Delta_T.$$

事实证明，若半鞅 X 相对于 $\gamma \in [0,1]$，$p \in (2,3)$ 和某个适当的分割序列满足性质 γ-(RIE)，则可得到一个典范签名，它与通过 Lyons 提升定义的签名以及 Stratonovich 签名以 $\mathbb{P}$- 几乎必然的方式相对应。

引理 4.2。设 $\gamma \in [0,1]$，令 $p \in (2、3)$，并令 $\pi^n = \{\tau^n_k\}$, $n \in \mathbb{N}$为一列适应分割（因此每个 τ^n_k 都是停时），使得对几乎每个 $\omega \in \Omega$，$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$是 $[0,T]$ 的一列（有限）分割，且网格尺寸趋于零。

令 X 为连续的 d 维半鞅，并假设对于几乎所有$\omega \in \Omega$，$\sup\{|X_{\tau^n_k(\omega)\,\tau^n_{k+1}(\omega)}(\omega)| : \quad k = 0,\dots, N_n - 1\}$ 在 $n \to \infty$ 时收敛于0，并且样本路径 $X(\omega)$ 相对于 γ、 p和$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$满足性质 γ-(RIE) 。

(i) 通过命题 *3.1* 逐路径定义的关于$\gamma = \frac{1}{2}$ 的随机弱几何粗糙路径，与通过引理 *3.5* 逐路径定义的关于 $\gamma \in [0,1]$ 的随机弱几何粗糙路径 $\mathbb{P}$-几乎必然重合。*(ii)* 通过引理 *3.5* 逐路径定义的随机弱几何粗糙路径，与截断至2 级的 X 的 *Stratonovich* 签名 $\mathbb{P}$-几乎必然重合。*(iii)* 通过定义 *2.3*（更准确地说，是注记 *3.7*）逐路径定义的随机签名 $\mathbb{X}^o$ ，以及通过定义 *3.8* 逐路径定义的随机签名 $\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi}$与 X 的 *Stratonovich* 签名 $\mathbb{X}^\circ$ $\mathbb{P}$-几乎必然重合。

证明。*(i)*：由引理 3.3 可知，若一条路径相对于某个$\gamma \in [0,1]$满足性质 γ-(RIE)，则它特别满足性质 $1/2$-(RIE)。因此，由引理 2.1 以及 $\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,2}_{t} = \mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,(),0,\,,\,\pi,\,o,\,(2),\,t}_{0}$，$t \in [0,T]$，结论成立。

(ii)：根据构造，通过性质 γ-(RIE) 构造的逐路径粗积分 $\int_0^t X_r(\omega) \otimes \mathrm{d}^{\gamma,\,\pi} X_r(\omega)$ 等于当 $n \to \infty$ 时黎曼和的极限：

$$\sum_{k=0}^{N_n-1} \left(X_{\tau_k^n(\omega)}(\omega) + \gamma X_{\tau_k^n(\omega),\tau_{k+1}^n(\omega)}\right) \otimes X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega).$$

假设 $\gamma = \frac{1}{2}$。众所周知，这些黎曼和依概率一致收敛到 Stratonovich 积分 $\int_0^t X_r \otimes \circ \mathrm{d}X_r$，参见例如 [Pro05、第二章、定理 21、定理 22]。由极限的（几乎必然）唯一性即可得出结论；另见 [DKP25 引理 4.3] 的 (i) 部分。

假设 $\gamma \neq \frac{1}{2}$。那么加上 $[X(\omega)]^{\gamma,\,0\,\pi^n}_{t}$，，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N_n-1} \left(X_{\tau_k^n(\omega)}(\omega) + \gamma X_{\tau_k^n(\omega),\tau_{k+1}^n(\omega)}\right) \otimes X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-2\gamma) X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega) \otimes X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega) \\
&= \sum_{k=0}^{N_n-1} \left(X_{\tau_k^n(\omega)}(\omega) + \frac{1}{2} X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}\right) \otimes X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega) \\
&\quad + \gamma\left(X_{\tau_k^n(\omega),\tau_{k+1}^n(\omega)}\right) - X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega)) \otimes X_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega),
\end{aligned}$$

它再次依概率一致收敛到 Stratonovich 积分 $\int_0^t X_r \otimes \circ \mathrm{d}X_r$。

(iii)：由 (i)，我们有 $\mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,2}_{t} = \mathbb{X}^{\frac{1}{2},\,(),0,,\pi,\,o,\,(2),\,t}_{0}$，$t \in [0,T]$。由于 Lyons 提升是唯一的，通过定义 2.3（弱几何粗糙路径的 Lyons 提升）和定义 3.8（$1/2$-签名）逐路径定义的随机签名几乎必然 $\mathbb{P}$ 相同；注意，$1/2$-签名与 $(1,\ \widehat{X},\ \widehat{\mathbb{X}}^{\frac{1}{2},\,\pi,\,(2)})$ 的 Lyons 扩张相同，参见定义 3.8 和附录 C。

由 (ii)，随机弱几何粗糙路径与 X 截断至第 2 层的 Stratonovich 签名几乎必然 $\mathbb{P}$ 相同，并且取值于 $G^2(\mathbb{R}^d)$。由于 Lyons 提升是唯一的，参见 [FV10，定理 9.5]，，且 X 的 Stratonovich 签名截断至任意层级 $N \geq 3$ 后都取值于 $G^N(\mathbb{R}^d)$，通过 Lyons 提升弱几何粗糙路径而逐路径定义的截断至第 N 层的随机签名也如此，故证明完毕。□

推论 *4.3.* 设 X 是一个 d维连续半鞅，$X := (\cdot, X)$，且$\mathcal{S}^{(2)} := \{\widehat{\mathbb{X}}^{\circ,2}(\omega) : \omega \in \Omega\}$。此外，设 $p \in (2,3)$ 和 $K \subset \widehat{C}_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^2(\mathbb{R}^{1+d}))$ 是时间扩展弱几何粗糙路径子空间的一个紧子集，见定理 *2.11*，并且关于 p-变差范数有界；再设连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$。那么对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^{1+d})$，使得对几乎所有$\omega \in \Omega$，

$$|f(\widehat{\mathbb{X}}^{\circ,2}(\omega)) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}^{\circ}_T(\omega)\rangle| < \varepsilon \qquad \text{for all} \quad \widehat{\mathbb{X}}^{\circ,2}(\omega) \in K \cap \mathcal{S}^{(2)},$$

其中 $\widehat{\mathbb{X}}^{\circ}$ 表示 X的 *Stratonovich* 签名。

类似于 Stratonovich 签名，我们现在通过迭代随机 Itˆo 积分来定义连续半鞅的 Itˆo 签名。从建模角度来看，这或许是更合适的选择，例如当考虑金融应用时。

定义 4.4。设 X 是一个 d 维连续半鞅。其 Itˆo 签名是取值于 $T_1((\mathbb{R}^d))$ 的随机过程 $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t)^{t\in[0,T]}$，其各分量递归定义如下：

$$\langle e_\emptyset, \mathbb{X}_t\rangle := 1, \qquad \langle e_I, \mathbb{X}_t^\infty\rangle := \int_0^t \langle e_{I'}, \mathbb{X}_r\rangle \, \mathrm{d}X_r^{i_{|I|}},$$

对每个 $I = (i_1, \dots, i_{|I|})$ 以及 $t \in [0,T]$，其中积分按 *Itˆo* 积分定义。其在 $T^N(\mathbb{R}^d)$ 上的投影 $\mathbb{X}^N$ 为

$$\mathbb{X}_t^N = \Pi_N(\mathbb{X}_t) = \sum_{|I|\le N} \langle e_I, \mathbb{X}_t\rangle e_I,$$

并称为 X 截断至第 层的 Itˆo 签名。签名 $\mathbb{X}^\infty$ 的增量定义为

$$\mathbb{X}_{s,t} := (\mathbb{X}_s)^{-1} \otimes \mathbb{X}_t, \qquad (s,t) \in \Delta_T.$$

由于定理 2.8，我们现在可以利用 Itˆo 签名的概念，给出一致逼近定理的概率版本。

推论 4.5. 设 X 是一个 d 维连续半鞅。我们定义随机变量

$$\widehat{X} := (\cdot, X, Q(X)),$$

其取值于 $C([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}})$，对 $\hat{d} = 1 + d + d(d+1)/2$，其中

$$Q(X) := ([X^1,X^1], \dots, [X^1,X^d], [X^2,X^2], \dots, [X^2,X^d], \dots, [X^d,X^d]),$$

其中 $[X] = ([X^i,X^j])_{1\le i,j\le d}$ 表示 X 的二次（协）变差。设 $p \in (2,3)$。对于某个 $L > 0$，令

$$\mathcal{S}_L^{(2)} := \left\{ \widehat{\mathbf{X}}(\omega) = (\widehat{X}(\omega), \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}(\omega)) \,:\, \begin{array}{r} \omega \in \Omega,\ (X(\omega), \mathbb{X}^{(2)}(\omega)) \in \mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d), \\ \widehat{X}(\omega) = (\cdot, X(\omega), Q(X)(\omega)), \\ \|(\widehat{X}(\omega), \widehat{\mathbb{X}}^{(2)}(\omega))\|_p + \|[\widehat{X}](\omega)\|_{\frac{p}{2}} \le L \end{array} \right\},$$

其中 $\mathbb{X}_{s,t}^{(2)} := \int_s^t (X_r - X_s) \otimes \mathrm{d}X_r, (s,t) \in \Delta_T$，类似地，我们定义 $\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}$。此外，令 $K \subset \widehat{\mathcal{C}}^p([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}})$ 为粗糙路径空间中一个紧子集，该空间扩展了时间和括号项，并且相对于粗糙路径范数有界；再考虑一个连续函数 $f\colon K \to \mathbb{R}$。那么对于每个 $\varepsilon > 0$，存在一个线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^d)$，使得对于几乎所有 $\omega \in \Omega$，

$$|f(\widehat{\mathbf{X}}(\omega)) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}_T(\omega)\rangle| < \varepsilon \qquad \textit{for all} \quad \widehat{\mathbf{X}}(\omega) \in K \cap \mathcal{S}_L^{(2)},$$

其中，$\widehat{\mathbb{X}}$ 表示 X 的伊藤签名。

证明。我们利用半鞅可以通过其迭代伊藤积分提升为随机粗糙路径这一事实，参见例如 [FZ18, 定理 6.5]，；并且，相应的粗糙路径括号几乎必然与该半鞅的二次变差一致，参见例如 [FH20, 注 2.7]。该结论随后立即由一般粗糙路径签名的逐路径通用逼近

关于 li 的定理的函数泛函得到，这就是定理 2.8。

□

备注4.6。 例如，当 $X = W$ 是具有相关矩阵 ρ 的（相关） d 维布朗运动时，二次（协）变差为 $[W]_t^{ij} = \rho_{ij}t,\ t \in [0,T],i,j = 1,\dots,d$。也就是说，二次变差是时间的线性函数，并且几乎必然与随机 *Itˆo* 粗糙路径的粗糙路径括号一致。因此，另见注 *2.10*，在布朗运动情形下，只需考虑时间扩展的布朗运动 $W = (\cdot, W)$（即不通过二次变差进行扩展），并且类似于推论 *4.5* 表述的通用逼近结果成立。

事实证明，若半鞅 X 满足性质 0-(RIE)，而这等价于性质 (RIE)，见引理 3.3，则 0-签名与 Itˆo 签名几乎必然一致。特别是，对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$，左端点黎曼和的极限逐ω存在。

引理 4.7. 设 $p \in (2、3)$，并设 $\pi^n = \{\tau_k^n\},\ n \in \mathbb{N}$ 是一列适应分割（即每个 τ_k^n 都是一个停时），使得对几乎每个 $\omega \in \Omega$，$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,T]$ 的一列（有限）分割，且网格尺寸趋于零。

设 X 是一个 d 维连续半鞅，并假设对几乎每个 $\omega \in \Omega$，$\sup\{|X_{\tau_k^n(\omega)\ \tau_{k+1}^n(\omega)}(\omega)| :\ k = 0,\dots, N_n - 1\}$ 随着 $n \to \infty$ 趋于零而收敛至 0，且样本路径 $X(\omega)$ 相对于 p 和$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 0-(RIE)。

(i) 通过命题 *3.1* 逐路径定义的 $\gamma = 0$ 的随机粗糙路径与截断至第二层的 X 的 *Itô* 签名在 $\mathbb{P}$-几乎必然意义下相同。*(ii)* 通过定义 *3.8* 逐路径定义的随机 0-签名 $\mathbb{X}^{0,\pi}$ 与 X 的 *Itô* 签名$\mathbb{X}$ 在 $\mathbb{P}$-几乎必然意义下相同。

证明。（*i*）：由于性质 0-(RIE) 与性质 (RIE) 等价，另见引理 3.3，因此这就是 [AKLP25a 引理 3.1] 的第 (i) 部分所述结论。

（*ii*）：由于 0-签名与粗糙路径的 Lyons 提升（1，$X_{0,\cdot}$，$\mathbb{X}^{0,\pi,(2)}$）一致，见定义 3.8 和附录 C；又由（i），通过命题 3.1 逐路径定义的随机粗糙路径与截断至第 2 层的 X Itô 签名 $\mathbb{P}$-几乎必然一致，因此由 Lyons 提升的唯一性可知，签名 $\mathbb{P}$-几乎必然一致。□

此外，若半鞅 X 满足性质 γ-(RIE)，则逐路径二次变差与随机二次变差几乎必然一致。

引理 4.8。设 $\gamma \in [0,1],\ p \in (2、3)$，且设 $\pi^n = \{\tau_k^n\},\ n \in \mathbb{N}$ 是一列适应分割（因此每个 τ_k^n 都是一个停时），使得对几乎所有 $\omega \in \Omega$，$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,T]$ 的一列（有限）分割，其网格大小趋于零。

令 X 为一个 d维连续半鞅，并假设对于几乎所有$\omega \in \Omega$，$\sup\{|X_{\tau_k^n(\omega)\ \tau_{k+1}^n(\omega)}(\omega)| :\ k = 0,\dots, N_n - 1\}$ 收敛于0，当 $n \to \infty$时，并且样本路径 $X(\omega)$ 满足相对于 γ, p 和$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$的性质 γ-(RIE) 。我们定义随机变量

$$\widehat{X} := (\cdot, X, (1-2\gamma)Q(X)),$$

取值于 $C([0,T];\mathbb{R}^{\hat{d}})$，对于$\hat{d} = 1 + d + d(d+1)/2$，其中

$$Q(X) := ([X^1,X^1],\dots,[X^1,X^d],[X^2,X^2],\dots,[X^2,X^d],\dots,[X^d,X^d]),$$

其中，$[X] = ([X^i, X^j])_{1\le i,j\le d}$ 表示 X 的二次（协）变差。于是，$\widehat{X}$ 与通过(3.3)逐路径定义的随机变量 $\mathbb{P}$-几乎必然相同。

证明。这显然对 $\gamma = \frac{1}{2}$ 成立。因此，设 $\gamma \neq \frac{1}{2}$。根据定义，路径二次变差 $[X^i(\omega)\ X^j(\omega)]^{\gamma,\pi}$ 由 $n \to \infty$ 趋于极限时的极限给出：

$$(1-2\gamma)\sum_{k=0}^{N_n-1} X^i_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega) X^j_{\tau_k^n(\omega)\wedge t,\tau_{k+1}^n(\omega)\wedge t}(\omega).$$

我们知道，这些和依概率关于 $t \in [0,T]$一致收敛到二次变差 $(1-2\gamma)[X^i, X^j]$，例如参见 [Pro05，第二章，定理 22]。如有必要，取一个子序列，即可得到极限的（几乎必然）唯一性。□

作为推论 3.10（或推论 4.5）、引理 4.7 和引理 4.8 的推论，我们表述连续半鞅的 Itô 签名的普适性：其样本路径几乎必然满足性质 0-(RIE)，或者等价地，满足性质 (RIE)；也就是说，Itô 签名几乎必然作为迭代积分的集合而存在，其中积分作为逐路径左端点黎曼和的极限存在。对于相对于适当分割序列的各种半鞅，这一结论均成立。参见 [AKLP25a，第 3] 节。

推论 4.9（伊藤签名的通用逼近定理）。设 $p \in (2,3)$，并设 $\pi^n = \{\tau_k^n\}$, $n \in \mathbb{N}$ 是一列适应分割（即每个 τ_k^n 都是一个停时），使得对几乎所有 $\omega \in \Omega$，$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,T]$ 的一列（有限）分割，且网格尺寸趋于零。

令 X 为一个 d 维连续半鞅，并假设对几乎所有 $\omega \in \Omega$，$\sup\{|X_{\tau_k^n(\omega)\tau_{k+1}^n(\omega)}(\omega)| : k = 0,\dots,N_n-1\}$ 随着 $n \to \infty$ 趋于零而收敛至 0，并且样本路径 $X(\omega)$ 满足相对于 p 和$(\pi^n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 的性质 0-(RIE)。

*Let $\widehat{X} := (\cdot, X, Q(X))$，其中 $Q(X)$ 的定义同推论 4.5，且 $\mathcal{S}^{(2)} := \{(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)})(\omega) : \omega \in \Omega\}$，其中 $\widehat{\mathbb{X}}^{(2)}_{s,t} := \int_s^t (\widehat{X}_r - \widehat{X}_s) \otimes d\widehat{X}_r$, $(s,t) \in \Delta_T$。此外，令 $K \subset \widehat{\mathcal{C}}^{p\text{-var}}([0,T]; \mathbb{R}^{\hat{d}})$ 为粗糙路径子空间的一个紧子集，该子空间由扩展了时间和括号项的粗糙路径构成，且相对于粗糙路径范数有界，并考虑一个连续函数 $f: K \to \mathbb{R}$。对于某个 $L > 0$，令 $K_{0,\pi,L} \subset K$ 为如下定义的子集：

$$K_{0,\pi,L} := \left\{ (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{0,\pi,(2)}) \in K : \begin{array}{l} X \text{ satisfies Property } 0\text{-(RIE) relative to } p \text{ and } \pi \\ \text{such that } \|(\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{0,\pi,(2)})\|_p + \|[\widehat{X}]^{0,\pi}\|_{\frac{p}{2}} \le L \end{array} \right\}.$$

那么，对任意 $\varepsilon > 0$，都存在一个线性泛函 $\ell \in T(\mathbb{R}^d)$，使得对于几乎所有的$\omega \in \Omega$,

$$|f((\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)})(\omega)) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}_T(\omega)\rangle| < \varepsilon \qquad \text{for all} \quad (\widehat{X}, \widehat{\mathbb{X}}^{(2)})(\omega) \in K_{0,\pi,L} \cap \mathcal{S}^{(2)},$$

其中 $\mathbb{X}$ 表示 X的 Itô 签名。

证明。我们利用这样一个事实：对于几乎所有的 $\omega \in \Omega$，$X(\omega)$ 的随机 0-签名与 Itô 签名 $\mathbb{X}(\omega)$ 相同，见引理 4.8 和引理 4.7 的 (ii) 部分。由此，结论立即可由关于γ-签名的线性泛函的逐路径通用逼近定理推出，该定理即推论 3.10。

或者，也可以利用推论 4.5 证明这一结论。 □

注 4.10. 考虑 X 的 *Stratonovich* 签名，而不是 X 的 *Itˆo* 签名时，也有类似的结果（即使几乎所有样本路径仅满足性质 $1/2$-(RIE)）。利用前几节的结果即可证明这一点。不过，这弱于推论 *4.3* 中陈述的经典通用逼近定理，因为为了能够对 *Itˆo* 签名作出论述，我们对半鞅的样本路径施加了一个假设。

备注4.11. 与备注*4.6*类似，例如，对于相关的 d维布朗运动 X，二次（协）变差实际上是时间的线性函数。因此，只需考虑时间扩展路径 $(\cdot, X)$，并且类似于推论*4.9*表述的通用逼近结果同样成立。

结合备注4.6（以及备注4.11），在使用布朗签名逼近连续泛函时，我们预期时间扩展布朗运动的 Itˆo 签名和 Stratonovich 签名效果相当，因为二者都满足通用逼近性质。

5. Numerical examples

如上一节所示，时间扩展路径的 Stratonovich 签名（的线性泛函）满足通用逼近性质；而对于 Itˆo 签名，我们需要考虑由时间及其二次（协）变差扩展后的路径。这自然引出了一个问题：在实践中，何时进一步将路径的二次（协）变差纳入扩展会更有益？因此，我们通过数值分析结束对 Itˆo 签名的研究，简要说明在数理金融背景下使用 Itˆo 签名的实际意义。[3]

我们考虑针对时间序列数据进行校准，以及对自然依赖于二次变差的期权进行收益近似和定价任务。具体而言，我们涵盖已实现波动率期权，以及协方差互换、相关性互换和看涨期权。在这些数值实验中，我们发现：假设标的价格动态由布朗运动驱动，且其二次变差等于时间（此处为 Heston 模型）时，正如预期，Itô 签名和 Stratonovich 签名在这种情形下都能实现极小的近似误差，二者在数值上仅有细微差异。

假设标的价格动态经过时间变换，或者考虑显式依赖于已实现方差、协方差或相关性的收益时，由于扩展中加入了二次变差，Itô 特征映射的表现明显更好：我们观察到其测试误差大幅降低，价格也更加准确。

在每项数值实验中，我们都按照统一的方案比较 Stratonovich 特征映射与 Itô 特征映射（采用相同的截断层级、正则化方法和训练/测试集划分）。对于 Itô 特征，我们用时间和二次变差扩展驱动路径；而在布朗运动情形下，则像传统处理 Stratonovich 特征那样，仅用时间扩展。这些数值实验旨在表明，当二次变差确实包含路径的额外信息时，Itô 签名能够带来更好的样本外表现。

数理金融中的一个经典问题是金融衍生品的对冲，例如均值方差最优对冲问题，但我们在此不讨论。由于交易策略的收益是用 Itˆo 积分定义的，而 Itˆo 积分可以

[3]本节中用于校准与定价。生成结果的代码可在 https://github.com/mihribanceylan/ 获取

Ito-签名-

自然地写成 Itˆo 签名的线性泛函，因此或许值得在某个时候探究 Itˆo 签名在对冲问题中的表现，或者更准确地说，探究该问题的一个线性化版本的表现；这一版本已在 [LNPA20] 中的签名背景下得到研究。

5.1. 签名模型校准。我们首先考虑将签名模型校准到模拟的时间序列数据，并采用与 [CGSF23]中类似的方法。我们固定一个时间范围 $T > 0$，并令 $X = (X^1, \ldots\ldots, X^d)$为一个 d 维连续局部鞅。随后，我们考虑取值于 $\mathbb{R}^{\hat{d}}$中的扩展过程 $\widehat{X}$，其中ˆd 表示扩展路径的维数。我们固定截断层级 $N \geq 1$，并将 X 在时间 t 处、层级 N的截断ˆ签名记为 $\widehat{\mathbb{X}}_t^N$。我们希望校准的模型是一个签名模型，参见例如 [CGSF23], ，其形式为

$$S(\ell)_t = S_0 + \sum_{0<|I|\leq N} \ell_I \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_t \rangle, \quad \ell_I \in \mathbb{R},$$

其中我们设定 $\ell_\emptyset := S_0$。我们固定一个时间网格 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$，并在该网格上观测价格路径 $(S_{t_i})_{i=1}^n$，其中 $n \geq 1$ 表示0与 T之间的时间步数。校准问题 consiste 于找到 $\ell^* \in \mathbb{R}^{d^*}$，使得损失函数

$$\begin{aligned} L_\alpha(\ell) &:= \sum_{i=1}^n (S(\ell)_{t_i} - S_{t_i})^2 + \alpha \|\ell\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(S_0 + \sum_{0<|I|\leq N} \ell_I \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_{t_i} \rangle - S_{t_i} \right)^2 + \alpha \|\ell\|_1, \end{aligned}$$

使其最小化，其中 $d^* := \frac{d^{N+1}-1}{d}$ 是截断至第 N 级的签名维数，$\alpha\|\ell\|_1$ 表示固定的 L^1 惩罚项，因此我们进行 Lasso 回归。

我们使用时间区间 $[0, T]$ 上的一条轨迹进行训练，其中 $T = 1$、$n = 2000$，并在 $[0, 0.5]$ 上的 1000 条不同实现上进行测试。为评估准确性，我们报告预测轨迹与观测轨迹之间的均方误差（MSE），即

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S(\ell^*)_{t_i} - S_{t_i})^2,$$

分别在训练轨迹（样本内均方误差）和测试轨迹（样本外均方误差）上计算，其中后者是 1000 条测试路径上的均方误差的平均值。计算签名时，我们使用现有的软件包，例如 [RG20]，开发的 iisignature 软件包，或 esig[4]。在全文中，两种特征映射均使用相同的惩罚项 $\alpha = 10^{-5}$，以及相同的训练路径和测试路径。

示例 5.1（Heston 模型）。 我们在物理测度下，使用 *Heston* 随机波动率模型生成时间序列（通过欧拉格式） $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \mu S_t \, \mathrm{d}t + S_t \sqrt{V_t} \, \mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}V_t &= \kappa(\theta - V_t) \, \mathrm{d}t + \sigma \sqrt{V_t} \, \mathrm{d}B_t, \end{aligned}$$

[4]https://pypi.org/project/esig/

其中 $[B,W]_t = \rho t$、 $\rho \in [-1,1]$，参见 [Hes93]。我们将模型参数设为 b e

$$\{S_0, V_0, \mu, \kappa, \theta, \sigma, \rho\} := \{1, 0.08, 0.001, 0.5, 0.15, 0.25, -0.5\}.$$

我们在等价的局部鞅测度 $\mathbb{Q}$ 下进行研究，并将过程 $W^{\mathbb{Q}}$ 和 $B^{\mathbb{Q}}$ 定义为

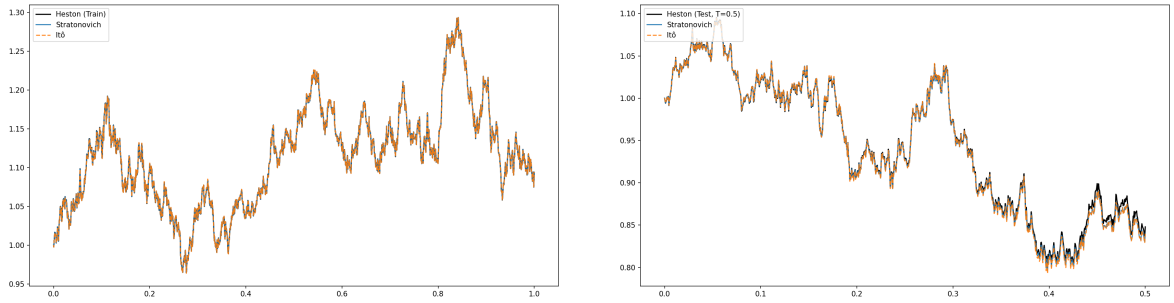
$$\mathrm{d}W_t^{\mathbb{Q}} = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t\sqrt{V_t}}, \qquad \mathrm{d}B_t^{\mathbb{Q}} = \frac{\mathrm{d}V_t}{\sigma\sqrt{V_t}}.$$

于是， $W^{\mathbb{Q}}$ 和 $B^{\mathbb{Q}}$ 相对于 $\mathbb{Q}$ 是相关性为 ρ 的布朗运动，而 (S,V) 的动态可写为 $\mathrm{d}S_t = S_t\sqrt{V_t}\,\mathrm{d}W_t^{\mathbb{Q}}$ 和 $\mathrm{d}V_t = \sigma\sqrt{V_t}\,\mathrm{d}B_t^{\mathbb{Q}}$。现在，我们旨在用签名模型近似这些动态，其中 $(W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}})$ 是底层过程。为此，我们考虑两种签名模型：一种基于 *Stratonovich* 签名，另一种基于时间扩展路径 $\widehat{X} = (\cdot, W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}})$ 的 *Itˆo* 签名。具体而言，我们对以下签名模型进行校准：

$$S^{Strat}(\ell)_t = S_0 + \sum_{|I|\le N} \ell_I\langle \tilde{e}_I, \widehat{\mathbb{X}}_t^{Strat}\rangle = S_0 + \int_0^t \sum_{|I|\le N} \ell_I\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_r^{Strat}\rangle\,\mathrm{d}W_r^{\mathbb{Q}},$$

$$S^{Itô}(\ell)_t = S_0 + \sum_{|I|\le N} \ell_I\langle e_I\otimes e_1, \widehat{\mathbb{X}}_t^{Itô}\rangle = S_0 + \int_0^t \sum_{|I|\le N} \ell_I\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}_r^{Itô}\rangle\,\mathrm{d}W_r^{\mathbb{Q}},$$

其中， $\tilde{e}_I = e_I\otimes e_1 - \frac{1}{2}\rho_{i_{|I|}1}e_{I'}\otimes e_0$， $\rho_{i_{|I|}1}$ 是 $\widehat{X}^{i_{|I|}}$ 与布朗运动 $W^{\mathbb{Q}}$ 之间的相关性。这里，我们取 $N=2$ 和 $S_0=1$，并得到以下结果：



(a) 样本内。 (b) 样本外。

FIGURE 1. 对上述定义的 Heston 模型价格进行回归。

图 *1* 表明，使用 *Stratonovich* 签名和 *Itˆo* 签名的签名模型能够非常精确地逼近 *Heston* 模型。我们观察到，*Stratonovich* 签名和 *Itˆo* 签名的样本内均方误差分别为10^{-8} 和 10^{-7} 量级，样本外均方误差分别为 10^{-5} 和 10^{-5} 量级。

如备注*4.6*所述，当模型由布朗运动驱动时，也就是说，当考虑布朗签名时，只需用时间扩展路径即可；*Itˆo* 特征和 *Stratonovich* 特征都能达到相近的小误差（在我们的实验中，*Stratonovich* 签名模型的表现略好一些）。

例 5.2 （奇异时间变换的随机微分方程）。作为一个玩具示例，为了模拟带有奇异时间变换的波动率动态——例如超粗糙*Heston*型模型中的情形，

其二次变差不绝对连续，参见例如 [JDC24]——我们考虑一个由经康托时钟进行时间变换的布朗运动驱动的一维随机微分方程，参见 [ASJ18, 例1和第 6] 节，以及 [Kob11]中关于由时间变换半鞅驱动的随机微分方程的一般框架：

$$\mathrm{d}S_t = \sigma(S_t)\,\mathrm{d}W_{C(t)},$$

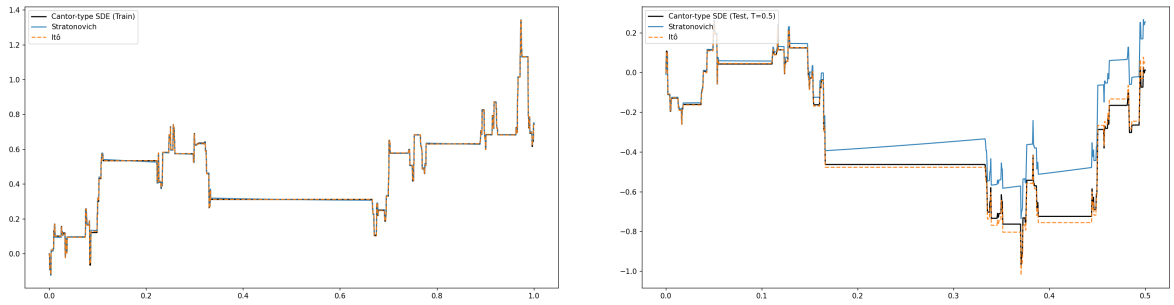
其中 $C\colon [0,1] \to [0,1]$ 是康托函数。在我们的实验中，我们选取 $\sigma(x) = 1 + 0.3$双曲正切(x)。在时间网格上，我们模拟 $C(t)$，生成具有增量 $\Delta W_C \sim \mathcal{N}(0, \Delta C)$ 的 $W_{C(t)}$，并使用欧拉格式模拟 S。对于 *Stratonovich* 签名，我们取时间扩展路径 $\widehat{X}_t = (t, W_{C(t)}) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$；对于 *Itô* 签名，我们还额外纳入二次变差（*QV*），并取 $\widehat{X}_t = (t, W_{C(t)}, C(t)) \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0,1]$。我们考虑如下签名模型：

$$S^{Strat}(\ell)_t = S_0 + \sum_{|I|\le N} \ell_I \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^{Strat}_t \rangle,$$

$$S^{Itô}(\ell)_t = S_0 + \sum_{|I|\le N-1} \ell_I \langle e_I \otimes e_1, \widehat{\mathbb{X}}^{Itô}_t \rangle = S_0 + \int_0^t \sum_{|I|\le N-1} \ell_I \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^{Itô}_r \rangle \,\mathrm{d}W_{C(r)},$$

其中 e_1 对应于 $\widehat{X}$ 的分量 W_C，$\widehat{\mathbb{X}}^{Strat}$ 表示 $\widehat{X} = (\cdot, W_C)$ 的 *Stratonovich* 签名，$\widehat{\mathbb{X}}^{Itô}$ 表示 $\widehat{X} = (\cdot, W_C, C)$ 的 *Itô* 签名。我们观察到，使用 *Stratonovich* 签名的签名模型无法表示为 *Itô* 随机微分方程，例 *5.1* 中的情形亦然。这是因为康托时间变换关于时间并非绝对连续。然而，若使用 *Itô* 签名，相应的签名模型可以写成由时间变换布朗运动驱动的 *Itô* 随机微分方程，这表明在考虑此类奇异时间变换时，*Itô* 签名是更为自然的选择。

在本次数值实验中，我们选择 $N = 2$ 和 $S_0 = 0$，并得到以下结果：



(a) 样本内。 (b) 样本外。

FIGURE 2. 对上述定义的奇异时间变换随机微分方程的价格进行回归。

图*2*展示了样本外表现：使用 *Itˆo* 签名的签名模型比使用 *Stratonovich* 签名的模型更接近地逼近目标。两者都能够跟随阶梯状模式，但可以观察到，*Itˆo* 模型生成的路径与目标路径更加贴合。

使用 *Itˆo* 签名和 *Stratonovich* 签名时，样本内均方误差分别为 10^{-6} 和 10^{-5}，样本外均方误差分别为 10^{-4}和 10^{-2}。这些发现与以下观点一致：像我们对 *Itˆo* 签名所做的那样，通过二次变差 $[W_C]_t = C(t)$ 扩展路径，在这里确实有益，因为它包含了关于路径变差的额外信息，而这些信息在 *Stratonovich* 签名中缺失。这也表明（这正是我们考虑该模型的原因），未来值得进一步探讨：对于具有跳跃的价格动态，基于 *Itˆo* 签名的签名模型可能也会比基于 *Stratonovich* 签名的模型表现更好，同样是因为二次变差包含了关于路径变差（包括跳跃）的额外信息。

5.2. **收益近似与定价**。在本小节中，我们研究基于签名的近似方法，并为显式依赖于二次（协）变差的收益定价，例如已实现波动率期权、相关性或协方差互换以及看涨期权。

在这种情形下，由于二次变差自然地出现在这里，我们预计 Itˆo 签名会有特别好的表现。

这促使我们比较两种设定：对于单资产收益，我们考虑时间扩展路径的 Stratonovich 签名 $(t, \log S_t^i)$，以及将路径按时间和二次变差扩展后的 Itˆo 签名 $(t, \log S_t^i, [\log S^i]_t)$，$i = 1, 2$。对于相关性和协方差收益，我们相应地考虑 $(t, \log S_t^1, \log S_t^2)$ 的 Stratonovich 签名，以及将路径按时间和二次（协）变差扩展后的 Itˆo 签名 $(t, \log S_t^1, \log S_t^2, [\log S^1]_t, [\log S^1, \log S^2]_t, [\log S^2]_t)$。

支付函数通过等距网格 $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$上的对数价格增量定义，其中设定 $T = 1$ 和 $n = 252$，并假设一年约有 252 个交易日。记 $X_t^i = \log S_t^i$，并设定 $\Delta X_k^i = X_{t_{k+1}}^i - X_{t_k}^i$, $k = 0, \ldots, n-1$。资产 i的已实现方差和已实现波动率定义如下

$$\mathrm{RVar}_T^i := \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta X_k^i)^2, \qquad \mathrm{RV}_T^i := \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta X_k^i)^2}, \qquad i = 1, 2,$$

并考虑以下支付函数

$$\mathrm{RVswap}^i = \mathrm{RVar}_T^i - \mathrm{K}_{\mathrm{RVar}}^i, \qquad \mathrm{RVcall}^i = (\mathrm{RV}_T^i - \mathrm{K}_{\mathrm{RV}}^i)^+, \qquad i = 1, 2,$$

其中行权价 $\mathrm{K}_{\mathrm{RVar}}^i$ 和 $\mathrm{K}_{\mathrm{RV}}^i$ 由训练样本确定。对于双资产支付函数，我们使用

$$\mathrm{Cov}_T = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta X_k^1 \Delta X_k^2, \qquad \mathrm{Corr}_T = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \Delta X_k^1 \Delta X_k^2}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta X_k^1)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\Delta X_k^2)^2}},$$

并考虑以下支付函数

$$\mathrm{CovSwap} = \mathrm{Cov}_T - \mathrm{K}_{\mathrm{Cov}}, \quad \mathrm{CovCall} = (\mathrm{Cov}_T - \mathrm{K}_{\mathrm{Cov}})^+,$$
$$\mathrm{CorrSwap} = \mathrm{Corr}_T - \mathrm{K}_{\mathrm{Corr}}, \quad \mathrm{CorrCall} = (\mathrm{Corr}_T - \mathrm{K}_{\mathrm{Corr}})^+,$$

其中行权价 $\mathrm{K}_{\mathrm{Cov}}$ 和 $\mathrm{K}_{\mathrm{Corr}}$ 同样由训练样本确定。

Let $\mathbb{X}$ 表示用于签名特征的驱动路径（Stratonovich 情形下扩展时间；Itˆo 情形下扩展时间和二次（协）变差），并令 $\widehat{\mathbb{X}}^N$ 为其截断至 $N = 2$级的签名。对于由 $\{\widehat{X}^i\}_{i=1}^{N_{\mathrm{train}}}$个独立同分布路径组成、规模为 $N_{\mathrm{train}} = 15000$ 的训练集

其对应的收益为 $F(X^i)$，我们通过岭回归对签名特征拟合线性模型（针对每个特征映射分别进行）：

$$\ell^* \in \arg\min_{\ell\in\mathbb{R}^{d^*}} L_\alpha(\ell), \qquad L_\alpha(\ell) := \frac{1}{N_{\text{train}}}\sum_{i=1}^{N_{\text{train}}}\Big(F(X^{(i)}) - \langle \ell, \widehat{\mathbb{X}}^{N,i}\rangle\Big)^2 + \alpha\|\ell\|_2^2,$$

其中 $\alpha = 10^{-6}$ 和 $\widehat{\mathbb{X}}^{N,\,i}$ 分别表示第 i条路径的截断签名。随后，我们在大小为 $N_{\text{test}} = 5000$ 的独立测试集上评估模型，该测试集由独立同分布路径 $\{\widehat{X}^i\}_{i=1}^{N_{\text{test}}}$构成，并报告相应的样本外均方误差。然后，我们通过大小为 $N_{\text{MC}} = 25000$ 的蒙特卡洛模拟 $\{\widehat{X}^{j}{}_{\text{MC}}\}_{j=1}^{N_{\text{MC}}}$生成独立样本，并据此进行定价：

$$\widehat{P} = \frac{1}{N_{\text{MC}}}\sum_{j=1}^{N_{\text{MC}}}\langle \ell^*, \widehat{\mathbb{X}}^{N,j}_{\text{MC}}\rangle,$$

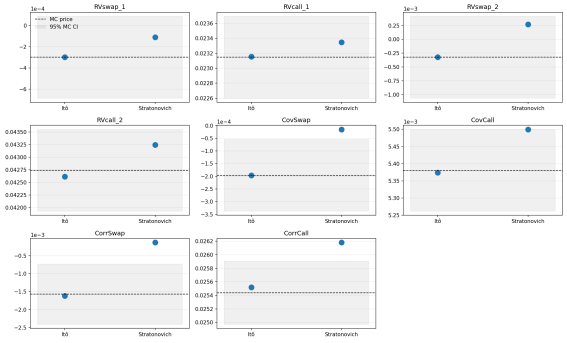
并将 $\widehat{P}$ 与蒙特卡洛价格 $\frac{1}{N_{\text{MC}}}\sum_{j=1}^{N_{\text{MC}}} F(X^{j}{}_{\text{MC}})$进行比较，后者作为基准，同时给出其 95%置信区间。

例5.3。我们考虑由以下公式给出的双资产 *Heston* 模型：

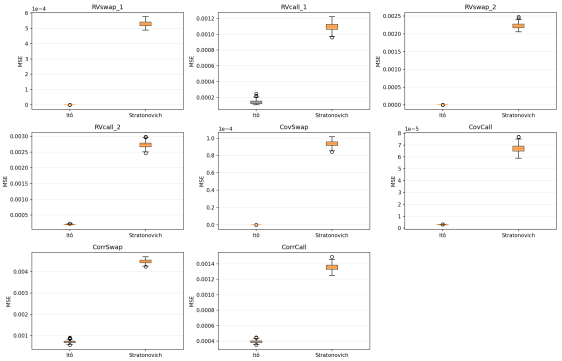
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S_t^i &= \mu^i S_t^i\,\mathrm{d}t + S_t^i\sqrt{V_t^i}\,\mathrm{d}B_t^i,\\
\mathrm{d}V_t^i &= \kappa^i(\theta^i - V_t^i)\,\mathrm{d}t + \sigma^i\sqrt{V_t^i}\,\mathrm{d}W_t^i, \quad i = 1,2,
\end{aligned}$$

其中 $[B^1,B^2]_t = 0.3t$、$[W^1,W^2]_t = 0.5t$、$[B^1,W^1]_t = -0.6t$ 和 $[B^2,W^2]_t = -0.5t$。此外，我们设

$$\begin{aligned}
&\{S_0^1, S_0^2, V_0^1, V_0^2, \mu^1, \mu^2, \kappa^1, \kappa^2, \theta^1, \theta^2, \sigma^1, \sigma^2\}\\
&= \{100, 80, 0.04, 0.09, 0.0, 0.0, 2.0, 1.8, 0.04, 0.09, 0.5, 0.6\}.
\end{aligned}$$



(a) 基于签名回归的支付函数所得价格与蒙特卡洛价格。



(b) 样本外均方误差的箱线图。

FIGURE 3. 如上所定义的双资产 Heston 模型下，基于签名的支付函数回归与定价。

图*3b*显示，对于任何支付函数，使用 *Itˆo* 签名所得的样本外均方误差均小于使用 *Stratonovich* 签名所得的结果。箱线图还表明，偏差更小，且

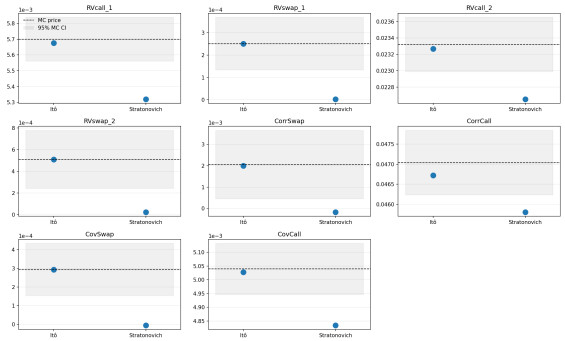
样本外方差也更小。通过 *Itˆo* 签名估计的价格（见图*3a*）基本上与蒙特卡洛价格一致，并位于95% 置信区间内。通过 *Stratonovich* 签名估计的价格则存在系统性偏差——对于双资产支付函数（*CovSwap/CovCall* 和 *CorrSwap/CorrCall*）尤其如此，其中一些价格还落在置信区间之外。这凸显了像我们对 *Itˆo* 特征所做的那样，通过二次变差扩展路径的优势，因为这样可以在回归中直接获取$[\log S^1]$, $[\log S^2]$, $[\log S^1, \log S^2]$，而这些恰好是我们所考虑的支付函数所依赖的统计量。使用时间扩展路径的 *Stratonovich* 签名时，情况并非如此，因此必须从最高阶数为2的迭代积分中推断这些信息。

例 5.4. 我们考虑一个双资产奇异时间变换随机微分方程（时间变换由康托时钟给出），

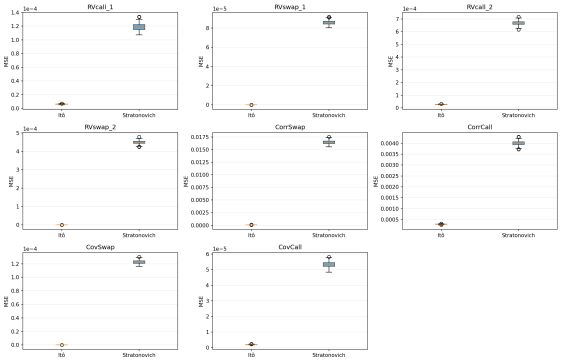
$$\mathrm{d}S_t^i = \sigma(S_t^i)\,\mathrm{d}W_{C(t)}^i, \quad i = 1, 2,$$

其中 $[W_C^1, W_C^2]_t = \rho\, C(t)$, $\rho = 0.6$, $\sigma(S_t^i) = \nu_i S_t^i$, $\nu_i \in \mathbb{R}$。在我们的实验中，我们设定

$$S_0^1 = 100, \qquad S_0^2 = 80, \qquad \nu_1 = 0.20, \qquad \nu_2 = 0.30.$$



(a) 由签名回归收益得到的价格，以及蒙特卡洛价格。



(b) 样本外均方误差的箱线图。

FIGURE 4. 上述双资产奇异时间变换随机微分方程下，基于签名的收益回归与定价。

在该模型中，使用 *Itô* 签名和 *Stratonovich*签名之间的差异更加明显。使用 *Itô* 签名时，样本外均方误差最小，且无论考虑哪种收益，价格都落在95% 蒙特卡洛置信区间内。而使用 *Stratonovich* 签名时，样本外均方误差显著增大（见图 *4b* ），且无论考虑哪种收益，价格都不在置信区间内（见图 *4a*）。

APPENDIXA. PROOF OF THEOREM 2.11

在本附录中，为了保证完备性，我们给出使用时间扩展的弱几何粗糙路径证明通用逼近定理（定理 2.11）。

定理 *2.11* 的证明。该结果可通过将 Stone–Weierstrass 定理应用于集合

$$\mathcal{A} := \operatorname{span}\{K \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle \in \mathbb{R} : I \in \{0,\dots,d\}^N, N \in \mathbb{N}_0\}.$$

因此，我们必须证明 $\mathcal{A}$

(i) 是 $C(K;\mathbb{R})$ 的一个向量子空间，(ii) 是一个子代数且包含一个非零常值函数，以及 (iii) 能够分离点。

(i)：根据 [FV10，推论 9.11],，映射 $\widehat{\mathbb{X}}^{o,\ 2} \mapsto \langle e_I,\ \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle$ 对每个多重指标 I 关于 $d_{p\text{-var}}$：$= \|\cdot;\ \cdot\|_p$ 在有界集合上连续。更确切地说，映射

$$(K, d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,N} \in (C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^N(\mathbb{R}^{1+d})), d_{p\text{-var}}),$$

是连续的　关于 $d_{p\text{-var}}$ 的 K，对每个 $N \geq 3$ 都成立。此外，求值映射

$$(C_o^{p\text{-var}}([0,T]; G^N(\mathbb{R}^{1+d})), d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,N} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,N}_T \in (G^N(\mathbb{R}^{1+d}), \rho)$$

是连续的，其中 ρ 表示由 $T_1^N(\mathbb{R}^{1+d})$ 上的范数所诱导的度量。这里，我们利用了可以在 $G^N(\mathbb{R}^{1+d})$ 上赋予度量 ρ 这一事实，参见例如 [FV10，注 7.31]。由此可知映射

$$(K, d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \widehat{\mathbb{X}}^{o,N}_T \in (G^N(\mathbb{R}^{1+d}), \rho)$$

是连续的。由于对任意多重指标 I，$\widehat{\mathbb{X}}^{o,\ {}^N_T} \mapsto \langle e_I,\ \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle$ 都是连续的，因此我们可以得出映射

$$(K, d_{p\text{-var}}) \ni \widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \mapsto \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle \in \mathbb{R}$$

关于 $d_{p\text{-var}}$ 是连续的。

(ii)：由于 $\widehat{\mathbb{X}}^o_T$ 是一个类群元素，即 $\widehat{\mathbb{X}}^o_T \in G((\mathbb{R}^{1+d}))$，洗牌性质成立，$\widehat{\ }$因此 $\mathcal{A}$ 是一个子代数。此外，由于 $\langle e_\emptyset,\ \mathbb{X}^o_T\rangle = 1$，它包含一个非零常值函数。

(iii)：对于点分离，我们考虑　　$\widehat{\mathbb{X}}^{o,2},\ \widehat{\mathbb{Y}}^{o,2} \in K$ 满足 $\widehat{\mathbb{X}}^{o,2} \neq \widehat{\ }$ $\mathbb{Y}^{o,2}$。我们证明存在一个 $k \in \mathbb{N}$, $I \in \{0,\dots,d\}^N$, $N \in \{0,1,2\}$，使得

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle \neq \langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}^o_T\rangle.$$

我们采用反证法。假设对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $I \in \{0,\dots,d\}^N$,$N \in \{0,1,2\}$，都有

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle = \langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}^o_T\rangle.$$

我们首先注意到

$$\langle e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle = \frac{t^k}{k!}.$$

此外，利用洗牌性质，根据例如 [CPSF25, Proposition C.5], 可得

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{X}}^o_T\rangle = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \langle e_0^{\otimes k}, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t.$$

类似地，我们有

$$\langle (e_I \sqcup\!\sqcup e_0^{\otimes k}) \otimes e_0, \widehat{\mathbb{Y}}^o_T\rangle = \int_0^T \langle e_I, \widehat{\mathbb{Y}}^o_t\rangle \frac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t.$$

$\widehat{\ }$　　$\widehat{\ }$根据 [Bre11，推论4.24] 并且因为$\langle e_I, \mathbb{X}^o_0\rangle = \langle e_I, \mathbb{Y}^o_0\rangle = 0$，由此可得

$$\langle e_I, \widehat{\mathbb{X}}^o_t\rangle = \langle e_I, \widehat{\mathbb{Y}}^o_t\rangle,$$

对所有 $t \in [0,T]$ 以及所有 $I \in \{0,\dots,d\}^N$， $N \in \{0,1,2\}$。然而，这与 $\widehat{\mathbb{X}}^{o,2}$， $\widehat{\mathbb{Y}}^{o,2}$ 互不相同这一假设相矛盾。因此，我们可以得出结论： $\mathcal{A}$是点分离的。□

Appendix B. Proof of Lemma 3.4

在本附录中，我们给出辅助引理 3.4 的证明。

引理 *3.4* 的证明。 对于 $\gamma \neq \frac{1}{2}$¬，结论由引理 3.3 和 [AKLP25a，命题 2.12] 得出。

假设 $\gamma = \frac{1}{2}$。我们需要验证该积分

$$\int_0^t \widehat{X}_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \widehat{X}_r = \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} X_r + \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r + \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} X_r + \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r,$$

当 $n \to \infty$ 时收敛至极限

$$\int_0^t \widehat{X}_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} X_r = \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} X_r + \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} \varphi_r + \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} X_r + \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} \varphi_r,$$

关于 $t \in [0,T]$ 一致，其中后三个积分均为杨积分。

由于 X 满足性质 1/2-(RIE)，因此我们有

$$\left\| \int_0^{\cdot} X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} X_r - \int_0^{\cdot} X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} X_r \right\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{as} \qquad n \to \infty.$$

¯定义 X^n 和 $\bar{\varphi}^n$ 分别为沿着 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$对 X 和 φ进行的分段线性插值。于是，对于任意 $t \in [0,T]$，都有

$$\int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r = \sum_{k=0}^{N_n-1} (X_{t_k^n} + \frac{1}{2} X_{t_k^n, t_{k+1}^n}) \otimes \varphi_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t} = \int_0^t \bar{X}_r^n \otimes \mathrm{d}\varphi_r.$$

取 $p' > p$ 使得 $1/p' + 1/q > 1$。根据 Young 积分的标准估计——参见例如 [FZ18，命题 2.4]——对于所有 $t \in [0,T]$，我们有

$$\left| \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r - \int_0^t X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} \varphi_r \right| \lesssim \|\bar{X}^n - X\|_{p'} \|\varphi\|_q.$$

由插值可得——参见例如 [FV10，命题 5.5]——

$$\|\bar{X}^n - X\|_{p'} \leq \|\bar{X}^n - X\|_\infty^{1-\frac{p}{p'}} \|\bar{X}^n - X\|_p^{\frac{p}{p'}}.$$

¯由于 X 在 $n \to \infty$时一致收敛，且 $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X^n\|_p < \infty$，我们推得

$$\left\| \int_0^{\cdot} X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r - \int_0^{\cdot} X_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} \varphi_r \right\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \text{as} \quad n \longrightarrow \infty.$$

类似地，对于每个 $t \in [0,T]$，都有

$$\left| \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} X_r - \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} X_r \right| \lesssim \|\bar{\varphi}^n - \varphi\|_q \|X\|_p,$$

and

$$\left| \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi^n} \varphi_r - \int_0^t \varphi_r \otimes \mathrm{d}^{\frac{1}{2},\pi} \varphi_r \right| \lesssim \|\bar{\varphi}^n - \varphi\|_q \|\varphi\|_q,$$

并且，由于 $\|\bar{\varphi}^n - \varphi\|_q \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时，我们可以推得所需的收敛性。

我们还旨在找到一个控制函数 c，使得

$$\sup_{(s,t)\in\Delta_T}\frac{|\widehat{X}_{s,t}|^p}{c(s,t)}+\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{0\le k<\ell\le N_n}\frac{|\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\widehat{X}_u\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}\widehat{X}_u-\widehat{X}_{t_k^n}\otimes\widehat{X}_{t_k^n,t_{k+1}^n}|^{\frac p2}}{c(t_k^n,t_\ell^n)}\lesssim 1, \tag{B.1}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\widehat{X}_u\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}\widehat{X}_u-\widehat{X}_{t_k^n}\otimes\widehat{X}_{t_k^n,t_{k+1}^n}&=\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\widehat{X}_{t_k^n,u}\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}\widehat{X}_u\\&=\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}X_{t_k^n,u}\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}X_u+\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}X_{t_k^n,u}\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}\varphi_u\\&\quad+\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\varphi_{t_k^n,u}\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}X_u+\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\varphi_{t_k^n,u}\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}\varphi_u.\end{aligned}$$

令 c_X 为相对于其而言 X 满足性质 γ-(RIE) 的控制函数，并进一步定义控制函数 c_φ，其定义为 $c_\varphi(s,t)=\|\varphi\|_{q,[s,t]}^q$ 对于 $(s,t)\in\Delta_T$。

由性质 $1/2$-(RIE) 可知，

$$\sup_{(s,t)\in\Delta_T}\frac{|\widehat{X}_{s,t}|^p}{c_X(s,t)+c_\varphi(s,t)}\lesssim\sup_{(s,t)\in\Delta_T}\frac{|X_{s,t}|^p}{c_X(s,t)}+\sup_{(s,t)\in\Delta_T}\frac{|\varphi_{s,t}|^p}{c_\varphi(s,t)}\lesssim 1,$$

并且

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{0\le k<\ell\le N_n}\frac{|\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}X_u\otimes \mathrm{d}^{\frac12,\pi^n}X_u-X_{t_k^n}\otimes X_{t_k^n,t_{k+1}^n}|^{\frac p2}}{c_X(t_k^n,t_\ell^n)}\lesssim 1.$$

根据 Young 积分的标准估计（参见例如 [FZ18，命题 2.4]），对每个$n\in\mathbb{N}$ 和 $0\le k<\ell\le N_n$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\bar{X}_{t_k^n,u}^n\otimes \mathrm{d}\varphi_u\right|^{\frac p2}&\lesssim\|\bar{X}^n\|_{p,[t_k^n,t_\ell^n]}^{\frac p2}\|\varphi\|_{q,[t_k^n,t_\ell^n]}^{\frac p2}\\&\le\|X\|_{p,[t_k^n,t_\ell^n]}^{\frac p2}\|\varphi\|_{q,[t_k^n,t_\ell^n]}^{\frac p2}\le c_X(t_k^n,t_\ell^n)^{\frac12}c_\varphi(t_k^n,t_\ell^n)^{\frac{p}{2q}},\end{aligned}$$

并且我们可以类似地得到

$$\left|\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\bar{\varphi}_{t_k^n,u}^n\otimes \mathrm{d}X_u\right|^{\frac p2}\lesssim c_X(t_k^n,t_\ell^n)^{\frac12}c_\varphi(t_k^n,t_\ell^n)^{\frac{p}{2q}}$$

and

$$\left|\int_{t_k^n}^{t_\ell^n}\bar{\varphi}_{t_k^n,u}^n\otimes \mathrm{d}\varphi_u\right|^{\frac p2}\lesssim c_\varphi(t_k^n,t_\ell^n)^{\frac pq}.$$

由于 $p\in(2,3)$ 和 $q\in[1,2)$，我们有 $1/2+p/2q>1$ 和 $p/q>1$，从而映射 $(s,t)\mapsto c_X(s,t)^{\frac12}c_\varphi(s,t)^{\frac{p}{2q}}$ 和 $(s,t)\mapsto c_\varphi(s,t)^{\frac pq}$ 是超可加的，因而都是控制函数。我们由此推出，(B.1) 对形如下式的控制函数 c 成立

$$c(s,t)=C\Big(c_X(s,t)+c_\varphi(s,t)+c_X(s,t)^{\frac12}c_\varphi(s,t)^{\frac{p}{2q}}+c_\varphi(s,t)^{\frac pq}\Big),\qquad(s,t)\in\Delta_T,$$

其中，$C>0$ 是一个合适的常数，仅依赖于 p 和 q。 □

Appendix C. On Lyons' extension theorem

我们证明，对于 $p \in$ ，粗糙路径（不一定是弱几何的）的 Lyons 扩张（2，3）（例如参见 [LCL07，定理 3.7], ）与通过相对于受控路径进行粗糙积分所定义的迭代积分集合一致。

命题 C.1。 设 $p \in (2,3)$。设 $\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}^{(2)})$ 是一个粗糙路径，满足 at

$$|X_{s,t}| \lesssim c(s,t)^{\frac{1}{p}}, \qquad |\mathbb{X}^{(2)}_{s,t}| \lesssim c(s,t)^{\frac{2}{p}}, \qquad (s,t) \in \Delta_T,$$

对某个控制函数 c成立。对于$(s,t) \in \Delta_T$, $N > 2$，考虑 N 阶迭代积分，即 $\mathbb{X}^{(N)}_{s\,t} := \int_s^t (\mathbb{X}^{(N-1)}_{s\,\cdot},)_r \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}$，将其视为粗糙积分 $r \mapsto (\mathbb{X}^{(N-1)}_{s\,\cdot},)_r = \mathbb{X}^{(N-1)}_{s\,r}$，它是关于 X 在 $[s,t]$ 上、相对于 $\mathbf{X}$ 的受控路径。（关于粗糙积分的定义，我们特别参见注 *D.2*。）那么，

$$(s,t) \mapsto (1, X_{s,t}, \mathbb{X}^{(2)}_{s,t}, \dots, \mathbb{X}^{(N)}_{s,t}) \in T^N(\mathbb{R}^d)$$

满足 $|\mathbb{X}^{(N)}_{s\,,t}| \lesssim c(s,t)^{\frac{N}{p}}$、$(s,t) \in \Delta_T$，并且与 $(1, X_{s,t}, \mathbb{X}^{(2)}_{s\,t\,,})$的 *Lyons* 扩张一致，该扩张例如见 [LCL07, 定理 3。7], ，对任意 $N > 2$ 均成立。

证明。 令 $N = 3$。注意到

$$\mathbb{X}^{(N-1)}_{s,v} - \mathbb{X}^{(N-1)}_{s,u} = \mathbb{X}^{(2)}_{s,v} - \mathbb{X}^{(2)}_{s,u} = \mathbb{X}^{(2)}_{u,v} + X_{s,u} \otimes X_{u,v}, \qquad s \le u \le v \le t.$$

也就是说， $r \mapsto \mathbb{X}^{(2)}_{s\,,\,r}$ 是关于 X、定义在 $[s,t]$ 上的受控路径，其中 $(\mathbb{X}^{(2)}_{s\,,\,\cdot})'_u = X_{s,\,u}$ 且 $R^{\mathbb{X}^{(2)}_{s\,\cdot}}_{u\,,\,v} = \mathbb{X}^{(2)}_{u\,,\,v}$。

为证明受控路径相对于粗糙路径的粗糙积分存在，我们令 $A_{u,\,v} := \mathbb{X}^{(2)}_{s\,,\,u} \otimes X_{u,\,v} + (\mathbb{X}^{(2)}_{s\,\cdot,\,})'_u \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{u\,,\,v}$ 以及 $\delta A_{u,\,v,\,w} := A_{u,\,w} - A_{u,\,v} - A_{v,\,w}$，其中$s \le u \le v \le w \le t$。于是有

$$\begin{aligned}
&|\delta A_{u,v,w}| \\
&\quad = |-R^{\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot}}_{u,v} \otimes X_{v,w} - ((\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})'_v - (\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})'_u) \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{v,w}| \\
&\quad = |-\mathbb{X}^{(2)}_{u,v} \otimes X_{v,w} - X_{u,v} \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{v,w}| \\
&\quad \lesssim c(u,v)^{\frac{2}{p}} c(v,w)^{\frac{1}{p}} + c(u,v)^{\frac{1}{p}} c(v,w)^{\frac{2}{p}} \lesssim c(u,w)^{\frac{3}{p}}.
\end{aligned}$$

因此，由缝合引理可得估计式

$$|\mathbb{X}^{(3)}_{s,t}| = \left| \int_s^t (\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})_r \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}_r \right| = \left| \int_s^t (\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})_r \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}_r - (\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})_s \otimes X_{s,t} - (\mathbb{X}^{(2)}_{s,\cdot})'_s \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{s,t} \right| \lesssim c(s,t)^{\frac{3}{p}},$$

对于 $(s,\ t) \in \Delta_T$。

我们采用归纳论证：假设对于任意 $n < N$，当$N > 3$时该断言成立，现令 $n \le N$。我们首先注意到， $r \mapsto Y_r := \mathbb{X}^{(n-1)}_{s\,r\,,}$ 是关于 X 在 $[s,t]$ 上的受控路径（作为粗糙积分），并且我们根据陈关系观察到，

$$Y_v - Y_u = \mathbb{X}^{(n-1)}_{s,v} - \mathbb{X}^{(n-1)}_{s,u} = \sum_{j=0}^{n-3} \mathbb{X}^{(j)}_{s,u} \otimes \mathbb{X}^{(n-1-j)}_{u,v} + \mathbb{X}^{(n-2)}_{s,u} \otimes X_{u,v},$$

对于 $s \le u \le v \le t$。也就是说， $Y'_u = \mathbb{X}^{(n-2)}_{s\,u,}$ ，且 $R^Y_{u,\,v} = \sum_{j=0}^{n-3} \mathbb{X}^{(j)}_{s,\,u} \otimes \mathbb{X}^{(n-1-j)}_{u\,v,}$ 。类似于上文，我们对 $A_{u,\,v} := Y_u \otimes X_{u,\,v} + Y'_u \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{u,\,v}$ 和 $\delta A_{u,\,v,\,w} := A_{u,\,w} - A_{u,\,v} - A_{v,\,w}$ 推导出

$$
\begin{aligned}
|\delta A_{u,v,w}| &= |-R^Y_{u,v} \otimes X_{v,w} - Y'_{u,v} \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{v,w}| \\
&= \Big| -(\sum_{j=0}^{n-3} \mathbb{X}^{(j)}_{s,u} \otimes \mathbb{X}^{(n-1-j)}_{u,v}) \otimes X_{v,w} - (\sum_{j=0}^{n-3} \mathbb{X}^{(j)}_{s,u} \otimes \mathbb{X}^{(n-2-j)}_{u,v}) \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{v,w} \Big| \\
&= \Big| -(\sum_{j=0}^{n-3} \mathbb{X}^{(j)}_{s,u} \otimes (\mathbb{X}^{(n-1-j)}_{u,v} \otimes X_{v,w} + \mathbb{X}^{(n-2-j)}_{u,v} \otimes \mathbb{X}^{(2)}_{v,w}) \Big| \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{n-3} c(s,u)^{\frac{j}{p}} (c(u,v)^{\frac{n-1-j}{p}} c(v,w)^{\frac{1}{p}} + c(u,v)^{\frac{n-2-j}{p}} c(v,w)^{\frac{2}{p}}) \\
&\le \sum_{j=0}^{n-3} c(s,t)^{\frac{j}{p}} c(u,v)^{\frac{n-1-j}{p}} c(v,w)^{\frac{1}{p}} + c(s,t)^{\frac{j}{p}} c(u,v)^{\frac{n-2-j}{p}} c(v,w)^{\frac{2}{p}} \\
&= \sum_{j=0}^{n-3} w^{\alpha_{1,1}}_{1,1,j}(u,v) w^{\alpha_{1,2}}_{1,2}(v,w) + w^{\alpha_{2,1}}_{2,1,j}(u,v) w^{\alpha_{2,2}}_{2,2}(v,w),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
w_{1,1,j} &= c(s,t)^{\frac{p}{n-1-j}\frac{j}{p}} c, \quad \alpha_{1,1} = \frac{n-1-j}{p}, \quad w_{1,2} = c, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{p}, \\
w_{2,1,j} &= c(s,t)^{\frac{p}{n-2-j}\frac{j}{p}} c, \quad \alpha_{2,1} = \frac{n-2-j}{p}, \quad w_{2,2} = c, \quad \alpha_{2,2} = \frac{2}{p}.
\end{aligned}
$$

于是，根据广义缝合引理（例如参见 [FZ18，定理 2.5],），可得

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{X}^{(n)}_{s,t}| &= \Big| \int_s^t (\mathbb{X}^{(n-1)}_{s,\cdot})_r \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}_r \Big| \\
&= \Big| \int_s^t (\mathbb{X}^{(n-1)}_{s,\cdot})_r \otimes \mathrm{d}\mathbf{X}_r - (\mathbb{X}^{(n-1)}_{s,\cdot})_s \otimes X_{s,t} - (\mathbb{X}^{(n-1)}_{s,\cdot})'_s \otimes \mathbb{X}^{(n-1)}_{s,t} \Big| \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{n-3} w^{\alpha_{1,1}}_{1,1,j}(s,t) w^{\alpha_{1,2}}_{1,2}(s,t) + w^{\alpha_{2,1}}_{2,1,j}(s,t) w^{\alpha_{2,2}}_{2,2}(s,t) \\
&= \sum_{j=0}^{n-3} c(s,t)^{\frac{j}{p}} c(s,t)^{\frac{n-1-j}{p}} c(s,t)^{\frac{1}{p}} + c(s,t)^{\frac{j}{p}} c(s,t)^{\frac{n-2-j}{p}} c(s,t)^{\frac{2}{p}} \\
&\lesssim_n c(s,t)^{\frac{n}{p}}.
\end{aligned}
$$

进一步，我们注意到 $(s,t) \mapsto (1, X_{s,t}, \mathbb{X}^{(2)}_{s\,t\,,}, \ldots, \mathbb{X}^{(N)}_{s\,t\,,}) \in T^N(\mathbb{R}^d)$ 按定义是一个乘法泛函。

现在令 $\widetilde{\mathbb{X}}^N$ 为将 $(1,\ X_{s,\,t},\ \mathbb{X}^{(2)}_{s\,t\,,})$ 的 Lyons 扩张，扩张至任意 $N > 3$ 的 $T^N(\mathbb{R}^d)$。我们知道， $\mathbb{X}^3$ 和 $\widetilde{\mathbb{X}}^3$ 的 p-变差均有限，且由 c控制。由于 $\mathbb{X}^2 = \widetilde{\mathbb{X}}^2$，有

$$
|\mathbb{X}^3_{s,t} - \widetilde{\mathbb{X}}^3_{s,t}| = |\mathbb{X}^{(3)}_{s,t} - \widetilde{\mathbb{X}}^{(3)}_{s,t}| \le C c(s,t)^{\frac{3}{p}}, \qquad (s,t) \in \Delta_T,
$$

其中 C 表示 $\mathbb{X}^{(3)}$ 和 $\widetilde{\mathbb{X}}^{(3)}$正则性估计中两个隐含乘法常数之和。根据 [LCL07，引理 3.4]，，映射 $(s,\ t)\ \mapsto\ \mathbb{X}_s^{(3)}\ ,\ _t\ -\ \widetilde{\mathbb{X}}_{s\,t}^{(3)}$ ，关于 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 3}$ 是可加的，因此路径 $\mathbb{X}_0^{(3)}\ ,\ \cdot\ -\ \widetilde{\mathbb{X}}_{0\,\cdot}^{(3)}$ ，在 $(\mathbb{R}^d)^{\otimes 3}$ 中具有有限的 $p/3$- 变差，且从零开始。由于 c 的正则性，且 $p/3<1$，可得 $(s,\ t)\ \mapsto\ \mathbb{X}_s^{(3)}\ ,\ _t\ -\ \widetilde{\mathbb{X}}_{s\,t}^{(3)}$ ，等于零，即 $\mathbb{X}^3$ 等于 $\mathbb{X}^{(3)}$。我们对 N使用归纳论证：由于论证过程同样适用，我们得出对任意 $N\geq 1,\ \mathbb{X}^N=\widetilde{\mathbb{X}}^N$ 成立，从而完成证明。□

Appendix D. Some additional results in rough path theory

我们回顾并推广粗糙积分与粗糙路径的一些重要结果。

引理 D.1 (命题 2.4，见 [ALP24])。设 $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X})\in\mathcal{C}^p([0,T];\ \mathbb{R}^d)$，并设$(F,F')$、$(G,G')\in\mathscr{C}_X^p$ 为受控路径，其余项分别为 R^F 和 R^G。那么极限

$$\int_0^T F_r\,\mathrm{d}G_r:=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[s,t]\in\mathcal{P}}F_sG_{s,t}+F'_sG'_s\mathbb{X}_{s,t} \tag{D.1}$$

沿着 $[0,T]$ 的任意分割序列 $\mathcal{P}$ 都存在，且网格大小为 $|\mathcal{P}|\to 0$，并满足以下估计

$$\begin{aligned}&\left|\int_s^t F_r\,\mathrm{d}G_r-F_sG_{s,t}-F'_sG'_s\mathbb{X}_{s,t}\right|\\&\quad\leq C\Big(\|F'\|_\infty(\|G'\|^p_{p,[s,t)}+\|X\|^p_{p,[s,t)})^{\frac{2}{p}}\|X\|_{p,[s,t]}+\|F\|_{p,[s,t)}\|R^G\|_{\frac{p}{2},[s,t]}\\&\qquad+\|R^F\|_{\frac{p}{2},[s,t)}\|G'\|_\infty\|X\|_{p,[s,t]}+\|F'G'\|_{p,[s,t)}\|\mathbb{X}\|_{\frac{p}{2},[s,t]}\Big),\end{aligned}$$

对每个 $(s,t)\in\Delta_T$ 均成立，其中常数 C 仅依赖于 p。

注 D.2. 对于 m、$n>1$，假设 $F\in C^{p\text{-var}}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes m-1})$，$F'\in C^{p\text{-var}}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes m})$，$G\in C^{p\text{-var}}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes n-1})$，$G'\in C^{p\text{-var}}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes n})$。则，

$$\int_0^T F_r\,\mathrm{d}G_r:=\int_0^T F_r\otimes\mathrm{d}G_r:=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[s,t]\in\mathcal{P}}F_s\otimes G_{s,t}+(F'_s\otimes G'_s)\mathbb{X}_{s,t},$$

相对于粗糙路径 $\boldsymbol{X}=(X,\mathbb{X})$。在书写 $F'_s\otimes G'_{s,t}$ 时，我们严格指的是分量为 $[F'_s\otimes G'_s]^{i_1\dots i_m j_1\dots j_n}=(F'_s)^{i_1\dots i_m}(G'_s)^{j_1\dots j_n}$ 的 $m+n$-张量，并将“乘法”$(F'_s\otimes G'_s)\mathbb{X}_{s,t}$解释为其 $(m-1)+(n-1)$ 分量由 $[(F'_s\otimes G'_s)\mathbb{X}_{s,t}]^{i_1\dots i_{m-1}j_1\dots j_{n-1}}=\sum_i\sum_j(F'_s)^{i_1\dots i_{m-1}i}(G'_s)^{j_1\dots j_{n-1}j}\mathbb{X}^{ij}$ 给出的矩阵。

性质 γ-(RIE) 不仅保证了路径存在一个合适的粗糙路径提升，还允许将粗糙积分表示为黎曼和的极限，其取决于 γ。下一个定理是 [DKP25，定理 2.12] 的一个略微推广。

定理 D.3。设 $p\in(2,\ 3)$，并设 $\pi^n=\{0=t_0^n<t_1^n<\cdots<t_{N_n}^n=T\}$、$n\in\mathbb{N}$ 为满足 $|\pi^n|\to 0$ *as* $n\to\infty$ 的分割序列。假设 $X\in C([0,T];\ \mathbb{R}^d)$ 相对于某些 $\gamma\in[0,1]$、p 和 $\pi=(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足性质 γ-(RIE)，并令 $\mathbf{X}^{\gamma,\ \pi}$ 为典范

粗糙路径提升，它由命题 *3.1* 构造而成。设 $q > 0$ 满足 $2/p + 1/q > 1$，并令 $(F、F')$、$(G、G') \in \mathscr{C}^{p,\,X^q}$ 为关于 X 的受控路径。则，极限

$$\int_0^t F_r \,\mathrm{d}G_r = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} (F_{t_k^n} + \gamma F_{t_k^n, t_{k+1}^n}) G_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t},$$

存在，并且当 $t \in [0,T]$ 时收敛是一致的；它与根据 (D.1) 定义的、关于 (G, G') 的 (F, F') 粗糙积分相一致。

证明。由引理 ma D.1, (*F* 的粗糙积分 , *F′*) 关于 (*G* , *G′*)（相对于$\mathbf{X}^{\gamma,\,\pi}$）存在 。我们分别用 $(F^n)_{n\in\mathbb{N}}$、$(G^n)_{n\in\mathbb{N}}$和 $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$表示沿着 $\pi = (\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$对 F、G 和 X作出的分段线性插值。因此，(F^n, F') 和 (G^n, G') 受 X^n控制，其余项分别为 $R_s^{\bar{F}^n}{}_{,t} = \bar{F}^n_{s,t} - F'_s \bar{X}^n_{s,t}$和 $R_s^{\bar{G}^n}{}_{,t} = \bar{G}^n_{s,t} - G'_s \bar{X}^n_{s,t}$，$(s,t) \in \Delta_T$。如 [PP16，定理4.19],的证明所示，若 $p' > p$且 $q' > q$满足 $2/p' + 1/q' > 1$，则 $(\bar{F}^n, F', R^{\bar{F}^n})$ 在 (q', p', r')-变差意义下收敛至 (F, F', R^F)，其中 $1/r' = 1/p' + 1/q'$。

由于序列($\bar{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 具有一致有界的 p-变差，并且 X^n 一致收敛于 X（当 $n \to \infty$时），由插值可知，X^n 关于p'-变差范数收敛于 X，即当 $n \to \infty$时 $\|X^n - X\|_{p'} \to 0$。类似地，利用 [DKP25，引理 2.11]，可得 $\|(\bar{\mathbb{X}}^n、{}^{(2)} - (\mathbb{X}^\gamma、{}^{\pi、(2)} + \frac{1}{2}[X]^{\gamma、\pi})\|_{p'} \to 0$，从而可得 $\|(\bar{X}^n、\bar{\mathbb{X}}^n、{}^{(2)}) - 2(X、\mathbb{X}^\gamma、{}^{\pi、(2)} + \frac{1}{2}[X]^{\gamma、\pi})\|_{p'} \to 0$当 $n \to \infty$时；对于（G、G'、R^G）同理。

由 [AKLP25b，引理 A.2]可得

$$\int_0^t \bar{F}_r^n \,\mathrm{d}\bar{G}_r^n \longrightarrow \int_0^t F_r \,\mathrm{d}G_r \qquad \text{as } n \longrightarrow \infty, \tag{D.2}$$

其中收敛对 $t \in [0,T]$ 一致。注意，在 (D.2) 中，积分 $\int_0^t F_u^n \mathrm{d}\,\bar{G}_u$ 是相对于粗糙路径（$\bar{X}^n$, $\bar{\mathbb{X}}^{n,\,(2)}$）定义的，而极限粗糙积分 $\int_0^t F_u \,\mathrm{d}G_u$ 是相对于（X，$\mathbb{X}^{\gamma,\,\pi,\,(2)} + \frac{1}{2}[X]^{\gamma,\,\pi}$）定义的。

但是，对每个 $t \in [0,T]$，都有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_0^t \bar{F}_r^n \,\mathrm{d}\bar{G}_r^n \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N_n-1} (F_{t_k^n} + \frac{1}{2} F_{t_k^n, t_{k+1}^n}) G_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t} \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N_n-1} (F_{t_k^n} + \gamma F_{t_k^n, t_{k+1}^n}) G_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t} + \frac{1}{2}(1-2\gamma) \sum_{k=0}^{N_n-1} F_{t_k^n, t_{k+1}^n} G_{t_k^n \wedge t, t_{k+1}^n \wedge t} \Big).
\end{aligned}$$

由于（F，F'），（G，G'）$\in \mathscr{C}^{p,\,X^q}$，显然右侧第二项收敛到$\frac{1}{2}\int_0^t F'_s G'_s \,\mathrm{d}[X]^{\gamma,\,s^\pi}$，$t \in [0,T]$。

于是，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{N_n-1}(F_{t_k^n}+\gamma F_{t_k^n,t_{k+1}^n})G_{t_k^n\wedge t,t_{k+1}^n\wedge t}\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\int_0^t \bar{F}_r^n\,\mathrm{d}G_r^n-\frac{1}{2}\int_0^t F_r'G_r'\,\mathrm{d}[X]_r^{\gamma,\pi}\\
&\quad=\int_0^t F_r\,\mathrm{d}G_r-\frac{1}{2}\int_0^t F_r'G_r'\,\mathrm{d}[X]_r^{\gamma,\pi}\\
&\quad=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}F_uG_{u,v}+F_u'G_u'(\mathbb{X}^{\gamma,\pi,(2)}+\frac{1}{2}[X]^{\gamma,\pi})_{u,v}-\frac{1}{2}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}F_u'G_u'[X]_{u,v}^{\gamma,\pi}\\
&\quad=\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{[u,v]\in\mathcal{P}}F_uG_{u,v}+F_u'G_u'\mathbb{X}_{u,v}^{\gamma,\pi,(2)}\\
&\quad=\int_0^t F_r\,\mathrm{d}G_r,
\end{aligned}$$

其中，极限是沿 $\mathcal{P}$ 的 $[0,t]$ 任意分割序列取的，且网格尺寸趋于零。 □

以下命题表明，将粗糙路径映射到其粗糙路径括号的映射是连续的。

命题 D.4. 设 $p\in(2,3)$。映射

$$\mathcal{C}^p([0,T];\mathbb{R}^d)\ni\mathbf{X}=(X,\mathbb{X}^{(2)})\mapsto[\mathbf{X}]\in C^{\frac{p}{2}}([0,T];\mathbb{R}^d)$$

是连续的，其中，粗糙路径 $\mathbf{X}=(X,\mathbb{X}^{(2)})$ 的粗糙路径括号 $[\mathbf{X}]$ 定义为$[\mathbf{X}]_t:=X_{0,t}\otimes X_{0,t}-(\mathbb{X}_0^{(2)}{}_{,t}+(\mathbb{X}_{0\,t}^{(2)}{}_{,})^\top)$，$t\in[0,T]$。

证明。 设 $\mathbf{X}^n=(X^n,\mathbb{X}^{n,(2)})$，$n\in\mathbb{N}$，$\mathbf{X}=(X,\mathbb{X}^{(2)})$ 是满足下列条件的粗糙路径:

$$\|\mathbf{X}^n;\mathbf{X}\|_p=\|X^n-X\|_p+\|\mathbb{X}^{n,(2)}-\mathbb{X}^{(2)}\|_{\frac{p}{2}}\longrightarrow 0\qquad\text{as}\quad n\to\infty.$$

首先，我们有

$$\|\mathbb{X}^{n,(2)}+(\mathbb{X}^{n,(2)})^\top-(\mathbb{X}^{(2)}+(\mathbb{X}^{(2)})^\top)\|_{\frac{p}{2}}\lesssim\|\mathbb{X}^{n,(2)}-\mathbb{X}^{(2)}\|_{\frac{p}{2}}.$$

此外，成立

$$\begin{aligned}
|X_{s,t}^n\otimes X_{s,t}^n-X_{s,t}\otimes X_{s,t}|^{\frac{p}{2}}&\lesssim|X_{s,t}^n\otimes(X_{s,t}^n-X_{s,t})|^{\frac{p}{2}}+|(X_{s,t}^n-X_{s,t})\otimes X_{s,t}|^{\frac{p}{2}}\\
&\lesssim(|X_{s,t}^n|^{\frac{p}{2}}+|X_{s,t}|^{\frac{p}{2}})|X_{s,t}^n-X_{s,t}|^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

对任意 $(s,t) \in \Delta_T$。因此，由柯西–施瓦茨不等式，

$$
\begin{aligned}
&\|X^n \otimes X^n - X \otimes X\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \\
&= \sup_{\mathcal{P}} \sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} |X^n_{s,t} \otimes X^n_{s,t} - X_{s,t} \otimes X_{s,t}|^{\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \sup_{\mathcal{P}} \sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} (|X^n_{s,t}|^{\frac{p}{2}} + |X_{s,t}|^{\frac{p}{2}}) |X^n_{s,t} - X_{s,t}|^{\frac{p}{2}} \\
&\lesssim \sup_{\mathcal{P}} \left(\sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} (|X^n_{s,t}|^p + |X_{s,t}|^p) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} |X^n_{s,t} - X_{s,t}|^p \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim (\|X^n\|_p^{\frac{p}{2}} + \|X\|_p^{\frac{p}{2}}) \|X^n - X\|_p^{\frac{p}{2}}.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\|[\mathbf{X}^n] - [\mathbf{X}]\|_{\frac{p}{2}} \lesssim (\|X^n\|_p + \|X\|_p) \|X^n - X\|_p + \|\mathbb{X}^{n,(2)} - \mathbb{X}^{(2)}\|_{\frac{p}{2}} \longrightarrow 0 \qquad \text{as} \quad n \to \infty,
$$

因此，$\mathbf{X} \mapsto [\mathbf{X}]$ 是连续的。 □

References

[ACLP23] Andrew L. Allan、Christa Cuchiero、Chong Liu 和 David J. Pr

¨ *Model-free portfolio theory:* omel, ，《数学金融》（），第 – 期。[*a rough path approach* **33** 2023 3, 709 765

AF25] Munawar Ali 和 Qi Feng, *Branched signature model*, arXiv 预印本 arXiv:2511.00018（2025）。[AGTZ22] Erdinc Akyildirim、Matteo Gambara、Josef Teichmann 和 Syang Zhou, *Applications of Signature Methods to Market Anomaly Detection* 2201 02441 2022 ，arXiv 预印本 arXiv: 。（）。[

AKLP25a] Andrew L. Allan、Anna P. Kwossek、Chong Liu 和 David J. Pr

¨ *Pathwise convergence of* omel, ，《伦敦数学学会杂志》（）（ *the Euler scheme for rough and stochastic differential equations* 2 **112** 2025），第3期，论文编号 e70297，共51页。[AKLP25b] Andrew L. Allan、Anna P. Kwossek、Chong Liu 和 David J. Pr

¨ *Pathwise analysis of* omel, ，arXiv 预印本 arXiv: 。（）。[*log-optimal portfolios* 2507 18232 2025

ALP24] Andrew L. Allan、Chong Liu 和 David J. Pr

¨ *A càdlàg rough path foundation for robust* omel, ，《金融与随机》（），– 。[Arr *finance* **28** 2024 215 257

18] Imanol Perez Arribas, *Derivatives pricing using signature payoffs*, arXiv 预印本 arXiv:1809.09466（2018）。[ASJ18] Yacine A¨ıt-Sahalia 和 Jean Jacod, *Semimartingale: Itô or not?*, 《随机过程及其应用》128（2018），第1期，233–254。[ASS21] Imanol Perez Arribas、Cristopher Salvi 和 Lukasz Szpruch, *Sig-SDEs model for quantitativefinance*, 《首届 ACM 人工智能金融国际会议论文集》（美国纽约州纽约市），ICAIF '20，计算机协会，2021，[BC19] Horatio Boedihardjo 和 Ilya Chevyrev, *An isomorphism between branched and geometric rough paths* ´ **55** 2019 2, 1131 1148 ，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》（），第 – 期。[BdRHO25] Christian Bayer、Goncalo dos Reis、Blanka Horvath 和 Harald Oberhauser, *Signature Methods in Finance* 2025 ，第一版，施普林格金融丛书，施普林格（Cham），。[BFT26] Carlo Bellingeri、Emilio Ferrucci 和 Nikolas Tapia, *Branched Itô formula and natural Itô-Stratonovich isomorphism* **484** 2026 110687, 87 ，《数学进展》（），论文编号 。[BFZ

22] Erhan Bayraktar、Qi Feng 和 Zhaoyu Zhang, *Deep Signature Algorithm for Path-Dependent American option pricing* 2211 11691 2022 ，arXiv 预印本 arXiv: 。（）。[BGLY16] Horatio Boedihardjo、Xi Geng、Terry Lyons 和 Danyu Yang, *The signature of a rough path: uniqueness* **293** 2016 720 737 ，《数学进展》（），– 。[BHRS23] Christian Bayer、Paul P. Hager、Sebastian Riedel 和 John Schoenmakers, *Optimal stopping with signatures* **33** 2023 1, 238 273 ，《应用概率年刊》（），第 – 期。

[BPS25] Christian Bayer、Luca Pelizzari 和 John Schoenmakers, *Primal and dual optimal stopping with signatures* **29** 2025 4, 981 1014 , 《金融与随机》（），第 – 期。

[BR24] Christian Bayer 和 Martin Redmann, *Dimension reduction for path signatures*, arXiv 预印本 arXiv:2412.14723（2024）。[Bre11] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext 丛书，施普林格，纽约，2011。[BRSF25] Federico M. Bandi、Roberto Ren`o 和 Sara Svaluto-Ferro, *Local signature-based expansions*, arXiv 预印本 arXiv:2504.06351（2025）。[CGMSF25] Christa Cuchiero、Guido Gazzani、Janka M ¨oller 和 Sara Svaluto-Ferro, *Joint calibration to SPX and VIX options with signature-based models* **35** 2025 1, 161 213 , 《数学金融》（），第 – 期。[CGSF23] Christa Cuchiero、Guido Gazzani 和 Sara Svaluto-Ferro, *Signature-based models: theory and calibration* **14** 2023 3, 910 957 , 《SIAM 金融数学杂志》（），第 – 期。[Che57] 陈国才, *Integration of paths geometric invariants and a generalized Baker-Hausdorff formula* 2 **65** 1957 163 178 , 《数学年刊》（）（），–。[Che77] Kuo Tsai Chen, *Iterated path integrals*, 《美国数学学会通报》83（1977），第5期，831–879。[CK26] Ilya Chevyrev 和 Andrey Kormilitzin, *A Primer on the Signature Method in Machine Learning*, 《金融中的签名方法》，施普林格金融丛书，施普林格（Cham），2026，第3–64页。[CM25] Christa Cuchiero 和 Janka M ¨oller, *Signature methods in stochastic portfolio theory*, 《SIAM 金融数学杂志》16（2025），第4期，1239–1303。[CPASB22] Alvaro Cartea、Imanol P ´erez Arribas 和 Leandro Sanchez-Betancourt, *Double-execution strategies using path signatures* **13** 2022 4, 1379 1417 , 《SIAM 金融数学杂志》（），第 – 期。[CPSF25] Christa Cuchiero、Francesca Primavera 和 Sara Svaluto-Ferro, *Universal approximation theorems for continuous functions of càdlàg paths and Lévy-type signature models* **29** , 《金融与随机》（2025），第2期，289–342。[DKP25] Purba Das、Anna P. Kwossek 和 David J. Pr ¨omel, *A rough path approach to pathwise stochastic integration à la Föllmer* 2507 17363 2025 , arXiv 预印本 arXiv:。（）。[FH20] Peter K. Friz 和 Martin Hairer, *A course on rough paths: with an introduction to regularity structures* 2020 , 第二版，Universitext 丛书，瑞士 Cham，。[FHW23] Owen Futter、Blanka Horvath 和 Magnus Wiese, *Signature Trading: A Path-Dependent Extension of the Mean-Variance Framework with Exogenous Signals* 2308 15135 , arXiv 预印本 arXiv:。（2023）。[F¨ol81] H. F¨ollmer, *Calcul d'Itô sans probabilités*, 《概率论研讨会，第十五卷》（法国斯特拉斯堡大学，1979/1980）（法文），数学讲义，第850卷，施普林格，柏林，1981，第143–150页。[FV10] Peter K. Friz 和 Nicolas B. Victoir, *Multidimensional stochastic processes as rough paths*, 剑桥高等数学研究丛书，第120卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010，理论与应用。[FZ18] Peter K. Friz 和 Huilin Zhang, *Differential equations driven by rough paths with jumps*, 《微分方程杂志》264（2018），第10期，6226–6301。[Gub10] Massimiliano Gubinelli, *Ramification of rough paths* **248** 2010 4, , 《微分方程杂志》（），第 – 693 721 期。[GWZZ25] Xin Guo、Binnan Wang、Ruixun Zhang 和 Chaoyi Zhao, *On consistency of signature using Lasso* **73** 2025 5, 2530 2549 , 《运筹学》（），第 – 期。[HBS24] Fabian A. Harang、Fred Espen Benth 和 Fride Straum, *Universal approximation on non-geometric rough paths and applications to financial derivatives pricing*, arXiv 预印本 arXiv:2412.16009（2024）。[Hes93] Steven L Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options* **6** 1993 2, 327 343 , 《金融研究评论》（），第 – 期。[HL10] Ben Hambly 和 Terry Lyons, *Uniqueness for the signature of a path of bounded variation and the reduced path group* 2 **171** 2010 1, 109 167 , 《数学年刊》（）（），第 – 期。[Hof00] Michael E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, 《代数组合学杂志》11（2000），第1期，49–68。[JDC24] Eduardo Abi Jaber 和 Nathan De Carvalho, *Reconciling rough volatility with jumps*, 《SIAM 金融数学杂志》15（2024），第3期，785–823。[KLA20] Jasdeep Kalsi、Terry Lyons 和 Imanol Perez Arribas, *Optimal execution with rough path signatures* **11** 2020 2, 470 493 , 《SIAM 金融数学杂志》（），第 – 期。

[Kob11] Kei 小林, *Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations* **24** 2011 3, 789 820 , 《理论概率杂志》（），第–期。[LCL07] Terry J. Lyons、Michael Caruana与Thierry L´evy, *Differential equations driven by rough paths*, 《数学讲义》，第1908卷，施普林格，柏林，2007年，2004年7月6–24日在圣弗卢尔举办的第34届概率论暑期学校讲义，并附Jean Picard关于该暑期学校的引言。[LLN13] Daniel Levin、Terry Lyons与Hao Ni, *Learning from the past predicting the statistics for the future learning an evolving system* ,,, arXiv预印本 1309 0260 2013 arXiv: . ( )。[LNPA19] Terry Lyons、Sina Nejad与Imanol Perez Arribas, *Numerical method for model-free pricing of exotic derivatives in discrete time using rough path signatures* **26** 2019 , Appl. Math. 金融（），第6期，583–597。[LNPA20] , *Non-parametric pricing and hedging of exotic derivatives*, Appl. Math. 金融 **27**（2020），第6期，457–494。[Lyo98] Terry J. Lyons, *Differential equations driven by rough signals*, 《伊比利亚美洲数学评论》**14**（1998），第2期，215–310。[ML25] Andrew McLeod与Terry Lyons, *Signature methods in machine learning*, 《EMS数学科学综述》，2025。[PP16] Nicolas Perkowski与David J. Pr¨omel, *Pathwise stochastic integrals for model free finance*, 《伯努利》**22**（2016），第4期，2486–2520。[Pro05] Philip E. Protter, *Stochastic integration and differential equations*, 《随机建模与应用概率》，第21卷，施普林格出版社，柏林，2005年，第二版。版本2.1，勘误后第三次印刷。[RG20] Jeremy F. Reizenstein与Benjamin Graham, *Algorithm 1004: the iisignature library: efficient calculation of iterated-integral signatures and log signatures* **46** , 《ACM数学软件汇刊》（2020），第1期，文章编号8，21。

Mihriban Ceylan, University of Mannheim, Germany
Email address: mihriban.ceylan@uni-mannheim.de

Anna P. Kwossek, University of Vienna, Austria
Email address: anna.paula.kwossek@univie.ac.at

David J. Prömel, University of Mannheim, Germany
Email address: proemel@uni-mannheim.de