arXiv:2602.05942v1 [math-ph] 5 Feb 2026

关于二维空间中四个粒子的 Efimov效应

JONATHAN RAU 和 MARVIN R. SCHULZ

摘要。我们证明，描述二维空间中四个粒子的薛定谔算子在粒子之间仅通过短程三体力相互作用时，可能拥有无限多个束缚态。其成立的条件是：每个三粒子子系统在零能处都有一个虚能级。我们的结果为这类二维四粒子系统确立了 Efimov效应的一个类比。

目录

1. 引言 1 2. 预备知识 4 3. 主定理 7 4. 基态绝热近似 10 5. 共振的量子隧穿 $\mathbb{R}^4$ 136. 测试函数的辅助估计 40 附录A. 关于贝塞尔函数的某些级数展开 48 附录B. 积分求值 50 附录C. 关于 $\mathbb{R}^4$ 54中的零能共振 参考文献 56

1. 引言

本文的结果分为两个方面。我们建立了二维中四个粒子的 Efimov型效应。为此，我们证明了临界四维情形下双势阱算子在共振层面的量子隧穿效应。

我们对量子隧穿的分析完全采用变分方法，除其在 Efimov效应中的应用之外，也具有独立的研究意义。值得注意的是，我们严格证明了一个类似于 Born—Oppenheimer近似的绝热约化。在 Efimov效应的研究中，人们经常假设这一近似（例如，参见 [32, Section 4], [5]），而已知对其进行定量控制会带来相当大的技术困难。

Efimov效应以物理学家 Vitaly N. Efimov 命名，是三粒子量子力学中的一种引人注目的现象。它描述了这样一种情况：具有 $\mathbb{R}^3$ 短程相互作用的三粒子系统可以出现无穷多个负特征值。尽管所有相关的双粒子子系统都不存在束缚态，仍会发生这种情况，

日期：2026年2月6日。关键词和短语。 Efimov效应、共振、虚能级、量子隧穿。©2026 年，作者所有。允许以任何方式完整、忠实地复制本文，但仅限于非商业用途。

前提是其中至少两个子系统在本质谱底部具有零能共振。这种行为尤为引人注目，因为具有短程势的单粒子薛定谔算子通常只有有限个离散谱点。Efimov效应的另一项基本特征是其普适性，即无论所涉及势的微观细节如何，该效应都以相同的方式呈现。特别地，设$N(z)$为阈值 $z < 0$以下的特征值个数。那么存在一个常数 $\mathrm{A}_0 > 0$，它仅取决于粒子的质量，使得

$$\lim_{z\to 0^-} \frac{N(z)}{|\log|z||} = \mathcal{A}_0. \tag{1.1}$$

Efimov 于 1970 年首次发现了这一效应 [8]。Yafaev 于 1974年 首次给出了严格的数学证明 [19]，采用的是所谓的对称化Faddeev方程。此外，[20] 和 [47]证明，若至多只有一个双粒子子系统具有虚能级，则相应的薛定谔算子 H 至多只有有限多个束缚态。Ovchinnikov 和 Sigal[26]给出了 Efimov效应的变分证明，随后 Tamura [37]又对其进行了改进。普适性关系 (1.1) 于 1993年 由 A. Sobolev [36] 证明（关于等质量情形下的显式常数 A_0，特别参见 [36, 定理 3.3]）。关于截至 20 世纪 90 年代末的重要物理学和数学研究成果，可参见例如 [38], [22], [28], [29], [40], [41] 和 [42]。

这种效应的机制可以理解为粒子通过势阱的协同作用而形成束缚。这种机制只会出现在空间维数 $d \leq 4$中，因为对于 $d \geq 5$，薛定谔算子不存在零能共振，只存在 L^2 中的束缚态（$\mathbb{R}^d$）。Klaus 和 Simon 在 [22]证明了，当势阱间距 $L \gg 1$ 很大时，双势阱算子的基态能量的渐近行为。特别地，他们证明该基态能量满足 $E(L) \sim -\mu_0^2 L^{-2}$，其中 $\mu_0 \in (0, 1)$是方程 $e^{-\mu_0} = \mu_0$的唯一解。值得注意的是，这个常数与势的微观性质无关。双势阱算子的基态能量上界在 Tamura 对 Efimov效应的变分证明中起着决定性作用 [37]。对于临界维数 $d = 4$，Pinchover 在 [29] 证明了 $-L^{-2} \lesssim E(L) \lesssim -L^{-2}\log(L)^{-1}$。最近，作者之一在 [34] 证明，下界可以改进到与上界中的对数修正相匹配。这使我们得以指出，在额外满足下文给出的相互作用势假设的情况下，二维空间中的四个粒子构成一种能够表现出 Efimov型效应的体系。

由于技术进步，共振量子系统得以通过所谓的费什巴赫共振 [38],[7] 和 [18]接受实验研究。2002年，研究人员首次在超冷铯气体中通过实验观测到 Efimov效应；相关结果后来发表于 2006 [23]。超冷气体实验的进一步进展，促成了对三维空间中多于三粒子的各种构型开展实验研究，参见例如 [45], [13], [14], [30], [2]和 [44]）。关于此类情形的数学处理，参见 [33]和 [16]。

关于物理学文献的更广泛参考，可参阅 Naidon 和 Endo 的综述 [24]。受近期实验进展的推动，Efimov效应再次成为物理学家和数学家关注的焦点。

根据 Amado 和 Greenwood 的研究 [1] ，人们预测，在三维中，粒子数超过三个时不会出现 Efimov效应。2013 年，Gridnev 在 [11]中严格证明了三维中四个玻色子不存在 Efimov效应。随后， [3], 进一步强化了这一结论，证明在空间维数为 $d \geq 3$ 时， $N \geq 4$ 个玻色子不会出现 Efimov效应。对于所谓的无自旋费米子（可以将其理解为高度极化的费米子），Gridnev 在 [12]中指出，三维中三个此类粒子会出现 Efimov型效应（超 Efimov 效应）。后来， [3] 证明，这些无自旋费米子在一维和二维中，粒子数为 $N \geq 4$时不存在类似的 Efimov型效应。

在 [4], 不存在 Efimov 效应的情况下， N玻色子通过（$N-1$）体相互作用相互作用，这一点已在空间维数为 $d=1$ 时针对 $N \geq 4$ 得到证明，而在 $d=2$时针对 $N \geq 5$ 得到证明。对于 $N=4$ 且 $d=2$的情况，物理学家 Nishida 预言，如果粒子仅通过三体势 [25]相互作用，则可能出现 Efimov型效应。显然，这种粒子构型可以通过实验实现；例如，参见 [27]。

在本文中，我们严格证明，在二维中，四个玻色子仅通过短程三体相互作用的这种情形下，确实可能出现 Efimov型效应。由此，我们证明了物理学文献中预言的这一效应。这也表明，Amado 和 Greenwood 的预言并不适用于空间维数 $d=2$。本文讨论的机制关键在于不存在真正的二体相互作用。我们不讨论额外二体力的影响；预计这会从根本上改变低能行为。

尽管我们的方法在概念上与 Tamura 的变分框架 [37],相关，但在当前情形下仍需要大量新的论证。特别是，我们拓展了 Pinchover [29] 的思路，构造了一个适用于相关双势阱算子的测试函数，该函数满足基态能量$E(R)$的上界 $E(R) \lesssim -L^{-2}\log(L)^{-1}$ 。这使我们得以证明二维四个粒子的 Efimov 效应。

在构造测试函数时，我们研究的是粒子发生共振而非形成束缚态时的隧穿效应。在势阱附近，测试函数取为相应的共振函数；远离势阱时，则取为 $-\Delta+\mu^2$ 的解，其中 $\mu>0$是一个适当的势。

1.1. 论文结构。 本文安排如下。第2节介绍薛定谔算子以及适当的质心坐标。第3节陈述主定理并给出其证明，该证明依赖于引理 3.3 和 3.6。这两个引理分别在第 4 节和第 5 节中证明。引理 3.3 证明中的一些技术细节留待第 6 节讨论。附录 A 给出第二类修正贝塞尔函数的一些细节，包括它们在零点附近的级数展开。附录 B 计算前文中出现的若干涉及修正贝塞尔函数的积分。附录 C 讨论四维中共振函数的衰减，并在推论 C.3 中给出一个满足所有既定条件的势的具体例子。

致谢： 作者谨向 Dirk Hundertmark、Semjon Vugalter 和 Andreas Bitter 致以谢意，感谢他们富有洞见的讨论，这些讨论极大地促进了本文的完善与发展。M. R. Schulz 还感谢 ERC 高级资助项目 MathBEC - 101095820 以及 VILLUM 基金会编号为 10059 的资助。

2. 预备知识

我们研究二维中四个质量相同的玻色粒子的薛定谔算子，它们位于位置 $m > 0$ x_1、x_2、x_3、$x_4 \in \mathbb{R}^2$。我们用 $I = \{(123)、(124)、(134)、(234)\}$ 表示三粒子子系统。我们研究如下定义的短程势情形：

定义 2.1（短程势）。如果存在 $R,\ \delta > 0$，使得一个（实值）势 $V \in L^{d/2}(\mathbb{R}^d)$ 满足下述条件，我们称其为短程势：

$$|V(x)| \leq |x|^{-2-2\delta} \quad \text{for } |x| > R.$$

我们假设不存在背景场，即系统在粒子的相互平移和旋转下保持不变。因此，我们只考虑依赖于相对距离 $x_i - x_j$（其中 $i \neq j$ 和 $i,\ j \in \{1、2、3、4\}$）的势。

于是，四粒子薛定谔算子为

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{k=1}^{4} \frac{P_{x_k}^2}{2m}\right) + \sum_{\alpha \in I} V_\alpha, \quad P_x = -i\nabla_{x_k}, \quad \text{on } L^2((\mathbb{R}^2)^4). \tag{2.1}$$

对于任意 $\alpha \in I$，相应三粒子子系统的薛定谔算子定义为

$$h_\alpha = \left(\sum_{j \in \alpha} \frac{P_{x_j}^2}{2m}\right) + V_\alpha. \tag{2.2}$$

注 2.2. 由于我们考虑的是二维中的四个粒子，上述三粒子算子作用于 $L^2((\mathbb{R}^2)^3)$，将质心运动约化后，相应的算子定义在 $L^2((\mathbb{R}^2)^2) \simeq L^2(\mathbb{R}^4)$ 上。类似地，式 (2.1) 中的四粒子算子 H 作用于 $L^2((\mathbb{R}^2)^4) \simeq L^2(\mathbb{R}^8)$，转到质心系后，可约化为 $L^2(\mathbb{R}^6)$，它可分解为三粒子子系统的四个内部自由度，以及对应于三粒子子系统之间分离的两个内部自由度。因此，四维和二维空间将在后续分析中发挥重要作用。

根据 HVZ 定理（以 Zhislin [46], van Winter [39] 和 Hunziker [17]命名）

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma, \infty), \quad \text{where } \Sigma = \min_{\alpha \in I} \inf \sigma(h_\alpha).$$

下文中，我们考虑 $\Sigma = 0$ 和 $h_\alpha \geq 0$ 的情形，其中算子 h_α 在零点具有 Yafaev 意义下的虚能级 [20]；参见下文定义 2.4。在这种情况下，存在一个非平凡的零能解 φ_0，它满足 h_α，

$$h_\alpha \varphi_0 = 0$$

在分布意义下，$\varphi_0 \notin L^2(\mathbb{R}^4)$，但 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$。关于这一陈述以及更多背景知识和示例，请参阅 [34, 第 1 章4]。

齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$ 已由 Birman 引入 [6]，我们采用 [9, 第 2]章中给出的定义：

定义 2.3 (齐次索伯列夫空间)。令

$$\dot{H}^1(\mathbb{R}^4) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^4, |x|^{-2}\, dx) : \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^4)\}$$

为配备范数的齐次 Sobolev 空间

$$\|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^4} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

2.1. 质心坐标。我们假设相互作用 V_α 在相应三粒子子系统的相互平移下保持不变。由于这对所有 $\alpha \in I$均成立，四粒子薛定谔 H 在所有粒子坐标同时平移下保持不变，因此与总动量算子对易。由此，

$$\sigma(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H).$$

为研究内部自由度，我们将质心运动与相对运动分离。固定 $\alpha \in I$。根据标准论证，三粒子薛定谔算子可分解为

$$h_\alpha = (T_\alpha + V_\alpha) \otimes 1 + 1 \otimes \frac{-1}{2M} \Delta_{X_\alpha}, \qquad M = \sum_{i \in \alpha} m_i = 3m,$$

其中 X_α 表示该子系统的质心。算子 T_α 作用于内部构型空间

$$R_0[\alpha] = \left\{ (x_i)_{i \in \alpha} \in (\mathbb{R}^2)^3 : X_\alpha = 0 \right\},$$

这是一个四维线性子空间。

由于质心运动是自由的，我们将注意力限制在内部薛定谔算子上

$$h_\alpha^{\mathrm{COM}} = T_\alpha + V_\alpha \quad \text{on } L^2(R_0[\alpha]).$$

引入 $\alpha = (ijk)$ 的雅可比坐标，

$$q_{ij} = x_j - x_i, \qquad \eta_{ij} = x_k - \frac{x_i + x_j}{2},$$

约束 $X_\alpha = 0$ 与变量 $(q_{ij}, \ \eta_{ij})$ 一起给出了 $R_0[\alpha] \cong \mathbb{R}^4$ 的一一参数化。

利用雅可比坐标 $(q_{ij}, \ \eta_{ij})$ 将 $R_0[\alpha]$ 与 $\mathbb{R}^4$ 对应起来，内部薛定谔方程可写为

$$h_\alpha^{\mathrm{COM}} = P_{q_{ij}}^2 + \frac{3}{4} P_{\eta_{ij}}^2 + V_\alpha(q_{ij}, \eta_{ij}) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^4). \tag{2.3}$$

按照 Yafaev [19], , 我们引入以下概念。

定义 2.4。 设 $V \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为实值函数，并且

$$h(\varepsilon) = -\Delta_y + (1 + \varepsilon) V(y) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^4).$$

我们称 $h(0)$ 在零点具有虚能级，如果

$$h(0) \geq 0 \quad \text{and} \quad \inf \sigma(h(\varepsilon)) < 0 \quad \text{for all } \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

注 2.5. 上述定义不能直接应用于式 (2.3) 中的三粒子算子h_α^{COM}，因为它定义在不同的位形空间上。尽管如此，如果由 h_α^{COM}经过变量的自然重标度得到的算子与定义 2.4 中具有零能虚能级的算子酉等价，我们仍称 h_α^{COM}在零能处具有虚能级。

条件 (2.4) 描述了阈值处的一种非一般情形，因为它要求对势 V进行特定调节。Efimov效应恰恰出现在子系统薛定谔算子的这种零能不稳定性情形下。为证明这类势非空，我们在 C 中（推论 C.3）给出了一个显式的紧支势，该势在维度 $d \geq 3$ 下具有零能虚能级。

我们对四粒子薛定谔 H 采用类似的方法，它在所有粒子的联合平移下保持不变。因此， H 可分解为

$$H = \left[T + \sum_{\alpha \in I} V_\alpha\right] \otimes 1 \; + \; 1 \otimes \frac{1}{2\mathcal{M}} P_\vartheta^2, \qquad \mathcal{M} = \sum_{i=1}^{4} m_i = 4m.$$

这里， T表示作用于 $L^2(\mathrm{R}_0)$ 上的拉普拉斯-贝尔特拉米算子，其中

$$\mathcal{R}_0 \coloneqq \left\{(x_1, \ldots, x_4) \in (\mathbb{R}^2)^4 \,\middle|\, \sum_{j=1}^{4} x_j = 0\right\} \subset \mathbb{R}^8.$$

我们定义四粒子质心薛定谔

$$H_{\mathrm{COM}} = T + \sum_{\alpha \in I} V_\alpha \quad \text{on } L^2(\mathcal{R}_0).$$

令 $J \coloneqq \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$ 表示所有双粒子子系统的集合。固定γ，$\delta \in J$，使得 $\gamma = (ij)$ 与 $\delta = (kl)$ 不相交，即 $\{i, \; j, \; k, \; l\} = \{1, \; 2, \; 3, \; 4\}$。我们引入坐标

$$q_\gamma = x_j - x_i, \qquad q_\delta = x_l - x_k, \qquad \xi_{\gamma,\delta} = \frac{x_k + x_l}{2} - \frac{x_i + x_j}{2}, \qquad \vartheta = \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{4} x_r. \tag{2.5}$$

令 $P_r = -i\nabla_r$ 对于 $r \in \mathbb{R}^2$。于是

$$H \simeq H_{\mathrm{COM}} \otimes (8m)^{-1} P_\vartheta^2,$$

其中，稍微滥用一下记号，

$$H_{\mathrm{COM}} = m^{-1} P_{q_\gamma}^2 + m^{-1} P_{q_\delta}^2 + (2m)^{-1} P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2 + \sum_{\alpha \in I} V_\alpha \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^6).$$

并定义

$$\eta_\gamma^{\pm} = \xi_{\gamma,\delta} \pm q_\delta/2, \qquad \eta_\delta^{\pm} = -\xi_{\gamma,\delta} \pm q_\gamma/2.$$

这些数对（q_γ， $\eta_\gamma^{\pm}$）和（q_δ， $\eta_\delta^{\pm}$）与前面为四个不同的三粒子子系统 $\alpha \in I$ 定义的通常雅可比坐标相同。见图1。它们与原始粒子位置 x_1，……， $x_4 \in \mathbb{R}^2$ 相关，并且在相应的三粒子质心系中满足关系式 $X_\alpha = \sum_{s \in \alpha} x_s = 0$

$$\frac{1}{2}|q|^2 + \frac{2}{3}|\eta|^2 = \sum_{j \in \alpha} |x_j|^2.$$

我们假设三粒子相互作用势 V_α 是短程且相同的，即 $V_\alpha = V$。固定坐标（$q_\gamma, q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}$），算子 H_{COM} 酉等价于

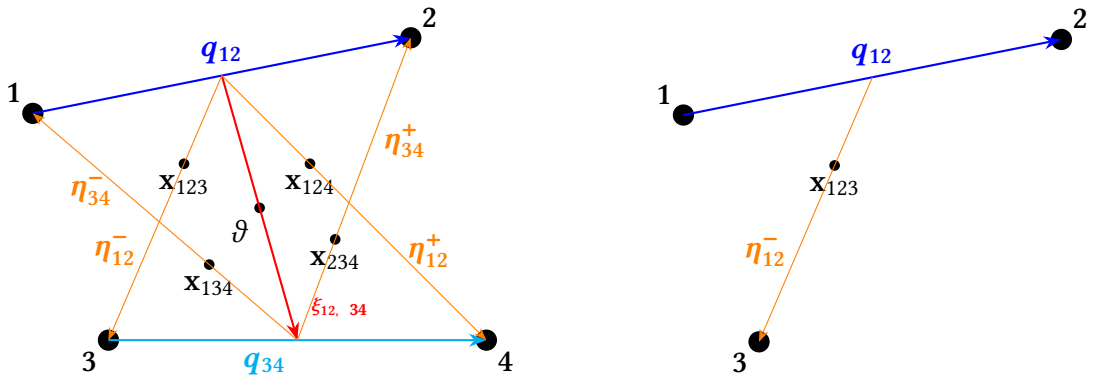

图1. 内部自由度坐标的选取及其与子系统（123）通常采用的雅可比坐标之间的联系。

由下式给出的 $L^2((\mathbb{R}^2)^3)$ 上的算子

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{COM}} = {} & m^{-1}P_{q_\gamma}^2 + m^{-1}P_{q_\delta}^2 + (2m)^{-1}P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2 \\ & + V\left(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} + q_\delta/2\right) + V\left(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} - q_\delta/2\right) \\ & + V\left(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} + q_\gamma/2\right) + V\left(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} - q_\gamma/2\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

下文中我们始终假设 $V \in L^2((\mathbb{R}^2)^2)$ 是短程的（见定义 2.1），其参数固定为 $R,\ \delta > 0$。

注2.6. 只需证明上述算子的离散谱是无穷的，因为 H_{COM} 的谱与坐标的具体选取无关。

3. Main Theorem

定理 3.1. 假设满足第*2*节的设定，其中粒子相同，且 $L^2((\mathbb{R}^2)^2)$中的三体相互作用为短程相互作用。若内部三粒子薛定谔算子 h_α^{COM}在零点有一个虚能级，则四粒子内部薛定谔算子 H_{COM} 有无穷多个负特征值聚集于零。

注3.2。 对于相同粒子，算子 h_α^{COM} 和 $\alpha \in I$ 酉等价。因此，只需假设某一个三粒子子系统在零能处存在虚能级。定理 3.1 确立了一个 Efimov 型效应：四个相同的玻色子在二维空间中仅通过三体力相互作用。

定理 3.1 的证明分为三个步骤。

在 **步骤 1** 中，我们证明，根据 [22]，所述的势阱的协同作用，相应的双势阱算子在 $\mathbb{R}^4$ 中对共振函数呈现隧穿效应。

在 **步骤 2** 中，我们证明，这种隧穿机制会在四粒子内部薛定谔 H_{COM}中诱导出一种有效的长程吸引势。相应的论述将在下文的引理 3.3 和 3.6 中给出。假设这两个引理成立，**步骤 3**便完成论证并得出定理 3.1。

我们首先进行第一步，即证明以下结论。

引理 3.3（四维阈值处的量子隧穿）。 设 $V\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 如定理 *3.1* 所述。对于 $\ell \in \mathbb{R}^4$ 满足 $L = |\ell|$ 定义

$$H[\ell] = P_x^2 + V(x - \ell/2) + V(x + \ell/2) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^4, dx). \tag{3.1}$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $L_0 = L_0(\varepsilon) > 0$，使得存在一族函数$\{\widetilde{\Phi}(\ell, \cdot)\}_{\ell\in\mathbb{R}^4} \subset H^1(\mathbb{R}^4)$，它们具有以下性质：

$$\|\widetilde{\Phi}(\ell, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 1 \text{ and } \langle \widetilde{\Phi}(\ell, \cdot), H[\ell]\widetilde{\Phi}(\ell, \cdot)\rangle \leq -(2 - \varepsilon)\, L^{-2} \log(L)^{-1}, \qquad L > L_0. \tag{3.2}$$

此外，对于显式选取的 $\ell = (0, 0, r)$，其中 $r \in \mathbb{R}^2$ 和 $L = |r| > L_0$，映射$r \mapsto \widetilde{\Phi}((0, 0, r), \cdot)$可取为 $H^1(\mathbb{R}^2; L^2(\mathbb{R}^4))$，并满足

$$\left\langle \widetilde{\Phi}(\ell, \cdot), \left(P_r^2 - \frac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\widetilde{\Phi}(\ell, \cdot)\right\rangle_{L^2(dx)} \leq \left(\frac{2}{3} + \varepsilon\right) L^{-2} \log(L)^{-1}, \qquad L > L_0. \tag{3.3}$$

注 3.4. 估计 (3.3) 量化了两个势阱发生平移时能量期望值的变化，并且是控制后续分析中相应修正项所必需的；在后续分析中，将针对参数 r 进行绝热约化。

证明。 这一引理的证明是主要难点，我们将在第 5 节分步骤给出。 ∎

注 3.5。 下文中我们始终用 $L = |\ell|$ 表示。由引理 3.3 可直接得到

$$\inf_{\psi\in H^1(\mathbb{R}^4)} \frac{\langle \psi, H[\ell]\psi\rangle}{\|\psi\|^2} \lesssim L^{-2} \log(L)^{-1}.$$

双势阱算子 (3.1) 的基态能量上界与 [29] 和 [34, 第 6], 章中先前得到的估计一致，但此处该上界是通过一个显式测试函数推导得到的，并给出了相关常数的显式界。此外，它为建立估计式 (3.3) 提供了所需的输入。

证明的第二步将是证明

引理 3.6 (有效的长程行为)。 设 H_{COM} 为定义在 $L^2(\mathbb{R}^6)$上的四粒子内部薛定谔算子，其定义见 (2.6)。则存在 $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^6)$、 $T > 0$ 和 $c > 0$，满足 $\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^6)} = 1$，使得对每个满足 $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$ 的 $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$，并且

$$\operatorname{supp}(u) \subset \{r \in \mathbb{R}^2 :\ |r| > T\},$$

可得

$$\langle u\Phi, H_{\mathrm{COM}}(u\Phi)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^6)} \leq \langle u, \left(P_r^2 - c\,|r|^{-2} \log(|r|)^{-1}\right)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{3.4}$$

证明。 在证明中，我们使用引理 3.3 的隧穿估计，并对剩余参数 $\ell(r)$ 进行绝热约化，以得到有效长程吸引势。我们在第 4 节给出证明。 ∎

暂且假设引理 3.6 成立。现在我们通过说明它如何推出定理 3.1 来完成论证。

定理 *3.1* 的证明。 我们通过构造线性无关的函数 $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^6)$，证明 H_{COM} 有无穷多个离散特征值，并且对所有充分大的 $k \in \mathbb{N}$，均有 $\langle \psi_k, H_{\mathrm{COM}}\psi_k \rangle < 0$。由极小极大原理可知，这意味着 H_{COM} 有无穷多个负特征值。

由引理 3.6，存在归一化的 $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^6)$ 和常数 $T,\ \varepsilon > 0$ 使得对于任意满足 $\|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$，且 $\mathrm{supp}(u_k) \subset \{r \in \mathbb{R}^2 :\ |r| > T\}$ 的序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^2)$，函数 $\psi_k = u_k\Phi$ 满足

$$\langle \psi_k, H_{\mathrm{COM}}\psi_k \rangle \le \langle u_k, (P_r^2 - \varepsilon|r|^{-2}\log(|r|)^{-1})u_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,. \tag{3.5}$$

因此，只需构造 u_k，使得 (3.5) 的右端为负。

假设 u 是径向的，也就是说，u 仅依赖于 $|r|$，且支撑在 $\{r > T\}$ 中。于是引入球坐标，其中 $\rho = |r|$；并滥用记号，将函数 $u:\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ 仍记作同一个字母，使得

$$\langle u, (P_r^2 - \varepsilon|r|^{-2}\log(|r|)^{-1})u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi \int_T^\infty \left(|\partial_\rho u|^2 - \varepsilon\rho^{-2}\log(\rho)^{-1}|u|^2 \right) \rho\, d\rho.$$

令 $t = \log(\rho)$ 且 $f(t) = u(e^t)$，得到

$$\langle u, (P_r^2 - \varepsilon|r|^{-2}\log(|r|)^{-1})u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 2\pi \int_{\log(T)}^\infty \left(|f'|^2 - \varepsilon t^{-1}|f|^2 \right) dt. \tag{3.6}$$

对于满足 $n \ge (T)^{1/2}$ 的 $n \in \mathbb{N}$，定义区间 $I_n = [n^2,\, n^2 + Kn]$，其中 $K > 0$ 将在下文选定。令 $f_n \in H_0^1(I_n)$ 为 $-\partial_t^2$ 在 I_n 上的第一狄利克雷特征函数，并按 $\|f_n\|_{L^2(I_n)} = 1$ 归一化。于是

$$\int_{I_n} |\partial_t f_n|^2\, dt = \frac{\pi^2}{K^2 n^2}, \qquad \int_{I_n} t^{-1}|f_n|^2\, dt \ge \frac{1}{n^2 + Kn}. \tag{3.7}$$

将（3.7）代入（3.6）得到

$$\int_{I_n} \left(|\partial_t f_n|^2 - \varepsilon t^{-1}|f_n|^2 \right) dt \le \frac{\pi^2}{K^2 n^2} - \frac{\varepsilon}{n^2 + Kn}.$$

取 $K > \quad \pi\varepsilon^{-1/2}$。于是，对于所有充分大的 n，右端严格为负 .

相邻区间 I_n 可能重叠，但由于 $n \mapsto n^2$ 呈二次增长，我们可以选取一个子列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使 $n_k \to \infty$ 增长得足够快，从而使区间 I_{n_k} 两两不相交。定义

$$u_k(\rho) = f_{n_k}(\log\rho), \qquad \text{so that} \quad \mathrm{supp}(u_k) = \{\, \rho :\ \log(\rho) \in I_{n_k} \,\}$$

它们是包含于（$T,\ \infty$）中的两两不相交区间。对于所有充分大的 $k \in \mathbb{N}$，有

$$\langle u_k, (P_r^2 - \varepsilon|r|^{-2}\log(|r|)^{-1})u_k \rangle < 0.$$

令 $\quad \psi_k = u_k\Phi$，我们得到具有两两不相交支撑的 $\psi_k \in H^1(\mathbb{R}^6)$，并由 (3.5) 得到，

$$\langle \psi_k, H_{\mathrm{COM}}\psi_k \rangle < 0 \qquad \text{for all sufficiently large } k \in \mathbb{N}\,.$$

此外，由于ψ_k，$H_{\mathrm{COM}}\psi_k$随着 $k \to \infty$趋于 0，相应的负特征值会聚积于 0。这就完成了定理 3.1 的证明。 ∎

4. 基态的绝热近似

本节将在引理 3.3 的假设下证明引理 3.6。这对应于主定理 3.1 证明中的**步骤 2** 。

证明基于位形空间中的绝热约化，这让人联想到 Born–Oppenheimer 方法，尽管不要求质量不平衡足够小。在使用式 (2.5) 中引入的坐标时，我们将变量 $q_\gamma \in \mathbb{R}^2$ 视为外部参数。对于固定的 q_γ，我们确定一个作用于其余变量（q_δ、 $\xi_{\gamma,\delta}$） $\in(\mathbb{R}^2)^2$ 的算子，该算子在零处具有虚能级。这会在 q_γ方向产生一个有效的吸引性长程势。随后，我们将所得的有效表达式与作用于 $H^1(\,(\mathbb{R}^3)^2)$ 的完整薛定谔算子 H_{COM}进行比较。

引理 *3.6* 的证明。 在第2节中，我们固定了雅可比坐标 q_γ、 q_δ、 $\xi_{\gamma,\,\delta} \in \mathbb{R}^2$，其中 γ、 $\delta \in J$表示两个不相交的双粒子子系统。在这些坐标中，对于固定的 $m = 1$，作用于 $H^1((\mathbb{R}^3)^2)$ 的质心算子 H_{COM} 具有如下形式

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{COM}} = P_{q_\gamma}^2 + P_{q_\delta}^2 + \frac{1}{2}P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2 \\ + V\big(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} + q_\delta/2\big) + V\big(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} - q_\delta/2\big) \\ + V\big(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} + q_\gamma/2\big) + V\big(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} - q_\gamma/2\big)\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

由于将 (4.1) 乘以 m 相当于对势进行尺度变换，因此只需考虑 $m = 1$的情形。

我们的第一步是在 H_{COM}中分离出一个算子，使其与引理 3.3 中的双势阱算子 $H[\cdot]$ 一致。根据假设，对于每个固定的 $q_\gamma \in \mathbb{R}^2$，单势阱算子

$$P_{q_\delta}^2 + \tfrac{3}{4}P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2 + V\big(\tfrac{1}{2}q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} \pm q_\gamma/2\big) \tag{4.2}$$

在零点存在一个虚能级。

现在我们据此分解 H_{COM}。对于固定的 $(q_\delta,\ \xi_{\gamma,\ \delta}) \in(\mathbb{R}^2)^2,$，我们在 $H^1(\mathbb{R}^2,\ dq_\gamma)$ 上定义一个算子如下：

$$\begin{aligned} A[q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}] &= P_{q_\gamma}^2 + V\big(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} + q_\delta/2\big) + V\big(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} - q_\delta/2\big) \\ &= P_{q_\gamma}^2 + W\big(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta} + q_\delta/2, \xi_{\gamma,\delta} - q_\delta/2\big)\,. \end{aligned}$$

根据假设， V是短程的（见定义 2.1），因此

$$\big|W(q_\gamma, \cdot)\big| \le \big|q_\gamma\big|^{-2-2\delta}, \quad \big|q_\gamma\big| > R.$$

反过来，对于固定的 $q_\gamma \in \mathbb{R}^2$，我们定义作用于 $H^1((\mathbb{R}^2)^2,\ dq_\delta\, d\xi_{\gamma,\ \delta})$ 的算子 $B[q_\gamma]$ 如下：

$$B[q_\gamma] = P_{q_\delta}^2 + \tfrac{3}{4}P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2 + V\big(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} + q_\gamma/2\big) + V\big(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} - q_\gamma/2\big)\,.$$

令 A 和 B 表示相应的算子于

$$\mathbb{H}^1 = H^1((\mathbb{R}^2)^3, dq_\gamma\, d\xi_{\gamma,\delta}\, dq_\delta), \tag{4.3}$$

分别逐点作用为 $A[q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}]$ 和 $B[q_\gamma]$。由此可得

$$H_{\mathrm{COM}} = A + B - \tfrac{1}{4}P_{\xi_{\gamma,\delta}}^2. \tag{4.4}$$

在尺度关系意义下，算子 $B[q_\gamma]$ 与引理 3.3 中的双势阱算子 $H[\cdot]$ 一致。

接下来，我们基于算子 $B[q_\gamma]$ 的近阈值态构造一个乘积型试探态。这将在 q_γ 方向上产生一个有效贡献。随后的估计将把这一有效表达式与完整的薛定谔算子（4.1）进行比较。为追踪变量依赖关系，我们为相关的希尔伯特空间及其内积引入简写。

我们用 $\cdot,\cdot_\circ$表示 $H^1((\mathbb{R}^2)^2, dq_\delta\, d\xi_{\gamma,\delta})$ 的内积，用 $\cdot,\cdot_*$表示 $H^1(\mathbb{R}^2, dq_\gamma)$ 的内积。对于任意 $f \in H^1((\mathbb{R}^2)^2, dq_\delta\, d\xi_{\gamma,\delta})$，我们定义关于$\xi_{\gamma,\delta}$变量的伸缩变换 $D[\lambda]$

$$(D[\lambda]f)(q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}) = \lambda f(q_\delta, \lambda\xi_{\gamma,\delta}).$$

于是，对于任意固定的 $q_\delta \in \mathbb{R}^2$ 以及 $L^2(\mathbb{R}^2, d\xi_{\gamma,\delta})$ 中的通常范数

$$\|D[\lambda]f(q_\delta,\cdot)\|^2 = \|f(q_\delta,\cdot)\|^2 \ .$$

固定 $\lambda = 2(3)^{-1/2}$，我们得到对于任意 $q_\gamma \in \mathbb{R}^2$

$$\left\langle D[\lambda]f, B[q_\gamma]D[\lambda]f\right\rangle_\circ = \left\langle f, H[(0,0,\lambda q_\gamma)]f\right\rangle_{dx} \tag{4.5}$$

其中， $H[\cdot]$ 是定义在 $H^1(\mathbb{R}^4, dx)$ 上的双势阱算子，见引理 3.3。对于任意固定的 $q_\gamma \in \mathbb{R}^2$，令 $\widetilde{\Phi}_R \in H^1(\mathbb{R}^4, dx)$ 为根据引理 3.3 得到的函数，并作如下显式选择

$$\ell(r) = (0,0,r), \quad \text{with} \quad r = \lambda q_\gamma \tag{4.6}$$

并定义

$$\Phi(q_\gamma,\cdot) = D[1/\lambda]\widetilde{\Phi}(\ell(\lambda q_\gamma),\cdot) \tag{4.7}$$

使得

$$\Phi(q_\gamma, q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}) = \lambda\widetilde{\Phi}\left((0,0,\lambda q_\gamma),(q_\delta,\lambda\xi_{\gamma,\delta})\right)$$

我们选取 $u \in H^1(\mathbb{R}^2, dq_\gamma)$，其中 $\|u\|_*^2 = u,u_* = 1$ 的支撑位于一个紧集之外，该紧集将在后文固定。我们通过以下方式构造试探函数$\psi \in \mathbb{H}^1$ （其中 $\mathbb{H}^1$ 定义于（4.3）中）：

$$\psi(q_\gamma, \xi_{\gamma,\delta}, q_\delta) = u(q_\gamma)\Phi(q_\gamma, q_\delta, \xi_{\gamma,\delta}), \quad \forall q_\gamma, q_\delta, \xi_{\gamma,\delta} \in \mathbb{R}^2.$$

下一步，我们分析（4.4）中的能量期望 H_{COM}。令 $\cdot,\cdot$ 表示（4.3）中定义的希尔伯特空间 $\mathbb{H}^1$ 的内积，则

$$\langle\psi, H_{\mathrm{COM}}\psi\rangle = \langle\psi, A\psi\rangle + \langle\psi, B\psi\rangle - (1/4)\left\langle\psi, P^2_{\xi_{\gamma,\delta}}\psi\right\rangle \tag{4.8}$$

我们分别研究（4.8）右侧的各项，从最后一项开始。根据定义和富比尼定理，

$$\left\langle\psi, P^2_{\xi_{\gamma,\delta}}\psi\right\rangle = \left\langle u, \left\langle\Phi, P^2_{\xi_{\gamma,\delta}}\Phi\right\rangle_\circ u\right\rangle_* . \tag{4.9}$$

利用（4.7）中 Φ 的定义可得

$$\begin{aligned}\left\langle\Phi, P^2_{\xi_{\gamma,\delta}}\Phi\right\rangle_\circ &= \lambda^2\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\left|\nabla_y\widetilde{\Phi}(\ell(r),(x,y))\right|^2 d(x,y)\\ &= \lambda^2\left\langle\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot), P^2_y\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)\right\rangle_{d(x,y)}\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，对 $d(x,y)$ 的期望值是 $L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$ 的通常内积。注意，由于平移 $\ell(r)$ 取决于 q_γ（见（4.6）），该期望值是参数 q_γ 的函数。

接下来，我们研究期望值 $\psi, B\psi$，并利用关系式（4.5）得到

$$\langle \psi, B\psi \rangle = \left\langle u, \left\langle \Phi, B[q_\gamma]\Phi \right\rangle_\circ u \right\rangle_* = \left\langle u, \left\langle \widetilde{\Phi}, H[\ell]\widetilde{\Phi} \right\rangle_{dx} u \right\rangle_* .$$

根据 (4.6) 中 $\ell(r)$ 的定义，并取 $r = (0, 0, \lambda q_\gamma)$，我们有 $L = |\ell(r)| = \lambda \left| q_\gamma \right|$，从而应用引理 3.3，对给定的 $\varepsilon > 0$，存在依赖于 $\varepsilon > 0$ 的 $T > 0$，使得对 $\left| q_\gamma \right| > T$

$$\left\langle \widetilde{\Phi}_R, H[\ell]\widetilde{\Phi}_R \right\rangle_{dx} \leq -(2-\varepsilon)\lambda^{-2} \left| q_\gamma \right|^{-2} \log(\lambda \left| q_\gamma \right|)^{-1}$$

选取

$$\operatorname{supp}(u) \subset \{ q_\gamma \in \mathbb{R}^2 : \left| q_\gamma \right| > 2T \} \tag{4.11}$$

我们得出

$$\langle \psi, B\psi \rangle \leq -(2-\varepsilon) \left\langle u, \left| q_\gamma \right|^{-2} \lambda^{-2} \log(\lambda \left| q_\gamma \right|)^{-1} u \right\rangle_* \tag{4.12}$$

现在我们分析算子 A 的期望，以得到

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \left\langle u\Phi, P_{q_\gamma}^2 (u\Phi) \right\rangle + \langle u \langle \Phi, W\Phi \rangle_\circ u \rangle_* \tag{4.13}$$

其中 W是短程的。由于对所有 q_γ 有 $\|\Phi\|_{L^2(dq_\delta \, d\xi_{\gamma,\delta})} = 1$，且 Φ光滑依赖于 q_γ，我们有

$$P_{q_\gamma} \langle \Phi, \Phi \rangle_\circ = 2 \, \Re \langle \Phi, P_{q_\gamma} \Phi \rangle_\circ = 0, \tag{4.14}$$

因此 Φ， $P_{q_\gamma} \Phi_\circ = 0_\circ$。利用 (4.14)，由 (4.13) 可得

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \left\langle u, \left(P_{q_\gamma}^2 + \langle \Phi, W\Phi \rangle_\circ \right) u \right\rangle_* + \left\langle u, \left\langle \Phi, P_{q_\gamma}^2 \Phi \right\rangle_\circ u \right\rangle_* \tag{4.15}$$

根据引理 3.3，对于任意 $z \in \mathbb{R}^4$， $r \in \mathbb{R}^2$，当 r充分大时，可以选取族 $r \mapsto \widetilde{\Phi}(\ell(r)\ z)$，其中 $\ell(r) = (0,\ 0,\ r)$，使其为 $H^1(\mathbb{R}^2,\ dr)$–光滑的。利用 (4.7) 中 Φ的定义，通过 $D[\lambda]$ 记录伸缩变换，我们得到

$$\left\langle \Phi, P_{q_\gamma}^2 \Phi \right\rangle_\circ = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^4} \left| \nabla_r \widetilde{\Phi}(\ell(r), z) \right|^2 dz \Big|_{r=\lambda q_\gamma} = \lambda^2 \langle \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot), P_r^2 \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot) \rangle_{\mathbb{R}^4} \Big|_{r=\lambda q_\gamma} . \tag{4.16}$$

结合 (4.13)、(4.15) 以及 (4.16)，得到

$$\langle \psi, A\psi \rangle = \left\langle u, \left(P_{q_\gamma}^2 + \langle \Phi, W\Phi \rangle_\circ \right) u \right\rangle_* + \lambda^2 \left\langle u, \langle \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot), P_r^2 \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot) \rangle_{\mathbb{R}^4} \Big|_{r=\lambda q_\gamma} u \right\rangle_* \tag{4.17}$$

代入 (4.10)、(4.12) 和 (4.17)，得到

$$\begin{aligned}
&\langle \psi, H_{\mathrm{COM}} \psi \rangle \\
&= \left\langle u, \left(P_{q_\gamma}^2 + \langle \Phi, W\Phi \rangle_\circ \right) u \right\rangle_* + \left\langle u, \left\langle \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot), H[(0,0,r)] \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot) \right\rangle_{d(x,y)} \Big|_{r=\lambda q_\gamma} u \right\rangle_* \\
&+ \lambda^2 \left\langle u, \left\langle \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot), \left(P_r^2 - \frac{1}{4} P_y^2 \right) \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot) \right\rangle_{d(x,y)} \Big|_{r=\lambda q_\gamma} u \right\rangle_*
\end{aligned}$$

对于固定的 $\varepsilon > 0$，我们利用W具有短程性质。因此，我们可以将 $T > 0$ 取足够大，也就是说， u 的支撑位于一个足够大的紧集之外，从而得到

$$\langle \Phi, W(q_\gamma, \cdot)\Phi \rangle_\circ \leq \varepsilon \left| q_\gamma \right|^{-2} \log(\lambda \left| q_\gamma \right|)^{-1}, \quad \left| q_\gamma \right| \geq T$$

对相同的 $\varepsilon > 0$ 应用引理 3.3，我们得到满足以下条件的 $c(\varepsilon) > 0$：

$$\langle \psi, H_{\mathrm{COM}}\psi\rangle \le \left\langle u, \left[P_{q_\gamma}^2 - c(\varepsilon)\left|q_\gamma\right|^{-2}\log(\lambda\left|q_\gamma\right|)^{-1}\right]u\right\rangle_*$$

其中（回忆 $\lambda = 2(3)^{-1/2}$）

$$c(\varepsilon) = \lambda^{-2}(2-\varepsilon) - \left(\tfrac{2}{3}+\varepsilon\right) - \varepsilon = \tfrac{3}{4}(2-\varepsilon) - \left(\tfrac{2}{3}+\varepsilon\right) - \varepsilon = \tfrac{5}{6} - \tfrac{11}{4}\varepsilon.$$

当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，我们有 $c(\varepsilon) = c > 1/2$。因此，当 $T > 0$ 足够大时

$$\langle \psi, H_{\mathrm{COM}}\psi\rangle \le \left\langle u, \left[P_{q_\gamma}^2 - \tfrac{1}{2}\left|q_\gamma\right|^{-2}\log(\left|q_\gamma\right|)^{-1}\right]u\right\rangle_*$$

这就证明了引理 3.6 的结论。 ∎

5. $\mathbb{R}^4$中的共振的量子隧穿

本节给出引理 3.3 的证明。特别地，我们研究式 (3.1) 中的双势阱算子 $H[\ell]$，其中 $\ell \in \mathbb{R}^4$ 表示分离向量。为方便起见，我们在此回顾 $H[\ell]$ 的定义

$$H[\ell] = P_x^2 + V(x-\ell/2) + V(x+\ell/2) \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^4, dx).$$

我们的分析针对如下情形：根据定义 2.4，单势阱算子 P_x^2+V在零点处具有一个虚能级。我们给出两个引理，分别对应引理 3.3 中的两个陈述。

引理 5.1 (基态估计)。 存在一族函数 $\{\phi(\ell,\cdot)\}_{\ell\in\mathbb{R}^4} \subset H^1(\mathbb{R}^4)$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $L_0(\varepsilon) > 0$ 满足

$$\frac{\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle}{\|\phi(\ell,\cdot)\|^2} \le -(2-\varepsilon)L^{-2}\log(L)^{-1}, \quad \text{if } |\ell| = L > L(\varepsilon). \tag{5.1}$$

引理 *5.2*（动能控制）。引理 *5.1* 中的函数族 $\{\phi(\ell,\cdot)\}_{\ell\in\mathbb{R}^4} \subset H^1(\mathbb{R}^4)$ 可以选取得使映射 $\ell \mapsto \phi(\ell,\cdot)(\|\phi(\ell,\cdot)\|)^{-1}$ 属于 H^1 局部 $(\mathbb{R}^4)$。对于选择 $\ell(r) = (0,0,r)$，其中 $r \in \mathbb{R}^2$，对于任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $L_0(\varepsilon) > 0$ 满足

$$\left\langle \frac{\phi(\ell(r),\cdot)}{\|\phi(\ell(r),\cdot)\|}, \left(P_r^2 - \tfrac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\frac{\phi(\ell(r),\cdot)}{\|\phi(\ell(r),\cdot)\|}\right\rangle \le \left(\tfrac{2}{3}+\varepsilon\right)L^{-2}\log(L)^{-1}, \quad |\ell| = L > L(\varepsilon). \tag{5.2}$$

注 5.3。 尽管引理 5.1 中所述的界对任意 $\ell \in \mathbb{R}^4$ 均适用，但引理 5.2 中的 (5.2) 式利用了我们选择 $\ell(r) = (0, 0, r)$ 且满足 $r \in \mathbb{R}^2$ 这一事实。

假设引理 5.1 和 5.2，则引理 3.3 可直接得到，现于本注之后给出。函数 $\{\phi(\ell, \cdot)\}_{\ell\in\mathbb{R}^4}$ 的构造见第 5.1 小节，而引理 5.1 和 5.2 的证明分别见第 5.2 和 5.3 小节。这些引理证明中的一些技术性估计推迟至第 6 节。

引理 *3.3* 的证明。 固定 $r \in \mathbb{R}^2$ 并令 $\ell(r) = (0, 0, r) \in \mathbb{R}^4$，于是 $L = |\ell(r)| = |r|$。令 $\widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot) = \phi(\ell(r), \cdot)/\|\phi(\ell(r), \cdot)\|$。(5.1) 式中的界正是引理 3.3 所要求的不等式，因此当 $|r|$ 足够大时，(3.1) 成立。

此外，由引理 5.2 可知，映射 $r \mapsto \widetilde{\Phi}(\ell(r), \cdot)$ 属于 H^1局部$(\mathbb{R}^2)$，而 (5.2) 推出 (3.3)。这就证明了引理 3.3。 ∎

5.1. **测试函数**。本节中，我们将构造引理 5.1（分别为引理 3.3）中的测试函数族 $\{\phi(\ell,\cdot)\}_{\ell\in\mathbb{R}^4} \subset H^1(\mathbb{R}^4)$。与标准的隧穿情形不同，单阱算子

$$h = P_x^2 + V(x) \qquad \text{on } L^2(\mathbb{R}^4),$$

不存在平方可积的基态，只有一个按照定义 2.4 意义下的零能虚能级。因此，基于基态平移函数的对称与反对称线性组合构造的常用隧穿试探形式无法应用：任何此类组合仍然不是平方可积的，因此无法得到低于 $H[\ell]$ 本质谱底部的能量期望值。为克服这一困难，我们采用 Tamura [37]提出的阈值试探态构造方法，该方法基于利用 $\mathbb{R}^4$ 中自由拉普拉斯算子的格林函数对共振剖面进行适当修正。在四维中，这个格林函数可以用第二类修正贝塞尔函数表示，其在零点附近的渐近行为对分析至关重要。我们首先归纳零能共振和格林函数的相关性质，以供后文使用。这些性质总结在以下两个引理中。

引理 5.4（共振函数）。设 $V \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为实值函数，并按定义 *2.1* 的意义属于短程，参数为 R、$\delta > 0$。假设算子

$$h = P_x^2 + V$$

在定义 *2.4* 的意义下于零处有一个虚能级。那么存在一个（在归一化意义下）唯一的函数 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，它在分布意义下满足 $h\varphi_0 = 0$，且可取为实值正函数。此外，存在一个常数 $c_0 \in \mathbb{R}$ 使得

$$\varphi_0(x) = c_0|x|^{-2} + \epsilon_1(x). \tag{5.3}$$

此外，对于任意 $0 < \kappa < 1$，存在一个常数 $C_\kappa < \infty$ 和 $L_2 > 0$（依赖于 R），使得误差有界于

$$|\epsilon_1(x)| \le C_\kappa |x|^{-2-2\kappa\delta} \quad \textit{for } |x| \ge L_2\,.$$

此外，对于 φ_0的梯度，存在一个连续版本，并且

$$\nabla\varphi_0(x) = -2c_0 x|x|^{-4} + \epsilon_2(x) \tag{5.4}$$

其中，对于任意 $0 < \kappa < 1$，存在 $c_\kappa > 0$ 和 $L_3 > 0$（依赖于 R），使得 h

$$|\epsilon_2(x)| \le C_\kappa |x|^{-3-2\kappa\delta} \quad \textit{for } |x| \ge L_3.$$

证明。该陈述的证明见于 [34, 第 3.2、3.3 节和附录 D]。特别是，请参阅 [34, 定理 3.2。2] 以及后续各注。为方便读者，我们在附录中证明引理 5.4，该引理对应于函数 ϵ_1, ϵ_2 为零的紧支撑径向对称势情形。[34] 中引理 5.4 的证明是对这些论证的仔细拓展。 ∎

注 5.5. 注意，在 [37, 命题 3.1] 中给出了一个带有参数 $\kappa = 1$ 的类似陈述，但没有提供证明。上述关于误差项 $\kappa < 1$ 的估计足以用于后续分析。接下来，固定 $\kappa = 1/2$，并定义 $\rho_0 = \max\{L_2, L_3\}$。

常数 c_0 可以更明确地表示为（在维度 $d = 4$下）

$$c_0 = -\frac{\langle V, \varphi_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)}}{4\pi^2}.$$

上述内积在玻色子情形下始终非零，而对于不同的粒子统计，共振的主导贡献可能为零。这是唯一用到粒子玻色对称性的地方。

引理 5.6 （$\mathbb{R}^4$中的 $-\Delta + \mu^2$ 的格林函数）。 设 $\mu > 0$ 并定义

$$G_\mu(x) := \mu K_1(\mu|x|)|x|^{-1}, \qquad x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \tag{5.5}$$

其中， K_1 表示第二类修正贝塞尔函数。则 $G_\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ 且满足

$$(-\Delta + \mu^2)G_\mu = 0 \qquad in\, \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}. \tag{5.6}$$

此外，$G_\mu \in L^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$ 且满足

$$(-\Delta + \mu^2)G_\mu = 4\pi^2\, \delta \tag{5.7}$$

在分布意义下。

注 5.7. 奇异行为 $G_\mu(x) \sim |x|^{-2}$在 $|x| \to 0$ 时意味着，尽管 $G_\mu \in L^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$，仍有

$$G_\mu \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4) \qquad \text{and} \qquad \nabla G_\mu \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^4).$$

特别地，$G_\mu \notin H^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$。此外， G_μ在无穷远处呈指数衰减。特别地，对每一个 $s > 0$,

$$G_\mu \in L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_s(0)) \qquad \text{and} \qquad \nabla G_\mu \in L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_s(0)).$$

在相差归一化常数 $4\pi^2$ 的意义下，函数 G_μ 与通过傅里叶变换得到的基本解一致。

引理 *5.6* 的证明。 论证是标准的，我们仅给出简要概述。由 $-\Delta + \mu^2$ 的旋转不变性，函数 G_μ 是径向对称的。因此，对G_μ： $|x| \mapsto G_\mu(|x|)$，利用 $\mathbb{R}^4$ 中拉普拉斯算子的径向部分，(5.6) 中的偏微分方程可写为

$$-(\overline{G}_\mu)''(r) - \frac{3}{r}(\overline{G}_\mu)'(r) + \mu^2 \overline{G}_\mu(r) = 0, \quad r \neq 0\,.$$

引入 $u(r) := r\, G_\mu(r)$ 将该方程化为一阶修正贝塞尔方程。在无穷远处衰减的解由 $u(r) = \mu K_1(\mu r)$ 给出，从而得到 G_μ 的所述形式。利用 (A.1) 中的渐近展开可得

$$K_1(r) = r^{-1} + O(r \log r) \qquad \text{as } r \to 0.$$

因此 $G_\mu \in L^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$，通过对测试函数$y \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$进行标准的分部积分论证，便可得出

$$\langle (-\Delta + \mu^2)G_\mu, y \rangle = 4\pi^2\, y(0)$$

这就证明了（5.7）。 ∎

现在我们给出函数 $\phi(\ell,\cdot)$ 在任意固定的 $\ell \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ 下的显式定义。为此，我们定义 $\mathbb{R}^4$ 的以下子集：

$$A_\rho(\ell/2) \coloneqq B_{2\rho}(\ell/2) \setminus B_\rho(\ell/2) \text{ and } \Omega_\rho(\ell/2) \coloneqq \mathbb{R}^4 \setminus \big(B_\rho(\ell/2) \cup B_\rho(-\ell/2)\big) \tag{5.8}$$

其中 $B_s(\eta) \subset \mathbb{R}^4$ 表示半径为 $s > 0$、中心位于 $\eta \in \mathbb{R}^4$的球。我们对 $\rho > 0$ 定义

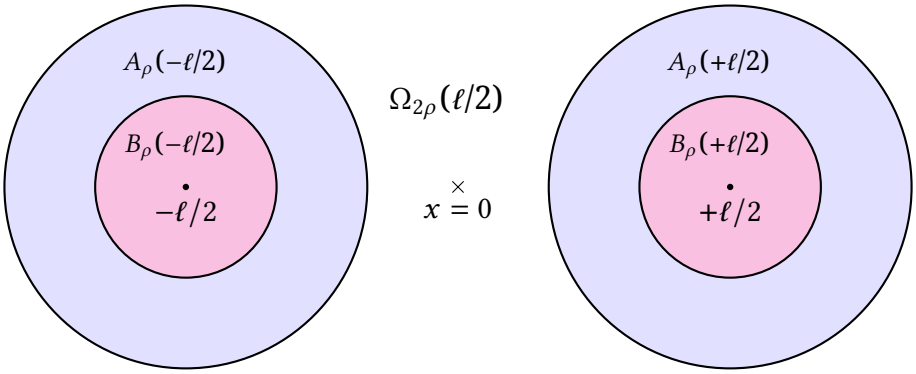

图 2. 集合 $A_\rho(\pm\ell/2)$ $B_\rho(\pm\ell/2)$ 和 $\Omega_{2\rho}(\ell/2)$。在相关区域中，参数 $L = |\ell|$ 很大，这也意味着集合 $A_\rho(+\ell/2)$ $B_\rho(+\ell/2)$ 远离 $A_\rho(-\ell/2)$ $B_\rho(-\ell/2)$。

截断函数 $u_\rho\colon\ \mathbb{R}^4 \to [0,1]$ 和 $v_\rho = 1 - u_\rho$，其中

$$u_\rho(x) = \chi\left(|x|/\rho\right) \tag{5.9}$$

其中 $\chi\colon\ [0,\infty) \to [0,1]$ 定义为

$$\chi(r) \coloneqq \min\{1, (2-r)_+\} = \begin{cases} 1, & r \le 1, \\ 2-r, & 1 < r \le 2, \\ 0, & r > 2. \end{cases} \tag{5.10}$$

测试函数 $\phi(\ell,\cdot)$ 定义如下：

定义 5.8. 设 G_μ 为式 (5.5) 中定义的函数，φ_0 为式 (5.3) 中归一化条件为 $c_0 = 1$的零能解。对于任意满足 $L = |\ell|$的$\ell \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$，令 $\rho = \rho(L) = L^\theta$，其中$\theta \in$属于某个$(0,1)$，且 $\mu = \mu(L) = \mu_0/L$，其中 $\mu_0 > 0$属于某个集合。于是，对任意$x \in \mathbb{R}^4$，我们定义 $\phi(\ell,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^4)$为

$$\begin{aligned} \phi(\ell,x) =& u_\rho(x-\ell/2)\left(\varphi_0(x-\ell/2) - G_\mu(x+\ell/2)\right) + v_\rho(x-\ell/2)G_\mu(x-\ell/2) \\ &+ u_\rho(x+\ell/2)\left(\varphi_0(x+\ell/2) - G_\mu(x-\ell/2)\right) + v_\rho(x+\ell/2)G_\mu(x+\ell/2) \end{aligned}$$

其中 u_ρ，v_ρ定义于 (5.9)、(5.10)。为将构造限制在大间距区域并避免势阱重叠，固定 $L_1(\theta) > 0$，并令 $\Upsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^4;\ [0,1])$ 为径向函数，满足 $\Upsilon(\ell) = 0$（当 $|\ell| \le L_1$ 时），以及 $\Upsilon(\ell) = 1$（当 $|\ell| \ge 2L_1$ 时）。于是我们定义

$$\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot) = \Upsilon(\ell)\frac{\phi(\ell,\cdot)}{\|\phi(\ell,\cdot)\|}.$$

在继续之前，我们先定义以下函数：对于任意固定的 $\ell \in \mathbb{R}^4$， $\mu_0 > 0$ 和 $\theta \in (0, 1)$，若 $L > 0$ 足够大，则

$$\begin{aligned} \Gamma(\ell, x) &= G_\mu(x + \ell/2) + G_\mu(x - \ell/2) \\ f(\ell, x) &= \phi(\ell, x) - \Gamma(\ell, x) \end{aligned} \tag{5.11}$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^4$。那么

$$\phi(\ell, x) = \begin{cases} \varphi_0(x \mp \ell/2), & x \in B_\rho(\pm\ell/2), \\ \Gamma(\ell, x) + f(\ell, x), & x \in A_\rho(\ell/2) \cup A_\rho(-\ell/2), \\ \Gamma(\ell, x), & x \in \Omega_{2\rho}(\ell/2). \end{cases} \tag{5.12}$$

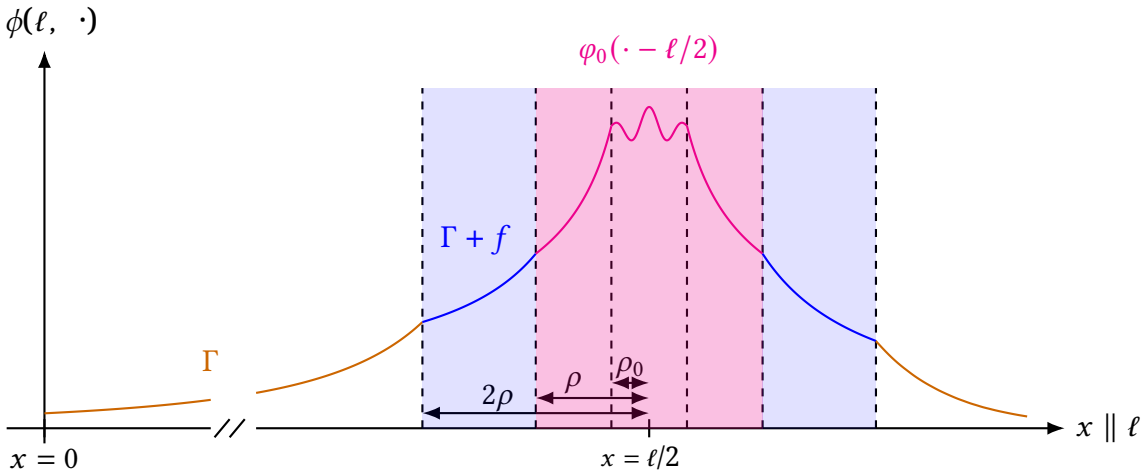

图 3. 势阱中心位于 $\ell/2$ 附近时，函数 $\phi(\ell, \cdot)$ 的示意图。函数 $\phi(\ell, \cdot)$ 关于反射$x \mapsto -x$对称。我们将示意图简化为所示部分。

注记 5.9. 函数 ϕ 在每个势阱附近与共振重合，在远离势阱处则与格林函数之和重合；而修正项 f仅支撑于环域 $A_\rho(\pm\ell/2)$ 上。对于任意固定的 $x \in \mathbb{R}^4$，映射

$$\ell \mapsto u_{\rho(\ell)}(x \pm \ell/2), \qquad \ell \mapsto \varphi_0(x \pm \ell/2)$$

在 ℓon $\{|\ell| \geq L_1\}$ 上局部利普希茨（因而弱可微）。函数 $G_\mu(x \pm \ell/2)$ 在 $x = \mp\ell/2$ 时是奇异的。然而，在 $\phi(\ell, x)$ 的定义中，项 $G_\mu(x \pm \ell/2)$ 只与 $v_\rho(x \pm \ell/2)$ 相乘，因此其支撑位于区域 $|x \pm \ell/2| \geq \rho(L)$ 内。因此，对于每个固定的 $x \in \mathbb{R}^4$，映射 $\ell \mapsto \phi(\ell, x)$ 在 $\{|\ell| \geq L_1\}$ 上局部利普希茨（因而弱可微）。下文证明，对于每个固定的 $\ell \in \mathbb{R}^4$，映射 $x \mapsto \phi(\ell, x)$ 是平方可积的。由其定义可直接验证，$\phi(\ell, \cdot)$ 的弱 ℓ–导数在局部属于 $L^2(\mathbb{R}^4)$，因此根据构造，映射 $\ell \mapsto \|\widetilde{\Phi}(\ell, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}$ 属于 $H^1\mathrm{loc}\,(\mathbb{R}^4)$。

注意，函数 ϕ 取决于辅助参数 ρ, μ。定义 5.8 中 ρ 和 μ 对 L的依赖形式如此选定，原因有二。首先，这确保

引言中讨论的局部能量启发式适用于当前情形。其次，由于 G_μ 满足 $(-\Delta+\mu^2)G_\mu=0$，且范数 $\|\phi(\ell,\cdot)\|^2$ 在 $L\to\infty$ 时按对数发散，因此比值 $\mu^2/\|\phi(\ell,\cdot)\|^2$ 必须呈现四维中隧穿能量特有的 $L^{-2}\log(L)^{-1}$ 尺度关系（参见 [29] 和第 6 章 [34, .2]）。

我们省略了该函数对 $\theta\in(0,1)$ $\mu_0>0$ 的显式依赖，并在稍后选定这些~常数。归一化函数 Φ 随后与固定 $\theta,\mu_0>0$ 后出现在引理 3.3 中的测试函数一致。

注 5.10。在继续之前，我们简要讨论稍后固定的选择 $\mu_0>0$ 和 $\theta\in(0,1)$，并将其与 [37] 中三维的情形进行比较。在三维中，算子 $-\Delta+\mu^2$ 的格林函数由 $e^{-\mu|x|}/|x|$ 给出。在环域 $A_\rho(\ell/2)$ 上，插值函数的行为为

$$\varphi_0(x-\ell/2)-\frac{e^{-\mu|x-\ell/2|}}{|x-\ell/2|}-\frac{e^{-\mu|x+\ell/2|}}{|x+\ell/2|}.$$

在空间维数 $d=3$ 中，共振满足 $\varphi_0(x)\sim 1/|x|$。令 $\mu=\mu_0/L$。选取$\theta=\theta(\delta)\in(0,1)$ 足够大（其中 $\delta>0$ 来自定义 2.1）

$$\frac{1}{|x-\ell/2|}-\frac{e^{-\mu|x-\ell/2|}}{|x-\ell/2|}\sim\frac{\mu_0}{L},\qquad \text{on } A_\rho(\ell/2). \tag{5.13}$$

此外，对于 $x\in A_\rho(\ell/2)$，我们有 $|x+\ell/2|\sim L$，因此

$$\frac{e^{-\mu|x+\ell/2|}}{|x+\ell/2|}\sim\frac{e^{-\mu_0}}{L}. \tag{5.14}$$

为了使插值函数尽可能小，也就是最小化 (5.13) 与 (5.14) 之间的差异，我们选择 μ_0，使其成为四维中 $t=e^{-t}$ 的唯一解。

在四维中，我们无法以这种方式继续。事实上，由于修正贝塞尔函数的级数展开，可以得到（当 $\theta(\delta)\in(0,1)$ 足够大时）

$$\varphi_0(x-\ell/2)-G_\mu(x-\ell/2)\sim-\frac{\mu^2}{2}\left(\log|x-\ell/2|+\log(\mu)-\log(2)+\gamma-\frac{1}{2}\right),$$

其中 $\gamma>0$ 是欧拉-马歇罗尼常数。因此，这一关系的首阶项不是关于 x 的常数（与 (5.13) 相比）。特别是，它呈现出对数依赖。在我们的分析中，我们会跟踪插值带来的误差，而参数 $\mu_0>0$ 则作为自由参数参与讨论。参数 $\theta\in(0,1)$ 将根据 $\delta>0$ 来确定。特别是，以下选择并非最优，但已足够

$$\theta=\theta(\delta)=\frac{4}{4+\delta}.$$

5.1.1. 测试函数的归一化。在继续证明引理 5.1 和 5.2 之前，我们计算范数 $\|\phi(\ell,\cdot)\|$ 关于 $L=|\ell|$ 的最高阶项。在下文中，我们始终固定所选取的

$$\rho=\rho(L)=L^\theta,\qquad \mu=\mu(L)=\mu_0/L,$$

其中 $\mu_0>0$ 与 $\theta\in(0,1)$将在稍后选取。我们将始终假设 $L\geq 2L_1$，使得 $\Upsilon\equiv 1$且 $B_{2\rho}(\ell/2)\cap B_{2\rho}(-\ell/2)=\varnothing$，见定义 5.8。

注 5.11. 下文中，我们使用关于极限 $L \to \infty$的朗道符号。对于函数， $y_1, y_2 \colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$，我们记 $y_1(L) \in O(y_2(L))$，若存在常数 $C > 0$与$L_0 > 0$使得

$$|y_1(L)| \le C|y_2(L)| \qquad \text{for all } L \ge L_0.$$

对于一个与 L 无关的常数 $C > 0$，如果 $a \le Cb$，我们也记作 $a \lesssim b$。对于任意 $s \in \mathbb{R}$, 我们还将滥用记号 $O(L^s) = O(L \mapsto L^s)$。

我们证明测试函数范数的下述界。

引理 5.12. 固定 $\ell \in \mathbb{R}^4$，令 $\phi(\ell,\cdot)$ 为定义 *5.8* 中定义的函数，则当$|\ell| = L > 0$ 足够大时，我们得到

$$\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 4\pi^2 \log(L) + O(1).$$

证明. 证明过程通过将 $\phi(\ell,\cdot)$ 的范数归结为球 $B_\rho(\pm\ell/2)$ 之外的格林函数 G_μ 的贡献来进行，而所有插值误差均保持一致有界。我们将证明分为两步，分别对应于以下两个关系的证明：

$$\begin{aligned} \|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} &= \|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} + 4\pi^2\theta\log(L) + O(1), \\ \|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} &= 4\pi^2(1-\theta)\log(L) + O(1). \end{aligned} \tag{5.15}$$

步骤 1: 我们证明 (5.15) 中的第一个关系。利用反射对称性，即 $\phi(\ell,\cdot) = \phi(-\ell,\cdot)$，我们将其分解为

$$\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))} + 2\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + 2\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))}. \tag{5.16}$$

我们分别估计 (5.16) 右侧的第三项和第二项。根据 (5.12) 和变量代换 $x \mapsto x - \ell/2$

$$\begin{aligned} \|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} &= \|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0))} \\ &= \|\varphi_0\|^2_{L^2(B_{\rho_0}(0))} + \|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0))}, \end{aligned} \tag{5.17}$$

其中， $\rho_0 > 0$ 按照注 5.5 固定。由于 $\rho_0 > 0$ 与 L 和 $\varphi_0 \in \dot{H}^1$ 无关，因此也与 L^2_{loc} 无关，所以在 $B_{\rho_0}(0)$ 上的范数是一个与 L 无关的常数。利用显式表达式

$$\varphi_0(x) = |x|^{-2} + \epsilon_1(x) \quad \text{where} \quad |\epsilon_1(x)| \lesssim |x|^{-2-\delta} \quad \text{for } |x| > \rho_0$$

（参见引理 5.4，其中取 $c_0 = 1$ 和 $\kappa = 1/2$），我们得到

$$\|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0))} = \left|S^3\right| \int_{\rho_0}^{\rho} r^{-1}\, dr + \int_{B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0)} 2\,|x|^{-2}\,\epsilon_1(x) + |\epsilon_1(x)|^2\, dx \tag{5.18}$$

我们将证明

$$2\|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0))} = 4\pi^2\theta\log(L) + O(1). \tag{5.19}$$

(5.18) 右端的积分给出了 (5.19) 右端的首项。接下来需要估计涉及 ϵ_1的各项，注意到下式即可直接得出：

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0)} 2\,|x|^{-2}\,\epsilon_1(x) + |\epsilon_1(x)|^2\,dx\right| &\lesssim \int_{B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0)} |x|^{-2}\,|\epsilon_1(x)|\,dx \\ &\lesssim \int_{B_\rho(0)\setminus B_{\rho_0}(0)} |x|^{-4-\delta}\,dx \in O(1).\end{aligned}$$

结合 (5.17) 和 (5.19)，我们得到

$$2\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} = 4\pi^2\theta\log(L) + O(1). \tag{5.20}$$

我们继续计算 (5.16) 右侧关于 $A_\rho(\ell/2)$ 的范数。代入 (5.12) 得到

$$\begin{aligned}\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} =& \|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &+ 2\Re\,\langle f(\ell,\cdot),\Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + \|f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))}.\end{aligned} \tag{5.21}$$

我们分别估计 (5.21) 右侧的各项。为了估计涉及 f 的项，我们使用以下界

$$|f(\ell,x)| \lesssim L^{-2}\log L, \quad \forall x \in A_\rho(\ell/2),\ \theta = 4/(4+\delta), \tag{5.22}$$

由 f 的定义以及附录中引理 A.2 对 K_1 的级数展开可立即得到。关于 (5.22) 的简短证明，我们留待引理 6.1 给出。

利用 (5.22) 和 $|A_\rho| \sim \rho^4 = L^{4\theta}$，我们得到

$$\|f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \lesssim L^{-4}\log(L)^2\left|A_\rho(\ell/2)\right| \lesssim L^{4(\theta-1)}\log(L)^2 \in O(1). \tag{5.23}$$

我们继续处理(5.21)右侧的内积项，并利用 G_μ的衰减以及尺度关系 $\mu\rho = \mu_0 L^{\theta-1}$证明该项属于 $O(1)$。注意，对任意$x \in A_\rho(\ell/2)$，成立 $|x+\ell/2| \geq L/2$，从而

$$\left|G_\mu(x+\ell/2)\right| \lesssim L^{-2}$$

使得

$$\left|\left\langle f(\ell,\cdot), G_\mu(\cdot+\ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}\right| \lesssim L^{-4}\log(L)\left|A_\rho(\ell/2)\right| \lesssim L^{4(\theta-1)}\log(L) \in O(1). \tag{5.24}$$

对于涉及 $G_\mu(\cdot - \vec{\ell}/2)$ 的项，我们使用式 (5.5) 中 G_μ 的定义，并变换到以 $\ell/2$ 为中心的球坐标。这得到

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f(\ell,\cdot), G_\mu(\cdot-\ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}\right| &\lesssim L^{-2}\log(L)\int_{A_\rho(\ell/2)} \mu\frac{K_1(\mu\,|x-\ell/2|)}{|x-\ell/2|}\,dx \\ &\lesssim L^{-2}\log(L)\int_\rho^{2\rho} \mu r^2 K_1(\mu r)\,dr.\end{aligned}$$

代入 $s = \mu r$，其中 $\mu = \mu_0 L^{-1}$，并利用 $s^2 K_1(s)$ 在 $[0,1]$ 上有界（参见引理 A.2），对于足够大的 $L > 0$，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\left\langle f(\ell,\cdot), G_\mu(\cdot - \ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}\right| &\lesssim \mu_0^{-2}\log(L)\int_{\mu\rho}^{2\mu\rho} s^2 K_1(s)\,ds \\ &\lesssim \log(L) L^{\theta-1} \in O(1),\end{aligned} \tag{5.25}$$

其中最后一步用到了缩放关系 $\mu\rho = \mu_0 L^{\theta-1}$。将 (5.24)、(5.25)、(5.23) 与 (5.21) 结合，并应用三角不等式，得到

$$\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} = \|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + O(1). \tag{5.26}$$

根据 (5.8) 中集合 A_ρ，Ω_ρ 的定义，可得 $A_\rho(+\ell/2) \cup A_\rho(-\ell/2) \cup \Omega_{2\rho}(\ell/2) = \Omega_\rho(\ell/2)$。因此，将 (5.26) 和 (5.20) 代入 (5.16)，并结合 ϕ 的反射对称性，即可得到 (5.15) 第一行中所述的关系。

步骤 2： 我们证明，当 $L > 0$ 足够大时：

$$\|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = 4\pi^2(1-\theta)\log(L) + O(1). \tag{5.27}$$

将平方展开并结合反射对称性，得到

$$\begin{aligned}&\|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} \\ &\quad = 2\|G_\mu(\cdot - \ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} + 2\left\langle G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\end{aligned} \tag{5.28}$$

我们证明，(5.28) 右端的第二项有一个与 L 无关的常数界。由于 $G_\mu \geq 0$，我们有

$$\left\langle G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} \leq \left\langle G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)}.$$

这个关于 $\mathbb{R}^4$ 的内积可显式求解（参见推论 B.4），从而得到

$$\left\langle G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 2\pi^2 K_0(\mu_0) \in O(1). \tag{5.29}$$

注意，对于 $x \in B_\rho(-\ell/2)$，我们有 $\left|G_\mu(x - \ell/2)\right| \leq cL^{-2}$，因此

$$\|G_\mu(\cdot - \ell/2)\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} \lesssim L^{-4}\left|B_\rho(-\ell/2)\right| \in O(1)$$

使得

$$\|G_\mu(\cdot - \ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(-\ell/2))} = \|G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))} + O(1). \tag{5.30}$$

将 (5.30) 和 (5.29) 代入 (5.28) 的右侧，可得

$$\|\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = 2\|G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))} + O(1).$$

G_μ的剩余范数可以显式计算。利用 (5.5) 中 G_μ的定义，我们得到

$$\begin{aligned} 2\|G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))} &= 2\int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} \mu^2 \frac{K_1(\mu|x|)^2}{|x|^2} dx \\ &= 4\pi^2 \int_\rho^\infty \mu^2 t K_1(\mu t)^2 dt \\ &= 4\pi^2 \int_{\mu\rho}^\infty s K_1(s)^2 ds \end{aligned} \tag{5.31}$$

利用注 A.4 中 $sK_1(s)^2$ 的原函数可得

$$2\|G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))} = \left[\frac{1}{2}s^2\left(K_1(s)^2 - K_0(s)K_2(s)\right)\right]_{s=\mu\rho}^\infty$$

在注 A.4 中，我们证明

$$\left[\frac{1}{2}s^2\left(K_1(s)^2 - K_0(s)K_2(s)\right)\right]_{s=\mu\rho}^\infty = -\log(\mu\rho) + O(1).$$

由于 $\mu\rho = \mu_0 L^{\theta-1}$，这就证明了 (5.27)，并完成了引理 5.12 的证明。 ∎

5.2. **能量估计**。 本小节证明引理 5.1。我们先陈述三个命题，然后证明这三个命题合起来蕴含引理 5.1。这些命题将在第 5.2.1–5.2.3 小节中分别证明。在全文中，我们假设 $\ell \in \mathbb{R}^4$，其中 $|\ell| = L > 0$ 足够大，且 $\theta = 4/(4+\delta)$。

命题 5.13。定义

$$V_\pm[\ell](\cdot) = V(\cdot - \ell/2) + V(\cdot + \ell/2), \tag{5.32}$$

那么对于测试函数 ϕ，我们有

$$\langle \phi(\ell,\cdot), V_\pm[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle + 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} = -8\pi^2 L^{-2\theta} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.33}$$

证明。 参见第 5.2.1 小节。 ∎

命题 5.14。 设 Γ、f为(5.11)中定义的函数，则

$$\|\nabla f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}) \tag{5.34}$$

and

$$\begin{aligned} &4\Re\langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla\Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &= C_1(\mu_0)L^{-2} - C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + O(L^{-3+\theta}), \end{aligned} \tag{5.35}$$

with

$$\begin{aligned} C_1(\mu_0) &= 8\pi^2\mu_0^2(\log(2) - \gamma) + 4\pi^2\mu_0^2 - 16\pi^2\mu_0 K_1(\mu_0), \\ C_2(\mu_0) &= 8\pi^2\mu_0^2 . \end{aligned} \tag{5.36}$$

以及 γ 欧拉–马歇罗尼常数。

证明。 参见第 5.2.2 小节。 ∎

命题 5.15。 设 G_μ 为(5.5)中定义的函数，则

$$2\|\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = 8\pi^2 L^{-2\theta} + C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + C_3(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.37}$$

and

$$2\left\langle \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2), \nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = C_4(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}), \tag{5.38}$$

其中 γ 是欧拉–马歇罗尼常数，且

$$\begin{aligned} C_2(\mu_0) &= 8\pi^2\mu_0^2, \\ C_3(\mu_0) &= 8\pi^2\mu_0^2(\gamma - \log(2)) - 2\pi^2\mu_0^2, \\ C_4(\mu_0) &= 16\pi^2\mu_0 K_1(\mu_0) - 4\pi^2\mu_0^2 K_2(\mu_0). \end{aligned} \tag{5.39}$$

证明。 见第 5.2.3 小节。 ∎

注 5.16。 将引理 5.1 中的衰减率与引理 5.12 中对$\|\phi(\ell,\ \cdot)\|^2$的估计加以比较，表明我们希望证明

$$\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle \sim -cL^{-2}$$

对某个常数 $c > 0$。然而，命题 5.13–5.15 包含比 L^{-2}衰减得更慢的项。我们将证明这些项全部相互抵消。

引理 5.1 证明的结论：现假设命题 5.13–5.15 对定义 5.8 中的测试函数 ϕ 成立。我们接着证明这些估计蕴含 (5.1)，从而完成引理 5.1 的证明。

引理 *5.1* 的证明。 根据 (3.1) 中 $H[\ell]$ 的定义，我们可得，对任意 $\ell \in \mathbb{R}^4$

$$\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle = \|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \int_{\mathbb{R}^4} V_\pm[\ell](x)\,|\phi(\ell,x)|^2\,dx \tag{5.40}$$

其中， $V_\pm$ 是 (5.32) 中定义的双阱势。在下文中，我们始终假设 $|\ell| = L > 0$ 取值足够大。由 $\phi(\ell,\ \cdot)$ 的反射对称性，我们从 (5.40) 得出

$$\begin{aligned} \langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle =& 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} + 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &+ \|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))} + \langle \phi(\ell,\cdot), V_\pm[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)}. \end{aligned} \tag{5.41}$$

将命题 5.13 的 (5.33) 代入 (5.41)，我们得到

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle \\ =& 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + \|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))} - 8\pi^2 L^{-2\theta} + O(L^{-3+\theta}) \\ =& \Sigma[\phi(\ell,\cdot)] - 8\pi^2 L^{-2\theta} + O(L^{-3+\theta}), \end{aligned} \tag{5.42}$$

其中我们定义了

$$\Sigma[\phi(\ell,\cdot)] = 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + \|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))}.$$

我们继续估计 $\Sigma[\phi(\ell,\cdot)]$。根据(5.11)中函数 f和 Γ 的定义，我们有

$$\phi(\ell,x) = \Gamma(\ell,x) + f(\ell,x), \qquad \text{on } A_\rho(\ell/2)\cup A_\rho(-\ell/2). \tag{5.43}$$

将(5.43)代入 $\Sigma[\phi(\ell,\cdot)]$ 可得

$$\begin{aligned}\Sigma[\phi(\ell,\cdot)] =& 2\|\nabla f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + 4\mathfrak{R}\langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla\Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &+ 2\|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + \|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

由于 $A_\rho(+\ell/2) \cup A_\rho(-\ell/2) \cup \Omega_{2\rho}(\ell/2) = \Omega_\rho(\ell/2)$，且 $\Gamma(\ell,\cdot)$ 具有反射对称性，我们得到

$$2\|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + \|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_{2\rho}(\ell/2))} = \|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}. \tag{5.45}$$

我们利用命题 5.14 中的 (5.34) 和 (5.35) 估计 (5.44) 右侧的前两项，并结合 (5.45) 得出结论

$$\begin{aligned}\Sigma[\phi(\ell,\cdot)] =& \ C_1(\mu_0)L^{-2} - C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} \\ &+ \|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} + O(L^{-3+\theta}).\end{aligned} \tag{5.46}$$

接下来，我们利用 (5.11) 中 Γ 的定义，展开 (5.46) 右侧的范数平方，并利用反射对称性得到

$$\begin{aligned}&\|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = \|\nabla(G_\mu(\cdot+\ell/2) + G_\mu(\cdot-\ell/2))\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} \\ &= 2\|\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} + 2\mathfrak{R}\langle \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2), \nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}.\end{aligned} \tag{5.47}$$

将 (5.37) 和 (5.38) 与 (5.47) 结合，得到

$$\begin{aligned}&\|\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} \\ &= 8\pi^2 L^{-2\theta} + C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + (C_3(\mu_0)+C_4(\mu_0))\,L^{-2} + O(L^{-3+\theta}).\end{aligned} \tag{5.48}$$

将 (5.48) 代入 (5.46) 可得

$$\Sigma[\phi(\ell,\cdot)] = (C_1(\mu_0)+C_3(\mu_0)+C_4(\mu_0))\,L^{-2} + 8\pi^2 L^{-2\theta} + O(L^{-3+\theta}).$$

将 $\Sigma[\phi(\ell,\cdot)]$ 的表达式代入 (5.42) 可得

$$\begin{aligned}\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle &= (C_1(\mu_0)+C_3(\mu_0)+C_4(\mu_0))\,L^{-2} + O(L^{-3+\theta}) \\ &= 2\pi^2\mu_0^2(1-2K_2(\mu_0))L^{-2} + O(L^{-3+\theta}),\end{aligned}$$

其中，我们使用了命题 5.14 和 5.15 中 $C_1(\mu_0)$ $C_3(\mu_0)$ 和 $C_4(\mu_0)$ 的显式表达式。考虑到引理 5.12 中确立的测试函数范数的对数增长，我们得到

$$\frac{\langle \phi(\ell,\cdot), H[\ell]\phi(\ell,\cdot)\rangle}{\|\phi(\ell,\cdot)\|^2} = \tfrac{1}{2}\mu_0^2(1-2K_2(\mu_0))L^{-2}\log(L)^{-1} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.49}$$

利用展开式 $K_2(t) = 2t^{-2} + O(1)$ as $t \to 0^+$（见 (A.3)），我们得到

$$\tfrac{1}{2}\mu_0^2(1-2K_2(\mu_0)) \to -2 \quad \text{for } \mu_0 \to 0^+.$$

回顾一下，我们的目标是证明 (5.49) 的右端具有形如 $-(2-\varepsilon)L^{-2}\log(L)^{-1}$ 的上界。因此，对于这个固定的 $\varepsilon > 0$，我们固定 $L_0(\varepsilon) > 0$，使得对任意 $L > L_0(\varepsilon)$，$O(L^{-3+\theta})$ 中的贡献至多只能增加一项大小为 $(\varepsilon/2)L^{-2}\log(L)^{-1}$ 的项，然后选取足够小的 $\mu_0 > 0$，使得

$$\tfrac{1}{2}\mu_0^2(1-2K_2(\mu_0)) \le -2 + \varepsilon/2.$$

这就证明了 (5.1)，从而完成了引理 5.1 的证明。 ■

5.2.1. 命题 *5.13* 的证明。

证明。 我们首先证明

$$\int_{\mathbb{R}^4} V(x \pm \ell/2)\,|\phi(\ell,x)|^2\,dx = 2\int_{\mathbb{R}^4} V(x)\,|\varphi_0(x)|^2\,dx + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.50}$$

首先注意到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^4} V(x \pm \ell/2)\,|\phi(\ell,x)|^2\,dx = &\langle \varphi_0(\cdot - \ell/2), V_\pm \varphi_0(\cdot - \ell/2)\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} \\ &+ \langle \varphi_0(\cdot + \ell/2), V_\pm \varphi_0(\cdot + \ell/2)\rangle_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} \\ &+ \langle \phi(\ell,\cdot), V_\pm \phi(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\,.\end{aligned} \tag{5.51}$$

由于 $V_\pm$ 的短程条件以及引理 5.12 中 $\|\phi(\ell,\ \cdot)\|^2$ 的增长，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\langle \phi(\ell,\cdot), V_\pm \phi(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\right| &\le \sup_{x\in\Omega_\rho(\ell/2)} |V_\pm(x)|\,\|\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} \\ &\lesssim L^{-\theta(2+2\delta)}\log(L) \in O(L^{-3+\theta}),\end{aligned} \tag{5.52}$$

这里我们用到了 $\theta = 4/(4+\delta)$。接下来我们证明

$$\langle \varphi_0(\cdot - \ell/2), V_\pm \varphi_0(\cdot - \ell/2)\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} = \langle \varphi_0, V\varphi_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.53}$$

由于 V是短程的，且$\|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0))} = 4\pi^2\theta\log(L) + O(1)$（见（5.19））， 我们有

$$\left|\langle \varphi_0(\cdot - \ell/2), V(\cdot + \ell/2)\varphi_0(\cdot - \ell/2)\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))}\right| \lesssim L^{-\theta(2+2\delta)}\,\|\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0))} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.54}$$

利用 φ_0 的显式衰减以及 V的短程性，鉴于 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$，我们得到：

$$\left|\int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} V\,|\varphi_0|^2\,dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} |x|^{-2-2\delta}\,|x|^{-4}\,dx \lesssim L^{-\theta(2+2\delta)} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.55}$$

因此，（5.53）由（5.54）和（5.55）推出。类似地可得

$$\langle \varphi_0(\cdot + \ell/2), V_\pm \varphi_0(\cdot + \ell/2)\rangle_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} = \langle \varphi_0, V\varphi_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.56}$$

将（5.52）、（5.53）和（5.56）代入（5.51），即可得出（5.50）。

根据定义，我们有

$$2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} = 2\|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0))} \tag{5.57}$$

由于 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$是零能量解，即

$$\int_{\mathbb{R}^4} V\,|\varphi_0|^2\,dx + \|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 0,$$

我们发现

$$\int_{\mathbb{R}^4} V\,|\varphi_0|^2\,dx + \|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(B_\rho(0))} = -\|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))}. \tag{5.58}$$

由式 (5.50)、(5.57) 和 (5.58) 可得

$$\langle \phi(\ell,\cdot), V_{\pm}\phi(\ell,\cdot)\rangle + 2\|\nabla\phi(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} = -2\,\|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} + O(L^{-3+\theta}).$$

利用引理 5.4 中 φ_0 的显式衰减可得

$$\|\nabla\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))} = \int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} \left|\frac{2}{|x|^3}\right|^2 - \frac{4}{|x|^3}\frac{x}{|x|}\cdot\epsilon_2(x) + |\epsilon_2(x)|^2\ dx. \tag{5.59}$$

直接计算可得

$$\int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} \left|\frac{2}{|x|^3}\right|^2 = 2\pi^2\int_\rho^\infty 4r^{-6}r^3dr = 4\pi^2L^{-2\theta}.$$

对于 (5.59) 右侧涉及 ϵ_2 的项，针对特定选择$\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$，我们计算得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} -\frac{4}{|x|^3}\frac{x}{|x|}\cdot\epsilon_2(x) + |\epsilon_2(x)|^2\ dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0)} |x|^{-6-\delta}\ dx \in O(R^{-3+\theta}).$$

由此完成命题 5.13 的证明。 ∎

5.2.2. 命题 *5.14* 的证明。

命题 *5.14* 的证明。 我们证明以下两个关系

$$\|\nabla f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}), \tag{5.60}$$

and

$$\begin{aligned} &4\mathfrak{R}\langle\nabla f(\ell,\cdot),\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &= C_1(\mu_0)L^{-2} - C_2(\mu_0)\log(\mu_0L^{\theta-1})L^{-2} + O(L^{-3+\theta}). \end{aligned} \tag{5.61}$$

其中 $C_1(\mu_0)$ 和 $C_2(\mu_0)$ 在命题 5.14 中定义。

注意到 $|A_\rho(\ell/2)| \lesssim L^{4\theta}$，因此要证明 (5.60)，只需证明逐点不等式

$$|\nabla_x f(\ell,x)| \lesssim L^{-2-\theta}\log L, \quad x \in A_\rho(\pm\ell/2). \tag{5.62}$$

使得

$$\|\nabla f(\ell,\cdot)\|^2_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \lesssim L^{-4+2\theta}\log(L)^2 \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.63}$$

逐点估计 (5.62) 由 f 的定义以及 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$ 的特定选取得出。我们将此估计留到引理 6.1 中证明；在该引理中，我们将对 f 及其导数证明若干个界。

接下来我们证明 (5.61)。由于所有涉及的函数都是实数值的，我们将省略实部表达式。根据 (5.11) 中 Γ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} \langle\nabla f(\ell,\cdot),\nabla\Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} =& \langle\nabla f(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &+ \langle\nabla f(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}. \end{aligned} \tag{5.64}$$

我们分别研究（5.64）右侧的两项。首先证明

$$\left\langle\nabla f(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.65}$$

对 G_μ 求导可得

$$\nabla G_\mu(x) = -\mu^2 \frac{K_2(\mu|x|)}{|x|}\frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0, \tag{5.66}$$

并且由于 $\rho = \rho(\ell) = L^\theta$, $\mu = \mu_0/L$我们对于 $x \in A_\rho(\ell/2)$ 有 $\mu|x+\ell/2| \to \mu_0$当 $L \to \infty$从而

$$\left|\nabla G_\mu(x+\ell/2)\right| \lesssim L^{-3}, \quad x \in A_\rho(\ell/2). \tag{5.67}$$

结合 (5.62) 中关于 $\nabla_x f(\ell, x)$ 的逐点界，我们得出

$$\langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\rangle_{L^2(A_\rho(\vec{R}/2))} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.68}$$

将此代入 (5.64) 即得

$$\langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla \Gamma(\ell,\cdot)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} = \langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} + O(L^{-3+\theta}).$$

因此，若我们能证明下述**断言**，则等式 (5.61) 成立：

$$\begin{aligned} &4\langle \nabla f(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \\ &= C_1(\mu_0)L^{-2} - C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + O(L^{-3+\theta}). \end{aligned} \tag{5.69}$$

通过直接计算可以发现

$$\nabla_x f(\ell, x) = \sum_{j=1}^{5} h_j(\ell, x),$$

其中，函数 $h_j(\ell,\cdot): A_\rho(\ell/2) \to \mathbb{R}^4$定义为

$$\begin{aligned} h_1(\ell,x) &\coloneqq -\frac{1}{\rho}\left(|x-\ell/2|^{-2} - G_\mu(x-\ell/2)\right)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}, \\ h_2(\ell,x) &\coloneqq \frac{1}{\rho}G_\mu(x+\ell/2)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|} \\ h_3(\ell,x) &\coloneqq \left(2-\frac{|x-\ell/2|}{\rho}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu|x-\ell/2|)}{|x-\ell/2|} - \frac{2}{|x-\ell/2|^3}\right)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}, \\ h_4(\ell,x) &\coloneqq \left(2-\frac{|x-\ell/2|}{\rho}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu|x+\ell/2|)}{|x+\ell/2|}\right)\frac{x+\ell/2}{|x+\ell/2|}, \\ h_5(\ell,x) &\coloneqq -\frac{1}{\rho}\epsilon_1(x-\ell/2)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|} + u_\rho(x-\ell/2)\epsilon_2(x-\ell/2). \end{aligned}$$

注： 根据引理 5.4 中 ϵ_1 和 ϵ_2 的定义，有 $\nabla_x \epsilon_1(x) = \epsilon_2(x)$。

如果我们能够证明

$$\begin{aligned}
\big\langle h_1(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} &= D_1(\mu_0)L^{-2} - \frac{1}{4}C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + O(L^{-3+\theta}),\\
\big\langle h_2(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} &= D_2(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}),\\
\big\langle h_3(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} &= D_3(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}),\\
\big\langle h_4(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} &\in O(L^{-3+\theta}),\\
\big\langle h_5(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} &\in O(L^{-3+\theta}),
\end{aligned} \tag{5.70}$$

取满足下列条件的适当常数 $D_1(\mu_0)$ $D_2(\mu_0)$ $D_3(\mu_0)$

$$C_1(\mu_0) = 4\sum_{j=1}^{3} D_j(\mu_0). \tag{5.71}$$

由此便完成了命题 5.14 的证明。接下来，我们将以下面的五个独立断言分别证明 (5.70) 中的各个关系。证明这些断言时，回顾 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$。

断言 1： 令 $L > 0$ 充分大，则

$$\big\langle h_1(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} = D_1(\mu_0)L^{-2} - \frac{1}{4}C_2(\mu_0)\log(\mu_0 L^{\theta-1})L^{-2} + O(L^{-3+\theta}), \tag{5.72}$$

其中

$$D_1(\mu_0) = 2\pi^2\mu_0^2\Big(\tfrac{3}{2} - \gamma - \log 2\Big), \qquad C_2(\mu_0) = 8\pi^2\mu_0^2. \tag{5.73}$$

断言 1 的证明： 设 $y = x - \ell/2$ 和 $t = |y|$。在环域 $A_\rho(\ell/2) = \{x\colon \rho \le |x-\ell/2| \le 2\rho\}$ 上，我们有 $t \sim \rho = L^\theta$。根据 G_μ 的定义，

$$h_1(\ell, y+\ell/2) = -L^{-\theta}\Big(t^{-2} - \mu\frac{K_1(\mu t)}{t}\Big)\frac{y}{t} =: \widetilde{h}_1(y), \qquad \nabla G_\mu(y) = -\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\frac{y}{t}.$$

这两个向量场都是径向的，因此

$$\widetilde{h}_1(y)\cdot\nabla G_\mu(y) = L^{-\theta}\mu^2\Big(t^{-2} - \mu\frac{K_1(\mu t)}{t}\Big)\frac{K_2(\mu t)}{t}.$$

注意，我们有

$$\big\langle h_1(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} = \big\langle \widetilde{h}_1, \nabla G_\mu\big\rangle_{L^2(A_\rho(0))}. \tag{5.74}$$

将积分改写为球坐标形式可得

$$\begin{aligned}
\big\langle \widetilde{h}_1, \nabla G_\mu\big\rangle_{L^2(A_\rho(0))} &= 2\pi^2\rho^{-1}\mu^2\int_\rho^{2\rho}\Big(t^{-2} - \mu\frac{K_1(\mu t)}{t}\Big)\frac{K_2(\mu t)}{t}\,t^3\,dt\\
&= 2\pi^2\frac{\mu}{\rho}\int_{\mu\rho}^{2\mu\rho}(1 - sK_1(s))K_2(s)\,ds,
\end{aligned} \tag{5.75}$$

其中我们使用了 $s=\mu t$。令 $a=\mu\rho=\mu_0 L^{\theta-1}\to 0$。由注 A.4 中贝塞尔函数的展开式可得

$$(1-sK_1(s))K_2(s)=-\log(s)-\gamma+\tfrac{1}{2}+\log(2)+O(s^2),\qquad s\to 0,$$

并得到

$$\int_a^{2a}(1-sK_1(s))K_2(s)\,ds=-a\log(a)+a\Big(\tfrac{3}{2}-\gamma-\log(2)\Big)+O(a^3).$$

将其代入 (5.75) 得到

$$\Big\langle \widetilde{h}_1,\nabla G_\mu\Big\rangle_{L^2(A_\rho(0))}=2\pi^2\frac{\mu}{\rho}\Big[-a\log(a)+a\Big(\tfrac{3}{2}-\gamma-\log(2)\Big)+O(a^3)\Big].$$

由于 $\mu=\mu_0 L^{-1}$ 且 $\rho=L^\theta$,

$$\frac{\mu}{\rho}a=\mu^2=\mu_0^2L^{-2},\qquad \frac{\mu}{\rho}a^3\in O(L^{-3+\theta}),$$

且 $\log(a)=\log(\mu_0L^{\theta-1})$。因此,

$$\Big\langle \widetilde{h}_1,\nabla G_\mu\Big\rangle_{L^2(A_\rho(0))}=2\pi^2\mu_0^2\Big(\tfrac{3}{2}-\gamma-\log 2\Big)L^{-2}-2\pi^2\mu_0^2L^{-2}\log(\mu_0L^{\theta-1})+O(L^{-3+\theta}),$$

这与 (5.73) 中的常数一致，并结合 (5.74) 证明了该结论。

命题 2： 当 $L>0$ 足够大时,

$$\big\langle h_2(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}=D_2(\mu_0)L^{-2}+O(L^{-3+\theta}),\tag{5.76}$$

其中

$$D_2(\mu_0)=-4\pi^2\mu_0K_1(\mu_0).\tag{5.77}$$

命题 2 的证明： 设 $y=x-\ell/2$ 和 $t=|y|$。那么，如果 $x\in A_\rho(\ell/2)$，则有 $y\in A_\rho(0)$。根据 h_2 和 G_μ 的定义，我们有

$$h_2(\ell,y+\ell/2)=\frac{1}{\rho}G_\mu(y+\ell)\frac{y}{t},\qquad \nabla G_\mu(y)=-\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\frac{y}{t}.$$

因此,

$$h_2(\ell,y+\ell/2)\cdot\nabla G_\mu(y)=-\frac{1}{\rho}G_\mu(y+\ell)\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}.\tag{5.78}$$

从而

$$\big\langle h_2(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}=\big\langle h_2(\ell,\cdot+\ell/2),\nabla G_\mu\big\rangle_{L^2(A_\rho(0))}\tag{5.79}$$

下面我们计算 (5.79) 的右端。由泰勒定理可得$G_\mu(y+\ell)=G_\mu(\ell)+O(L^{-3+\theta})$，证明如下：固定 $y\in A_\rho(0)$，即 $\rho\le|y|\le 2\rho$。定义$\omega(b)=G_\mu(\ell+by)$，其中 $b\in[0,1]$。由中值定理，存在 $b_y\in(0,1)$，使得

$$G_\mu(y+\ell)-G_\mu(\ell)=\omega'(b_y)=\nabla G_\mu(\ell+b_yy)\cdot y.$$

令 $\xi(y)=b_yy$，得到 $|\xi(y)|<|y|\le 2\rho$，因此 $\xi(y)\in B_{2\rho}(0)$，从而

$$G_\mu(y+\ell)=G_\mu(\ell)+\nabla G_\mu(\ell+\xi(y))\cdot y.\tag{5.80}$$

对于 $y \in A_\rho(0)$，定义

$$q_L(y) = \nabla G_\mu(\ell + \xi(y)) \cdot y.$$

对于这样的 y，我们有 $|\ell + \xi(y)| = L + O(\rho) = L + O(L^\theta) \sim L$。利用

$$\nabla G_\mu(z) = -\mu^2 \frac{K_2(\mu|z|)}{|z|} \frac{z}{|z|}, \qquad \mu = \mu_0/L,$$

并且当 $L > 0$ 足够大时，$\mu|\ell + \xi(y)| \geq \mu_0/2$，我们得到

$$|\nabla G_\mu(\ell + \xi(y))| \lesssim \frac{K_2(\mu_0/2)\mu^2}{|\ell + \xi(y)|} \sim \frac{1/L^2}{L} = L^{-3}.$$

因此，根据定义

$$|q_L(y)| = |\nabla G_\mu(\ell + \xi(y)) \cdot y| \lesssim L^{-3}|y| \lesssim L^{-3+\theta}. \tag{5.81}$$

在 $y \in A_\rho(0)$上一致。将展开式 (5.80) 代入 (5.78) 得到

$$h_2(\ell, y + \ell/2) \cdot \nabla G_\mu(y) = -\frac{1}{\rho} G_\mu(\ell)\mu^2 \frac{K_2(\mu t)}{t} - \frac{1}{\rho}\mu^2 \frac{K_2(\mu t)}{t} q_L(y). \tag{5.82}$$

现在我们对 $A_\rho(0)$积分，以得到所需的表达式。首先考虑余项，利用 $\mathbb{R}^4$中的球坐标、估计 (5.81) 和贝塞尔级数展开 (A.3)，$s^2 K_2(s) = 2 + O(s^2)$ 一起得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho} \int_{A_\rho(0)} \mu^2 \frac{K_2(\mu t)}{t} |q_L(y)| \, dy \\ &\leq 2\pi^2 \frac{\sup_{y \in A_\rho(0)} |q_L(y)|}{\rho} \int_\rho^{2\rho} \mu^2 t^2 K_2(\mu t) \, dt \in O(L^{-3+\theta}) \end{aligned} \tag{5.83}$$

接下来需要计算式 (5.82) 中首项的积分。对 $A_\rho(0)$ 积分后，得到 with $s = \mu t$

$$\frac{1}{\rho} G_\mu(\ell)\mu^2 \int_{A_\rho(0)} \frac{K_2(\mu|y|)}{|y|} dy = \frac{2\pi^2}{\mu\rho} G_\mu(\ell) \int_{\mu\rho}^{2\mu\rho} s^2 K_2(s) ds.$$

利用 $s^2 K_2(s) = 2 + O(s^2)$ 和 $a := \mu\rho = \mu_0 L^{\theta-1}$，可得

$$\int_a^{2a} s^2 K_2(s) \, ds = \int_a^{2a} \big(2 + O(s^2)\big) \, ds = 2a + O(a^3).$$

因此，

$$\frac{2\pi^2}{\mu\rho} G_\mu(\ell) \int_{\mu\rho}^{2\mu\rho} s^2 K_2(s) \, ds = \frac{2\pi^2}{a} G_\mu(\ell)\big(2a + O(a^3)\big) = 4\pi^2 G_\mu(\ell) + O\big(G_\mu(\ell) a^2\big).$$

由于

$$G_\mu(\ell) = \frac{\mu K_1(\mu L)}{L} = \frac{\mu_0}{L^2} K_1(\mu_0), \qquad a^2 = \mu_0^2 L^{2\theta-2},$$

这就变成

$$4\pi^2 G_\mu(\ell) + O\big(L^{-2} \cdot L^{2\theta-2}\big) = 4\pi^2 \mu_0 K_1(\mu_0) L^{-2} + O(L^{-4+2\theta}).$$

综上所述：我们对 $A_\rho(0)$ 积分式 (5.82)，并应用式 (5.83)，得到

$$\left\langle h_2(\ell,\cdot+\ell/2),\nabla G_\mu\right\rangle_{L^2(A_\rho(0))}=\frac{1}{\rho}G_\mu(\ell)\mu^2\int_{A_\rho(0)}\frac{K_2(\mu|y|)}{|y|}dy+O(L^{-3+\theta}). \tag{5.84}$$

对剩余积分使用后续估计，并将结果与 (5.77) 中的常数 $D_2(\mu_0)$ 比较，即可证明该断言。

断言3： 令 $L>0$ 充分大。则

$$\left\langle h_3(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}=D_3(\mu_0)L^{-2}+O(L^{-3+\theta}), \tag{5.85}$$

其中

$$D_3(\mu_0)=2\pi^2\mu_0^2\big(2\log(2)-1\big).$$

断言3的证明： 设 $y=x-\ell/2$ 和 $t=|y|$。那么，如果 $x\in A_\rho(\ell/2)$，我们有 $y\in A_\rho(0)$。在这些坐标下，我们有

$$h_3(\ell,y+\ell/2)=\left(2-\frac{t}{\rho}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}-\frac{2}{t^3}\right)\frac{y}{t}=:\widetilde{h}_3(y),$$

$$\nabla G_\mu(y)=-\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\frac{y}{t}$$

因此

$$\widetilde{h}_3(y)\cdot\nabla G_\mu(y)=-\left(2-\frac{t}{\rho}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}-\frac{2}{t^3}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\right).$$

对 $A_\rho(0)$ 积分并代入 $s=\mu t$，得到

$$\langle\widetilde{h}_3,\nabla G_\mu\rangle_{L^2(A_\rho(0))}=2\pi^2\frac{\mu}{\rho}\int_{\mu\rho}^{2\mu\rho}(2\mu\rho-s)\,(2-s^2K_2(s))\frac{K_2(s)}{s}ds.$$

将（A.11）中的贝塞尔函数展开式代入，可得

$$(2-s^2K_2(s))K_2(s)\frac{1}{s}=\frac{1}{s}+q(s),\quad q\in O(s\log(s)).$$

定义 $a:=\mu\rho=\mu_0L^{\theta-1}$，可得

$$\frac{\mu}{\rho}\int_a^{2a}(2a-s)(2-s^2K_2(s))K_2(s)\frac{1}{s}ds=\frac{\mu}{\rho}\int_a^{2a}\frac{2a-s}{s}ds+\frac{\mu}{\rho}\int_a^{2a}(2a-s)q(s)ds. \tag{5.86}$$

由于对于 $s\in[a,2a]$，$0\le 2a-s\le a$，我们估计

$$\left|\int_a^{2a}(2a-s)q(s)\,ds\right|\le a\int_a^{2a}|q(s)|\,ds\lesssim a\int_a^{2a}s|\log s|\,ds\lesssim a^3|\log a|$$

并且由于 $\mu=\mu_0L^{-1}$ 和 $\rho=L^\theta$，可得

$$\left|\frac{\mu}{\rho}a^3\log(a)\right|\lesssim L^{-4+2\theta}\log(L)\in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.87}$$

求解（5.86）右侧的第一个积分可得 $a=\mu\rho$

$$\frac{\mu}{\rho}\int_a^{2a}\frac{2a-s}{s}\,ds=\mu^2\big(2\log(2)-1\big). \tag{5.88}$$

结合（5.88）和（5.87）可得 $\mu = \mu_0/L$

$$2\pi^2\frac{\mu}{\rho}\int_a^{2a}(2a-s)(2-s^2K_2(s))K_2(s)\frac{1}{s}ds = 2\pi^2\mu_0^2\big(2\log(2)-1\big)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.89}$$

最后， 变量代换 $y = x - \ell/2$ 将 $A_\rho(\ell/2)$ 映射到 $A_\rho(0)$，由此得到 (5.85).

断言 4： 令 $L > 0$ 足够大，则

$$\big\langle h_4(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.90}$$

断言 4 的证明： 令 $y = x - \ell/2$ 和 $t = |y|$。对于 $y \in A_\rho(0)$，我们有

$$h_4(\ell, y+\ell/2) = \left(2 - \frac{|y|}{\rho}\right)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu|y+\ell|)}{|y+\ell|}\right)\frac{y+\ell}{|y+\ell|}, \qquad \nabla G_\mu(y) = -\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\frac{y}{t}. \tag{5.91}$$

由于 $t \in [\rho, 2\rho]$，我们有 $\left|2 - \frac{|y|}{\rho}\right| \le 2$。此外，根据 (A.2)（特别是， $K_2(z) \lesssim z^{-2}$ 对于$z > 0$），我们对任意 $p > 0$得到

$$\mu^2\frac{K_2(\mu p)}{p} \lesssim \mu^2\frac{(\mu p)^{-2}}{p} = p^{-3}. \tag{5.92}$$

注意到，由于 (5.92)，我们得到

$$\big\|\nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\big\|_{L^1(A_\rho(\ell/2))} = \mu^2\frac{K_2(\mu|y|)}{|y|}\,dy \lesssim L^{-3}\int_{A_\rho(0)}|y|^{-3}\,dy \lesssim L^\theta \tag{5.93}$$

利用 $u_\rho(y) = (2 - |y|/\rho) \le 1$ 和 $\mu|y+l| \in O(1)$ 在 $A_\rho(0)$ 上，由 (5.91) 可得

$$|h_4(\ell, y+\ell)| \lesssim \mu^2|y+\ell|^{-1} \lesssim L^{-3}, \quad y \in A_\rho(0) \tag{5.94}$$

当 $L > 0$ 充分大时成立。上面的最后一步由反三角不等式得出，

$$|y+\ell| \ge |\ell| - |y| \ge |\ell| - 2\rho \ge \frac{|\ell|}{2}. \tag{5.95}$$

利用 Hölder 不等式，我们得到

$$\Big|\big\langle h_4(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}\Big| \lesssim \rho\, L^{-3}. \tag{5.96}$$

最后，利用 $\rho = L^\theta$，我们得出该断言。

断言5： 令 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$ 且 $L > 0$ 充分大。则

$$\big\langle h_5(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}).$$

断言5的证明： 令 $y = x - \ell/2$ 与 $t = |y|$。对于 $y \in A_\rho(0)$，我们有

$$\widetilde{h}_5(y) = h_5(\ell, y+\ell/2) = -L^{-\theta}\epsilon_1(y)\frac{y}{t} + u_\rho(y)\epsilon_2(y), \qquad \nabla G_\mu(y) = -\mu^2\frac{K_2(\mu t)}{t}\frac{y}{t}. \tag{5.97}$$

为证明该断言，我们分析

$$\big\langle h_5(\ell,\cdot), \nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\big\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))} = \big\langle \widetilde{h}_5, \nabla G_\mu\big\rangle_{L^2(A_\rho(0))}$$

由于引理 5.4 中对 ϵ_1 与 ϵ_2 的界，我们知道，当 $L>0$ 足够大且 $y\in A_\rho(0)$ 连同 $u_\rho\le 1$ 时，可由 (5.97) 推出

$$\left|\widetilde{h}_5(y)\right| \lesssim L^{-\theta}t^{-2-\delta}+t^{-3-\delta}.$$

由于当 $t=|y|>L^{\theta}$for $y\in A_\rho(0)$ 时，我们看到

$$\left|\widetilde{h}_5(y)\right| \lesssim L^{-\theta(3+\delta)}.$$

由于 $\theta=4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$，因此可得 $\left|\widetilde{h}_5(y)\right| \lesssim L^{-3}$。结合（5.93）和 Hölder 不等式，我们得到

$$\left|\left\langle h_5(\ell,\cdot),\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\right\rangle_{L^2(A_\rho(\ell/2))}\right| = \left|\left\langle \widetilde{h}_5,\nabla G_\mu\right\rangle_{L^2(A_\rho(0))}\right| \lesssim L^{-3}L^{\theta}\in O(L^{-3+\theta}).$$

这就完成了断言5。

注意，常数 $D_1(\mu_0)$ $D_2(\mu_0)$ 和 $D_3(\mu_0)$ 确实满足（5.71）。如前所述，证明断言1–5即可完成命题 5.14 的证明。 ∎

5.2.3. 命题 *5.15* 的证明。

证明。 证明分为两个步骤。第一步，我们证明

$$\left\|\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2)} = \left\|\nabla G_\mu\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4\setminus B_\rho(0))}+O(L^{-3+\theta})$$

并计算右侧的范数。第二步，我们证明

$$\begin{aligned}&\left\langle \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2),\nabla G_\mu(\cdot+\ell/2)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\\ &=\int_{\mathbb{R}^4}\nabla G_\mu(x-\ell/2)\cdot\nabla G_\mu(x+\ell/2)\,dx+O(L^{-3+\theta})\,.\end{aligned} \tag{5.98}$$

(5.98) 右侧剩余的积分将在附录中求解。我们将其作为引理 B.5 给出。回顾一下，对于任意 $\ell\in\mathbb{R}^4$ 且满足 $L=|\ell|$，总有

$$\rho=L^{\theta},\quad \mu=\mu_0L^{-1},$$

其中某个 $\theta\in(0,1)$ 以及稍后选取的 $\mu_0>0$。

步骤 1： 应用 A.2 中贝塞尔函数的展开式，可得

$$\left|\nabla G_\mu(y)\right| = \mu^2\frac{K_2(\mu|y|)}{|y|}\lesssim |y|^{-3}$$

对于任意 $y\in B_\rho(0)$ 均成立。因此，对于任意 $x\in B_\rho(-\ell/2)$

$$\left|\nabla G_\mu(x-\ell/2)\right|\lesssim |x-\ell/2|^{-3}\lesssim L^{-3}\,. \tag{5.99}$$

由于 $\rho=L^{\theta}$我们有 $\left|B_\rho(-\ell/2)\right|\lesssim L^{4\theta}$，因此

$$\|\nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))}\lesssim L^{-6+4\theta}\in O(L^{-3+\theta}). \tag{5.100}$$

注意， $\Omega_\rho(\ell/2) = \mathbb{R}^4 \setminus (B_\rho(\ell/2) \cup B_\rho(-\ell/2))$，并且根据 (5.100)，函数 ∇G_μ 在 $B_\rho(-\ell/2)$ 上很小，因此

$$\|\nabla(G_\mu(\cdot - \ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = \|\nabla G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0))} + O(L^{-3+\theta}). \tag{5.101}$$

直接计算表明

$$\|\nabla G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0))} = 2\pi^2 \int_\rho^\infty \left| \mu^2 \frac{K_2(\mu r)}{r} \right|^2 r^3 dr = 2\pi^2 \mu^2 \int_{\mu\rho}^\infty s K_2(s)^2 ds.$$

计　　算注 A.4 中涉及 K_2 的原函数，可显式得到，从而得出

$$\|\nabla G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0))} = 2\pi^2 \mu^2 \left[\frac{1}{2} s^2 \left(K_2(s)^2 - K_1(s) K_3(s) \right) \right]_{s=\mu\rho}^\infty.$$

将 (A.9) 中的贝塞尔级数展开与 $\rho = L^\theta$ 和 $\mu = \mu_0 L^{-1}$ 结合，得到

$$\begin{aligned} \|\nabla G_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0))} &= \frac{1}{2} \left(4\pi^2 L^{-2\theta} + C_2(\mu_0) \log(\mu_0 L^{\theta-1}) L^{-2} + C_3(\mu_0) L^{-2} \right) \\ &\quad + O(L^{-3+\theta}) \end{aligned}$$

其中 C_2（μ_0） C_3（μ_0）与 (5.39) 中相同。根据 (5.101)，我们得到

$$2\|\nabla G_\mu(\cdot - \ell/2)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = 4\pi^2 L^{-2\theta} + C_2(\mu_0) \log(\mu_0 L^{\theta-1}) L^{-2} + C_3(\mu_0) L^{-2} + O(L^{-3+\theta}).$$

这就完成了对（5.37）的证明。

步骤 2： 首先，我们证明

$$\int_{B_\rho(-\ell/2)} \nabla G_\mu(x - \ell/2) \nabla G_\mu(x + \ell/2)\, dx \in O(R^{-3+\theta}).$$

根据（5.99），我们看到

$$\left| \int_{B_\rho(-\ell/2)} \nabla G_\mu(x - \ell/2) \nabla G_\mu(x + \ell/2)\, dx \right| \lesssim L^{-3} \int_{B_\rho(-\ell/2)} \left| \nabla G_\mu(x + \ell/2) \right| dx.$$

经过平移并变换到球坐标后，可得

$$\left| \int_{B_\rho(\ell/2)} \nabla G_\mu(x + \ell/2) \nabla G_\mu(x - \ell/2) dx \right| \lesssim L^{-3} \int_0^\rho \mu^2 r^2 K_2(\mu r)\, dr.$$

由于 $\mu = \mu_0/L$， $\rho = L^\theta$ 且 $s^2 K_2(s) \in O(1)$ 对于 $s \ll 1$ 这意味着

$$\left| \int_{B_\rho(\ell/2)} \nabla G_\mu(x + \ell/2) \nabla G_\mu(x - \ell/2) dx \right| \lesssim L^{-2} \int_0^{\mu\rho} s^2 K_2(s)\, ds \in O(L^{-3+\theta}).$$

根据对称性，对 $B_\rho(-\ell/2)$ 上的积分也有相同的结论。因此我们得到

$$\begin{aligned} &\left\langle \nabla G_\mu(\cdot + \ell/2), \nabla G_\mu(\cdot - \ell/2) \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} \nabla G_\mu(x + \ell/2) \cdot \nabla G_\mu(x - \ell/2) dx + O(L^{-3+\theta}). \end{aligned} \tag{5.102}$$

我们在附录的引理 B.5 中计算了上述积分，与 $\mu = \mu_0/L$ 一起可得

$$\int_{\mathbb{R}^4} \nabla G_\mu(x+\ell/2)\cdot\nabla G_\mu(x-\ell/2)dx = \sum_{j=1}^{4} 2\pi^2\left(\mu_0 K_1(\mu_0)L^{-2} - \mu_0^2 K_2(\mu_0)L^{-2}\frac{\ell_j^2}{L^2}\right).$$

由此可得

$$2\left\langle \nabla G_\mu(\cdot+\ell/2), \nabla G_\mu(\cdot-\ell/2)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} = C_4(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta}).$$

其中 $C_4(\mu_0)$ 与 (5.39) 中相同。至此，(5.38) 的证明告毕，命题 5.15 的证明也随之完成。 ∎

5.3. **动能控制**。 本小节通过证明引理 5.2，建立引理 3.3 中关于 (3.3) 动能项的估计。引理 5.2 是定理 3.1 证明中进行绝热约化的关键依据。该估计控制了在 $(x_3,\ x_4)$ 平面内势阱平移所对应的动能与该二维方向上的总动能之间的偏差。在本小节中，我们选择 $\ell(r) \in \mathbb{R}^4$，其中 $\ell(r) = (0,\ 0,\ r)$，其中 $r \in \mathbb{R}^2$ 使得 $L = |\ell(r)| = |r|$，并且与前文一样

$$\mu = \mu_0/L, \quad \rho = L^\theta$$

其中 $\mu_0 > 0$ 和 $\theta \in (0,\ 1)$ 将在后文选定。

在开始证明之前，我们先简要说明论证的结构。上述缺陷并非恒等于零，因为薛定谔 $H[\ell(r)]$ 由于其真正的双势阱结构，在（$x_3,\ x_4$）平面上不具有平移不变性。然而，测试函数 $\phi(\ell(r),\ \cdot)$ 的构造方式使得它在每个势阱附近都与相应单势阱算子的零能解局部重合，而后者确实在（$x_3,\ x_4$）平面上具有平移不变性。因此，这些局部贡献对动能表达式的贡献为零。对于 $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4$ 和φ_0 零能解而言

$$P_r^2\varphi_0(x \pm \ell(r)/2) = \frac{1}{4}P^2_{(x_3,x_4)}\varphi_0(x \pm \ell(r)/2)\,. \tag{5.103}$$

由此可知，动能估计的主要贡献完全来自远离两个势阱的构型，即区域 Ω_ρ，其中 $\phi(\ell,\ \cdot)$ 是平移后的格林函数 G_μ（即函数 Γ）的叠加。本节将动能估计约化到这一远场区域，并确定相关贡献。远场项的显式分析涉及对贝塞尔函数的详细研究，具体表述为下文的独立命题 5.17。该命题的证明推迟至第 6.2 节。

命题 5.17。 对于 $\ell \in \mathbb{R}^4$，当 $\ell = (0,\ 0,\ r)$ 且 $r \in \mathbb{R}^2$，并且 $L = |\ell(r)| = |r|$ 足够大时，令 $\mu = \mu_0/L$，并设 $\Gamma(\ell,\ \cdot)$ 为在 (5.11) 中定义的函数：

$$\Gamma(\ell(r), x) = G_\mu(x+\ell(r)/2) + G_\mu(x-\ell(r)/2).$$

Then

$$\left\langle \Gamma(\ell(r),\cdot), \left(P_r^2 - \frac{1}{4}P^2_{(x_3,x_4)}\right)\Gamma(\ell(r),\cdot)\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} = C_5(\mu_0)L^{-2} + O(L^{-3+\theta})$$

其中

$$C_5(\mu_0) = (4\pi^2/3)\left(1 + \mu_0 K_1(\mu_0) + \tfrac{7}{2}\mu_0^2 K_0(\mu_0)\right).$$

证明。 我们将命题 5.17 的证明推迟到第 6.2 节。 ∎

现在我们将在命题 5.17 的假设下给出引理 5.2 的证明。

5.2 的证明。 证明分三步进行。第一步，我们证明

$$\begin{aligned}&\left\langle \widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot), \left(P_r^2 - \frac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)\right\rangle \\ &\leq \|\phi(\ell(r),\cdot)\|^{-2}\int_{\mathbb{R}^4}\left(|P_r\phi(\ell(r),x)|^2 - \frac{1}{4}\left|P_{(x_3,x_4)}\phi(\ell(r),x)\right|^2\right)dx\end{aligned} \tag{5.104}$$

第二步，我们估计 (5.104) 右侧的积分在各个势阱附近区域上的取值，即集合 $A_\rho(\pm\ell/2)$ 和 $B_\rho(\pm\ell/2)$。最后第三步，我们应用命题 5.17 来控制远离势阱的区域所产生的贡献，并由此得出结论。

步骤 1： 对于任意固定的 $r \in \mathbb{R}^2$，函数 $\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)$ 都是归一化的；这意味着，首先对固定的 $r \in \mathbb{R}^2$ 定义函数 $\phi(\ell(r),\cdot)$，将其视为 $L^2(\mathbb{R}^4)$ 中的函数，然后将其归一化，使得 $\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)$ 等于 $\ell(r),\cdot)/\|\phi(\ell(r),\cdot)\|$其中 $\|\|$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^4, dx)$ 范数。因此，$\|\phi(\ell(r),\cdot)\|$ 是一个依赖于 $r \in \mathbb{R}^2$ 的函数。我们为 $r \in \mathbb{R}^2$ 定义

$$N(r) = \|\phi(\ell(r),\cdot)\|,$$

并且通过滥用记号，我们记 $\phi(\ell(r),\cdot) = \phi(r,\cdot)$。

根据注记 5.9，映射 $r \mapsto N(r)$ 属于 H^1局部$(\mathbb{R}^2)$，并且由商法则，对任意 $r \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ 以及 $x \in \mathbb{R}^4$，我们得到

$$P_r\widetilde{\Phi}(\ell(r),x) = \left((P_r\phi(r,x))N(r) - \phi(r,x)(P_rN(r))\right)N(r)^{-2}$$

注意， $N(r)$ 与 $P_rN(r)$ 均与 x无关，因此将平方展开并对 x 积分，得到

$$\begin{aligned}\left\|P_r\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)\right\|^2 = N(r)^{-4}\Bigg(&N(r)^2\int_{\mathbb{R}^4}|P_r\phi(r,x)|^2\,dx + (P_rN(r))^2\int_{\mathbb{R}^4}|\phi(\ell(r),x)|^2\,dx \\ &- 2\left[N(r)(P_rN(r))\int_{\mathbb{R}^4}\phi(r,x)P_r\phi(r,x)dx\right]\Bigg).\end{aligned}$$

利用 $N(r)$ 的定义以及 $N(r)$ 和 $P_rN(r)$ 均与 x 无关这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|P_r\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)\right\|^2 = N(r)^{-4}\Bigg(&N(r)^2\int_{\mathbb{R}^4}|P_r\phi(r,x)|^2\,dx + (P_rN(r))^2N(r)^2 \\ &- N(r)(P_rN(r))2\int_{\mathbb{R}^4}\phi(r,x)P_r\phi(r,x)dx\Bigg)\end{aligned} \tag{5.105}$$

由于 $P_r\,|\phi(r,\ x)\,|^2 = 2\phi(r,\ x)P_r\phi(r,\ x)$，我们得到

$$2\int_{\mathbb{R}^4}\phi(r,x)P_r\phi(r,x)dx = P_rN(r)^2 = 2N(r)\,(P_rN(r))\,. \tag{5.106}$$

将 (5.106) 代入 (5.105)，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|P_r\widetilde{\Phi}(\ell(r),\cdot)\right\|^2 &= N(r)^{-2}\left(\int_{\mathbb{R}^4}|P_r\phi(r,x)|^2\,dx - (P_rN(r))^2\right)\\ &\le N(r)^{-2}\int_{\mathbb{R}^4}|P_r\phi(r,x)|^2\,dx\,.\end{aligned} \tag{5.107}$$

因此，将 (5.107) 代入 (5.104) 的左侧，即完成步骤 1 的证明。

步骤 2： 在本步骤中，我们在集合 $A_\rho(\pm\ell/2)$ 与$B_\rho(\pm\ell/2)$ 上估计 (5.104) 的右侧，并证明

$$\begin{aligned}\|P_r\phi(r,\cdot)\|^2 - \frac{1}{4}\left\|P_{(x_3,x_4)}\phi(r,\cdot)\right\|^2 &= \|P_r\Gamma(\ell(r),\cdot)\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))} - \frac{1}{4}\left\|P_{(x_3,x_4)}\Gamma(\ell(r),\cdot)\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\\ &\quad + O(L^{-3+\theta}\log(L)).\end{aligned} \tag{5.108}$$

我们从集合 $B_\rho(\pm\ell(r)/2)$ 开始。根据 (5.12) 中 ϕ的定义，我们有

$$\phi(r,x) = \varphi_0(x \pm \ell(r)/2)\quad \text{for all } x \in B_\rho(\pm\ell(r)/2)\,.$$

因此，根据导数的链式法则，我们有

$$\|P_r\phi(r,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\pm\ell/2))} - \frac{1}{4}\|P_{(x_3,x_4)}\phi(r,\cdot)\|^2_{L^2(B_\rho(\pm\ell/2))} = 0.$$

我们继续计算在环域 $A_\rho(\pm\ell(r)/2)$ 上的积分。令 $A_\pm = A_\rho(\pm\ell(r)/2)$，于是我们证明

$$\begin{aligned}&\|\nabla_r\phi(r,\cdot)\|^2_{L^2(A_\pm)} - \frac{1}{4}\left\|\nabla_{(x_3,x_4)}\phi(r,\cdot)\right\|^2_{L^2(A_\pm)}\\ &= \|\nabla_r\Gamma(\ell(r),\cdot)\|^2_{L^2(A_\pm)} - \frac{1}{4}\left\|\nabla_{(x_3,x_4)}\Gamma(\ell(r),\cdot)\right\|^2_{L^2(A_\pm)} + O(L^{-3+\theta}\log(L)).\end{aligned} \tag{5.109}$$

我们对 A_+ 进行证明，A_- 的证明类似。根据 (5.11) 中 f 和 Γ 的定义，对于任意 $r \in \mathbb{R}^2$ 和 $x \in A_\rho(\ell(r))$，我们有

$$P_r\phi(r,x) = P_rf(\ell(r),x) + P_r\Gamma(\ell(r),x). \tag{5.110}$$

为简化记号，以下记 $f(\ell(r)\ x)\ =\ f(r,x)$ 和 $\Gamma(\ell(r)\ x)\ =\ \Gamma(r,x)$。将 (5.110) 代入 (5.109) 左侧的范数并配方，得到

$$\begin{aligned}\|P_r\phi\|^2_{L^2(A_+)} &= \|P_rf\|^2_{L^2(A_+)} + \|P_r\Gamma\|^2_{L^2(A_+)} + 2\langle P_rf, P_r\Gamma\rangle_{L^2(A_+)},\\ \left\|P_{(x_3,x_4)}\phi\right\|^2_{L^2(A_+)} &= \left\|P_{(x_3,x_4)}f\right\|^2_{L^2(A_+)} + \left\|P_{(x_3,x_4)}\Gamma\right\|^2_{L^2(A_+)} + 2\langle P_{(x_3,x_4)}f, P_{(x_3,x_4)}\Gamma\rangle_{L^2(A_+)},\end{aligned}$$

其中，按照滥用记号的惯例，我们将写作

$$\|P_r\phi\|^2_{L^2(A_+)} = \|P_r\phi(r,\cdot)\|^2_{L^2(A_+)}$$

其他范数和内积也类似。因此，要证明 (5.109)，只需证明

$$\|P_r f\|^2_{L^2(A_+)} - \frac{1}{4}\left\|P_{(x_3,x_4)} f\right\|^2_{L^2(A_+)} \in O(L^{-3+\theta}\log(L)) \tag{5.111}$$

and

$$\langle P_r f, P_r \Gamma\rangle_{L^2(A_+)} - \frac{1}{4}\langle P_{(x_3,x_4)} f, P_{(x_3,x_4)}\Gamma\rangle_{L^2(A_+)} \in O(L^{-3+\theta}\log(L)). \tag{5.112}$$

接下来我们应用引理 6.1，该引理对选取 $\theta = 4/(4+\delta) \in (3/(3+\delta),1)$ 成立，并指出

$$|P_x f(r,x)| \lesssim L^{-2-\theta}\log(L) \text{ and } |P_r f(r,x)| \lesssim L^{-2-\theta}\log(L) \quad x \in A_+ \tag{5.113}$$

引理 6.1 的证明推迟至第 6.1 节。

集合 A_+ 是以 $\ell/2$ 为中心、内半径为 $\rho = L^\theta$、外半径为 2ρ 的环域。因此，$|A_+| \lesssim L^{4\theta}$ 与上文 f 的衰减性质一起立即证明了 (5.111)。我们继续证明 (5.112)。回顾定义可知 $\mu = \mu(r) = \mu_0/L$ 且

$$\Gamma(r,x) = G_\mu(x + \ell(r)/2) + G_\mu(x - \ell(r)/2).$$

为证明 (5.112)，我们对两个函数 $G_\mu(\cdot \pm \ell/2)$ 分别讨论如下估计，即我们证明

$$\begin{aligned}&\langle P_r f, P_r G_\mu(\cdot \pm \ell(r)/2)\rangle_{L^2(A_+)} - \frac{1}{4}\langle P_{(x_3,x_4)} f, P_{(x_3,x_4)} G_\mu(\cdot \pm \ell(r)/2)\rangle_{L^2(A_+)} \\ &\in O(L^{-3+\theta}\log(L)).\end{aligned} \tag{5.114}$$

上述涉及 $G_\mu(\cdot + \ell/2)$ 的表达式较易处理，因为一个简短的计算表明，对于 $x \in B_{2\rho}(\ell(r)/2)$

$$\left|P_{(x_3,x_4)} G_\mu(x + \ell(r)/2)\right| \lesssim L^{-3} \quad \text{and} \quad \left|P_r G_\mu(x + \ell(r)/2)\right| \lesssim L^{-3}.$$

此时，由上述估计、(5.113) 和施瓦茨不等式，可立即得出不等式 (5.114)。要证明 (5.112)，还需证明 (5.114) 对涉及 $G_\mu(\cdot - \ell(r)/2)$ 的项成立。

利用 G_μ 的定义直接计算可得

$$P_r G_\mu(x - \ell(r)/2) = -i\frac{\mu^2}{L} K_0(\mu|x - \ell(r)/2|)\frac{r}{L} - \frac{1}{2}P_{(x_3,x_4)} G_\mu(x - \ell(r)/2).$$

我们定义 $g(r,\cdot): A_\rho(\ell/2) \to \mathbb{R}^2$ 为

$$-ig(r,x) = \frac{1}{2}P_{(x_3,x_4)} f(r,x) + P_r f(r,x)$$

那么，(5.114) 的左边在 $\mu = \mu_0/L$ 时为

$$\begin{aligned}&\left\langle P_r f, P_r G_\mu(\cdot - \ell(r)/2)\right\rangle_{L^2(A_+)} - \frac{1}{4}\left\langle P_{(x_3,x_4)} f, P_{(x_3,x_4)} G_\mu(\cdot - \ell(r)/2)\right\rangle_{L^2(A_+)} \\ =&\frac{1}{2} i\left\langle P_{(x_3,x_4)} f, \mu_0^2 L^{-3} K_0\left(\mu_0 L^{-1}|\cdot - \ell(r)/2|\right)\frac{r}{L}\right\rangle_{L^2(A_+)} \\ &- i\left\langle g, P_r G_\mu(\cdot - \ell(r)/2)\right\rangle_{L^2(A_+)}.\end{aligned} \tag{5.115}$$

将 (A.3) 中贝塞尔函数的级数展开代入，可得 A_+

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mu_0^2}{L^3}K_0\left(\mu\left|x-\ell(r)/2\right|\right)\right| &\lesssim L^{-3}\log(L),\\ \left|P_r G_\mu(x-\ell(r)/2)\right| &\lesssim L^{-3\theta}.\end{aligned} \tag{5.116}$$

对于选择 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$，我们将在引理 6.1 中证明集合 A_+ 上的以下估计

$$\begin{aligned}|g(r,x)| &\lesssim L^{-3}\log(L),\\ \left|P_{(x_3,x_4)}f(r,x)\right| &\lesssim L^{-2-\theta}\log(L).\end{aligned} \tag{5.117}$$

引理 6.1 的证明推迟至第 6.1 节。将 (5.116) 和 (5.117) 中的估计与 $|A_+| \lesssim L^{4\theta}$ 这一事实一同应用于 (5.115) 的右端，得到 (5.114)，从而完成步骤 2。

步骤 3： 在这一步中，我们结合命题 5.17 的结果和前面的步骤，完成引理 5.2 的证明。结合 (5.104) 和 (5.108)，我们得到

$$\begin{aligned}\left\langle\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot),\left(P_r^2-\frac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot)\right\rangle \le \|\phi(\ell(r),\cdot\|^{-2}\Bigg[&\|P_r\Gamma\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}\\ &-\frac{1}{4}\left\|P_{(x_3,x_4)}\Gamma\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho(\ell/2))}+O(L^{-3+\theta}\log(L))\Bigg].\end{aligned}$$

应用命题 5.17 后得到

$$\left\langle\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot),\left(P_r^2-\frac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot)\right\rangle \le \|\phi(\ell(r),\cdot)\|^{-2}\left(C_5(\mu_0)L^{-2}+O(L^{-3+\theta}\log(L))\right). \tag{5.118}$$

根据引理 5.12，我们有

$$\|\phi(\ell(r),\cdot)\|^2 = 4\pi^2\log(L)+O(1)$$

并将其与 (5.118) 结合，我们得到

$$\left\langle\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot),\left(P_r^2-\frac{1}{4}P_{(x_3,x_4)}^2\right)\widetilde{\Phi}(\ell,\cdot)\right\rangle \le \left((4\pi^2)^{-1}C_5(\mu_0)L^{-2}\log(L)^{-1}+O(L^{-3+\theta})\right). \tag{5.119}$$

最后，我们注意到在极限 $\mu_0 \to 0^+$ 下

$$(4\pi^2)^{-1}C_5(\mu_0) = \frac{1}{3}\left(1+\mu_0K_1(\mu_0)+\tfrac{7}{2}\mu_0^2K_0(\mu_0)\right) \to \frac{2}{3}$$

这由 (A.2) 中贝塞尔函数的级数展开得出。回想一下，我们的目标是证明 (5.119) 左侧有如下形式的上界：$(2/3+\varepsilon)L^{-2}\log(L)^{-1}$，其中 $\varepsilon > 0$ 是给定的固定值。因此，我们选择足够大的 $L_0(\varepsilon) > 0$，使得对于任意 $L > L_0(\varepsilon)$，$O(L^{-3+\theta})$ 中的贡献至多增加一项，大小为 $(\varepsilon/2)L^{-2}\log(L)^{-1}$；并选择足够小的 $\mu_0 > 0$，使得

$$(4\pi^2)^{-1}C_5(\mu_0) = \frac{1}{3}\left(1+\mu_0K_1(\mu_0)-\tfrac{7}{2}\mu_0^2K_0(\mu_0)\right) \le \frac{2}{3}+\varepsilon/2$$

引理 5.2 的证明至此结束。 ∎

6. 测试函数的辅助估计

本节给出引理 6.1 和命题 5.17 的证明。在本节中，对于给定的 $\ell \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$，满足 $L = |\ell|$，我们有

$$\rho = \rho(L) = L^{\theta}, \qquad \mu = \mu(L) = \mu_0/L,$$

参数为 $\theta = 4/(4+\delta) > 3/(3+\delta)$ 和 $\mu_0 > 0$。

6.1. 关于 Γ 与 φ_0 之间的插值。 下面继续证明关于插值函数 f 的衰减性质的引理，该函数定义于 (5.11)。

引理 6.1。 对于给定的 $\ell \in \mathbb{R}^4$，满足 $L = |\ell| > 0$，令 $f(\ell, \cdot)$ 为(5.11)中定义的函数。我们总是假设 $L > 0$ 足够大。于是，对所有 $x \in A_\rho(\pm\ell/2)$，

$$|f(\ell, x)| \lesssim L^{-2}\log(L) \tag{6.1}$$

and

$$|P_x f(\ell, x)| \lesssim L^{-2-\theta}\log(L). \tag{6.2}$$

f 关于 ℓ 的弱导数可分解为

$$P_\ell f(\ell, x) = -ig(\ell, x) \mp \frac{1}{2} P_x f(\ell, x), \quad x \in A_\rho(\pm\ell/2). \tag{6.3}$$

函数 $g\colon \quad A_\rho(+\ell/2) \cup A_\rho(-\ell/2) \to \mathbb{R}$ 满足

$$|g(\ell, x)| \lesssim L^{-3}\log(L). \tag{6.4}$$

证明。 我们在集合 $A_\rho(\ell/2)$ 上建立这些界；对 $x \in A_\rho(-\ell/2)$ 的论证类似。证明分为三个步骤。首先，我们证明 (6.1)。其次，我们计算 $P_x f$并证明界 (6.2)。第三，我们计算 $P_\ell f$，分离出函数 g，并推导出估计 (6.4)。

步骤 1： 根据定义，对于任意 $x \in A_\rho(\ell/2)$，有

$$f(\ell, x) = u_\rho(x - \ell/2)\left(\varphi_0(x - \ell/2) - G_\mu(x - \ell/2) - G_\mu(x + \ell/2)\right). \tag{6.5}$$

对于 $x \in A_\rho(\ell/2)$，有 $\left|u_\rho(x - \ell/2)\right| \le 1$。利用 (A.3) 中修正贝塞尔函数的级数展开以及引理 5.4 中 φ_0 的性质，可得其对 $x \in A_\rho(\ell/2)$ 一致成立

$$\begin{aligned} \left|\varphi_0(x - \ell/2) - G_\mu(x - \ell/2)\right| &\lesssim L^{-2}\log(L) + |\epsilon_1(x - \ell/2)|, \\ \left|G_\mu(x + \ell/2)\right| &\lesssim L^{-2}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

由引理 5.4，我们得出 $|\epsilon_1(x - \ell/2)| \lesssim |x - \ell/2|^{-2-\delta}$。取 $\theta > 3/(3+\delta)$ 时，对于 $x \in A_\rho(\ell/2)$，我们看到

$$|\epsilon_1(x - \ell/2)| \lesssim L^{-\theta(2+\delta)} \in O(L^{-3+\theta}).$$

将其代入 (6.6) 可得

$$\begin{aligned} \left|\varphi_0(x - \ell/2) - G_\mu(x - \ell/2)\right| &\lesssim L^{-2}\log(L), \\ \left|G_\mu(x + \ell/2)\right| &\lesssim L^{-2}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

直接将 (6.7) 代入 (6.5) 即可证明不等式 (6.1)。

步骤 2： 我们将计算 $P_x f = -i\nabla_x f$并证明 (6.2)。对 (5.5) 中定义的 G_μ 和 (5.3) 中定义的 φ_0 求导，得到

$$\begin{aligned} \nabla_x G_\mu(x) &= -\mu^2 \frac{K_2(\mu|x|)}{|x|}\frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0, \\ \nabla_x \varphi_0(x) &= -2\frac{x}{|x|^4} + \epsilon_2(x), \quad |x| > \rho_0 . \end{aligned} \tag{6.8}$$

并根据 (5.9) 中u_ρ 的定义

$$\nabla_x u_\rho(x-\ell/2) = -\rho^{-1}\left(\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}\right), \quad x \in A_\rho(\ell/2).$$

合并上述导数后，可得 $x \in A_\rho(\ell/2)$

$$P_x f(\ell, x) = -i\nabla_x f(\ell, x) = -i\sum_{j=1}^{5} h_j(\ell, x),$$

其中，函数 $h_j(\ell, \cdot): A_\rho(\ell/2) \to \mathbb{R}^4$定义如下

$$\begin{aligned} h_1(\ell, x) &:= -\frac{1}{\rho}\left(|x-\ell/2|^{-2} - G_\mu(x-\ell/2)\right)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}, \\ h_2(\ell, x) &:= \frac{1}{\rho}G_\mu(x+\ell/2)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|} \\ h_3(\ell, x) &:= u_\rho(x-\ell/2)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu|x-\ell/2|)}{|x-\ell/2|} - \frac{2}{|x-\ell/2|^3}\right)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}, \\ h_4(\ell, x) &:= u_\rho(x-\ell/2)\left(\mu^2\frac{K_2(\mu|x+\ell/2|)}{|x+\ell/2|}\right)\frac{x+\ell/2}{|x+\ell/2|}, \\ h_5(\ell, x) &:= -\frac{1}{\rho}\epsilon_1(x-\ell/2)\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|} + u_\rho(x-\ell/2)\epsilon_2(x-\ell/2). \end{aligned}$$

注意： 根据引理 5.4 中 ϵ_1和 ϵ_2的定义，有 $\nabla_x\epsilon_1(x) = \epsilon_2(x)$；并回顾一下，$u_\rho(x-\ell/2) = 2 - |x-\ell/2|/\rho$，且在 $x \in A_\rho(\ell/2)$ 上，我们有 $0 \le u_\rho(x-\ell/2) \le 1$。

当 $L > 0$ 足够大时，可得 $|x+\ell/2| \ge L/2$，其中 $x \in A_\rho(\ell/2)$。利用 (A.3) 中第二类修正贝塞尔函数的级数展开，以及引理 5.4 中 ϵ_1 和 ϵ_2的衰减，再结合 $\theta > 3/(3+\delta)$ 和 $\mu = \mu_0/L$，立即可得在 $A_\rho(\ell/2)$ 上的以下界

$$\begin{aligned} |h_1(\ell, x)| &\lesssim L^{-2-\theta}\log(L), \\ |h_2(\ell, x)| &\lesssim L^{-2-\theta}, \\ |h_3(\ell, x)| &\lesssim L^{-2-\theta}, \\ |h_4(\ell, x)| &\lesssim L^{-3}, \\ |h_5(\ell, x)| &\lesssim L^{-3}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

根据 h_1 的衰减，我们得出不等式 (6.2)。

步骤 3： 我们计算 $P_\ell f$，分离出函数 g，并推导出估计式 (6.4)。首先注意，根据链式法则 ($P_\rho = -i\partial_\rho$, $P_\mu = -i\partial_\mu$)

$$\begin{aligned}\nabla_\ell u_\rho(x-\ell/2) &= \left(\partial_\rho u_\rho(x-\ell/2)\right)\nabla_\ell\rho(\ell)\\ &\quad + \left(\nabla_x u_\rho(x-\ell/2)\right)\left(\frac{x-\ell/2}{|x-\ell/2|}\cdot\nabla_\ell\left(|x-\ell/2|\right)\right)\\ &= \theta L^{\theta-1}\left(\partial_\rho u_\rho(x-\ell/2)\right)(\ell/L) - \frac{1}{2}\nabla_x u_\rho(x-\ell/2)\end{aligned} \tag{6.10}$$

and

$$\begin{aligned}\nabla_\ell G_\mu(x\pm\ell/2) &= \left(\partial_\mu G_\mu(x\pm\ell/2)\right)\nabla_\ell\mu + \left(\nabla_x G_\mu(x\pm\ell/2)\right)\left(\frac{x\pm\ell/2}{|x-\ell/2|}\cdot\nabla_\ell|x\pm\ell/2|\right)\\ &= -\mu_0 L^{-2}\left(\partial_\mu G_\mu(x\pm\ell/2)\right)(\ell/L) \pm \frac{1}{2}\nabla_x G_\mu(x\pm\ell/2)\end{aligned} \tag{6.11}$$

利用 (5.9) 中的 u_ρ 和 (5.5) 中的 G_μ 的定义，我们得到导数

$$\begin{aligned}\partial_\rho u_\rho(x-\ell/2) &= \frac{|x-\ell/2|}{L^{2\theta}},\\ \partial_\mu G_\mu(x\pm\ell/2) &= \frac{K_1(\mu|x\pm\ell/2|)}{|x\pm\ell/2|} + \mu K_1'(\mu|x\pm\ell/2|).\end{aligned} \tag{6.12}$$

对 [43, 第 79 页式 (3)] 中贝塞尔函数导数的递推公式应用后，我们得到

$$\partial_\mu G_\mu(x\pm\ell/2) = -\mu K_0(\mu|x\pm\ell/2|). \tag{6.13}$$

在引理中，函数 g 定义在环域 $A_\rho(\ell/2)$ 上，如下：

$$-ig(\ell,x) = P_\ell f(\ell,x) + \frac{1}{2}P_x f(\ell,x).$$

应用 (6.10)–(6.13)，我们得到显式表达式

$$\begin{aligned}g(\ell,x) =& -\mu_0 L^{-2}u_\rho(x-\ell/2)\left(\mu K_0(\mu|x-\ell/2|) + \mu K_0(\mu|x+\ell/2|)\right)\frac{\ell}{L}\\ &+ \left(\varphi_0(x-\ell/2) - G_\mu(x-\ell/2) - G_\mu(x+\ell/2)\right)\theta\frac{|x-\ell/2|}{L^{1+\theta}}\frac{\ell}{L}\\ &- \underbrace{u_\rho(x-\ell/2)\nabla_x G_\mu(x+\ell/2)}_{=h_4(\ell,x)}.\end{aligned} \tag{6.14}$$

利用 $\mu = \mu_0/L$，并应用 (6.7) 和 (6.9) 对 (6.14) 的最后两行进行估计，我们得到

$$g(\ell,x) = -\mu_0^2 L^{-3}u_\rho(x-\ell/2)\left(K_0(\mu|x-\ell/2|) + K_0(\mu|x+\ell/2|)\right)\frac{\ell}{L} + O(L^{-3}\log(L)). \tag{6.15}$$

由于(A.3)中贝塞尔函数的级数展开，并且由于 $\mu|x-\ell/2| \sim L^{-1+\theta}$，我们看到

$$\left|-\mu_0^2 L^{-3}u_\rho(x-\ell/2)\left(K_0(\mu|x-\ell/2|) + K_0(\mu|x+\ell/2|)\right)\right| \lesssim L^{-3}\log(L). \tag{6.16}$$

将 (6.16) 代入 (6.15) 的右侧，即完成 (6.4) 的证明。 ∎

6.2. **命题 5.17 的证明**。

命题 6.2 (=命题 5.17). 对于 $\ell \in \mathbb{R}^4$，当 $\ell = (0, 0, r)$ 其中 $r \in \mathbb{R}^2$ 且 $L = |\ell(r)| = |r|$ 足够大时，令 $\mu = \mu(r) = \mu_0/L$ 与 $\Gamma(\ell, \cdot)$ 为 (5.11) 中所定义的函数，即

$$\Gamma(\ell, x) = G_\mu(x + \ell/2) + G_\mu(x - \ell/2).$$

Then

$$\left\langle \Gamma(\ell(r), \cdot), \left(P_r^2 - \frac{1}{4} P_{(x_3,x_4)}^2 \right) \Gamma(\ell(r), \cdot) \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} = C_5(\mu_0) L^{-2} + O(L^{-3+\theta}) \tag{6.17}$$

其中

$$C_5(\mu_0) = (4\pi^2/3) \left(1 + \mu_0 K_1(\mu_0) + \tfrac{7}{2} \mu_0^2 K_0(\mu_0) \right).$$

证明。 对于任意可容许的， $y_1, y_2 :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 定义

$$\begin{aligned} Q(y_1, y_2) \coloneqq & \langle \nabla_r y_1(r, \cdot), \nabla_r y_2(r, \cdot) \rangle_{L^2(\Omega_\rho)} \\ & - (1/4) \left\langle \nabla_{(x_3,x_4)} y_1(r, \cdot), \nabla_{(x_3,x_4)} y_2(r, \cdot) \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)}, \end{aligned} \tag{6.18}$$

以及 $Q(y_1) \coloneqq Q(y_1, y_1)$。根据滥用记号的惯例，我们将 $\Gamma :\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ 定义为 $\Gamma(r, x) = \Gamma(\ell(r)\ x)$ 的表达式记作后者，因此可以理解表达式 $Q(\Gamma)$，函数 $G_\mu(\cdot \pm \ell(r)/2)$ 等也类似。

我们将证明 (6.17)，它于是可写为

$$Q(\Gamma) = C_5(\mu_0) L^{-2} + O(L^{-3+\theta}).$$

由 (5.11) 中 Γ 的定义可得

$$Q(\Gamma) = Q(G_\mu(\cdot + \ell/2)) + Q(G_\mu(\cdot - \ell/2)) + 2Q(G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)).$$

第一步，我们证明

$$Q(G_\mu(\cdot + \ell/2)) + Q(G_\mu(\cdot - \ell/2)) = (4\pi^2/3) L^{-2} + O(L^{-3+\theta}). \tag{6.19}$$

第二步，我们将证明

$$2Q(G_\mu(\cdot + \ell/2), G_\mu(\cdot - \ell/2)) = (4\pi^2/3)(\mu_0 K_1(\mu_0) + \tfrac{7}{2} \mu_0^2 K_0(\mu_0)) + O(L^{-3+\theta})$$

这便完成了 (6.17) 的证明。我们使用偏差 $\Omega_\rho(\ell/2) = \Omega_\rho$，其中 $\ell(r) = (0,\ 0,\ r)$ 对某个足够大的 $L > 0$ 固定。

步骤 1： 我们将证明关系 (6.19)。对于任意固定的 $r \in \mathbb{R}^2$，我们定义 $u_\pm = G_{\mu(r)}(\cdot \pm \ell(r)/2)$，则 $u_\pm$ 的 r-梯度可写为

$$\nabla_r u_\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \nabla_{(x_3,x_4)} u_\pm(x) - \frac{\mu}{L} \frac{r}{L} \partial_\mu u_\pm(x). \tag{6.20}$$

将此表达式平方可得

$$|\nabla_r u_\pm(x)|^2 = \frac{1}{4} \left| \nabla_{(x_3,x_4)} u_\pm(x) \right|^2 + \frac{\mu^2}{L^2} \left| \partial_\mu u_\pm(x) \right|^2 \mp \frac{\mu}{L} \frac{r}{L} \Big(\nabla_{(x_3,x_4)} u_\pm(x)\ \partial_\mu u_\pm(x) \Big). \tag{6.21}$$

因此，对于双线性形式 Q，我们得到

$$\begin{aligned} Q(u_\pm) &= \frac{\mu^2}{L^2} \left\|\partial_\mu u_\pm\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} \mp \mu \frac{1}{L^2} \left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_\pm , \partial_\mu u_\pm \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} \\ &= \frac{\mu^2}{L^2} \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} - \mu \frac{1}{L^2} \left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_+ , \partial_\mu u_+ \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} . \end{aligned} \tag{6.22}$$

在此，我们使用反射 $x \mapsto -x$，它保持 Ω_ρ不变，并满足 $u_+(x) = u_-(-x)$，由此得到

$$\nabla_{(x_3,x_4)} u_+(x) = -\nabla_{(x_3,x_4)} u_-(-x), \qquad \partial_\mu u_+(x) = \partial_\mu u_-(-x).$$

因此，按以下方式求和后，我们得到

$$Q(u_+) + Q(u_-) = 2\frac{\mu^2}{L^2} \left\|\partial_\mu u_\pm\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} - 2\mu \frac{1}{L^2} \left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_+ , \partial_\mu u_+ \right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} . \tag{6.23}$$

接下来，我们证明由底层对称性可得

$$\left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_+ , \partial_\mu u_+ \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(-\ell/2))} = 0. \tag{6.24}$$

这由变换 $x \mapsto x + \ell/2$ 可知，该变换将

$$\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(-\ell/2) \to \mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0).$$

根据 u_+ 的定义以及 (6.8) 中 G_μ的导数，我们得到

$$\left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_+ , \partial_\mu u_+ \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(-\ell/2))} = \int_{\mathbb{R}^4 \setminus B_\rho(0)} \left(-\mu^2 \frac{K_2(\mu\,|x|)}{|x|} \frac{r \cdot x}{|x|} \right) \partial_\mu \left(\mu \frac{K_1(\mu\,|x|)}{|x|} \right) dx \tag{6.25}$$

由于对称性，(6.25) 的右侧为零，这就证明了 (6.24)。将 (6.24) 代入 (6.23)，并根据 Ω_ρ 的定义可得

$$Q(u_+) + Q(u_-) = 2\frac{\mu^2}{L^2} \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} + 2\mu \frac{1}{L^2} \left\langle r \cdot \nabla_{(x_3,x_4)} u_+ , \partial_\mu u_+ \right\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} . \tag{6.26}$$

接下来我们证明，在 $B_\rho(+\ell/2)$ 上，$\left|\nabla_{(x_3,x_4)} u_+\right|$ 和 $\left|\partial_\mu u_+\right|$ 足够小。当 $L > 0$ 足够大时，在集合 $B_\rho(+\ell/2)$ 上，我们有

$$\mu\,|x + \ell/2| = \mu_0 L^{-1}\,|x + \ell/2| \geq \mu_0/2$$

并利用 K_0 和 K_2 单调递减这一事实，结合 (6.8) 和 (6.12) 中 G_μ 关于 x 和 μ 的导数，可得

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_\rho(+\ell/2)} |\nabla_x u_+(x)| &= \sup_{x \in B_\rho(+\ell/2)} \mu^2 \frac{K_2\left(\mu\,|x + \ell/2|\right)}{|x + \ell/2|} \lesssim L^{-3}, \\ \sup_{x \in B_\rho(+\ell/2)} \left|\partial_\mu u_+(x)\right| &= \sup_{x \in B_\rho(+\ell/2)} |\mu K_0(\mu|x + \ell/2|)| \lesssim L^{-1}. \end{aligned} \tag{6.27}$$

由于 $\left|B_\rho(0)\right| \sim L^{4\theta}$，并应用 (6.27)，我们由 (6.26) 得到

$$Q(u_+) + Q(u_-) = 2\frac{\mu^2}{L^2} \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} + O(R^{-3+\theta}). \tag{6.28}$$

接下来，我们证明

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} = \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} - \sum_{\sigma=\pm}\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(\sigma\ell/2))} = \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} + O(L^{1+\theta}). \tag{6.29}$$

由 (6.27) 可得

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(\ell/2))} \lesssim L^{-2}\left|B_\rho\right| \sim L^{-2}\rho^4 = L^{-2+4\theta}. \tag{6.30}$$

根据定义并换用球坐标，可得

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} = \mu^2\int_{B_\rho(-\ell/2)} K_0(\mu\left|x+\ell/2\right|)^2 dx = \mu^2\int_0^\rho K_0(\mu t)^2 t^3\, dt.$$

代入 $s=\mu t$ 并令 $a=\mu\rho=\mu_0 L^{\theta-1}\to 0$，可得

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} = \mu^{-2}\int_0^a K_0(s)^2 s^3 ds.$$

由于对于 $s\to 0^+$，$K_0(s)\sim -\log(s)$（见 (A.3)），我们得出

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} \lesssim \mu^{-2}a^4\log(a)^2 \lesssim L^{-2+4\theta}\log(L)^2 \lesssim L^{-1+3\theta}. \tag{6.31}$$

利用 (6.30) 和 (6.31) 可得 (6.29)。将 (6.29) 应用于 (6.28)，可得

$$Q(u_+)+Q(u_-) = 2\frac{\mu^2}{L^2}\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} + O(R^{-3+\theta}).$$

剩下的工作是计算其余的范数。根据 u_+ 的定义，我们有

$$\left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \mu^2\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\left|x\right|)^2 dx.$$

附录中已将该积分显式求出，见推论 B.2。由此完成了关系式 (6.19) 的证明。

步骤 2： 下面我们证明

$$2Q(u_+,u_-) = 2\pi^2\left(4/3\mu_0^2 K_2(\mu_0)+\mu_0^2 K_0(\mu_0)-2\mu_0 K_1(\mu_0)\right)L^{-2}+O(L^{-3+\theta}). \tag{6.32}$$

由于所有函数均为实值函数，根据定义可得

$$2Q(u_+,u_-) = 2\int_{\Omega_\rho}\nabla_r u_+(x)\cdot\nabla_r u_-(x)\,dx - (1/2)\nabla_{(x_3,x_4)}u_+(x)\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_-(x)dx \tag{6.33}$$

将 (6.20) 代入 (6.33)，得到

$$\begin{aligned}2Q(u_+,u_-) =& 2\frac{\mu^2}{L^2}\left\langle\partial_\mu u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} - \frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)}\\ &+\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_-,\partial_\mu u_+\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} - \left\langle\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\nabla_{(x_3,x_4)}u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)}.\end{aligned} \tag{6.34}$$

由于 Ω_ρ 的对称性，并在（6.34）第二行第一项中作代换 $x\mapsto -x$，我们得到

$$\begin{aligned}2Q(u_+,u_-) =& 2\frac{\mu^2}{L^2}\left\langle\partial_\mu u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)} - 2\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)}\\ &-\left\langle\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\nabla_{(x_3,x_4)}u_-\right\rangle_{L^2(\Omega_\rho)}.\end{aligned} \tag{6.35}$$

与步骤 1 类似，我们断言，将（6.35）右侧内积中的积分区域扩展到集合 $B_\rho(\pm\vec{R}/2)$，只会产生 $O(L^{-3+\theta})$中的修正项，即

$$\frac{\mu^2}{L^2}\left\langle \partial_\mu u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(B_\rho(\pm\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}), \tag{6.36}$$

$$\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(B_\rho(\pm\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}), \tag{6.37}$$

$$\left\langle \nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \nabla_{(x_3,x_4)} u_- \right\rangle_{L^2(B_\rho(\pm\ell/2))} \in O(L^{-3+\theta}). \tag{6.38}$$

为方便起见，我们在本证明末尾给出这些计算。因此，将 (6.36)–(6.38) 代入 (6.35)，可得

$$\begin{aligned} 2Q(u_+,u_-) =& 2\frac{\mu^2}{L^2}\left\langle \partial_\mu u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} - 2\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} \\ & - \left\langle \nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \nabla_{(x_3,x_4)} u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} + O(L^{-3+\theta}). \end{aligned} \tag{6.39}$$

其余内积在附录 B 中进行计算。我们将这些计算作为引理 B.1、引理 B.3 和引理 B.5 的内容给出。特别地，我们在引理 B.1 中证明

$$2\frac{\mu^2}{L^2}\left\langle \partial_\mu u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} = (2\pi^2/3)\mu_0^2 K_2(\mu_0) L^{-2}, \tag{6.40}$$

在引理 B.3 中

$$-2\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 2\pi^2\mu_0^2 K_0(\mu_0) L^{-2}. \tag{6.41}$$

根据引理 B.5，我们得出

$$-\left\langle \nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \nabla_{(x_3,x_4)} u_- \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^4)} = 2\pi^2(\mu_0^2 K_2(\mu_0) - 2\mu_0 K_1(\mu_0)) L^{-2}. \tag{6.42}$$

将 (6.40)–(6.42) 代入 (6.39) 的右侧

$$2Q(u_+,u_-) = 2\pi^2\left(4/3\mu_0^2 K_2(\mu_0) + \mu_0^2 K_0(\mu_0) - 2\mu_0 K_1(\mu_0)\right) L^{-2} + O(L^{-3+\theta}).$$

在假设 (6.36)-(6.38) 成立的条件下，利用 (A.2) 中修正贝塞尔函数的递推关系，即完成步骤 2 的证明。还需证明 (6.36)-(6.38)。我们先证明 (6.36)。回顾 $u_\pm$ 的定义以及 (6.30) 和 (6.31)，可得

$$\begin{aligned} \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} &= \left\|\partial_\mu u_-\right\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} \lesssim L^{-2+4\theta}, \\ \left\|\partial_\mu u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(-\ell/2))} &= \left\|\partial_\mu u_-\right\|^2_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} \lesssim L^{-2+4\theta}\log(L). \end{aligned} \tag{6.43}$$

应用柯西-施瓦茨不等式可得 (6.36)。

为证明 (6.37)，首先注意到，根据柯西-施瓦茨不等式以及 $2ab \le a^2+b^2$ 对于 $a,\ b\in\mathbb{R}$ 的事实，我们得到

$$\left|\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)} u_+, \partial_\mu u_- \right\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))}\right| \lesssim \left\|\nabla_{(x_3,x_4)} u_+\right\|^2_{L^2(B_\rho(+\ell/2))} + \frac{\mu^2}{L^2}\left\|\partial_\mu u_-\right\|^2_{L^2(B_\rho(+\ell/2))}. \tag{6.44}$$

对于 $x\in B_\rho(+\ell/2)$，根据定义可知

$$\left|\nabla_{(x_3,x_4)} u_+(x)\right| \lesssim L^{-3}. \tag{6.45}$$

由于 $\left|B_\rho(+\ell/2)\right| \sim R^{4\theta}$，将 (6.43) 和 (6.45) 代入 (6.44) 可得

$$\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(B_\rho(+\ell/2))}\in O(L^{-3+\theta}). \tag{6.46}$$

对于 $x\in B_\rho(-\ell/2)$，可得 $\left|\mu/L^2\partial_\mu u_-(x)\cdot\ r\right|\lesssim L^{-3}$。将关于 x_1 和 x_2的导数相加，得到

$$\left|\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(B_\rho(-\ell/2))}\right|\lesssim L^{-3}\int_{B_\rho(-\ell/2)}|\nabla_x u_+(x)|\ dx. \tag{6.47}$$

利用 u_+的导数，可得

$$\int_{B_\rho(-\ell/2)}|\nabla_x u_+(x)|\ dx=\int_{B_\rho(-\ell/2)}\mu^2\frac{K_2(\mu\,|x+\ell/2|)}{|x+\ell/2|}\,dx.$$

转换为球坐标后，得到

$$\int_{B_\rho(-\ell/2)}|\nabla_x u_+(x)|\ dx=\mu^{-1}\int_0^{\mu\rho}s^2K_2(s)\,ds \tag{6.48}$$

(6.48) 右端的被积函数有界，因此

$$\int_{B_\rho(-\ell/2)}|\nabla_x u_+(x)|\ dx\lesssim L^{\theta}. \tag{6.49}$$

将 (6.49) 代入 (6.47)，可得

$$\frac{\mu}{L^2}\left\langle r\cdot\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\partial_\mu u_-\right\rangle_{L^2(B_\rho(-\ell/2))}\in O(L^{-3+\theta}). \tag{6.50}$$

结合（6.46）和（6.50）可得（6.37）。

为证明（6.38），只需证明

$$\left\langle\nabla_{(x_3,x_4)}u_+,\nabla_{(x_3,x_4)}u_-\right\rangle_{L^2(B_\rho(-\ell/2))}\in O(L^{-3+\theta}) \tag{6.51}$$

由于对称性。应用 (6.49) 以及 $\left|\nabla_{(x_3,x_4)}u_-(x)\right|\lesssim L^{-3}$（对 $x\in B_\rho(-\ell/2)$）可推出 (6.51)。

至此完成了 (6.36)-(6.38) 的证明，从而结束了命题 6.2 的证明。

■

附录 A. 关于贝塞尔函数的某些级数展开

在引理 3.3 的证明中，我们使用第二类修正贝塞尔函数 K_j 在零点处对 $j \in \{1, 2, 3\}$ 的展开。我们由其级数表示导出 K_0 与 K_1 的近零行为，再由递推关系得到 K_2 与 K_3 的展开。

我们使用以下表示式，其中 K_0、K_1 和 I_ν 引自 [43, 第 80 页，式 (14)–(15)，以及第 77 页，式 (2)]

$$
\begin{aligned}
K_0(z) &= -\log(z/2)\, I_0(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^m}{(m!)^2}\, \Psi(m+1), \\
K_1(z) &= z^{-1} + \log(z/2)\, I_1(z) - \frac{z}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^m}{m!(m+1)!} \big(\Psi(m+1) + \Psi(m+2)\big), \\
I_\nu(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2m}}{m!\, \Gamma_*(\nu+m+1)}, \qquad \nu \geq 0,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

其中，Γ_* 是通常的伽马函数，而 $\Psi = \Gamma_*'/\Gamma_*$ 是双伽马函数。我们使用符号 Γ_* 以避免与先前定义的函数 Γ 混淆。

注 A.1. 尽管可以通过选取对数分支并将范围限制在避开负实轴的扇形区域内来处理复数自变量 $z \in \mathbb{C}$，但我们只需要沿正实轴的近零展开。因此，为简化记号，我们陈述并使用实数 $z > 0$ 的所有渐近展开，尽管自变量也可以扩展到适当的复扇形区域。

根据 [43, 第 79 页，式 (1)–(4)],，第二类修正贝塞尔函数及其导数的递推关系为

$$
\begin{aligned}
K_{\nu+1}(z) &= K_{\nu-1}(z) + 2\nu\, z^{-1} K_\nu(z), \qquad \nu \geq 1, z > 0. \\
-K_\nu'(z) &= K_{\nu-1}(z) + \nu z^{-1} K_\nu(z), \qquad \nu \geq 1, z > 0. \\
-2K_\nu'(z) &= K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) \qquad \nu \geq 1, z > 0. \\
-K_\nu'(z) &= K_{\nu+1}(z) - \nu z^{-1} K_\nu(z) \qquad \nu \geq 1, z > 0.
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

（后两条关系由前两条关系推出。）利用这些教科书中的关系，我们证明以下标准展开式；对此，我们未能找到明显可引用的出处。

引理 A.2（第二类修正贝塞尔函数的近零展开）。设 K_j，$j \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 是定义于 (A.1) 且满足 (A.2) 的修正贝塞尔函数。当$z \to 0^+$ 时，

$$\begin{aligned} K_0(z) &= -\log(z/2) - \gamma + O\big(z^2 \log z\big), \\ K_1(z) &= \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\left(\log(z/2) + \gamma - \frac{1}{2}\right) + O\big(z^3 \log z\big), \\ K_2(z) &= \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} + O\big(z^2 \log z\big), \\ K_3(z) &= \frac{8}{z^3} - \frac{1}{z} + O\big(z \log z\big). \end{aligned} \tag{A.3}$$

注 A.3. 我们也滥用记号，将朗道符号用于小变量，含义如下。对于定义在 $z \in (0, \infty)$ 上的函数 $z \mapsto R(z)$，记号 $R \in O(f)$ as$z \to 0^+$ 表示存在常数 $C > 0$ 和 $\delta > 0$，使得

$$|R(z)| \le C\,|f(z)| \qquad \text{for all } 0 < z < \delta.$$

引理 *A.2* 的证明. 首先证明 (A.3) 中所述的 K_0 的性质。定义

$$s_m(z) = \frac{(z^2/4)^m}{(m!)^2}\,\Psi(m+1), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

并注意到 $s_0(z) = \Psi(1) = -\gamma$是欧拉–马歇罗尼常数，由 (A.1) 可得

$$K_0(z) + \log(z/2) + \gamma = -\log(z/2)\,(I_0(z) - 1) + \sum_{m=1}^{\infty} s_m(z)\,. \tag{A.4}$$

直接由 (A.1) 中的级数展开可得

$$I_0(z) - 1 = z^2/4 + O(z^4)\,. \tag{A.5}$$

结合 (A.4) 和 (A.5)，并注意到 $m \ge 1$ 的 $s_m \in O(z^2)$，立即可得 (A.3) 中 K_0 的展开。

接下来，我们证明 (A.3) 中所述的 K_1 的行为。定义

$$a_m(z) = \frac{(z^2/4)^m}{m!(m+1)!}\,\big(\Psi(m+1) + \Psi(m+2)\big)$$

然后 $a_0 = \Psi(1) + \Psi(2) = 1 - 2\gamma$。利用 (A.3) 中 K_1 的级数展开，我们得到

$$\begin{aligned} K_1(z) - z^{-1} &- \log(z/2)(z/2) - (1 - 2\gamma)(z/4) \\ &= \log(z/2)\,(I_1(z) - (z/2)) + (z/4) \sum_{m=1}^{\infty} a_m(z) \end{aligned} \tag{A.6}$$

利用 (A.1) 中 I_1 的级数展开，我们得出

$$I_1(z) - (z/2) = z^3/16 + O(z^5)\,. \tag{A.7}$$

将 (A.7) 和 (A.6) 与 $z \cdot a_m \in O(z^3)$ 结合起来，即可得到 (A.3) 中关于 K_1 的结论。

现在我们利用递推关系 (A.2)，求出 K_2 和 K_3 的零点附近的延拓。在 (A.2) 中使用 $\nu = 1$，得到

$$K_2(z) = K_0(z) + 2z^{-1}K_1(z)\,.$$

注意，$z^{-1}K_1(z) = 2/z^2 + O(z^2\log(z))$，因此该关系

$$K_2(z) = \frac{2}{z^2} - \frac{1}{2} + O\big(z^2\log z\big)$$

可立即得出。对 $\nu = 2$ 应用 (A.2) 进行类似计算，可得 K_3的其余扩展。

■

注 A.4. 我们注意到，应用引理 A 可得以下关系 .2.

$$\frac{1}{2}z^2\left(K_0(z)K_2(z) - K_1(z)^2\right)\big) = -\log(z) + O(1). \tag{A.8}$$

$$\frac{1}{2}z^2\left(K_3(z)K_1(z) - K_2(z)^2\right) = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{2}\left(4\log(z) + 4\gamma - 1 - 2\log(4)\right) + O(z^2\log(z)) \tag{A.9}$$

$$(1 - zK_1(z))K_2(z) = \frac{1}{2}\left(-2\log(z) - 2\gamma + 1 + 2\log(2)\right) + O(z^2\log(z)). \tag{A.10}$$

$$(2 - z^2K_2(z))K_2(z) = 1 + O(z^2\log(z)) \tag{A.11}$$

应用乘积法则并直接利用递推关系可得，对于任意 $\nu \geq 1$和 $z > 0$

$$sK_\nu(z)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2}z^2\left(K_\nu(z)^2 - K_{\nu-1}(z)K_{\nu+1}(z)\right)\right). \tag{A.12}$$

附录 B. 积分求值

本节将求出第 6 节中出现的贝塞尔函数卷积相关积分。我们采用如下傅里叶变换约定

$$\mathcal{F}(f)(k) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ikx}\,dx. \tag{B.1}$$

引理 B.1. 设 $\mu > 0, a, b \in \mathbb{R}^4, a \neq b.$ 则

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)K_0(\mu\,|x-b|)\,dx = 2\pi^2\frac{|a-b|^2}{6\mu^2}K_2(\mu\,|a-b|). \tag{B.2}$$

证明。 对于 $a \neq b$和 $\mu > 0$, (B.2) 左端的积分是有限的。事实上， $K_0(t)$ 随着 $t \to \infty$ 指数衰减，并且当 $t \downarrow 0$ 时满足 $K_0(t) \sim -\log t$（见 (A.3)）。因此，被积函数在 $x = a$和 $x = b$ 附近至多有对数奇点；由于 $(\log|x|)^2 \in L^1_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$，这些奇点在四维空间中可积，而当 $|x| \to \infty$ 时，被积函数呈指数衰减。

定义 $f_\mu\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $f_\mu(x) = K_0(\mu|x|)$。设 $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$，使得 $f(x) = f_0(|x|)$。那么对于 $k \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F}(f)(k) = |k|^{-d/2+1}\int_0^\infty r^{d/2}f_0(r)J_{d/2-1}(|k|\,r)\,dr.$$

由于 f_μ 是径向对称的，我们看到

$$\mathcal{F}(f_\mu)(k) = |k|^{-1}\int_0^\infty r^2K_0(\mu r)J_1(|k|\,r)\,dr.$$

右端的积分在 [10][第665页，6.521.12] 中被显式求出，使得

$$\mathcal{F}(f_\mu)(k) = \frac{2}{\left(\mu^2 + |k|^2\right)^2}. \tag{B.3}$$

记 $*$ 为函数的通常卷积，可得

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)K_0(\mu\,|x-b|)\,dx = \left(f_\mu * f_\mu\right)(a-b).$$

因此，通过进行傅里叶变换，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)K_0(\mu\,|x-b|)\,dx = 4\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f_\mu)^2\right)(a-b). \tag{B.4}$$

直接计算表明，对于 $k \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F}(f_\mu)^2(k) = \frac{4}{\left(\mu^2 + |k|^2\right)^4} = \frac{1}{12\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\mu}\mathcal{F}(f_\mu)(k)\right).$$

We 接下来说明在其中将傅里叶逆变换与导数交换的合理性 μ.

固定 $\mu_* > 0$ 并定义 $I_* = [\mu_*/2,\ \ 2\mu_*] \subset (0,\ \ \infty)$。令

$$m(\mu,k) := \mathcal{F}(f_\mu)(k) = \frac{2}{(\mu^2+|k|^2)^2}, \qquad \mu > 0,\ k \in \mathbb{R}^4.$$

我们有，

$$\partial_\mu m(\mu,k) = -\frac{8\mu}{(\mu^2+|k|^2)^3},$$

再微分一次，只会产生阶为 $(\mu^2+|k|^2)^{-3}$ 和 $(\mu^2+|k|^2)^{-4}$的项。因此，对于 $\mu \in I_*$，存在 $C_* > 0$ 使得

$$|\partial_\mu^j m(\mu,k)| \le \frac{C_*}{(1+|k|^2)^3}, \qquad j = 1, 2,$$

以及 $(1+|k|^2)^{-3} \in L^1(\mathbb{R}^4)$。因此，$m(\mu,\ \cdot)$、$\partial_\mu m(\mu,\ \cdot)$和 $\partial_\mu^2 m(\mu,\ \cdot)$在 I_* 上均由一个与 μ 无关的共同 L^1-函数控制。

应用控制收敛定理，我们可以将 ∂_μ（以及 ∂_μ^2）与 F^{-1} 对所有 $\mu \in I_*$ 交换。由于 $\mu_* > 0$ 是任意的，这对所有 $\mu > 0$ 均成立。乘以在I_* 上有界的函数（例如 $1/\mu$）不会影响论证。

由此可得

$$4\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f_\mu)^2\right)(a-b) = 2\pi^2\frac{1}{6\mu}\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1}{\mu}\frac{d}{d\mu}K_0(\mu\,|a-b|)\right).$$

通过微分并利用 (B.4)，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)K_0(\mu\,|x-b|)\,dx = 2\pi^2\frac{|a-b|^2}{6\mu^2}K_2(\mu\,|a-b|).$$

■

推论 B.2。设 $\mu > 0$。则

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x|)^2 dx = \frac{2\pi^2}{3\mu^4}.$$

证明。 取 $b = 0$ 和 $a = re_1$，令 $r \downarrow 0$取极限。由控制收敛（利用 K_0 在 0 处的对数行为及其在 ∞ 处的指数衰减）以及由 (A.3) 得到的展开式$K_2(z) \sim 2z^{-2}$（当 $z \downarrow 0$ 时），所述恒等式由引理 B.1 得出。

■

引理 B.3. 令 $\mu > 0$、 a、 $b \in \mathbb{R}^4$、 $a \neq b$ 和 G_μ 如引理 *5.6* 中所述。于是

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx &= 2\pi^2 \frac{1}{2}\,|a-b|\,K_0(\mu\,|a-b|)\frac{b_i-a_i}{|b-a|}\\ &= \pi^2 K_0(\mu\,|a-b|)(b_i-a_i)\end{aligned}$$

证明. 令 f_μ 如引理 B.1 的证明中所述。于是

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = \int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\left(-\partial_{b_i} G_\mu(x-b)\right)\,dx.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = -\partial_{b_i}\left((f_\mu * G_\mu)(a-b)\right). \tag{B.5}$$

由于 G_μ 是格林函数（见 (5.7)），我们知道对于 $k \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F}(G_\mu)(k) = \frac{1}{\mu^2 + |k|^2}. \tag{B.6}$$

与前一个引理中一样，我们有

$$(f_\mu * G_\mu)(a-b) = 4\pi^2 \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(f_\mu)\cdot\mathcal{F}(G_\mu)\right)(a-b). \tag{B.7}$$

直接计算表明

$$\mathcal{F}(f_\mu)\cdot\mathcal{F}(G_\mu)(k) = -\frac{1}{4\mu}\frac{d}{d\mu}\mathcal{F}(f_\mu)(k). \tag{B.8}$$

由于 $\mathrm{F}\,(f_\mu)\mathrm{F}\,(G_\mu)\,(k) = 2(\mu^2 + |k|^2)^{-3} \in L^1(\mathbb{R}^4)$，且其 μ–导数有界于

$$C(1+|k|^2)^{-3} \in L^1(\mathbb{R}^4)$$

在 μ 的局部范围内，控制收敛定理允许交换 ∂_μ 与 F^{-1}。

将 (B.7) 和 (B.8) 代入 (B.5) 可得

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = \partial_{b_i}\left(2\pi^2\frac{1}{2\mu}\frac{d}{d\mu}K_0(\mu\,|a-b|)\right).$$

因此,

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\partial_{b_i}\left(-\frac{|a-b|\,K_1(\mu\,|a-b|)}{2\mu}\right).$$

利用恒等式 $\frac{d}{dz}\left(zK_1(z)\right) = -zK_0(z)$，其中 $z = \mu|a-b|$和 $\partial_{b_i}|a-b| = \frac{b_i-a_i}{|a-b|}$，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} K_0(\mu\,|x-a|)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\frac{1}{2}\,|a-b|\,K_0(\mu\,|a-b|)\frac{b_i-a_i}{|b-a|}.$$

■

推论 B.4. 设 $\mu > 0$、 a、 $b \in \mathbb{R}^4$、 $a \neq b$和 G_μ如定义 *5.6* 所述。则

$$\int_{\mathbb{R}^4} G_\mu(x-a)G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2 K_0(\mu\,|a-b|).$$

证明。 与之前一样，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} G_\mu(x-a)G_\mu(x-b)\,dx = 4\pi^2\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(G_\mu)^2\right)(a-b).$$

回顾 (B.6) 和 (B.3)，可知对于 $k \in \mathbb{R}^4$

$$\mathcal{F}(G_\mu)(k)^2 = \frac{1}{2}\mathcal{F}(f_\mu)(k).$$

因此，

$$\int_{\mathbb{R}^4} G_\mu(x-a)G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2 f_\mu(a-b) = 2\pi^2 K_0(\mu\,|a-b|).$$

■

引理 B.5。 设 $\mu > 0$、 a、 $b \in \mathbb{R}^4$、 $a \neq b$ 和 G_μ 如定义 *5.6* 所示。则

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\left(\mu\frac{K_1(\mu\,|a-b|)}{|a-b|} - \mu^2 K_2(\mu\,|a-b|)\frac{(a_i-b_i)^2}{|a-b|^2}\right). \quad \text{(B.9)}$$

证明。 考虑内层导数后，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = \int_{\mathbb{R}^4} \partial_{a_i} G_\mu(x-a)\partial_{b_i} G_\mu(x-b)\,dx.$$

根据积分号下求导（控制收敛），可以将 $\partial_{a_i}\partial_{b_i}$ 与 (B.10) 中的积分互换；这是因为 $a \neq b$ 将 G_μ 的奇点分隔开来，且 G_μ（及其导数）在无穷远处呈指数衰减。

因此，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = \partial_{a_i}\partial_{b_i}\int_{\mathbb{R}^4} G_\mu(x-a)G_\mu(x-b)\,dx. \quad \text{(B.10)}$$

根据推论 B.4，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\partial_{a_i}\partial_{b_i} K_0(\mu\,|a-b|).$$

对其求导即可得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\partial_{a_i}\left(\mu\frac{K_1(\mu\,|a-b|)}{|a-b|}(a_i-b_i)\right)$$

因此我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^4} \partial_{x_i} G_\mu(x-a)\partial_{x_i} G_\mu(x-b)\,dx = 2\pi^2\left(-\mu^2 K_2(\mu\,|a-b|)\frac{(a_i-b_i)^2}{|a-b|^2} + \mu\frac{K_1(\mu\,|a-b|)}{|a-b|}\right).$$

■

附录 C. 关于 $\mathbb{R}^4$中的零能共振

引理 C.1. 设 $V \in L^2(\mathbb{R}^4)$ 为实值、径向对称且在$B_{\rho_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon |x| < \rho_0\}$中紧支撑的函数。假设算子

$$h = P_x^2 + V$$

在零点处具有虚能级，其意义见定义 *2.4*。那么，存在一个除归一化外唯一的函数 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，它在分布意义下满足 $h\varphi_0 = 0$，且可取为实值正函数。此外，存在一个常数 $c_0 \in \mathbb{R}$，使得

$$\varphi_0(x) = c_0|x|^{-2} \qquad \textit{for all } |x| > \rho_0. \tag{C.1}$$

证明. 根据假设，对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $\varphi_\varepsilon \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，使得

$$\langle \varphi_\varepsilon, (P_x^2 + (1+\varepsilon)V)\varphi_\varepsilon \rangle < 0.$$

我们进行归一化

$$\|P_x\varphi_\varepsilon\|_2 = 1.$$

于是，(φ_ε) 在 $\dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$ 中有界，因此存在一个仍记作同一字母的子列以及一个函数 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，使得

$$P_x\varphi_\varepsilon \rightharpoonup P_x\varphi_0 \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R}^4).$$

由于 $h(0) \geq 0$，我们有

$$0 \leq \langle \varphi_\varepsilon, (P_x^2 + V)\varphi_\varepsilon \rangle = \|P_x\varphi_\varepsilon\|_2^2 + \langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle = 1 + \langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle.$$

另一方面，

$$\langle \varphi_\varepsilon, (P_x^2 + (1+\varepsilon)V)\varphi_\varepsilon \rangle = 1 + (1+\varepsilon)\langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle \leq 0.$$

因此，

$$-1 \leq \langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle \leq -\frac{1}{1+\varepsilon},$$

从而

$$\langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle \to -1 \quad \text{as } \varepsilon \downarrow 0.$$

设 $K \subset \mathbb{R}^4$ 为具有光滑边界的紧集，且 $\operatorname{supp}(V) \subset K$。根据四维中的索博列夫不等式，$(\varphi_\varepsilon)$ 在 $L^4(\mathbb{R}^4)$ 中有界，因而在 $L^4(K)$ 中有界。结合 $\|P_x\varphi_\varepsilon\|_2 = 1$，这意味着其在 $H^1(K)$ 中有界。根据 Rellich–Kondrachov 定理，取一个子列后，

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_0 \quad \text{strongly in } L^2(K).$$

由于 $V \in L^2_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$ 且 (φ_ε) 在 $L^4(K)$ 中有界，因此

$$\langle \varphi_\varepsilon, V\varphi_\varepsilon \rangle \to \langle \varphi_0, V\varphi_0 \rangle.$$

因此

$$\langle \varphi_0, V\varphi_0 \rangle = -1,$$

特别地 $\varphi_0 \not\equiv 0$。

由范数的弱下半连续性，

$$\|P_x\varphi_0\|_2 \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|P_x\varphi_\varepsilon\|_2 = 1.$$

由于 $h(0) \geq 0$通过稠密性从 H^1 延拓到 $\dot{H}^1$，我们得到

$$0 \leq \|P_x\varphi_0\|_2^2 + \langle\varphi_0, V\varphi_0\rangle \leq 1 - 1 = 0.$$

因此，

$$\|P_x\varphi_0\|_2^2 + \langle\varphi_0, V\varphi_0\rangle = 0.$$

在 V 的支撑之外，函数 φ_0 满足

$$P_x^2\varphi_0 = 0.$$

由径向对称性，$|x| > \rho_0$ 中的通解为

$$\varphi_0(x) = c_1 + c_0|x|^{-2}.$$

由于 $\varphi_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，常数项必须为零，即 $c_1 = 0$，因此

$$\varphi_0(x) = c_0|x|^{-2}, \qquad |x| > \rho_0.$$

由于 h 具有实系数，φ_0 也是 $h\varphi_0 = 0$ 的一个解，因此我们可以假设 φ_0 是实值的。此外，不等式 $|\nabla|\varphi_0|| \leq |\nabla\varphi_0|$ 几乎处处成立，这意味着 $|\varphi_0| \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$，并且

$$\|\nabla|\varphi_0|\|_2^2 + \langle|\varphi_0|, V|\varphi_0|\rangle \leq \|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \langle\varphi_0, V\varphi_0\rangle = 0.$$

由于 $h \geq 0$ 作为二次型，等式成立，且 $|\varphi_0|$ 仍是一个零能解。因此，用 $|\varphi_0|$替换 φ_0 后，我们可以假设 $\varphi_0 \geq 0$。

设 $\psi \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^4)$是 $h\psi = 0$的任意实值分布解。对于任意 $|x_0| > \rho_0$，取 $\lambda := \psi(x_0)/\varphi_0(x_0)$，则差 $w := \psi - \lambda\varphi_0$ 满足 $hw = 0$，并在x_0处为零。根据薛定谔算子在具有 $V \in L^2_{\text{局部}}(\mathbb{R}^4)$的情形下的唯一延拓性质（参见 [21, 定理 6.3] 以及 [34, 定理 D.3.2]之后的注），可得 $w \equiv 0$ 在 $\mathbb{R}^4$上成立。因此 $\psi = \lambda\varphi_0$，这证明了除归一化外的唯一性。 ∎

注 C.2. 在引理 C.1 中，我们用到了势是径向对称且紧支撑的这一事实。在引理 5.4 中，我们陈述了一个关于短程势的类似结果，但需额外加入衰减更快的共振函数项。引理 5.4 的证明是对上述证明的扩展，可见 [34, 第 3.2 章和第 3.3] 节后续的注，以及 [34, 附录 D]。也可以参考 Yafaev 关于虚能级的原始分析 [20]，其中证明了预解算子的赫尔德连续性（在维数 $d = 3$的情形下），从而也能在维数$d = 4$的情形下得到这样的衰减性质。

为方便起见，且由于我们未能在文献中轻易找到相关内容，现给出一个简单明了的短程势示例，它表现出虚能级。这类示例广为人知，通常可通过应用 Birman–Schwinger 原理直接得到。

临界势示例： 令 $\lambda > 0$ 并定义 $n \geq 3$ 算子

$$\hat{h}_\lambda = -\Delta_x - \lambda 1_{\{|x|<1\}} \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^n)$$

推论 C.3。 那么存在 $\lambda_c > 0$，使得对任意 $\lambda < \lambda_c$，都有 $\sigma_{\text{disc}}(h_\lambda) = \emptyset$，而对于$\lambda > \lambda_c$，有 $\sigma_{\text{disc}}(h_\lambda) \neq \emptyset$。

注 C.4. 推论 C.3 证明了算子 h_{λ_c} 具有定义 2.4 意义下的虚能级。

ˆ证明. 根据 Weyl定理， h_λ 的本质谱为 $[0,\infty)$，对任意 $\lambda > 0$均成立。根据 Cwikel–Lieb–Rozenblum界（例如参见 [31,定理 XIII.12]），负特征值的数目 $N(\lambda)$满足 $n \geq 2$

$$N(\lambda) \leq c_n \lambda^{n/2} \int 1_{\{|x|<1\}}(x) dx \lesssim |\lambda|^{n/2}$$

对于适当的 $c_n > 0$。因此，存在 $\lambda_0 > 0$，使得对任意 $\lambda < \lambda_0$都不存在ˆ负特征值。此外，存在 $\lambda_1 > 0$，使得 h_λ 对任意 $\lambda > \lambda_1$至少具有一个负特征值。为证明这一点，我们构造一个测试函数 $\varphi \in L^2$，使得

$$\langle \varphi, \hat{h}_\lambda \varphi \rangle < 0.$$

例如，取任意在$\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$上满足 $\varphi \equiv 1$ 的 $\varphi \in C_c^\infty$，则

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\{|x|<1\}}(x) \, |\varphi(x)|^2 \, dx = \lambda \, |B_1(0)| \, .$$

当 $\lambda > 0$ 足够大时

$$\langle \varphi, \hat{h}_\lambda \varphi \rangle = \|\nabla \varphi\|_2^2 - \lambda \, |B_1(0)| < 0.$$

我们将临界耦合 $0 < \lambda_c < \lambda_1$ 定义为

$$\lambda_c = \inf\{\lambda > 0 : N(\lambda) \geq 1\}.$$

ˆ将基态能量定义为 $E(\lambda) = \inf \sigma(h_\lambda)$。根据定理ˆ XIII.10] 之前的 [31,引理，我们得出 h_λ 的谱测度在 $\lambda \in \mathbb{R}$中连续。因此， E必须在区间 $[\lambda_0, \lambda_1)$内的某一点处为零。此外， E 在 $\lambda \in [0,\infty)$上单调递减，并且一旦 E 为负便严格单调。由此可知， $\lambda_c > 0$ 存在且唯一。 ∎

注C.5。 上面的例子使用了 Cwikel–Lieb-Rozenblum 界，但它在维度 $n = 2$中并不成立。在维度 $n \leq 2$ 中，任意浅势阱都会产生负特征值（例如参见 [35]）。因此，在维度 $n \leq 2$中，零势 $V \equiv 0$ 在零能处具有一个虚能级。

$d \geq 1$维中存在另一类非平凡的临界势，它们并非短程势（也就是说，它们在无穷远处按 $|x|^{-2}$ 衰减），且具有排斥区和吸引区；文献 [15] 对此作了描述。

参考文献

[1] R. D. Amado 和 F. C. Greenwood。四个或更多粒子不存在埃菲莫夫效应。*Phys. Rev. D (3)*, 7:2517–2519，1973年。3[2] G. Barontini、C. Weber、F. Rabatti、J. Catani、G. Thalhammer、M. Inguscio 和 F. Minardi。异核原子埃菲莫夫共振的观测。*Phys.Rev.Lett.*，103:043201，2009年7月。2[3] Simon Barth、Andreas Bitter 和 Semjon Vugalter。多粒子薛定谔算子零能共振的衰减性质，以及为何 $N \geq 4$ 粒子系统不存在埃菲莫夫效应，2020年。arXiv版本：*arXiv:1910.04139v3*。3 [4] Simon Barth、Andreas Bitter 和 SemjonVugalter。一个和两个维度粒子系统中不存在埃菲莫夫效应。《数学物理杂志》，62(12)：论文编号123502，共46页，2021年。3

[5] G. Basti、D. Ferretti 和 A. Teta。玻恩–奥本海默近似下埃菲莫夫效应的零程模型，2026年。1[6] M. S. Birman。关于奇异边值问题的谱。Mat. Sb. (N.S.)，55(97):125–174，1961年。4[7] Ph. Courteille、R. S. Freeland、D. J. Heinzen、F. A. van Abeelen 和 B. J. Verhaar。冷原子散射中费什巴赫共振的观测。Phys. Rev. Lett.，81:69–72，1998年。2[8] V N Efimov。三个共振相互作用粒子的弱束缚态。Yadern. Fiz.，12:1080–91，1970年。2[9] R. L. Frank、A. Laptev 和 T. Weidl。《薛定谔算子：特征值与Lieb—Thirring不等式》。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，2022年。4[10] I.S. Gradshteyn 和 I.M. Ryzhik。《积分、级数与乘积表》。Academic Press，2014年。51[11] Dmitry K. Gridnev。为何四个玻色子不存在埃菲莫夫效应，以及关于离散谱有限性的相关结果。《数学物理学杂志》，54(4):042105，2013年。3[12] Dmitry K. Gridnev。二维平面中的三个共振费米子：超埃菲莫夫效应的证明及精确离散谱渐近行为。《物理学杂志A：数学与通用》，47(50):505204，2014年12月。3[13] Noam Gross、Zav Shotan、Servaas Kokkelmans 和 Lev Khaykovich。超冷 ^{7}Li三体复合中的普适性观测。Phys. Rev. Lett.，103:163202，2009年10月。2[14] Noam Gross、Zav Shotan、Servaas Kokkelmans 和 Lev Khaykovich。超冷 ^{7}Li三体复合中的普适性观测。Phys. Rev. Lett.，103:163202，2009年10月。2[15] Dirk Hundertmark、Michal Jex 和 Markus Lange。处于临界边缘的量子系统：束缚态的存在性、临界势与维数。Forum Math. Sigma，11：论文编号e61，共29页，2023年。56[16] Dirk Hundertmark、Marvin R. Schulz 和 Semjon Vugalter。为何位于彼此分离的直线上的三玻色子系统不会呈现限域诱导的埃菲莫夫效应，2024年。2[17] Walter Hunziker。关于薛定谔多粒子哈密顿算子的谱。Helv. Phys. Acta，39:451–462，1966年。4[18] Shin Inouye、M. R. Andrews、M. R. Andrews、J. B. Stenger、H. J. Miesner、Dan M. Stamper-Kurn 和 Wolfgang Ketterle。玻色–爱因斯坦凝聚态中费什巴赫共振的观测。《自然》，392:151–154，1998年。2[19] D. R. Jafaev。关于三粒子薛定谔算子离散谱的理论。Mat. Sb. (N.S.)，94(136):567–593，655–656，1974年。2，5[20] D. R. Jafaev。薛定谔方程的虚能级。Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)，51:203–216，220，1975年。波传播理论中的数学问题，7。2，4，55[21] David Jerison 和 Carlos E. Kenig。薛定谔算子的唯一延拓与正特征值的不存在。《数学年刊》(2)，121(3):463–494，1985年。附录由 E. M. Stein 撰写。55[22] M. Klaus 和 B. Simon。势阱协同作用所产生的薛定谔粒子束缚。Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)，30(2):83–87，1979年。2，7[23] Tobias Kraemer、Manfred Mark、Philipp Waldburger、Johann G Danzl、Cheng Chin、Bastian Engeser、Almar D Lange、Karl Pilch、Antti Jaakkola、H-C Nägerl 等。超冷铯原子气体中埃菲莫夫量子态的证据。《自然》，440(7082):315–318，2006年。2[24] P. Naidon 和 S. Endo。埃菲莫夫物理：综述。Reports on Progress in Physics，80(5):056001，2017年。2[25] Yusuke Nishida。三体共振处二维玻色子的半超埃菲莫夫效应。Phys. Rev. Lett.，118:230601，2017年。3[26] Yu.N Ovchinnikov 和 I.M Sigal。三体系统束缚态的数目与埃菲莫夫效应。《物理学年刊》，123(2):274–295，1979年。2[27] D. S. Petrov。自由空间中的三体相互作用玻色子。Phys. Rev. Lett.，112:103201，2014年3月。3[28] Yehuda Pinchover。关于薛定谔算子束缚局域化及其向椭圆算子的推广。《数学分析杂志》，66(1):57–83，1995年12月。2[29] Yehuda Pinchover。 $\mathbb{R}^4$中势阱协同作用所产生的薛定谔粒子束缚，Pitman数学研究札记丛书第345卷，第118–133页。朗文，Harlow，1996年。2，3，8，18[30] Scott E. Pollack、Daniel Dries 和 Randall G. Hulet。超冷原子的三体与四体束缚态中的普适性。《科学》，326(5960):1683–1685，2009年。2[31] MichaelReed和Barry Simon。《现代数学物理方法》第IV卷：算子分析。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers],纽约—伦敦，1978年。56

[32] Hamidreza Saberbaghi。Born-Oppenheimer图像中的Efimov效应，2025年。1[33] Marvin R. Schulz 和 Sylvain Zalczer。不存在限域诱导的Efimov效应：特定几何中的直接证明。《数学物理快报》，115(6):135，2025年11月。2[34] Marvin Raimund Schulz。原子结构与*Efimov*效应的解析研究。博士论文，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），2025年。2，4，8，14，18，55[35] Barry Simon。一维和二维弱耦合薛定谔算子的束缚态。*Ann.Physics*，97(2):279–288，1976年。56[36] A. V. Sobolev。Efimov效应。离散谱渐近。《数学物理通讯》，156(1):101–126，1993年9月。2[37] Hideo Tamura。三体薛定谔算子的Efimov效应。《泛函分析杂志》，95(2):433–459，1991年。2，3，14，18[38] E. Tiesinga、B. J. Verhaar 和 H. T. C.Stoof。超冷基态碰撞中的阈值与共振现象。*Phys. Rev. A*，47:4114–4122，1993年。2[39] Clasine van Winter。有限粒子系统理论。I. 格林函数。*Mat.-Fys.Skr. DanskeVid.Selsk.*，2(8):60，1964年。4[40] S. A. Vugalter 和 G. M. Zhislin。三量子粒子系统中的对称性与Efimov效应。*Comm. Math. Phys.*，87(1):89–103，1982/83年。2[41] S. A. Vugalter 和 G. M. Zhislin。在 *n*粒子问题中离散谱的有限性。*Rep.Math.Phys.*，19(1):39–90，1984年。2[42] S. A. Vugalter 和 G. M. Zhislin。三维或二维量子系统中三个粒子的哈密顿算子离散谱的有限性。《数学物理快报》，25(4):299–306，1992年8月。2[43] G. N. Watson。贝塞尔函数理论专著。剑桥大学出版社，第2版，1944年。1995年重印。42，48[44] Xin Xie、Michael J. Van de Graaff、Roman Chapurin、Matthew D. Frye、Jeremy M. Hutson、José P. D'Incao、Paul S. Julienne、Jun Ye 和 Eric A. Cornell。在 ^{39}K中观测到跨越非普适性费什巴赫共振的Efimov普适性。*Phys. Rev.Lett.*，125:243401，2020年12月。2[45] M. Zaccanti、B. Deissler、C. D'Errico、M. Fattori、M. Jona-Lasinio、S. Müller、G. Roati、M. Inguscio 和 G. Modugno。在原子系统中观测到Efimov谱。《自然·物理》，5(8):586–591，2009年8月。2[46] G. M. Zhislin。多粒子系统薛定谔算子谱的研究。*TrudyMoskov. Mat. Obšč.*，9:81–120，1960年。4[47] G. M. Zhislin。量子 *n* 粒子问题中离散谱的有限性。*Teoret. Mat.Fiz.*，21:60–73，1974年。英文译本：量子n粒子问题中离散谱的有限性，《理论与数学物理》，第21卷，第971–980页，（1974年）。2

卡尔斯鲁厄理工学院分析研究所数学系，德国卡尔斯鲁厄 76131电子邮箱地址：jonathan.rau@kit.edu

哥本哈根大学数学科学系，Universitetsparken 5，丹麦哥本哈根 2100电子邮箱地址：masc@math.ku.dk