arXiv:2602.05919v1 [math.RA] 5 Feb 2026

关于 Michael Wemyss 计算 GV 不变量猜想的探讨

JOACHIM JELISIEJEW 和 AGATA SMOKTUNOWICZ

摘要。收缩代数是 Donovan 和 Wemyss 引入的一类非交换代数，用于分类三维翻转。Wemyss 猜想，收缩代数可以变形为一个单一的半单代数。这为计算该翻转的 Gopakumar-Vafa不变量提供了一种内在方法。

主要结果是证明了 Wemyss 关于 A 型和 D 型的猜想。在证明过程中，我们回顾并介绍了构造结合代数平坦变形的新技术，并比较了各种变形概念。我们还提出了两个猜想，暗示着一个更深层的理论。

1. 引言

本文研究一类有趣的非交换代数，即所谓的 Donovan-Wemyss 收缩代数。相关结果可以从两个截然不同的角度来看，粗略地概括如下：

(1) 从代数几何的角度看，收缩代数 A是三维翻转的一种分类对象（见下文 §1.2 ）。被翻转的曲线会产生 Gopakumar-Vafa不变量。核心问题是

问题 1.1。 能否仅从抽象代数 A中恢复 GV不变量?

这个问题可以改述为

问题 1.2。 A是否能变形为唯一的半单代数

$$\mathbb{k}^{\times n_1} \times \mathbb{M}_2(\mathbb{k})^{\times n_2} \times \mathbb{M}_3(\mathbb{k})^{\times n_3} \times \dots$$

其中 n_1， n_2， n_3 是由几何给出的 GV不变量?

(2) 从非交换代数的角度看，收缩代数 A 可以视为“自上而下给定”：它们是具有有趣变形的有限维代数。因此，它们与长期以来对这类代数的变形的研究一脉相承（见下文 §1.1 ），更重要的是，还为这一领域提出了新的研究方向，见下文猜想 1.4。

为了让两个领域的读者都能轻松阅读这篇文章，我们尽可能采用初等方法。

收缩代数在下文定义 3.2 中作形式化定义。一个具有代表性的例子是代数$D_{n,\ m}$ ，其表示为

$$\frac{\mathbb{k}\langle x, y\rangle}{(xy + yx,\ x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2,\ x^{2n+2m-3})} \tag{1.1}$$

日期：2026年2月6日。

其中 $n \geq m \geq 2$。

我们的主要结果对问题 1.2 给出了肯定回答，适用于 A 型和 D 型。

定理 1.3 (GV不变量由收缩代数决定，定理 3.7，定理3.13)。 类型为 A 和 D 的收缩代数会形变为一个半单代数，如定理 *3.7*所列。

从代数角度看，这相当出人意料，因为“多数”交换代数不会形变为单个半单代数，而且相当一部分甚至不会形变为任何此类代数，参见 §1.1中的资料。因此，我们可以期待收缩代数构成一类新颖、有趣且性质良好的有限维非交换代数。

进一步推进定理 1.3的思路，我们发现，收缩代数的表现比定理 1.3所预期的还要规则得多，这暗示着背后存在更深层的理论。我们在以下猜想中对此作出精确表述；该猜想也基于与 Michael Wemyss 的讨论。

猜想 1.4。 设 A 为一个收缩代数，且 $d =$ 维数$_{\Bbbk} A$。那么

(1) 点 $[A]$ 对应于 A 模空间中的 $\mathcal{M}_d$ 含幺结合代数（见 §2）是光滑的，换言之， A 是无阻碍的；(2) 中心的维数在 $[A]$ 的某个开邻域内保持不变，且相应的映射 $A \mapsto Z(A)$ 是光滑的。

猜想的两个部分都相当令人惊讶。首先，即使在表现最好的情形下，代数的中心在族中通常也表现不佳：对于量子化变形

$$\frac{\mathbb{C}\langle x, y\rangle[t]}{(xy - yx - t)}$$

对于 $t = 0$，其中心远大于 $t = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 的中心。一个更简单的例子是，每个（含幺结合）秩为 d 的代数 A 都是平凡代数 $A_0 = \Bbbk[x_1, \ldots, x_{d-1}]/(x_1, \ldots\ldots, x_{d-1})^2$, 的一个变形，而该代数是交换的。

其次， $Z(A)$ 的变形更容易理解，因为 $Z(A)$ 是交换的。无阻碍性结果意味着，要理解 A 的变形，我们可以归约到交换情形，在那里有更多可用的工具 §1.1。

我们使用 GAP 的 [23] 软件包 QPA [56]验证了猜想 1.4(1) 对较小 d 值成立。重要的是，该猜想并不能由适当的霍赫希尔德上同调群 $\mathrm{HH}^3(A, A)$ 的消失推出。在我们的小型例子中，这个群已经不消失。相反，我们利用定理 1.3 为 $\mathcal{M}_d$ 在 $[A]$ 附近的维数提供下界，并证明 $[A]$ 的光滑性等价于 $\dim_{\Bbbk} \mathrm{HH}^1(A, A) = \dim_{\Bbbk} \mathrm{HH}^2(A, A)$，这点我们已直接验证。

猜想 1.4 的一种可能研究方法来自非交换正则正规化序列理论，该理论也称为非交换完全交 [9, 49, 59]。例如，收缩代数 $D_{n,\ m}$ from(1.1) 可视为以下代数的商：

$$S = \frac{\Bbbk\langle x, y\rangle}{(xy + yx)}$$

由关系 $x^{2n-1}y$、 $x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2$ 给出，然后通过除以 $x^{2n+2m-3}$进行完备化。代数 S 是 AS-正则的，序列 $x^{2n-1}y$、 $x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2$ 是正规化的，因此该商类似于完全交。使用这种方法有一些技术问题需要解决。首先，通过过渡到 $\Bbbk\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 进行完备化是必要的；其次，非交换完全交理论似乎主要存在于分次情形；第三，一个陈述

此类完全交是无阻碍的这一结果目前尚缺，至少就我们所知是如此。从交换代数的角度看，这些障碍应当是可以克服的，因为交换理论经历了类似的发展轨迹，并且最终结果已经得到，例如参见 [36, §2.9]。

1.1. 有限维代数的变形。结合有限维代数的变形研究是一门经典而艰深的学科。相关综述见 [32, 58, 21]。其上同调基础由 Gerstenhaber 奠定 [26, 27, 28, 29, 64], ，后来他又与 Schack [33, 32]及其他学者 [30]共同开展了相关研究。结构常数的模空间早在 [2, 55, 63, 22, 19, 20]中就得到应用，有时还需要利用切空间 [48] 和轨道维数 [24]等基本几何结构。它自然地出现在一些应用中，例如高秩向量丛 [48] ，以及与 Donald-Flanigan 猜想相关的群代数。对于低维情形（维数不超过 8），这一空间的几何性质已有所了解，参见 [34, 51, 12, 13], ；但一般情形仍不清楚，而且相当病态，在正特征下还存在非约化分支 [14, 31]。将问题线性化并对左模进行分类是自然而且相对容易的做法 [10, 57]。这一理论与倾斜密切相关 [35, 47]。该领域仍然十分活跃，参见 [1, 17, 18, 38, 52, 60]。若假设交换性，则已知结果要丰富得多，因为此时该空间直接关联于点的希尔伯特概形 [54, 44, 43, 42, 39]。变形也出现在 Kontsevich 的变形量子化理论中，例如参见 [37], ；我们不再进一步讨论。

在收缩代数的背景下，强平坦变形在 [61] 中被引入，而定理1.3的小规模情形在 [5]中得到证明。

我们在第2节以一种希望能让两类目标读者都易于理解的方式，回顾了大量相关理论。从代数几何的角度来看，该理论大概是非常标准的，唯一可能例外的是 Beauville-Laszlo 型结果（定理2.19），它使我们能够将关于 $\Bbbk[\![t]\!]$ 的变形转化为关于 $\Bbbk[t]$的变形。据我们所知，该结果并不能形式化地从 Beauville-Laszlo 的结果推出（原因在于非交换代数与循环模并不等价这一技术事实），但它确实可以由其证明推出。

1.2. **代数几何背景。** 收缩代数由 Donovan 和 Wemyss 在 Wemyss 关于3维翻转的成功分类计划中引入。特别地，Iyama [41] Wemyss 引入了极大修正代数，后来又与 Donovan [16], 一起将其细化为收缩代数。Brown 和 Wemyss 最近在局部情形下，以完备非交换雅可比代数的形式，给出了这些代数的纯代数描述 [7]。Wemyss 在 2026年国际数学家大会上的演讲材料对这一过程作了精彩总结。另请参阅[15, 40, 53, 46, 45, 62, 66]，了解这一精彩计划中关于变形理论的部分。

被翻转的曲线给出 Gopakumar-Vafa（GV）不变量。Toda [62] 将它们与其增厚的变形联系起来。Toda 还观察到，将翻转形变为更简单的翻转会得到一族收缩代数，但尚不清楚该族是否平坦。因此，能否直接从收缩代数本身读出 GV 不变量，是一个非常有趣的问题。

1.3. **论文概述。** 引言之后，本文分为两部分。在第 2 节中，我们回顾变形的一般理论，并证明 Beauville-Laszlo 下降（定理 2.19 ），最终得到定理 2.20 ，该定理断言，所引入的所有变形定义彼此一致，并给出变形的传递性。在第 3节中，我们证明定理 1.3，该定理

源于两个风格迥异的结果。定理 3.7 说明，除一种类型外，向半单代数进行变形存在障碍；而定理 3.13 则给出了所需的变形。

2. 有限维结合代数的变形

我们考虑的所有代数都是结合的，并且都有单位元。本节将回顾现有的各种变形概念，尤其是为非交换代数领域的读者提供参考。大多数结果对代数几何学家而言都很熟悉。一个值得注意的例外是有限维代数的 Beauville-Laszlo 下降。主要结果是定理2.20，它表明许多变形概念彼此等价。

我们在特征为零的代数闭域 $\Bbbk$上工作。用 $\Bbbk[\![t]\!]$表示形式幂级数，用 $\Bbbk((t))$ 表示其分式域。用 $\Bbbk[t^{\pm 1}]$ 表示环 $\Bbbk[t, t^{-1}]$。用

$$\Bbbk\{\{t\}\} = \bigcup_{n\geq 0} \Bbbk\left(\left(t^{1/n}\right)\right) \tag{2.1}$$

表示 Puiseux 级数域。该域是 $\Bbbk((t))$的代数闭包，参见例如 [50, 定理 2.1。5]有时，在考虑收敛幂级数时，我们会转而考虑$\Bbbk = \mathbb{C}$。此时，令 $\mathbb{C}_r\{t\} \subseteq \mathbb{C}[\![t]\!]$ 为在固定半径 $r > 0$ 内收敛的幂级数构成的子环。

本文中， A, B, C 都是结合的、有单位元的、可能非交换的有限维 $\Bbbk$ 代数。对于这样的代数 A，我们用 $A[t] \simeq A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[t]$ 表示系数取自 A 的多项式环，用 $A[\![t]\!] = A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[\![t]\!]$ 表示系数取自 A 的形式幂级数环。当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时，我们用 $A\{t\} := A \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}_r\{t\}$ 表示系数取自 A、在半径 $r > 0$ 内收敛的幂级数环。我们在记号 $A\{t\}$ 中省略 r，因为 r 的具体值对我们并不重要。

我们回顾 [64] 中关于 A 的形式变形的定义。

定义 2.1。 A 的一个形式变形 $(A_t, \circ, +)$ 是定义在 $\Bbbk[\![t]\!]$-模 $A[\![t]\!]$ 上的结合 $\Bbbk[\![t]\!]$-双线性乘法 $\circ$。我们假设 A 中单位元的像在 $A[\![t]\!]$ 中作为单位元起作用。

(1) 设 $\Bbbk = \mathbb{C}$。形式变形（A_t, $\circ$, $+$）是收敛的（收敛半径为 r），当且仅当对每个a, $b \in A$，元素 $a \circ b$ 属于 $A\{t\}$。**(2)** 变形（A_t, $\circ$, $+$）是多项式型的，当且仅当对每个 a, $b \in A$，元素 $a \circ b$属于 $A[t]$。

注2.2。 对于 $\Bbbk = \mathbb{C}$，设 A_t是 A的一个收敛形式变形，并设 a_1, ..., $a_d \in A$是 A 作为域 $\mathbb{C}$上线性向量空间的一个基。注意， $A\{t\}$ 的每个元素都可以写成以下形式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t),$$

对于某个 $f_i \in \mathbb{C}\{t\}$。于是我们有

$$a_i \circ a_j = \sum_{1\leq i,j,k\leq n} g_{i,j}^k(t) a_k.$$

根据假设，存在 $0 \in \mathbb{C}$ 的一个非空邻域，在该邻域上所有 $g_{i,\ j}^{k}$ 均收敛。对于该邻域内的 s，我们可以代入 $t := s$，从而得到一个带乘法的 $\mathbb{C}$-代数

$$a_i \circ a_j = \sum_{1 \le i,j,k \le n} g_{i,j}^{k}(s) a_k.$$

我们将所得的 $\mathbb{C}$-代数记为 $A_{t=s}$。

注2.3. 考虑一个形式变形 $(A_t, \circ, +)$。等价地，这组数据可以表述为：我们有一个 $\Bbbk[\![t]\!]$-代数 $\mathcal{A}$，它是自由的 $\Bbbk[\![t]\!]$-模，并且带有一个同构 $\mathcal{A}/(t) \simeq A$。从 $(A_t, \circ, +)$ 到 $\mathcal{A}$ 的过程，相当于取 $\mathcal{A} := A[\![t]\!]$，其对应的乘法为 $\circ$。

(1) 如果 $(A_t, \circ, +)$ 是多项式型的，那么我们甚至可以构造一个 $\Bbbk[t]$-代数 $\mathcal{A}$，它是自由的 $\Bbbk[t]$-模，并带有一个同构 $\mathcal{A}/(t) \simeq A$。同样，$\mathcal{A}$ 等于带有相应乘法 $\circ$ 的 $A[t]$。(2) 如果 $\Bbbk = \mathbb{C}$，我们可以构造一个 $\mathbb{C}_r\{t\}$-代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{cnv}}$，它是自由的 $\mathbb{C}_r\{t\}$-模，其乘法由 $\circ$ 诱导。对于满足 $|s| < r$ 的复数 s，商代数 $\mathcal{A}^{\mathrm{cnv}}/(t-s)$ 与注2.2 中定义的 $A_{t=s}$ 同构。

引入这些 $A[\![t]\!]$ 的子环似乎有些多余，但它们对于证明定理 2.19 是必要的。更一般地说，当我们想要构造诸如 $A_{t=s}$ 这样的商环时，考虑这些子环也是很自然的。

对于固定的代数 A 和 B，我们希望定义一个从 A 到 B 的变形。对于收敛型或多项式型变形，这很容易定义；但一般而言，定义起来就不那么直观了，因为我们无法在 $t = s \in \Bbbk \setminus \{0\}$ 上对 $\Bbbk[\![t]\!]$ 求值。

我们回顾两种概念：强平坦变形（见 [61, 第1]页）以及代数几何中经典存在的各种类型的变形（但非交换代数中并非如此），例如参见 [29]。

定义 2.4。一个变形是从一个 $\Bbbk$-代数 A 到一个 $\Bbbk$-代数 B 的形式变形 $\mathcal{A}$，其满足定义2.1 中的条件，且 $\mathcal{A} \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \Bbbk\{\{t\}\}$ 同构于 $B\{\{t\}\} := B \otimes_{\Bbbk} \Bbbk\{\{t\}\}$，其中 $\Bbbk\{\{t\}\}$ 是 Puiseux 级数域。

(1) 若 $\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}]$ 同构于 $B((t))$，则该变形是分裂的；(2) 若该变形是多项式型，且相应的 $\Bbbk[t]$-代数$\mathcal{A}$ 满足 $\mathcal{A}[t^{-1}] \simeq B[t^{\pm 1}]$，则该变形是多项式分裂的。

假设 $\Bbbk = \mathbb{C}$。从 A 到 B （在 [61, 第1]页引入）的强平坦变形是一个收敛形式变形（A_t、$\circ$、$+$），它是 A 的变形，且满足 $A_{t=s_i}$ 同构于 B，其中存在一个 $s_i \in \mathbb{C}$收敛到零的序列。

这个定义中的几个概念之间存在一些逻辑依赖关系。一个同构$\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}] \simeq B((t))$ 会导出一个同构

$$\widehat{\mathcal{A}} \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \Bbbk\{\{t\}\} \simeq \widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}] \otimes_{\Bbbk((t))} \Bbbk\{\{t\}\} \simeq B((t)) \otimes_{\Bbbk((t))} \Bbbk\{\{t\}\} \simeq B\{\{t\}\},$$

因此，分裂变形意味着变形。同样，多项式分裂变形意味着分裂变形。目前尚不清楚强平坦变形是否是变形。我们最终会证明这一点，见定理 2.20。

引理 2.5（添加 t 的根）。设 $\mathcal{A}$ 是从 A 到 B的一个变形。那么存在一个整数 $n \geq 1$，使得若令 $\widehat{\mathcal{A}}' := \frac{\mathcal{A}[u]}{u^n - t}$，则 $\widehat{\mathcal{A}}'[u^{-1}] \simeq B((u))$ 是 $\Bbbk((u))$-代数。特别地，若存在从 A 到 B的变形，则存在从 A 到 B的分裂变形。

证明。考虑复合映射 $f\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \Bbbk\{\{t\}\} \to B\{\{t\}\}$，其中第一个映射是典范映射，也就是说，它将 $a \in \mathcal{A}$ 映到 $a \otimes 1$。固定元素 $a_1, \ldots, a_d$，使得 $\mathcal{A} = \Bbbk[\![t]\!]a_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk[\![t]\!]a_d$。固定 $\Bbbk$-线性空间 B 的一组基 $b_1, \ldots, b_d$。对于每个 $i = 1, \ldots, d$，元素$f(a_i)$ 可写作 $\sum_{j=1}^{d} b_j g_{i,j}$，其中 $g_{i,j} \in \Bbbk\{\{t\}\}$。由 (2.1)，我们可以固定一个足够大的$n$，使得对于每个 $i, j = 1, \ldots, d$，都有 $g_{i,j} \in \Bbbk((t^{1/n}))$。按引理陈述中的方式定义 $\widehat{\mathcal{A}}'$。注意，$\Bbbk((t^{1/n})) \simeq \Bbbk((u))$。我们定义一个同构 $\widehat{\mathcal{A}}' \to B((u))$，它将每个 a_i 映到$\sum_{j=1}^{d} b_j g_{i,j} \in B((u))$。$\Bbbk[\![u]\!]$-代数 $\widehat{\mathcal{A}}'$ 是一个自由的 $\Bbbk[\![u]\!]$-模，并且 $\widehat{\mathcal{A}}'/(u) \simeq \widehat{\mathcal{A}}/(t) \simeq A$，因此 $\widehat{\mathcal{A}}$就是所需的变形。□

例 2.6. 取 $A = \mathbb{C}[x]/(x^2)$ 和 $B = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$。取 $A_t := \mathbb{C}[\![t]\!][x]/(x^2 - t)$。它可以解释为如下的收敛形式变形（实际上是多项式变形）：我们选取 A 的一个基 a basis 1, x，并考虑 $\mathcal{A} = A[\![t]\!]$ 上由下式给出的乘法

$$x \circ x := t \cdot 1.$$

它也是一个变形，因为

$$\widehat{\mathcal{A}} \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \Bbbk\{\{t\}\} \simeq \frac{\Bbbk\{\{t\}\}[x]}{(x^2 - t)}.$$

域 $K = \Bbbk\{\{t\}\}$ 中的元素 t 是一个平方：$t = (t^{1/2})^2$,，因此根据中国剩余定理，我们有

$$\frac{K[x]}{(x^2 - t)} = \frac{K[x]}{(x - t^{1/2}) \cdot (x + t^{1/2})} \simeq K \times K$$

，它与 $B \otimes_{\Bbbk} K$ 同构。这表明 $\mathcal{A}$ 是一个变形。将引理 2.5 应用于这个变形，我们看到可以取 $n = 2$ 和 $u = t^{1/2}$。然而，即使在这个特殊情形下，引理 2.5 中仍需要一些 $n > 1$：我们有 $\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}] = {}^{\Bbbk}{}_{((t))[x]\ (x^2 - t)} \simeq \Bbbk((t^{1/2}))$ 是一个域，所以 $\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}]$ 与 $\Bbbk((t)) \times \Bbbk((t))$ 不同构。

2.1. **有限维代数的模空间**。有限维代数的模空间是一个经典对象，例如在 [2, 55, 63, 22, 54]中对此进行了研究。令 $V = \Bbbk \oplus V'$，其中$V' = \Bbbk^{\oplus d-1}$ 是一个固定的 $d-1$维 $\Bbbk$向量空间。本节将探讨一个简单的观察：向 V 上的乘法可以用乘法常数来表示。令$e_1 = (1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$ $e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0)$，……，$e_d$构成 V的一组基。

我们引入一组 d^3 变量 $(\lambda_{ij}^k)_{1 \leq i,\ j,\ k \leq d}$ 并将结合律方程定义为以下方程，对每个 i，j，l，m均成立。

$$\sum_{k=1}^{d} \lambda_{ij}^k \lambda_{kl}^m - \sum_{k=1}^{d} \lambda_{ik}^m \lambda_{jl}^k = 0$$

以及针对每个 j，k 的单位元方程，由

$$\lambda_{j1}^k = \lambda_{1j}^k = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.2}$$

固定 λ^*_{*1} 和 λ^*_{1*}，如（2.2）所示，并将 d维代数的《模空间》定义为对应于交换商代数的（仿射概形）

$$\mathcal{M}_d = \frac{\Bbbk[\lambda^k_{ij} \mid 2 \le i,j \le d, 1 \le k \le d]}{\left(\sum_k \lambda^k_{ij}\lambda^m_{kl} - \sum_k \lambda^m_{ik}\lambda^k_{jl} \mid 1 \le i,j,l,m \le d\right)}.$$

命题 2.7. 设 $*\colon V \times V \to V$是一个 $\Bbbk$-双线性运算。记

$$e_i * e_j = \sum_k s^k_{ij} e_k,$$

对每个 $1 \le i,j,k \le d$，均如此。则 $*$定义一个结合乘法，当且仅当 $[s^k_{ij}]$满足结合律方程。类似地，$e_1 \in V$ 是 $*$ 的单位元，当且仅当$[s^k_{ij}]$ 满足单位元方程。

因此，结合且含单位元（单位元为 e_1）的运算 $*$ 与$\Bbbk$-代数同态 $\mathcal{M}_d \to \Bbbk$一一对应。

证明。 这几乎是显然的。对于指标 $1 \le i,j \le d$，我们有

$$(e_i * e_j) * e_l = \sum_k s^k_{ij} e_k * e_l = \sum_m \sum_k s^k_{ij} s^m_{kl} e_m$$
$$e_i * (e_j * e_l) = \sum_k e_i * e_k s^k_{jl} = \sum_m \sum_k s^m_{ik} s^k_{jl} e_m.$$

因此，$*$是一个结合乘法，当且仅当元组 $[s^k_{ij}]$ 满足结合律方程。 e_1 是单位元的情形也类似。□

更重要的是，命题2.7可推广到系数取自除 $\Bbbk$.

命题2.8。 设 R 是一个交换的 $\Bbbk$-代数。设 $V_R := V \otimes_\Bbbk R$ 是一个秩为 d 的自由 R-模。设 $*\colon V_R \times V_R \to V_R$ 是一个 R-双线性运算。记

$$e_i * e_j = \sum_k s^k_{ij} e_k,$$

对所有满足 $s^k_{ij} \in R$ 的 $1 \le i$、j、$k \le d$ 均成立。那么，$*$ 定义结合乘法，当且仅当$[s^k_{ij}]$ 满足结合律方程。类似地，$e_1 \in V$ 是 $*$ 的单位元，当且仅当 $[s^k_{ij}]$ 满足单位元方程。

因此，V_R 上的结合且含单位元（单位元为 e_1）的运算 $*$ 的集合，与 $\Bbbk$-代数同态 $\mathcal{M}_d \to R$一一对应。

例2.9。 设 $\mathcal{A}$ 是备注 2.3 中所述的形式变形。设 $d = \text{维数}_\Bbbk \mathcal{A}/(t)$。我们可以将 $\mathcal{A}$ 与 $V[\![t]\!]$ 等同，从而得到一个同态 $\mathcal{M}_d \to \mathcal{A}$。其他类型的变形也类似。

2.2. 模空间上的Zariski拓扑。代数 $\mathcal{M}_d$ 是交换的，因此带有其谱

$$\operatorname{Spec} \mathcal{M}_d = \{\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{M}_d \mid \mathfrak{p} \text{ prime ideal}\}$$

和 $\Bbbk$点谱

$$\operatorname{Spec}_\Bbbk \mathcal{M}_d = \{\mathfrak{m} \subseteq \mathcal{M}_d \mid \Bbbk \to \mathcal{M}_d/\mathfrak{m} \text{ bijective}\} \subseteq \operatorname{Spec} \mathcal{M}_d.$$

作为集合， $\Bbbk$点谱 $\operatorname{Spec}_\Bbbk \mathcal{M}_d$ 是.....的子集

$$\operatorname{Spec}_\Bbbk \Bbbk[\lambda_{ij}^k \mid 2 \leq i,j \leq d, 1 \leq k \leq d] \simeq \Bbbk^{d(d-1)^2},$$

因此，$\operatorname{Spec}_\Bbbk \mathcal{M}_d$ 是对所有可能的结构常数集合的一种花哨称呼。相比之下，集合 $\operatorname{Spec} \mathcal{M}_d$ 非常复杂，一般无法描述。$\operatorname{Spec} \mathcal{M}_d$ 和 $\operatorname{Spec}_\Bbbk \mathcal{M}_d$ 都带有 Zariski拓扑，而这种拓扑不容易明确描述。我们省略其定义，转而给出最重要的推论。

命题2.10. 设 $f\colon \mathcal{M}_d \to R$ 是任意一个交换 $\Bbbk$-代数的同态。运算 $f^*\colon \mathfrak{q} \mapsto f^{-1}(\mathfrak{q})$ 诱导出连续映射 f^*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}_\Bbbk R & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Spec}_\Bbbk \mathcal{M}_d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} R & \xrightarrow{f^*} & \operatorname{Spec} \mathcal{M}_d \end{array}$$

这个命题非常有用，因为对于特定的 R，我们对 $\operatorname{Spec} R$ 和 $\operatorname{Spec}_\Bbbk R$ 作为集合及拓扑空间都很了解。

例2.11. 取 $R = \Bbbk[t]$。则 $\operatorname{Spec}_\Bbbk R = \Bbbk$，其中双射将 $s \in \Bbbk$ 映到理想 $(t-s)$。该拓扑是余有限的，也就是说，唯一的闭集是整个空间和所有有限子集。集合 $\operatorname{Spec} R$ 稍大一些：它包含零理想 (0)。

例2.12. 取 $R = \Bbbk[\![t]\!]$。那么谱 $R = \{(t),(0)\}$。其拓扑的闭集为$\emptyset$, $\{(t)\}$, 谱 R。点 (t) 在谱 R 中是闭的，称为特殊点；而点 (0) 在谱 R 中是开的，称为一般点。

例2.13. 固定一个数 $r > 0$。谱$_\mathbb{C}$ $\mathbb{C}_r\{t\}$ 包含开圆盘 $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$。点 $s \in \Delta_r$ 对应于求值映射 $\mathbb{C}_r\{t\} \to \mathbb{C}$，它将级数 $\sum_{i\geq 0} \lambda_i t^i$ 映射为 $\sum_{i\geq 0} \lambda_i s^i$。考虑 $Z \subseteq$ 谱$_\mathbb{C}$ $\mathbb{C}_r\{t\}$的一个扎里斯基闭子集。它要么是整个谱$_\mathbb{C}$ $\mathbb{C}_r\{t\}$，要么 Z 包含于某个非零元素 $f \in \mathbb{C}_r\{t\}$的零点集中。在后一种情况下， $Z \cap \Delta_r \subseteq \{z \in \Delta_r \mid f(z) = 0\}$，且 $Z \cap \Delta_r$ 在欧氏拓扑下是闭的。由于 f 在 Δ_r上是解析的，我们可知 $Z \cap \Delta_r$ 没有聚点。

对于 $\mathfrak{p} \in$ 谱 $\mathcal{M}_d$，环 $\mathcal{M}_d/\mathfrak{p}$ 是一个整环，因此它有一个分式域$\kappa(\mathfrak{p})$：=Frac($\mathcal{M}_d/\mathfrak{p}$)，以及相应的同态 $\mathcal{M}_d \to \kappa(\mathfrak{p})$，由此在 $V_{\kappa(\mathfrak{p})}$ 上赋予一个 $\kappa(\mathfrak{p})$-代数结构。

2.3. 比较各种变形概念。考虑一个有限维 $\Bbbk$代数A，它不一定是交换的，且 $d = \dim_\Bbbk A$。再考虑一个域 $\Bbbk \subseteq \kappa$ 和一个同态 $f\colon \mathcal{M}_d \to \kappa$。根据命题2.10，拥有 f 等价于在 V_κ 上固定一个结合代数结构 $(V_\kappa, *)$。我们希望能有一种方式来表述 $(V_\kappa, *)$ 属于 A 的轨道，换言之，$(V_\kappa, *)$ 与 A 同构。照此表述并无意义，因为 κ 可能远大于 $\Bbbk$。

这通过张量化得到修正，与我们在定义2.4中所做的类似。令κ 为 κ的代数闭包。我们称 f 是 A 的轨道中的一个点，如果存在一个 κ-代数（V_κ， $*$）的同构 $A \otimes_\Bbbk \kappa$。

定理2.14。 考虑点集 O_A $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \mathcal{M}_d$，满足 $\mathcal{M}_d \to \kappa$（$\mathfrak{p}$）是 A的轨道中的一个点。这是 $\operatorname{Spec} \mathcal{M}_d$ 的一个局部闭子集（这意味着存在一个 *Zariski* 开子集 $U \subseteq \mathcal{M}_d$，使得 $O_A \subseteq U$ 是扎里斯基闭的）。

如果 A 是半单的，那么 O_A 是开集。

证明。群 GL(V) 作用于 $\mathcal{M}_d$，因而也作用于 Spec $\mathcal{M}_d$。固定轨道中任意一点 $[(V, \circ)] \in \operatorname{Spec}_{\Bbbk} \mathcal{M}_d$，其中该轨道属于 A，并考虑映射 GL(V) $\to$ Spec $\mathcal{M}_d$，其定义为 $g \mapsto g \cdot (V, \circ)$。根据代数群作用的一般性质，该映射的像是局部闭的 [6, 命题 1.11]。具有代数 $(V_\kappa, *)$ 的点 $\mathcal{M}_d \to \kappa$ 属于该像，当且仅当将基域扩张至代数闭包 κ 后，存在矩阵 $g \in \mathrm{GL}(V_\kappa)$，证明 $(V_\kappa, *)$ 与 $(V_\kappa, \circ)$ 同构。至此，论证的一般部分告一段落。

根据 [22,推论 2.5]， O_A 对于 A 半单的情形是开集。 □

定义 2.15. 设 A, B 是 V 上两个 $\Bbbk$-代数结构。令 f_A， f_B：$\mathcal{M}_d \to \Bbbk$ 为对应的两个同态， f_A, $f_B \in \operatorname{Spec}_{\Bbbk} \mathcal{M}_d$ 为对应的两个点。若 f_A 属于 f_B 的轨道的 Zariski 闭包，我们称 A 拓扑变形为 B。

下面的传递性结果在拓扑层面几乎显而易见，但其代数对应结果（在定义 2.4的设定下）则极其非平凡；我们认为，任何对此结果的证明都必然会用到拓扑，或许是以隐蔽的方式。下文（命题 2.17、定理 2.20）将证明两者一致，因此我们可以在代数层面得到传递性；这正是引入拓扑层面概念的全部缘由。

命题 2.16 (变形的传递性)。在定义 *2.15*的设定下，以下结论成立：

(1) A 拓扑变形为 B 当且仅当轨道 O_A 包含在轨道的闭包中O_B。特别地，定义*2.15* 不依赖于 f_A， f_B。(2) 若 A 拓扑变形为 B 且 B 拓扑变形为 C，那么 A 拓扑变形为 C。

证明。 假设 A 按照定义2.15的意义变形为 B。考虑扎里斯基闭包O_A。它是扎里斯基闭的，$\overline{\mathrm{GL}}(V)$ 在其上作用，且它包含点 f_A。因此它也包含$O_A = \mathrm{GL}(V) \cdot f_A$。

假设 A 变形为 B，且 B 变形为 C。这意味着 $O_B \supset O_A$ 和 $O_C \supset \overline{O_B}$，因此

$$\overline{O_C} = \overline{\overline{O_C}} \supset \overline{O_B} \supset O_A,$$

因此 A变形为 C。 □

以下结果已为人所知 [11], 为完整起见，我们将其列出。

命题 2.17 (变形概念一致)。 固定两个 $\Bbbk$-代数结构 A、 B， 定义在 V上。以下条件等价

(1) A 拓扑变形为 B 按定义*2.15*，(2) 存在一个将 A变形为 B 按定义*2.4*。

证明。 给定一个变形 $\mathcal{A}$，固定一个线性同构 $V \simeq A$。我们得到一个 $\Bbbk[\![t]\!]$-模的同构 $A_t \simeq V[\![t]\!]$，从而得到一个态射 f：谱$\Bbbk[\![t]\!] \to$ 谱 $\mathcal{M}_d$，它将一般

点 (0)映到 2.12例中见，其轨道为 B；而特殊点(t) 映到其轨道为 A。因此我们有

$$O_A \ni f((t)) \in f\left(\overline{(0)}\right) = f\left(\overline{f^{-1}(O_B)}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(\overline{O_B})\right) \subseteq O_B$$

因此， A 拓扑变形为 B。

现在假设 A 拓扑变形为 B，使得 $O_A \subset O_B$。取一点 $f_A \in \overline{O_{A^\circ}}$ 根据[8, 引理 3。10], 存在一个同态 $\mathcal{M}_d \to \Bbbk[\![t]\!]$ 及其对应的连续映射，使得谱 $\Bbbk[\![t]\!]$ 中的特殊点映射到 f_A，而谱 $\Bbbk[\![t]\!]$ 中的一般点映射到 O_B。同态 $\mathcal{M}_d \to \Bbbk[\![t]\!]$ 与 A的形式变形相同。□

对于 $\Bbbk = \mathbb{C}$，我们有以下附加结果。

命题 2.18。设 $\Bbbk = \mathbb{C}$，并考虑一个将 A 变形为 B的强平坦变形$(A_b, \circ, +)$。它给出一个对应的映射 $\Delta_r \hookrightarrow$ 谱 $\mathbb{C}_r\{t\} \to$ 谱 $\mathcal{M}_d$。谱 $\mathbb{C}_r\{t\}$ 的像与 B 的轨道在一个稠密开子集上相交，因此 A 拓扑变形为 B。

证明。 轨道 O_B 根据定理 2.14是局部闭的，因此交集 谱$\mathbb{C}_r\{t\}$ 是局部闭的，也就是说，该交集等于 $Z \subseteq U \subseteq$ 谱 $\mathbb{C}_r\{t\}$，其中 $U \subseteq$ 谱 $\mathbb{C}_r\{t\}$ 是开集，而 $Z \subseteq U$ 是闭集。我们希望证明 $Z = U$。根据强平坦变形的假设， $Z \subseteq U$ 包含任意接近零的点， s_i 因此零是 Z的一个聚点。如果 $Z \neq U$，那么根据例 2.13，子集 Z 没有聚点。证明完毕。□

2.4. **通过下降从 $\Bbbk[\![t]\!]$ 到 $\Bbbk[t]$ 。本节包含对定义** 2.4中引入的各种变形概念进行比较的关键结果。根据引理 2.5 ，我们已经知道，变形的存在必然意味着分裂变形的存在。本节中，我们将从分裂变形得到一个多项式分裂变形。

该方法是一种类似 Beauville-Laszlo 下降的论证。Beauville-Laszlo 下降见 [4] ，而在更一般设定下的一个简洁表述见 [3]。关于能否从 $\Bbbk[\![t]\!]$ 过渡到 $\Bbbk[t]$ 的问题贯穿整个变形理论。对于模，这一问题已通过完全不同的方法在 [67, 65]中得到证明。

为阐明这一论证，我们回顾一些关于某些 $\Bbbk[t]$ 和 $\Bbbk[\![t]\!]$ 模的结果。回顾一下，我们用记号 $\Bbbk[t^{\pm 1}]$ 表示 $\Bbbk[t, t^{-1}]$。

(1) 张量化$(-) \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t^{\pm 1}]$ 和$(-) \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \Bbbk((t))$ 相当于对 t求逆。特别地，我们有 $\Bbbk[\![t]\!] \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t^{\pm 1}] \simeq \Bbbk((t))$。**(2)** 对$(-) \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$进行张量化，对于有限生成的 $\Bbbk[t]$-模，相当于将其替换为一个$\Bbbk[\![t]\!]$-模。这是一个正合函子，特别是，它保持核与交集。对于有限生成的 $\Bbbk[\![t]\!]$-模 M，我们有 $M \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$。一般来说，若不假设有限生成，这一结论并不成立。（下面定理2.19 的关键部分是验证：对于某些显然不是有限生成的模，这一结论仍然成立。）

定理 2.19 (Beauville-Laszlo 下降或忠实平坦下降)。 设 $\mathcal{A}$ 是 A 到 B 上的一个分裂变形，定义于 $\Bbbk[\![t]\!]$ 上，并固定一个同构 $\widehat{i}$： $B((t)) \to \widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}]$。设 $\mathcal{B} := B[t^{\pm 1}] \cap \widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})$，其中交集取自 $B((t)) = \widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}])$。那么 $\mathcal{B}$ 是一个 $\Bbbk[t]$-代数，它是 A 到 B 的多项式分裂变形。

证明。 首先，子集 $\mathcal{B}$ 是子代数的交集，因此是 $B((t))$ 的子代数。已有的映射可用下图概括

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & B[t^{\pm 1}] & \longrightarrow & \frac{B[t^{\pm 1}]}{\mathcal{B}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}) & \longrightarrow & B((t)) & \longrightarrow & \frac{B((t))}{\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \widehat{i}\downarrow\simeq & & \widehat{i}\downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \\
0 & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}] & \longrightarrow & \frac{\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}]}{\widehat{\mathcal{A}}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

由于对元素 t 求逆是正合函子，代数 $\mathcal{B}[t^{-1}]$ 是 $B[t^{\pm 1}]$ 与 $\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}[t^{-1}]) = B((t))$ 在 $B((t))$ 中的交集，因此 $\mathcal{B}[t^{-1}] = B[t^{\pm 1}]$，正如所需。

作为 $\Bbbk[t]$-模，商 $B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})$ 同构于 $(\Bbbk((t))/\Bbbk[\![t]\!])^{\oplus d}$。特别地，同态 $B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}) \to (B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})) \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$ 是一个同构。这意味着该同态

$$B[t^{\pm 1}] \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!] \to B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}}) \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$$

是满射。此外，同态

$$B[t^{\pm 1}] \to B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})[t^{-1}] = 0$$

显然是满射。由于 $\Bbbk[t^{\pm 1}] \oplus \Bbbk[\![t]\!]$ 是忠实平坦的 $\Bbbk[t]$-模，因此 $B[t^{\pm 1}] \to B((t))/\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})$ 是满射。$\Bbbk[t]$-模 $\mathcal{B}$ 是此映射的核，因此它属于如下序列

$$0 \to \mathcal{B} \to B[t^{\pm 1}] \to \frac{B((t))}{\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})} \to 0.$$

将正合函子 $(-) \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$ 应用于此序列，可得

$$0 \to \mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!] \to B((t)) \to \frac{B((t))}{\widehat{i}^{-1}(\widehat{\mathcal{A}})} \to 0,$$

$\widehat{\ }$，因此 $\mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!] \simeq \mathcal{A}$。由此可得

$$\frac{\mathcal{B}}{t \cdot \mathcal{B}} \simeq \mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \frac{\Bbbk[t]}{(t)} \simeq \mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!] \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \frac{\Bbbk[\![t]\!]}{(t)} \simeq \widehat{\mathcal{A}} \otimes_{\Bbbk[\![t]\!]} \frac{\Bbbk[\![t]\!]}{(t)} \simeq \frac{\widehat{\mathcal{A}}}{t \cdot \widehat{\mathcal{A}}} \simeq A.$$

另一个推论是，$\mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[\![t]\!]$ 和 $\mathcal{B} \otimes_{\Bbbk[t]} \Bbbk[t^{\pm 1}]$ 分别是 $\Bbbk[\![t]\!]$ 和 $\Bbbk[t^{\pm 1}]$ 上有限生成的自由模。由于 $\Bbbk[\![t]\!] \oplus \Bbbk[t^{\pm 1}]$ 是忠实平坦的 $\Bbbk[t]$-模，由忠实平坦下降（以及 $\Bbbk[t]$ 是主理想整环）可知，$\mathcal{B}$ 是有限生成的自由 $\Bbbk[t]$-模。□

下面的定理证明了上述所有变形概念彼此等价。此时证明很容易，因此我们称之为定理，主要是因为它有重要的应用。代数几何中的变形理论学界认为，定理 2.20 背后的思想相对标准。然而，在我们面向的非交换代数学界，这些思想似乎绝非标准。这里，蕴含关系（7） $\Longrightarrow$ （6）最近已在 [61, 命题 30], 中得到证明，但其他蕴含关系似乎都是新的，尤其是多项式分裂变形。

定理 2.20。固定一个维数为 d 的向量空间 V。对于满足 $d = \text{维数}_{\Bbbk} A = \text{维数}_{\Bbbk} B$ 的（抽象）代数 B 和 A，以下条件等价：

(1) 存在从 A 到 B的变形，如定义2.4所述，(2) 存在从 A 到 B的分裂变形，如定义2.4所述，(3) 存在从 A 到 B的多项式分裂变形，如定义2.4所述，(4) O_A 的轨道包含于 O_B的轨道的 *Zariski* 闭包中，(5) A 在拓扑意义下变形为 B，如定义2.15所述。

如果这些等价条件成立，我们就说 A变形为 B。如果 A变形为 B，且 B 变形为 C，那么 A变形为 C。

此外，如果 $\Bbbk = \mathbb{C}$，那么这些条件等价于以下条件

(6) 存在从 A 到 B 的强平坦变形，如定义2.4所述。

此外，如果 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 且 B 是半单的，那么它们等价于以下条件，见定义2.1

(7) 存在一个在半径 r 内收敛的 A 变形，其中至少有一个 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $|s| < r$，使得 $A|_{t=s}$ 与 B 同构。

证明。 蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (2) 和 (2) $\Longrightarrow$ (1) 可由定义直接得出，参见定义 2.4 之后的讨论。蕴含关系 (1) $\Longrightarrow$ (3) 由引理 2.5 和定理 2.19 得出。(4) 与 (5) 的等价性由命题 2.16 得出，而 (1) 与 (4) 的等价性由命题 2.17 得出。最后，变形的传递性由命题 2.16 得出。

当 $\Bbbk = \mathbb{C}$ 时，蕴含关系 (3) $\Longrightarrow$ (6) 由包含关系 $\mathbb{C}[t] \hookrightarrow \mathbb{C}_r\{t\}$ 得出。蕴含关系 (6) $\Longrightarrow$ (5) 由命题 2.18 得出。当 B 是半单的时，定理 2.14 表明其轨道是 Zariski 开的，因此命题 2.18 的论证适用，并可得出 (7) $\Longrightarrow$(5)。蕴含关系 (6) $\Longrightarrow$ (7) 是显然的。□

3. 收缩代数

在本节中，我们研究收缩代数。我们采用 [7]中得到的分类，并主要讨论 D 型。首先，我们给出 A 型和 D 型收缩代数的显式生成关系与格罗布纳基。接着，我们证明每个 D 型收缩代数都可以（平坦地）变形为至多一个半单代数。最后，我们证明这种变形确实存在。即使假定完全了解几何方面，这些结果似乎仍是新的。在几何方面，Toda [62]构造了收缩代数族，但这些代数族是否平坦尚未可知。

3.1. A 型和 D 型收缩代数的描述。

收缩代数分为三种类型：A、D、E，参见 [7]了解它们与 A、D、E 型单边邓肯图之间的联系。本文研究 A 型和 D 型，E 型留待今后研究。A 型非常简单，因此本文的主要部分讨论 D 型。

记号 3.1。用 $\Bbbk\langle x,\ y\rangle$ 表示以两个变量 x和 y生成的自由非交换代数。用 $\Bbbk\langle\langle x,\ y\rangle\rangle$ 表示沿极大理想（$x,\ y$）对 $\Bbbk\langle x,\ y\rangle$ 取完备化。

根据定义，收缩代数是一个商

$$\frac{\Bbbk\langle\langle x, y\rangle\rangle}{(\partial_x f, \partial_y f)},$$

其中 $f \in \Bbbk\langle\langle x, y\rangle\rangle$ 是某个级数，而 $\partial_x f, \partial_y f$ 是循环导数 [7]。下面我们将明确给出这些内容。

定义 3.2。定义下列收缩代数 [7, 表 1] 由 $\Bbbk\langle\langle x、\ y\rangle\rangle/(\partial_x f、\ \partial_y f)$ 给出，类型为 A 型和 D 型。

type	f	$\partial_x f$	$\partial_y f$
A_n	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{n}y^n$	x	y^{n-1}
$D_{n,m}$	$\frac{1}{2n}x^{2n} + \frac{1}{2m-1}x^{2m-1} + xy^2$	$x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2$	$xy + yx$
$D_{n,\infty}$	$\frac{1}{2n}x^{2n} + xy^2$	$x^{2n-1} + y^2$	$xy + yx$

The indexes n, m can be any integers $n, m \geq 2$.

我们称一个代数为类型为 D 的收缩代数，当且仅当它与以下代数之一同构：$D_{n、\ m}$ 或$D_{n、\ \infty}$。

定义 3.2并不能直接给出收缩代数的关系，因为完备化 $\Bbbk\langle\langle x、\ y\rangle\rangle$ 可能产生新的生成关系。文献 [7, §6] 给出了用生成元与关系表示的显式描述。为方便读者，我们在此重新证明这些结果。我们还规定了标准基的记号；标准基是格罗布纳基的幂级数类比，参见 [25]。我们考虑满足 $\deg(y) \gg \deg(x)$的字典序优先次数单项式序。下面我们给出一组经过完备化后的生成关系，以及在格罗布纳基（GB）中出现的附加关系（每次仅有一个）。

命题 3.3 ([7, §6])。设 $n,\ m \geq 2$。根据定义 *3.2*，收缩代数可表示为以下 $\Bbbk\langle x,\ y\rangle$。

type	生成关系	*GB* 添加的关系。	*dim.*	中心的维数
A_n	x, y^{n-1}	*none*	n	n
$D_{n,m},\ m \leq n$	$xy + yx, x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2, x^{2n+2m-3}$	$x^{2n-1}y$	$4n + 2m - 4$	$n + 2m - 1$
$D_{n,}^{m},\ m > n$	$xy + yx, x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2, x^{4n-2}$	$x^{2n-1}y$	$6n - 3$	$3n$
$D_{n,\infty}$	$xy + yx, x^{2n-1} + y^2, x^{4n-2}$	$x^{2n-1}y$	$6n - 3$	$3n$

此外，我们定义$D_{n,1}$ 和$D_{1,m},\ D_{1,\infty}$ 由与上表相同的生成关系给出。

证明。Fo r型 A，我们有 $\Bbbk\langle\langle x, y\rangle\rangle/(x, y^{n-1})$已经是交换的，并且同构于

$$\Bbbk[\![y]\!]/(y^{n-1}) \simeq \Bbbk[y]/(y^{n-1}).$$

让我们转到型$D_{n,m}$，其中 $m \leq n$。

由 $\Bbbk\langle x, y\rangle$ 生成的理想包含 $x^{2n-1}y$，因此 $x^{2n-1}y^2$，进而也有 $x^{2n-1}(x^{2n-1}+x^{2m-2})$。由于 $m \leq n$，我们有 $2n-1 > 2m-2$。模去 (x, y) 的任意幂后，关系 $x^{2n-1}(x^{2n-1} + x^{2m-2})$ 给出 $x^{2n-1} \cdot x^{2m-2}$。因此，在完备化中，我们也有关系 $x^{2n-1+(2m-2)}$。该理想

$$I = \left(xy + yx,\ x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2,\ x^{2n+2m-3}\right) \subseteq \Bbbk\langle x, y\rangle$$

包含一个幂 $(x, y)^N$，对于 $N \gg 0$，因此 I 的完备化中不再有更多元素。我们直接验证

$$y^2 + x^{2m-1} + x^{2n-1},\ yx + xy,\ x^{2n-1}y,\ x^{2n+2m-3}$$

构成理想 I 的一个标准基。商 $\Bbbk\langle x,y\rangle/I$ 作为向量空间具有基 $1, x, \cdots, x^{2n+2m-4}, y, xy, \cdots x^{2n-2}y$，其维数为 $4n+2m-4$。注意到

$$x^{2n+2m-4} \in I, \quad \text{but} \quad x^{2n+2m-3} \notin I.$$

该代数的中心维数为 $n+2m-1$，并且其向量空间由 x^{2i}（$i = 0,1,2,\ldots n+m-2$（$n+m-1$ 个元素））以及 $x^{2n-1+2i}$（$i = 0,1,\cdots, m-2$（$m-1$个元素））和 $x^{2n-2}y$（一个元素）张成。

对于类型 $D_{n,m}$ 且具有 $m \geq n$ 的情形，以及对于 $D_{n,\infty}$ 的情形，考虑过程完全类似。唯一的区别是，对于 $m \geq n$，我们有 $2n-1 < 2m-2$，因此在定义该代数的理想 $I \subseteq \Bbbk\langle x,y\rangle$ 中得到 x^{4n-2}。这意味着 $\dim_{\Bbbk} \Bbbk\langle x,y\rangle/I = 6n-3$，且中心维数为 $3n$，其基为 x^{2i}（$i = 0,1,2,\ldots 2n-2$（$2n-1$ 个元素））和 $x^{2n+2i-1}$（对于$i = 0,1,\cdots, n-1$（n 个元素）），以及 $x^{2n-2}y$（一个元素）。□

注 3.4。由于 x^{4n-2} 是 $D_{n\text{ 的}m}$，对于 $m > n$，我们有 $D_{n,\ m} = D_{n,}$ 对每个 $m \geq 2n$ 均成立。

3.2。**变形为半单代数的障碍**。这里我们表述若干半连续性结果，这些结果限制了哪些半单代数可以由收缩代数变形得到。这一方法是经典方法，早已见于 [22, 命题 2。7] 或 [61,命题 23，推论 27]。

我们将采用以下表述。固定非交换多项式

$$w_1(x_1,\ldots,x_k),\ldots,w_l(x_1,\ldots,x_k) \in \Bbbk\langle x_1,\ldots,x_k\rangle.$$

对于一个代数 A 及其元素 a_1、...、$a_k \in A$，通过 $w_i(a_1$、...、$a_k)$，我们表示多项式 $w_i(x_1$、...、$x_k)$ 在 $x_1 = a_1$、...、$x_k = a_k$ 处的求值，并采用来自 A 的乘法。通过 $\langle w_\bullet(a_1$、...、$a_k)\rangle$，我们表示由 $(w_i(a_1$、...、$a_k))_{i=1}$、...、$_l$ 张成的 $\Bbbk$ 上的线性空间。类似地，对于具有元素 b_1、...、$b_k \in B$ 的代数 B，通过 $w_i(b_1$、...、$b_k)$，我们表示多项式 $w_i(x_1$、...、$x_k)$ 在 $x_1 = b_1$、...、$x_k = b_k$ 处的求值，并采用来自 B 的乘法。通过 $\langle w_\bullet(b_1$、...、$b_k)\rangle$，我们表示由 $(w_i(a_1$、...、$a_k))_{i=1}$、...、$_l$ 张成的 $\Bbbk$ 上的线性空间。

命题 3.5（半连续性，[61, 命题 23]）。设 A, B 是有限维 $\Bbbk$ 代数，且 A 变形为 B。固定非交换多项式 $w_1,\ldots,w_l \in \Bbbk\langle x_1,\ldots,x_k\rangle$ 及元素 $a_1,\ldots,a_k \in A$。那么存在元素 $b_1,\ldots,b_k \in B$，使得

$$\dim_{\Bbbk} \langle w_\bullet(a_1,\ldots,a_k)\rangle \leq \dim_{\Bbbk} \langle w_\bullet(b_1,\ldots,b_k)\rangle .$$

证明。为完整起见，我们给出证明。可以将域 $\Bbbk$ 扩张为代数闭域。令 $\mathcal{A}$ 为一个 $\Bbbk[t]$-代数，它是从 A 到 B的分裂多项式变形，见定理 2.20，因此 $\mathcal{A}[t^{-1}] \simeq B[t^{\pm 1}]$ 且 $\mathcal{A}/(t) \simeq A$。令 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathcal{A}$ 为任意映射到$a_1,\ldots,a_k$ 模 t的元素。令 $v_1,\ldots,v_d \in \mathcal{A}$ 满足

$$\mathcal{A} = \Bbbk[t]v_1 \oplus \ldots \oplus \Bbbk[t]v_d.$$

将每个元素 $w_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) \in \mathcal{A}$ 写成组合 $\sum_{j=1}^{d} w_{ij}v_j$，其中 $w_{ij} \in \Bbbk[t]$。考虑矩阵

$$W := [w_{ij}]_{i=1,\ldots,l,j=1,\ldots,d} \in \mathbb{M}_{l\times d}(\Bbbk[t]).$$

W模 t的约化是系数矩阵，其中 $w_i(a_1, \ldots\ldots, a_k)$ 的系数是相对于基 v_1模 $t, \ldots\ldots, v_d$模 t给出的。类似地，对于每个 $\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}$， W模 $(t-\lambda)$ 的约化是系数矩阵，其中 $w_i(b_1, \ldots\ldots, b_k)$ 的系数是相对于 B 的基 v_1模 $t, \ldots\ldots, v_d$模 t给出的，其中 $b_1, \ldots\ldots, b_k \in B \simeq A/(t-\lambda)$ 是 $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_k$ 的像。因此，定理中的陈述归结为以下断言：

$$\mathrm{rk}(W_{t=0}) \leq \sup_{\lambda \in \Bbbk \setminus \{0\}} \mathrm{rk}(W_{t=\lambda})$$

但这是成立的，因为矩阵的秩在 $t=0$ 处只能降低，这是由多项式条件（子式不为零）给出的。□

推论3.6。 设 R 是 D型的收缩代数。那么 R 不会变形为任何代数R'，使得 R' 满射到 $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$（对 $n \geq 3$）。

证明。考虑元素 x^i、 $x^i y$，其中 $i = 0 = 1, \ldots, \dim_{\Bbbk} R$。它们张成 R，因此根据半连续性（命题 3.5），存在元素 x'、$y' \in R$，使得 $(x')^i$、$(x')^i y'$，其中 $i = = 0, 1 \ldots, \dim_{\Bbbk} R'$ 张成 R'。由于 $\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ 是 R' 的像，因此存在矩阵 X'、 Y'，使得$\mathbb{M}_n(\Bbbk)$ 由以下元素张成

$$\left\{(X')^i \mid i = 0, 1, \ldots\right\} \cup \left\{(X')^i Y' \mid i = 0, 1, \ldots\right\}.$$

矩阵 X'满足其特征多项式，因此 1， X'，……，$(X')^n$ 线性相关，且上述元素张成的空间维数至多为 $2n$。由此得到 $2n \geq n^2$，因此 $n \leq 2$。□

定理 3.7。 设 N 是 A 型或 D 型收缩代数。则 N 至多可平坦变形为一个半单代数。更确切地说，对于每种类型，唯一可能的变形如下：

type	*can only deform to*
A_n	$\Bbbk^{\times n}$
$D_{n,m},\ m \leq n$	$\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1} \times \Bbbk^{2m}$
$D_{n,m},\ m > n$	$\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1} \times \Bbbk^{2n+1}$
$D_{n,\infty}$	$\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1} \times \Bbbk^{2n+1}$

两列中的代数具有相同维数的中心。

证明。 根据 C 推论 3.6，可能出现的半单代数具有如下形式

$$A_{k,l} = \mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times k} \times \Bbbk^{\times l}$$

对于某个 k， $l \geq 0$。代数 $A_{k,\ l}$的维数为 $4k+l$，其中心的维数为 $k+l$。我们将用到以下两个事实：

(1) 事实 *1.* 若 N 变形为$A_{k,l}$，则 N 的中心维数大于或等于 $A_{k\text{的中心维数},\ l}$例如参见 [22, 命题 2。7]或进行与命题 3.5类似的论证。

(2) 事实 *2.* 若 $c \in N$ 是一个幂零元，且满足 $c^{d-1} \neq 0$，则 N 不能变形为$A_{k,l}$，其中 $2k+l < d$。

事实上，由幂零性可知，$1, c, \ldots, c^{d-1}$ 在 N 中线性无关，因此命题 3.5 给出 $c' \in A_{k,l}$ 中的一个元素（未必是幂零的），其幂 $1, c', \ldots, (c')^{d-1}$ 线性无关。但矩阵满足其特征多项式，因此 c' 的各次幂在每个 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)$ 中张成的空间维数至多为 2。总计这给出一个维数为 $2k+l$ 的空间。若 $2k+l < d$，则得出矛盾。

情形 0. 对于 A型，事实 2 蕴含 $A_{k,l}$ 也由一个元素生成，因此它是交换的。

情形 1. 首先考虑以下情形 $D_{n,\ m}$ 其中 $m > n$，根据备注 3.4，还包括 $D_{n,\ \infty}$。此处，$D_{n,\ m}$ 的维数为 $6n-3$，$D_{n,\ m}$ 的中心是 $3n$ 维的，且 $x^{4n-3} \neq 0$。在这两种情形下，我们得到以下条件

$$\begin{aligned} 6n-3 &= 4k+l \\ 4n-2 &\leq 2k+l \\ k+l &\leq 3n \end{aligned}$$

我们得到 l 是奇数，并且

$$12n-6 = 3\cdot(4n-2) \leq 6k+3l = 3(2k+l) = 4k+l+2(k+l) \leq 6n-3+6n = 12n-3.$$

数值 $3(2k+l)$ 是奇数且能被 3 整除，因此 $3(2k+l) = 12n-3$，所以 $k = n-1, l = 2n+1$。

情形 2. 情形 $D_{n,\ m}$，其中 $n \leq m$，与此类似。这两个事实推出以下不等式

$$\begin{aligned} 4n+2m-4 &= 4k+l \\ 2n+2m-3 &\leq 2k+l \\ k+l &\leq n+2m-1 \end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned} 3n-3 = (4n+2m-4)-(n+2m-1) &\leq (4k+l)-(k+l) = 3k \\ 2n-1 = (4n+2m-4)-(2n+2m-3) &\geq (4k+l)-(2k+l) = 2k \end{aligned}$$

从而有 $n-1 \leq k < n$，因此有 $k = n-1$、$l = 2m$。 □

3.3. **将 $D_{m,\ n}$、$D_{n,\ \infty}$ 变形为半单代数的存在性。** 为了提供所需的变形，我们将大量使用定理 2.20 中证明的变形的传递性。我们还将使用注 3.4，并且只考虑 $D_{n,\ m}$ 情形。

我们进行归纳证明。归纳基由以下情形构成：$D_{1,\ \infty}$ 和 $D_{n,\ 1}$ 如命题3.3所定义。我们将使用以下观察结果。

注 3.8。 代数 $\mathbb{k}\langle x,\ y\rangle/(xy+yx,\ x^2-1,\ y^2-1)$ 同构于 $\mathbb{M}_2(\mathbb{k})$。该同构将 x、y 映射为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

分别。

引理 3.9。 代数 $D_{1,\ \infty}$ 变形为 $\mathbb{k}\times\mathbb{k}\times\mathbb{k}$。

证明。 该代数是 $\mathbb{k}\langle x,y\rangle$ 关于理想 $(xy+yx, x+y^2, xy, x^2)$ 的商。第二个方程允许代入 $x := -y^2$，从而得到商 $\mathbb{k}[y]/(y^3)$。所需的变形由 $\mathbb{k}[y,t]/(y\cdot(y-t)\cdot(y+t))$ 给出。□

引理 3.10。 对于 $n \geq 1$，代数 $D_{n,1}$ 变形为 $\mathbb{M}_2(\mathbb{k})^{\times n-1}\times\mathbb{k}\times\mathbb{k}$。

证明。 代数 $D_{n,1}$ 是 $\mathbb{k}\langle x,y\rangle$ 对理想 $(xy+yx, 1+y^2, x^{2n-1})$ 取商得到的。将 y 乘以一个四次单位根，可将该理想变为 $(xy+yx, y^2-1, x^{2n-1})$。考虑

代数 $\mathcal{A}=\Bbbk\langle x,y\rangle[t]/\left(xy+yx,y^2-1,x\left(x^{2n-2}-t^{2n-2}\right)\right)$。它是一个自由的 $\Bbbk[t]$-模，秩为 $4n-2$，且 $\mathcal{A}/(t)=D_{n,1}$。

我们将证明，$\mathcal{A}$ 是$D_{n,1}$ 到 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1}\times\Bbbk\times\Bbbk$的多项式分裂变形。

设 $\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$ 是 $\Bbbk$中 $s^{n-1}=1$ 的解。我们有

$$x^{2n-2}-t^{2n-2}=\prod_{i=1}^{n-1}\left(x^2-\omega_i t^2\right).$$

由于 $\Bbbk$ 的特征为零，对于 $i=1,\ldots,n-1$，元素 x 和 $x^2-\omega_i t^2$ 在 $\mathcal{A}[t^{-1}]$中两两互素且正规。反复使用中国剩余定理可得

$$\mathcal{A}[t^{-1}]\simeq\frac{\mathcal{A}[t^{-1}]}{(x)}\times\prod_{i=1}^{n-1}\frac{\mathcal{A}[t^{-1}]}{(x^2-\omega_i t^2)}$$

代数 $\mathcal{A}[t^{-1}]/(x)$是 $\Bbbk[x,t^{\pm1}]$ 对(y^2-1)取商所得，因此同构于 $\Bbbk[t^{\pm1}]\times\Bbbk[t^{\pm1}]$，符合要求。固定 i并考虑代数

$$\mathcal{A}_i:=\frac{\mathcal{A}[t^{-1}]}{(x^2-\omega_i t^2)}\simeq\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle[t^{\pm1}]}{(xy+yx,\ y^2-1,\ x^2-\omega_i t^2)}.$$

代入 $x:=xt\sqrt{\omega_i}$，我们看到这个商同构于代数 $\Bbbk\langle x,y\rangle/(xy+yx,y^2-1,x^2-1)[t^{\pm1}]$。根据注 3.8，我们知道这就是 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)[t^{\pm1}]$。$\square$

归纳步骤要求我们引入以下辅助代数

$$A_2:=\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle}{(xy+yx,\ y^2,\ (x^2-1)y,\ (x^2-1)^2)}\tag{3.1}$$

引理 3.11。代数 A_2 的维数为6，其中心的维数为3，并且可以变形为 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)\times\Bbbk\times\Bbbk$。

证明。考虑 $\Bbbk[t]$-代数 $A_2(t):=\Bbbk\langle x,y\rangle[t]/I$，其中 I 由 $xy+yx$、y^2、$(x^2-1)y$、$(x^2-1)\cdot(x^2-t)$ 生成。这是一个秩为 6 的自由 $\Bbbk[t]$-模。对于每个 $\lambda\in\Bbbk\setminus\{1,0\}$，考虑代数 $A_2(\lambda):=A_2(t)/(t-\lambda)$。具体来说，它是代数

$$A_2(\lambda)=\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle}{(xy+yx,\ y^2,\ (x^2-1)y,\ (x^2-1)\cdot(x^2-\lambda))}.$$

由于 $\lambda\neq1$，中心元素 x^2-1、$x^2-\lambda$ 合起来生成单位理想。根据中国剩余定理

$$A_2(\lambda)\simeq\frac{A_2(\lambda)}{(x^2-1)}\times\frac{A_2(\lambda)}{(x^2-\lambda)}.$$

在商 $A_2(\lambda)/(x^2-\lambda)$ 中，y 的像为零，因此 $A_2(\lambda)\simeq\frac{\Bbbk[x]}{(x^2-\lambda)}\simeq\Bbbk\times\Bbbk$，因为 $\Bbbk$ 是代数闭的且 $\lambda\neq0$。我们来分析

$$A':=\frac{A_2(\lambda)}{(x^2-1)}\simeq\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle}{(xy+yx,\ y^2,\ x^2-1)}.$$

Take

$$A'(t):=\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle[t]}{(xy+yx,\ y^2-t,\ x^2-1)}.$$

这是一个秩为 4 的自由 $\Bbbk[t]$-模，其基为 $1,\ x,\ y,\ xy$。对于每个 $t=\mu\in\Bbbk\setminus\{0\}$，我们都可以选择 $\nu\in\Bbbk$ 使得 $\nu^2=\mu$。经过一次 $y\mapsto y\cdot\nu$ 的变换后，我们有

$$\frac{A'(t)}{(t-\mu)}=\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle[t]}{(xy+yx,\ y^2-\nu^2,\ x^2-1)}\simeq\frac{\Bbbk\langle x,y\rangle[t]}{(xy+yx,\ y^2-1,\ x^2-1)}.$$

最右侧的代数是矩阵代数 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)$ ，根据注记 3.8，代数$A'(t)$ 给出了从 A' 到 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)$的一个变形。因此，对于每个 $\lambda \neq 0,\ 1$，代数 $A_2(\lambda)$拓扑变形为 $\mathbb{M}_2(\Bbbk) \times \Bbbk \times \Bbbk$。因此，对于 $\lambda = 1$，结论同样成立。 □

命题 3.12。 设 $m, n \geq 2$ 为自然数。那么雅可比代数 $D_{n,m}$ 可以平坦变形为雅可比代数 $D_{n-1,m-1} \times A_2$。此外，雅可比代数 $D_{n,\infty}$ 可以变形为 $D_{n-1,\infty} \times A_2$。

证明。 首先考虑 $m \leq n$。根据命题 3.3，代数 $D_{n,m}$ 的标准基由以下元素组成。

$$xy + yx,\ x^{2n-1} + x^{2m-2} + y^2,\ x^{2n+2m-3},\ x^{2n-1}y.$$

考虑 $\mathcal{A} := \Bbbk\langle x,\ y\rangle[t]/I$，其中理想 I 由

$$xy+yx,\ x^{2(n-1)+2(m-1)-3}\left(x^2-t^2\right)^2,\ x^{2(n-1)-1}\left(x^2-t^2\right)y,\ y^2+x^{2(n-1)-1}\left(x^2-t^2\right)+x^{2(m-1)-2}\left(x^2-t^2\right).$$

上述关系构成了 $\Bbbk\langle x$的格罗布纳基，$y\rangle$ 其采用命题 3.3 之前定义的字典序优先次数单项式序。这意味着 $\mathcal{A}$ 是一个自由的 $\Bbbk[t]$-模。元素 $x^{2(n-1)+2(m-1)-3}$和 $(x^2-t^2)^2$ 在 $\mathcal{A}[t^{-1}]$中是中心的，乘积为零，且在 $\mathcal{A}[t^{-1}]$中互素，因此根据中国剩余定理，我们有

$$\mathcal{A}[t^{-1}] \simeq \frac{\mathcal{A}[t^{-1}]}{(x^{2(n-1)+2(m-1)-3})} \times \frac{\mathcal{A}[t^{-1}]}{(x^2-t^2)^2}.$$

让我们分析这两个因子。对于第一个因子，在代数 $\mathcal{A}[t^{-1}]/(x^{2(n-1)+2(m-1)-3})$ 中，元素 x 是幂零的，因此 x^2-t^2 可逆。令 $y' := y\cdot(x^2-t^2)^{-1}$，使得 $y = y'\cdot(x^2-t^2)$。以变量 x、y' 表示时，代数 $\mathcal{A}[t^{-1}]$ 变为

$$\frac{\Bbbk\langle x, y'\rangle[t^{\pm 1}]}{(xy'+y'x,\ x^{2(n-1)+2(m-1)-3},\ x^{2(n-1)-1}y',\ (y')^2+x^{2(n-1)-1}+x^{2(m-1)-2})}$$

这恰好是$D_{n,\ m}[t^{\pm 1}]$。对于第二个因子，回顾式（3.1）中的代数 A_2 （3.1）。代数$\mathcal{A}[t^{-1}]/$（x^2-t^2）^{2} 可明确写为

$$\frac{\Bbbk\langle x, y\rangle[t]}{(xy+yx,\ (x^2-t^2)^2,\ (x^2-t^2)\cdot y,\ y^2)},$$

它与 $A_2[t^{\pm 1}]$ 同构，同构映射将 x 映为 tx。结合这两个因子，我们观察到， $\mathcal{A}$ 是从 $D_{n-1,\ m-1} \times A_2$ 到 $D_{n,\ m}$ 的多项式分裂变形。

现在考虑 $m > n$。此处的证明完全类似，唯一的区别是关系 $x^{2n+2m-3}$ 被 x^{4n-2} 取代，而它在 $\mathcal{A}$ 中变为 $x^{4(n-1)-2}\cdot(x^2-t^2)^2$。□

通过使用变形的传递性（定理 2.20），我们得到以下推论 y:

定理 3.13。 设 $B = \mathbb{M}_2(\Bbbk) \times \Bbbk \times \Bbbk$。若 $n \geq m$，则雅可比代数 $D_{n,m}$ 可以平坦变形为代数 $D_{n-m+1,1} \times B^{\times m-1}$，也可以变形为 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1} \times \Bbbk^{2m}$。若 $n < m$，则雅可比代数 $D_{n,m}$ 可以平坦变形为代数 $D_{1,\infty} \times B^{\times n-1}$，也可以变形为 $\mathbb{M}_2(\Bbbk)^{\times n-1} \times \Bbbk^{2n+1}$。

证明。 由命题 3.12可得，$D_{n,m}$ 可以变形为 $D_{n-1,m-1}\times A_2$。由引理 3.11，代数 A_2 可以变形为 $B = \mathbb{M}_2(\Bbbk)\times\Bbbk\times\Bbbk$。因此，根据变形的传递性可得，$D_{n,m}$ 可以变形为 $D_{n-1,m-1} \times B$。

若 $n \geq m$，则第一个变形可通过对 n 进行归纳得到，因为我们可以减小 n，m 从而得到 $m = 1$。第二个结果由引理 3.10得出。

若 $m > n$，则我们可以减小 n，m 从而得到 $n = 1$。由备注 3.4，可得 $D_{1,\ m} \simeq D_{1,\ \infty}$。由此得到第一个变形。第二个结果由引理 3.9得出。□

致谢。作者谨向 Michael Wemyss 致谢，感谢他提出启发性的问题，并就非交换代数变形的应用提出意见。第二作者感谢 Øyvind Solberg 帮助其了解 QPA软件包。第一作者获得国家科学中心项目资助，项目编号为 2023/50/E/ST1/0033。第二作者的这项研究获得英国工程与自然科学研究委员会项目资助 EP/R034826/1。

参考文献

[1] A. Amsalem 和 Y. Ginosar. 可分变形的一种归纳方法。《数学季刊》，75(2):749–755，2024年。3[2] M. Artin. 关于阿祖马亚代数与环的有限维表示。《代数杂志》，11:532–563，1969年。3, 6[3] A. Banerjee. Beauville-Laszlo 下降定理的推广。《巴塞尔数学档案》，120(6):595–604，2023年。10[4] A. Beauville 和 Y. Laszlo. 一个下降引理。《巴黎科学院报告·数学系列 I》，320(3):335–340，1995年。10[5] D. Bowman、D. Puljić 和 A. Smoktunowicz. 到一般代数的变形的一种构造。《国际数学研究通知》，(12):9827–9848，2024年。3[6] M. Brion. 代数群作用导论。载于《哈密顿作用：不变量与分类》。2009年4月6日至10日，第1卷，CIRM 课程系列，第1–22页。CIRM，2010年。9[7] G. Brown 和 M. Wemyss. 非交换函数的局部标准形。《数学论坛：Pi》，13:e8，2025年。3, 12, 13[8] J. Buczyński 和 J. Jelisiejew. 任意特征下的有限概形与割线簇。《微分几何及其应用》，55:13–67，2017年。10[9] T. Cassidy 和 M. Vancliff. 分次克利福德代数与完全交的推广。《伦敦数学会杂志》(第2辑)，81(1):91–112，2010年。2[10] X. Chen 和 M. Lu. 量子平面上模的簇。《代数杂志》，580:158–198，2021年。3[11] S. Chouhy. 关于几何退化与 Gerstenhaber 形式变形。《伦敦数学会通报》，51(5):787–797，2019年。9[12] T. Dana-Picard 和 M. Schaps. 一般代数的分类。《落基山数学杂志》，22(1):125–156，1992年。3[13] T. Dana-Picard 和 M. Schaps. 一般代数的分类：局部情形。《休斯敦数学杂志》，22(4):749–773，1996年。3[14] T. Dana-Picard 和 M. Schaps. Alg 的非约化分支$_n$。载于《代数与模 II》（Geiranger，1996），CMS 会议录第24卷，第111–120页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年。3[15] B. Davison. 翻转曲线的精细不变量与有限维雅可比代数。《代数几何》，11(6):757–795，2024年。3[16] W. Donovan 和 M. Wemyss. 非交换变形与翻转。《杜克数学杂志》，165(8):1397–1474，2016年。3[17] V. Dotsenko 和 P. Tamaroff. 切复形与钻石引理。《数学科学通报》，14(3):论文编号 2350013，32页，2024年。3[18] B. Feigin 和 A. Odesskii. 代数的平坦变形与函数方程。《组合代数杂志》，3(3):215–236，2019年。3[19] F. J. Flanigan. 代数地理学：结构常数簇。《太平洋数学杂志》，27:71–79，1968年。3[20] F. J. Flanigan. 哪些代数可以变形成全矩阵代数？《代数杂志》，29:103–112，1974年。3[21] T. F. Fox. 代数变形理论导论。《纯粹与应用代数杂志》，84(1):17–41，1993年。3[22] P. Gabriel. 有限表示型是开性质。载于《代数表示国际会议论文集》（卡尔顿大学，渥太华，安大略省，1974年），卡尔顿数学讲义第9号，第10号论文，23页。卡尔顿大学，渥太华，安大略省，1974年。3, 6, 9, 14, 15

[23] GAP 小组。GAP——群、算法与编程，4.15.1 版，2025年。2[24] C. Geiss 和 J. A. de la Peña. 有限维代数的变形理论。《数学手稿》，88(2):191–208，1995年。3[25] L. Gerritzen 和 R. Holtkamp. 关于非交换幂级数的格罗布纳基。《Indagationes Mathematicae（新系列）》，9(4):503–519，1998年。13[26] M. Gerstenhaber. 关于环与代数的变形。《数学年刊》(第2辑)，79:59–103，1964年。3[27] M. Gerstenhaber. 关于环与代数的变形 II。《数学年刊》(第2辑)，84:1–19，1966年。3[28] M. Gerstenhaber. 关于环与代数的变形 III。《数学年刊》(第2辑)，88:1–34，1968年。3[29] M. Gerstenhaber. 关于环与代数的变形 IV。《数学年刊》(第2辑)，99:257–276，1974年。3, 5[30] M. Gerstenhaber 和 A. Giaquinto. 相容变形。载于《有限维代数表示论新趋势》（华盛顿州西雅图，1997年），Contemp. Math. 第229卷，第159–168页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年。3[31] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 相对霍赫希尔德上同调、刚性代数与博克斯坦。《纯粹与应用代数杂志》，43(1):53–74，1986年。3[32] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 代数上同调与变形理论。载于《代数与结构的变形理论及其应用》（伊尔乔科，1986年），北约高级科学研究所系列 C：数学与物理科学第247卷，第11–264页。Kluwer 学术出版社，多德雷赫特，1988年。3[33] M. Gerstenhaber 和 S. D. Schack. 代数、双代数、量子群与代数变形。载于《变形理论与量子群及其在数学物理中的应用》（马萨诸塞州阿默斯特，1990年），Contemp. Math. 第134卷，第51–92页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1992年。3[34] D. Happel. 带单位元的五维代数的变形。载于《环论》（安特卫普会议论文集〔北约高级研究所〕，安特卫普大学，安特卫普，1978年），纯粹与应用数学讲义第51卷，第459–494页。Dekker，纽约，1979年。3[35] D. Happel. 有限维代数的 Hochschild 上同调。载于《保罗·迪布勒伊与玛丽-保罗·马拉万代数研讨班》第39届年会（巴黎，1987/1988），数学讲义第1404卷，第108–126页。施普林格，柏林，1989年。3[36] R. Hartshorne. 变形理论，数学研究生教材第257卷。施普林格，纽约，2010年。3[37] I. Heckenberger 和 L. Vendramin. Fomin-Kirillov 代数及其他例子的 PBW 变形。《代数表示论》，22(6):1513–1532，2019年。3[38] I. Hernández、M. E. Martin 和 R. Lucas Rodrigues. 类型为 (1, 3) 和 (3, 1) 的 Jordan 超代数簇的不可约分支。《代数杂志》，681:482–501，2025年。3[39] M. Hoyois、J. Jelisiejew、D. Nardin、B. Totaro 和 M. Yakerson. 无限仿射空间的希尔伯特概形与代数 K 理论。《欧洲数学会杂志》，27(5):2037–2071，2025年。3[40]Z. Hua 和 Y. Toda. 收缩代数与奇点不变量。《国际数学研究通知》，(10):3173–3198，2018年。3[41] O. Iyama 和 M. Wemyss. 非孤立奇点的极大修正与 Auslander-Reiten 对偶。《数学发明》，197(3):521–586，2014年。3[42] J. Jelisiejew. 点的希尔伯特概形的初等分支。《伦敦数学会会刊》，100(1):249–272，2019年。3[43] J. Jelisiejew. 点的希尔伯特概形上的病态现象。《数学发明》，220(2):581–610，2020年。3[44] J. Jelisiejew. 阿廷代数变形、希尔伯特概形及相关领域的公开问题。载于《阿廷代数变形与 Jordan 型》，Contemp. Math. 第805卷，第3–25页。美国数学会，[普罗维登斯], 罗得岛州， [2024] ©2024。3[45] J. Karmazyn. 由倾斜丛定义的代数的变形。《代数杂志》，513:388–434，2018年。3[46] J. Karmazyn. 通过非交换代数对三维翻转进行长度分类。《数学进展》，343:393–447，2019年。3[47] A. D. King. 有限维代数表示的模空间。《数学季刊》，45(4):515–530，1994年12月。3[48] L. Le Bruyn 和 Z. Reichstein. 代数地理学中的光滑性。《伦敦数学会会刊》(第3辑)，79(1):158–190，1999年。3

[49] T. Levasseur. 关于非交换正则分次环的一些性质。《格拉斯哥数学杂志》，34(3):277–300, 1992. 2[50] D. Maclagan and B. Sturmfels.《热带几何导论》，数学研究生教材第161卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯, 2015. 4[51] G. Mazzola. 五维结合代数的代数与几何分类。Manuscripta Math., 27(1):81–101, 1979. 3[52] M. Müller, M. J. Redondo, F. Rossi Bertone, and P. Suarez. 温和代数的 Maurer-Cartan方程。《代数通讯》，53(9):3984–4007, 2025. 3[53] N. Nabijou and M. Wemyss. 通过增强可动锥研究 GV 和 GW 不变量。《模空间》，1:第 e8 号论文，38页，2024. 3[54] B. Poonen. 有限秩交换代数的模空间。J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 10(3):817–836, 2008. 3, 6[55] C. Procesi. 代数的有限维表示。《以色列数学杂志》，19:169–182, 1974. 3, 6[56] QPA团队。QPA——箭图、路径代数与表示——GAP软件包，1.35版，2025. 2[57] M. Reineke. 非交换希尔伯特概形的上同调。Algebr. Represent. Theory, 8(4):541–561, 2005. 3[58] T. Schedler. 非交换几何中的代数变形。载于《非交换代数几何》，数学科学研究所出版物第64卷，第71–165页。剑桥大学出版社，纽约，2016. 3[59] B. Shelton and C. Tingey. 关于 Koszul代数及一种构造 Artin-Schelter正则代数的新方法。J. Algebra, 241(2):789–798, 2001. 2[60] A. V. Shepler andS. Witherspoon. Koszul代数上的变形理论与 Hopf作用。arXiv:2504.14397, 2025. 3[61] A. Smoktunowicz. 关于平坦变形及其应用。arXiv:2509.10121, 2025. 3, 5, 11, 14[62] Y. Toda. 非交换宽度与 Gopakumar-Vafa不变量。Manuscripta Math., 148(3-4):521–533, 2015. 3, 12[63] D. Voigt. 有限代数群理论中的诱导表示。数学讲义，第592卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1977。附英文导论。3, 6[64] S. J. Witherspoon. 代数的 Hochschild上同调，数学研究生教材第204卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯， [2019] ©2019. 3, 4[65] Y. Yoshino. 关于模的退化。J. Algebra, 278(1):217–226, 2004. 10[66] H. Zhang. 与 ca_n 奇点相关的 Gopakumar-Vafa不变量。arXiv:2504.03139, 2025. 3[67]G. Zwara. 有限维模的退化由扩张给出。《组合数学》，121(2):205–218, 2000. 10 (Joachim Jelisiejew) 华沙大学，数学、信息学与力学学院，Stefana Banacha 2, 02-097 华沙，波兰。电子邮箱：j.jelisiejew@uw.edu.pl (Agata Smoktunowicz) 爱丁堡大学，Peter Guthrie Tait路，King’s Buildings，爱丁堡，英国。电子邮箱：A.Smoktunowicz@ed.ac.uk