arXiv:2602.05952v1 [math.NA] 5 Feb 2026

具有不精确舒尔补的块对角预条件多重鞍点矩阵的谱分析

L. BERGAMASCHI、A. MART´INEZ 与 M. PILOTTO

Abstract. 我们针对采用块对角舒尔补矩阵进行预条件的对称块三对角多重鞍点系统推导了特征值界。该分析适用于任意数量的块，并考虑了舒尔补被近似的情形，从而推广了 [10, Bergamaschi 等人，Linear Algebra and its Applications， 2026]中的结果。数值实验用于验证所提出的估计。

1. Introduction

我们考虑块三对角多重鞍点线性系统 $\mathcal{A}x = b$的迭代求解，其中

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_1^T & 0 & \dots & 0 \\ B_1 & -A_1 & B_2^T & \ddots & \vdots \\ 0 & B_2 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_N^T \\ 0 & \dots & 0 & B_N & (-1)^N A_N \end{bmatrix}$$

我们假设$A_0 \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}$ 为对称正定，其余所有方块矩阵 $A_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$为对称半正定，且 $B_k \in \mathbb{R}^{n_k \times n_{k-1}}$ 具有满秩（对于 $k = 1$，.....， N）。我们还假设 $n_k \le n_{k-1}$ 对所有 k成立。这些条件足以确保 $\mathcal{A}$的可逆性。在本工作中，我们建立对称多重鞍点矩阵 $\mathcal{A}$在块对角舒尔补预条件器 $\mathcal{P}_D$预条件下的特征值界：

$$\mathcal{P}_D = \texttt{blkdiag}(S_0, \dots, S_N), \qquad \text{with} \quad S_0 = A_0, \quad \text{and} \quad S_k = A_k + B_k S_{k-1}^{-1} B_k^T, \quad k = 1, \dots, N.$$

由于应用 $\mathcal{P}_D$ 并不切实可行，尤其是当块数 N不小且具有非平凡规模时，我们将考虑该预处理器的一个非精确版本，其中部分（或全部）舒尔补会被近似计算和/或应用。

在许多科学应用中，涉及矩阵 $\mathcal{A}$ 的线性系统大多与 $N = 2$ （双鞍点系统）有关，包括约束二次规划 [20], 、岩浆—地幔动力学 [26],、液晶指向矢建模 [25] 以及耦合斯托克斯–达西问题 [5, 12, 18, 19]，；此类线性系统的预处理方法已有研究，例如 [1, 2, 4, 5, 12]。具体而言，矩阵 $\mathcal{A}$ 的块对角预条件器已有研究，例如 [10, 11, 22]。

更一般地，带有 $N > 2$ 的多个鞍点线性系统近来引起了许多研究者的关注。这类系统通常源于多物理过程建模，即对物理系统不同方面及其相互作用进行同步模拟。文献 [23], 提出了一种新的对称正定预处理器，并成功将其用于规模达 $N = 4$的约束优化问题。文献 [9] 描述了 $N = 2$所得预条件矩阵的谱性质，随后文献 [7]将其推广至多个鞍点系统。文献 [3] 探讨了对 4×4 鞍点线性系统（$N = 3$）进行预处理的方法，尽管其块结构有所不同，目的是求解一类最优控制问题。针对多个鞍点线性系统，一种实用的预处理策略基于对角块的稀疏近似逆

[1]帕多瓦大学土木、环境与建筑工程系，马佐洛街 9 号，35100 帕多瓦，意大利， E-mail: luca.bergamaschi@unipd.it[2] 的里雅斯特大学数学、信息学与地球科学系，魏斯街 2 号，34128 的里雅斯特，意大利，E-mail: amartinez@units.it[3]国际工程数值方法中心 (CIMNE)，巴塞罗那，西班牙， E-mail: marco.pilotto@upc.edu

块对角舒尔补预处理矩阵的块，文献 [14], 提出了该策略，用于求解耦合孔隙力学模型以及裂隙介质力学问题。文献 [8]对这类预处理器进行了理论分析。

本工作是对文献 [28] 以及较近期的文献 [10], 中分析的自然延伸，后者考虑了精确的 $\mathcal{P}_D$ 预处理器。在文献 [28] 中，对于 A_k 为 $k>0$的 $n_k \times n_k$ 零矩阵这一简化情形，精确计算了 $\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{A}$ 的特征值，并将其与适当的类切比雪夫多项式的零点联系起来。在文献 [10] 中，则取消了这一约束，并根据一系列类切比雪夫多项式的根，推导出$\mathcal{P}_D^{-1}\mathcal{A}$特征值的非常紧的界。

在本工作中，我们特别研究了舒尔补（的逆）以近似方式应用的情形。非精确预处理器 $\mathcal{P}$ 定义为

$$\mathcal{P} = \texttt{blkdiag}(\widehat{S}_0, \ldots, \widehat{S}_N), \qquad \text{with} \quad \begin{array}{ll} & \widehat{S}_0 \approx A_0 \\ \tilde{S}_k = A_k + B_k \widehat{S}_{k-1}^{-1} B_k^T & \widehat{S}_k \approx \tilde{S}_k. \end{array} \tag{1}$$

对于任意数量的块，我们根据矩阵$\widehat{S}_k^{-1}A_k$和 $\widehat{S}_k^{-1}\left(\tilde{S}_k - A_k\right)$.的极端特征值，建立了预条件矩阵 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 的特征值界

可以说，用于求解 $\mathcal{A}x = b$的最著名克雷洛夫子空间方法，是 MINRES [21] 和 GMRES [27]的预处理变体。与 GMRES 不同，早先提出的 MINRES 算法能够显式利用 $\mathcal{A}$的对称性。因此，MINRES 具有三项递推关系，这有利于算法实现（内存需求低，因为无需存储子空间基）以及纯粹基于特征值的收敛性分析（借助其与正交多项式之间著名的联系；参见 [15,17]）。具体而言，若预条件矩阵的特征值包含于 $[\rho_l^-, \rho_u^-] \cup [\rho_l^+, \rho_u^+]$，其中 $\rho_l^- < \rho_u^- < 0 < \rho_l^+ < \rho_u^+$满足 $\rho_u^+ - \rho_l^+ = \rho_u^- - \rho_l^-$，则在第 k 次迭代时，预处理残差 r_k 的欧几里得范数满足如下界

$$\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} \leq 2 \left(\frac{\sqrt{|\rho_l^- \rho_u^+|} - \sqrt{|\rho_u^- \rho_l^+|}}{\sqrt{|\rho_l^- \rho_u^+|} + \sqrt{|\rho_u^- \rho_l^+|}} \right)^{\lfloor k/2 \rfloor}.$$

相比之下，广义最小残量法需要存储子空间基，其收敛性分析通常也取决于相应的特征子空间，而特征子空间比特征值更难分析（例如，见 [13]）。

本文结构安排如下。第2节介绍块对角舒尔补预条件子。随后，我们建立预处理线性系统的特征值与一族参数多项式之间的关系。第3节推导这些多项式极端零点的界，并由此得到特征值的界。第4 节研究多项式的零点如何随参数变化。第5节针对特定参数取值，将所需的特征值界与多项式的极端零点联系起来。第6 节通过合成测试案例开展数值实验，以验证理论结果，重点考察以下情况： $N = 2$、3、4。第7 节探讨将块对角预条件子应用于求解三维空间中比奥模型的混合杂交有限元离散所产生的线性系统。第8 节总结全文。

2. Eigenvalues of Preconditioned Saddle-Point Systems with inexact Schurcomplements

在实际应用中，使用精确的舒尔补 S_i 代价高昂，尤其是对于较大的 i，这是由于舒尔补的递归定义所致。采用舒尔补的近似时， [9] 中的精确表述不再成立。事实上，在非精确情形下，我们将$\widehat{\ }$近似的舒尔补记为 S_k。每个近似都应逼近一个经过扰动的舒尔补$\widetilde{\ }$， S_i 该舒尔补根据式（1）纳入了先前舒尔补近似的影响。此时，我们的预条件矩阵为

$$\mathcal{Q}_{in} = \mathcal{P}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{P}^{-1/2} = \begin{bmatrix} E_0 & R_1^T & 0 & & \\ R_1 & -E_1 & R_2^T & & \\ 0 & R_2 & E_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & R_N^T \\ & & & R_N & (-1)^N E^N \end{bmatrix}$$

其中

$$R_k = \widehat{S}_k^{-1/2} B_k \widehat{S}_{k-1}^{-1/2}, \quad k = 1, \ldots, N; \quad E_k = \widehat{S}_k^{-1/2} A_k \widehat{S}_k^{1/2}, \quad k = 0, \ldots, N.$$

以下恒等式成立:

$$R_k R_k^{\top} + E_k = \widehat{S}_k^{-1/2} \tilde{S}_k \widehat{S}_k^{-1/2} \equiv \overline{S}_k, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

按分量，我们将特征值问题 $\mathcal{Q}u = \lambda u$（其中 $u = \left[u_1^T, \ldots, u_{N+1}^T\right]^T$）写为

(2)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(E_0 - \lambda I)u_1 & + & R_1^T u_2 & & & & & & & = & 0 \\
R_1 u_1 & + & -(E_1 + \lambda I)u_2 & + & R_2^T u_3 & & & & & = & 0 \\
 & & R_2 u_2 & + & (E_2 - \lambda I)u_3 & + & R_3^T u_4 & & & = & 0 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 & & R_{N-1} u_{N-1} & + & ((-1)^{N-1} E_{N-1} - \lambda I)u_N & + & R_N^T u_{N+1} & & & = & 0 \\
 & & & & R_N u_N & + & ((-1)^N E_N - \lambda I)u_{N+1} & & & = & 0.
\end{array}$$

矩阵 $R_k R_k^T$ 均为对称正定矩阵。我们使用瑞利商定义两个指标 $\gamma_E^{(k)}$ 和 $\gamma_R^{(k)}$

(3)

$$\alpha_E^{(i)} \equiv \lambda_{\min}(E_i), \qquad \beta_E^{(i)} \equiv \lambda_{\max}(E_i), \qquad \gamma_E^{(i)}(w) = \frac{w^T E_i w}{w^T w} \in \left[\alpha_E^{(i)}, \beta_E^{(i)}\right] \equiv \mathcal{I}_{E_i}, \quad i = 0, \ldots, N$$

$$\alpha_R^{(i)} \equiv \lambda_{\min}\left(R_i R_i^T\right), \quad \beta_R^{(i)} \equiv \lambda_{\max}\left(R_i R_i^T\right), \quad \gamma_R^{(i)}(w) = \frac{w^T R_i R_i^T w}{w^T w} \in \left[\alpha_R^{(i)}, \beta_R^{(i)}\right] \equiv \mathcal{I}_{R_i}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

我们定义两个参数向量:

$$\boldsymbol{\gamma}_E = \left[\gamma_E^{(0)}, \ldots, \gamma_E^{(N)}\right], \qquad \boldsymbol{\gamma}_R = \left[\gamma_R^{(1)}, \ldots, \gamma_R^{(N)}\right]$$

并引入一个新的参数多项式序列，该序列取决于 $\boldsymbol{\gamma}_E$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_R$:

定义 1.

(4)

$$\begin{aligned}
U_0(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_R, \boldsymbol{\gamma}_E) &= 1, \\
U_1(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_R, \boldsymbol{\gamma}_E) &= \lambda - \gamma_E^{(0)}, \\
U_{k+1}(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_R, \boldsymbol{\gamma}_E) &= (\lambda + (-1)^{k+1}\gamma_E^{(k)}) U_k(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_R, \boldsymbol{\gamma}_E) - \gamma_R^{(k)} U_{k-1}(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_R, \boldsymbol{\gamma}_E), \qquad k \geq 1
\end{aligned}$$

命题 1. 由于序列 (4)中的多项式是首一的

$$\lim_{\lambda \to +\infty} U_k(\lambda) = +\infty \qquad \lim_{\lambda \to -\infty} U_k(\lambda) = (-1)^k \cdot \infty.$$

我们用 $\mathcal{I}_k$ 表示两个区间（负区间和正区间）的并集，这两个区间包含多项式 $U_k(\lambda, \boldsymbol{\gamma}_E, \boldsymbol{\gamma}_R)$ 的根，参数范围为 $\boldsymbol{\gamma}_E, \boldsymbol{\gamma}_R$ 的可取范围。现在定义一个矩阵值序列:

定义 2.

$$\begin{aligned}
Y_1(\lambda) &= \lambda I - E_0 \\
Y_2(\lambda) &= R_1 Y_1(\lambda)^{-1} R_1^T - \lambda I - E_1, \quad \lambda \notin \mathcal{I}_{E_0} \\
Y_{k+1}(\lambda) &= R_k Y_k(\lambda)^{-1} R_k^T + (-1)^k \lambda I - E_k, \qquad k \geq 1, \quad \text{and} \quad \lambda \ \text{ s.t. } \ 0 \notin \sigma\left(Y_k(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

我们提及一个技术引理，它推广了 [6, 引理 1] 其证明见 [9].

引理 1. 设 Y 是定义在 $F \subset \mathbb{R}$ 上的对称矩阵值函数，并且

$$0 \notin [\min\{\sigma(Y(\zeta))\}, \max\{\sigma(Y(\zeta))\}] \qquad \textit{for all } \ \zeta \in F.$$

那么，对于任意的 $s \neq 0$，存在一个向量 $v \neq 0$，使得

$$\frac{s^T Y(\zeta)^{-1} s}{s^T s} = \frac{1}{\gamma_Z} \qquad \textit{with } \ \gamma_Z = \frac{v^T Y(\zeta) v}{v^T v}.$$

下一个引理将多项式序列与序列 $\{Y_k(\lambda)\}$联系起来，并将在后续定理 1的证明中使用。

引理 2。 对于每个 $u \neq 0$，都存在一种 γ 的选取方式，使得

$$\frac{u^T Y_{k+1}(\lambda)u}{u^T u} = (-1)^k \frac{U_{k+1}(\lambda)}{U_k(\lambda)} \qquad \textit{for all} \;\; \lambda \notin \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{I}_j.$$

证明。通过归纳法可得。对于 $k=0$，有 $u^T Y_1(\lambda)\frac{u}{u^T u} = \lambda - \gamma_E^{(0)} = U_1(\lambda)/U_0(\lambda)$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 均成立。若 $k \geq 1$，则条件 $\lambda \notin \mathcal{I}_k$ 与归纳假设 $u^T Y_k(\lambda)\frac{u}{u^T u} = U_k(\lambda)/U_{k-1}(\lambda)$ 一起，蕴含 $Y_k(\lambda)$ 的可逆性。此外，这等价于条件 $0 \notin [\min\{\sigma(Y(\zeta))\}, \max\{\sigma(Y(\zeta))\}]$，该条件保证引理 1 适用。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} \frac{u^T Y_{k+1}(\lambda)u}{u^T u} &= \frac{u^T R_k Y_k(\lambda)^{-1} R_k^T u}{u^T u}\gamma_R^{(k)} + (-1)^k\lambda - \gamma_E^{(k)} \\ &\underset{w=R_k^T u}{=} \frac{w^T Y_k(\lambda)^{-1} w}{w^T w}\gamma_R^{(k)} + (-1)^k\lambda - \gamma_E^{(k)}. \end{aligned} \tag{5}$$

接着，我们应用引理1 和归纳假设，写出

$$\frac{w^T Y_k(\lambda)^{-1} w}{w^T w} = (-1)^{k-1}\frac{U_{k-1}(\lambda)}{U_k(\lambda)}.$$

代入（5）并利用关系式（4），得到

$$\begin{aligned} \frac{w^T Y_k(\lambda)^{-1} w}{w^T w}\gamma_R^{(k)} + (-1)^k\lambda - \gamma_E^{(k)} &= (-1)^{k-1}\gamma_R^{(k)}\frac{U_{k-1}(\lambda)}{U_k(\lambda)} + (-1)^k\lambda - \gamma_E^{(k)} \\ &= (-1)^k \frac{-U_{k-1}\gamma_R^{(k)}(\lambda-1) + (\lambda + (-1)^{k+1}\gamma_E^{(k)})U_k(\lambda)}{U_{k-1}(\lambda)} \\ &= (-1)^k \frac{U_{k+1}(\lambda)}{U_k(\lambda)}. \end{aligned}$$

□

定理 1. $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 的特征值位于 $\bigcup \mathcal{I}_{k+1}$

证明. 为证明该结论，我们定义一个候选特征对 $(\lambda, [u_1^T, \ldots, u_{k+1}^T]^T)$，并通过归纳法证明，对于每个 $k \leq N+1$，以下情况之一成立：

$$\text{(i) } \lambda \in \mathcal{I}_k \quad \text{or} \quad \text{(ii) } u_k = Y_k^{-1} R_k^T u_{k+1},$$

且对于 $k = N+1$，只有条件 (i) 成立。假设 $\lambda \notin \mathcal{I}_{E_0}$（对于 $k=0$），则 $Y_1(\lambda)$ 可逆。由 (2) 的第一个方程可得

$$(\lambda I - E_0)u_1 = R_1^T u_2 \quad \rightarrow \quad Y_1(\lambda)u_1 = R_1^T u_2; \tag{6}$$

将 (6) 代入 (2) 的第二行，得到

$$(R_1 Y_1(\lambda)^{-1} R_1^T - \lambda I - E_1)u_2 = R_2^T u_3 \quad \rightarrow \quad Y_2(\lambda)u_2 = R_2^T u_3. \tag{7}$$

将 (7) 左侧的两边同时左乘 $\frac{u_2^T}{u_2^T u_2}$，得到

$$\begin{aligned} \frac{u_2^T Y_2(\lambda)u_2}{u_2^T u_2} &= \frac{u_2^T (R_1 Y_1(\lambda)^{-1} R_1^T)u_2}{u_2^T u_2} - \lambda - \frac{u_2^T E_1 u_2}{u_2^T u_2} \\ &\underset{s=R_1^T u_2}{=} \frac{s^T Y_1(\lambda)^{-1} s}{s^T s}\gamma_R^{(1)} - \lambda - \gamma_E^{(1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

根据引理 2，该表达式结合式（4）可得

$$\frac{U_0(\lambda)}{U_1(\lambda)}\gamma_R^{(1)} - \lambda - \gamma_E^{(1)} = \frac{U_2(\lambda)}{-U_1(\lambda)}.$$

如果 $u_3 = 0$，那么 λ 是特征值，这意味着 $U_2(\lambda, \gamma_E, \gamma_R) = 0$。否则，如果 $\lambda \notin \mathcal{I}_2$，那么 $Y_2(\lambda)$ 可逆。现在假设归纳假设对 $k-1$ 成立。如果 $\lambda \notin \mathcal{I}_{k-1}$，那么 $Y_{k-1}(\lambda)$ 是定号且可逆的。我们可以写成

$$(R_{k-1}Y_{k-1}(\lambda)R_{k-1}^T + (-1)^{k-1}\lambda - \gamma_E^{(k-1)})u_k = R_k^T u_{k+1} \quad \rightarrow \quad u_k = Y_k(\lambda)^{-1}u_{k+1}.$$

现在，若 λ 是一个特征值，且 $u_{k+1} = 0$，由

$$0 = \frac{u_k^T Y_k(\lambda)u_k}{u_k^T u_k} = \frac{U_k(\lambda)}{(-1)^{k-1}U_{k-1}(\lambda)},$$

我们有 $U_k(\lambda, \gamma_E, \gamma_R) = 0$，因此 $\lambda \in \mathcal{I}_k$。否则，对于任意 $\lambda \notin \mathcal{I}_k$，我们可以写成

$$u_k = Y_k(\lambda)^{-1}R_k^T u_{k+1}.$$

当 $k = N+1$时，归纳过程结束。在这种情况下，我们有

$$Y_{N+1}u_{N+1} = 0,$$

并且必须验证条件 $\lambda \in \mathcal{I}_{N+1}$，注意到 $u_{N+1} = 0$将意味着 $u_N = \cdots = u_1 = 0$ 也成立，这与特征向量的定义矛盾。□

3. Bounds for the extremal zeros of the sequence (4)

在上一节中，我们已经看到，预条件矩阵的特征值与多项式序列的零点之间存在严格关系（4）。本节将刻画这些零点。我们首先证明，对于 $\gamma-$ 参数的每一种可行组合，序列中的所有多项式都有实且互异的零点。此外，连续多项式的零点呈现交错性质。

引理 3. 令 $\gamma_E^{(k)} \in \left[\alpha_E^{(k)}, \beta_E^{(k)}\right]$ 和 $\gamma_R^{(k)} \in \left[\alpha_R^{(k)}, \beta_R^{(k)}\right]$，其中 $k = 1, \ldots, N$。则 $U_{k+1}(\lambda, \gamma_E, \gamma_R)$ 有$k+1$个实且互异的根。

证明。 下面的证明基于 [10]中的引理4的证明。对于 $k > 0$，定义

$$a_{k+1}(\lambda) = U_k(\lambda)U'_{k+1}(\lambda) - U'_k(\lambda)U_{k+1}(\lambda). \tag{9}$$

该序列的多项式 U_k 次数为 λ^{k+1}。我们注意到，a_{k+1} 中的最高次单项式为（$k+1$）$\lambda^k \cdot \lambda^k - k\lambda^{k-1}\lambda^{k+1} = \lambda^{2k}$，这表明 a_{k+1} 是一个首一多项式。为简便起见，令 $c_{k+1} =$（-1）$^{k+1}\gamma_E^{(k)}$。由（4）可得

$$U_{k+1}(\lambda) = (\lambda + c_{k+1})U_k(\lambda) - \gamma_R^{(k)}U_{k-1}(\lambda)$$
$$U'_{k+1}(\lambda) = U_k(\lambda) + (\lambda + c_{k+1})U'_k(\lambda) - \gamma_R^{(k)}U'_{k-1}(\lambda).$$

现在，将第一个方程乘以 $U'_k(\lambda)$，将第二个方程乘以 $U_k(\lambda)$，得到

$$U_{k+1}(\lambda)U'_k(\lambda) = (\lambda + c_{k+1})U_k(\lambda)U'_k(\lambda) - \gamma_R^{(k)}U'_k(\lambda)U_{k-1}(\lambda)$$
$$U_k(\lambda)U'_{k+1}(\lambda) = U_k(\lambda)^2 + (\lambda + c_{k+1})U_k(\lambda)U'_k(\lambda) - \gamma_R^{(k)}U_k(\lambda)U'_{k-1}(\lambda).$$

两个表达式相减，得到

$$a_{k+1}(\lambda) = U_k(\lambda)U'_{k+1}(\lambda) - U'_k(\lambda)U_{k+1}(\lambda) = U_k(\lambda)^2 + \gamma_R^{(k)}a_k(\lambda).$$

由于 $a_1(\lambda) = U_0U'_1 - U'_0U_1 = 1$，根据归纳法，多项式序列 $\{a_{k+1}(\lambda)\}$对所有 $\lambda \in \mathbb{R}$ 都为正。回顾一下，根据假设，$\gamma_R^{(k)} > 0$。现在我们通过归纳法证明该命题。假设当指标为 k 时该命题成立，即存在实数

$$\xi_1^{(k)} < \xi_2^{(k)} < \cdots < \xi_k^{(k)}$$

使得 $U_k(\xi_j^{(k)}) = 0, j = 1, \ldots, k$。由于 $U_k(\lambda)$ 是一个首一多项式，因此可知 $(-1)^i U'_k(\xi_{k-i}^{(k)}) > 0$，对于 $i = 0, \ldots, k-1$。对于每个 j，均有

$$0 < a_{k+1}(\xi_j^{(k)}) = U_k(\xi_j^{(k)})U'_{k+1}(\xi_j^{(k)}) - U'_k(\xi_j^{(k)})U_{k+1}(\xi_j^{(k)}) = -U'_k(\xi_j^{(k)})U_{k+1}(\xi_j^{(k)}), \tag{10}$$

这表明 $U_{k+1}(\xi_j^{(k)})$ 的符号始终与 $U'_k(\xi_j^{(k)})$ 的符号相反。此外，由于 $\mathrm{sgn}(U'_k(\xi_j^{(k)})) = -\mathrm{sgn}(U'_k(\xi_{j+1}^{(k)}))$，我们得出 $U_{k+1}(\xi_j)$ 与 $U_{k+1}(\xi_{j+1})$ 符号相反。这给出了多项式 $U_{k+1}(\lambda)$ 在 $U_k(\lambda)$的根处取值的符号交替。总的来说，我们

有 $k+1$ 个区间可以应用博尔查诺定理，从而得到 $k+1$ 个实根。总之， $a_k(\lambda)$的严格正性确保 $U_{k+1}(\lambda)$ 不可能有重根。事实上，考虑$\lambda_\star$ 使得 $U_{k+1}(\lambda_\star) = U'_{k+1}(\lambda_\star) = 0$ ，则可得 $a_{k+1}(\lambda_\star) = 0$，这是不可能的，因为$a_{k+1}(\lambda) > 0,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$。□

接下来的两个命题将进一步阐述 U_k 的根的符号。

命题 2. 给定多项式序列 (4)，对所有 $k \geq 1$

$$\operatorname{sgn}(U_{2k-1}(0, \gamma_E, \gamma_R)) = \operatorname{sgn}(U_{2k}(0, \gamma_E, \gamma_R)) = (-1)^k$$

换言之， $U_k(0)$ 的符号遵循重复模式 $--$、$++$、$--$、$++$、.....，从 $k = 1$ 开始。

证明。 我们对 k 使用归纳法来证明这一点。对于 $k = 1$，该结论成立

$$U_1(0) = -\gamma_E^{(0)} < 0, \qquad U_2(0) = -\gamma_E^{(1)}\gamma_E^{(0)} - \gamma_R^{(1)} < 0.$$

假设该结论对某个 $k \geq 1$ 成立，即 $U_{2k-1}(0)$ 和 $U_{2k}(0)$ 的符号为 $s = (-1)^k$

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(U_{2k+1}(0)) &= (-1)^{2k+1}\operatorname{sgn}(U_{2k}(0)) - \operatorname{sgn}(U_{2k-1}(0)) = -s = (-1)^{k+1}.\\ \operatorname{sgn}(U_{2k+2}(0)) &= (-1)^{2k+2}\operatorname{sgn}(U_{2k+1}(0)) - \operatorname{sgn}(U_{2k}(0)) = -s = (-1)^{k+1}.\end{aligned}$$

□

命题 3. 给定多项式序列 (4)，若 $k \in \mathbb{N}$ 为偶数，则 $U_k(\lambda)$ 有 $k/2$ 个正根和 $k/2$ 个负根 $\{\xi_j^{(k)}\}_{j=1,\dots,k}$；而 $U_{k+1}(\lambda)$ 有 $k/2+1$ 个正根和 $k/2$ 个负根$\{\xi_j^{(k+1)}\}_{j=1,\dots,k+1}$。

证明。 考虑 $k = 1$。我们知道

$$U_1(0) < 0, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} U_1(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} U_1(\lambda) = -\infty$$

因此， $U_1(\lambda)$ 的唯一根必为正数。对于 $k = 2$，交错性质表明$U_2(\lambda)$ 在 $[-\infty, \xi^{(1)})$ 中有一个根，在 $[\xi^{(1)}, +\infty)$ 中还有另一个根

$$U_2(0) < 0, \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} U_2(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda\to-\infty} U_2(\lambda) = +\infty$$

因此，该多项式有一个负根和一个正根。
假设该结论对某个偶数 指标 k 成立。 $U_k(\lambda)$ 的根为

$$\xi_1^{(k)} < \xi_2^{(k)} < \cdots < \xi_m^{(k)} < 0 < \xi_{m+1}^{(k)} < \cdots < \xi_{2m}^{(k)} \quad \text{with } 2m = k$$

现在考虑 U_{k+1}，根据交错性质，我们有

$$\xi_1^{(k+1)} < \xi_1^k < \ldots < \xi_m^{(k+1)} < \xi_m^{(k)} < 0,$$

这表明至少有 m 个根为负。再次根据交错性质，必有$\xi_{m+1}^{(k+1)} \in (\xi_m^{(k)}, \xi_{m+1}^{(k)})$。我们需要证明 $\xi_{m+1}^{(k+1)} > 0$。
我们区分两种情形：

- $\boxed{U_k(0) > 0}$. Then it must be $U'_k(\xi_{m+1}^{(k)}) < 0$, which implies by (10) that $U_{k+1}(\xi_{m+1}^{(k)}) > 0$. Since k is even, by Proposition 3, $\operatorname{sgn}(U_{k+1}(0)) = -\operatorname{sgn}(U_k(0)) = -1$, and, therefore, $U_{k+1}(\xi_{m+1}^{(k)}) > 0$ implies that $\xi_{m+1}^{(k+1)} \in (0, \xi_{m+1}^{(k)})$, as desired.
- $\boxed{U_k(0) < 0}$. Then it must be $U'_k(\xi_{m+1}^{(k)}) > 0$, which implies by (10) that $U_{k+1}(\xi_{m+1}^{(k)}) < 0$. Since k is even, by Proposition 3, $\operatorname{sgn}(U_{k+1}(0)) = -\operatorname{sgn}(U_k(0)) = +1$, and, therefore, $U_{k+1}(\xi_{m+1}^{(k)}) < 0$ implies, again, $\xi_{m+1}^{(k+1)} \in (0, \xi_{m+1}^{(k)})$, as desired.

尚需证明 U_{k+2} 有 $m+1$ 个负零点和 $m+1$ 个正零点，具体而言，即 $\xi_{m+1}^{(k+2)} < 0$.推理如前：

- $\boxed{U_{k+1}(0) > 0}$。则必有 $U'_{k+1}(\xi_{(k+1)\ m+1}) > 0 \implies U_{k+2}(\xi_{(k)\ m+1}) < 0$。由于 $k+1$ 为奇数，由命题3，$\operatorname{sgn}(U_{k+2}(0)) = \operatorname{sgn}(U_{k+1}(0)) = +1$，因此， $U_{k+2}(\xi_{(k+1)\ m+1}) < 0$ 蕴含 $\xi_{(k+2)\ m+1} \in (\xi_{(k+1)\ m+1}, 0)$，即为所求。
- $\boxed{U_{k+1}(0) < 0}$。因此必有 $U'_{k+1}(\xi_{(k+1)\ m+1}) < 0 \implies U_{k+2}(\xi_{(k)\ m+1}) > 0$。由于 $\operatorname{sgn}(U_{k+2}(0)) = \operatorname{sgn}(U_{k+1}(0)) = -1$，因此 $U_{k+2}(\xi_{(k+1)\ m+1}) > 0$ 意味着 $\xi_{(k+2)\ m+1} \in (\xi_{(k+1)\ m+1}, 0)$，如所需。

□

现在我们可以将多项式的极端零点 U_k 与N预条件矩阵的特征值联系起来。根据定理1 ，这些特征值位于$\bigcup \mathcal{I}_{k+1}$中。下面的结果将$k=0$更精确地刻画这个集合。

定理 2。

$$\bigcup_{k=0}^{N} \mathcal{I}_{k+1} = [\xi_{-,LB}^{(N+1)},\ b_{N+1}] \cup [a_{N+1},\ \xi_{+,UB}^{(N+1)}], \tag{11}$$

其中

$$b_{N+1} = \max\{\xi_{-,UB}^{(k)},\ 0 \le k \le N,\ k \text{ even}\} \tag{12}$$

$$a_{N+1} = \min\{\xi_{+,LB}^{(k)},\ 0 \le k \le N,\ k \text{ odd}\}. \tag{13}$$

证明。 根据定理 1， $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 的特征值包含于区间 $\mathcal{I}_k$的并集中，这些区间由序列（4）中多项式的根所定义。根据引理 3， U_{k+1} 和 U_k的根严格交错

$$\xi_1^{(k+1)} < \xi_1^{(k)} < \xi_2^{(k-1)} < \cdots < \xi_k^{(k-1)} < \xi_k^{(k)} < \xi_{k+1}^{(k+1)}$$

因此

$$\xi_{-,LB}^{(N+1)} < \ldots < \xi_{-,LB}^{(k+1)} < \xi_{-,LB}^{(k)} \quad \text{and} \quad \xi_{+,UB}^{(N+1)} > \ldots > \xi_{+,UB}^{(k+1)} > \xi_{+,UB}^{(k)}$$

这表明，极值负根界和正根界随 k单调增加。接下来需要推导负上界和正下界，同时考虑命题3的证明。

- 考虑正特征值的下界。若 k 为奇数，则 $\xi_{(k+1)\ +,LB} > \xi_{(k)\ +,LB}$，这意味着

$$\min_{1\le k\le N+1} \xi_{+,LB}^{(k)} = \min_{1\le k\le N+1,\ k \text{ odd}} \xi_{+,LB}^{(k)}.$$

- 考虑负特征值的上界。若 k 为偶数，则 $\xi_{(k+1)\ -,UB} < \xi_{(k)\ -,UB}$，这意味着

$$\max_{1\le k\le N+1} \xi_{-,UB}^{(k)} = \max_{1\le k\le N+1,\ k \text{ 偶数}} \xi_{+,LB}^{(k)}.$$

综上所述，我们得到式（12）和（13）中的上界。 □

现在的问题是：参数 $\gamma_E^{(i)}, \gamma_R^{(i)}$ 取何值时，根达到极值？为了说明序列 $U_k(\lambda, \boldsymbol{\gamma})$ 中多项式的根如何随参数变化，我们考虑一个参数向量 $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$和一个多项式 $q(\lambda(\boldsymbol{\gamma})\ \boldsymbol{\gamma})$。在根 $\lambda(\boldsymbol{\gamma}^*) \equiv \lambda^*$处， $q(\lambda(\boldsymbol{\gamma})\ \boldsymbol{\gamma})$ 满足

$$q(\lambda(\boldsymbol{\gamma}), \boldsymbol{\gamma}) = 0. \tag{14}$$

隐函数定理保证存在 $\boldsymbol{\gamma}^*$ 的一个邻域 $V \in \mathbb{R}^d$ 以及一个连续可微函数 $\lambda : V \to \mathbb{R}$ ，使得

$$\frac{\partial q(\lambda(\boldsymbol{\gamma}))}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial q}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \gamma_j}$$

刚刚证明的交错性质确保，对于参数的任意组合，序列中的所有多项式 U_k 的根都是单根，因此 $\dfrac{\partial U_k}{\partial \lambda}(\lambda(\boldsymbol{\gamma}^*)\ \boldsymbol{\gamma}^*) \neq 0$，我们有

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_j}(\boldsymbol{\gamma}^*) = -\frac{\partial U_k}{\partial \gamma_j}(\boldsymbol{\gamma}^*) \Big/ \frac{\partial U_k}{\partial \lambda}(\lambda(\boldsymbol{\gamma}^*), \boldsymbol{\gamma}^*) \quad \text{for all } j = 1, \ldots, d. \tag{15}$$

为刻画根关于参数的单调性，我们将利用前述结果来证明

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_j}(\boldsymbol{\gamma}^*)\right) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \gamma_j}(\boldsymbol{\gamma}^*)\right) \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial U_k}{\partial \lambda}(\lambda(\boldsymbol{\gamma}^*), \boldsymbol{\gamma}^*)\right). \tag{16}$$

下面的引理将使我们能够断言， $U_{k+1}(\lambda,\boldsymbol{\gamma}_E,\boldsymbol{\gamma}_R)$的零点的极值在 $\boldsymbol{\gamma}_E$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_R$的极值处取得，即 $\{\alpha_E^{(k)},\beta_E^{(k)}$； $\alpha_R^{(k)},\beta_R^{(k)}\}$。

引理4. 设 ξ 是 U_{k+1} 和 $\gamma_E^{(j)}\in[\alpha_E^{(j)},\beta_R^{(j)}]$的零点，且 $\gamma_R^{(j)}\in[\alpha_R^{(j)},\beta_R^{(j)}]$（对于 $j\le k$）。那么，要么 $\dfrac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_E^{(j)}}(\xi)\neq 0$（分别为 $\dfrac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_R^{(j)}}(\xi)\neq 0$），要么 ξ 与 $\gamma_E^{(j)}$（分别与 $\gamma_R^{(j)}$）无关。

证明. 由于 U_{k+1} 对 $\gamma_*^{(j)}$, $j\le k$ 的依赖是线性的，存在适当的多项式 $r_1(x,\boldsymbol{\gamma})$,$r_2(x,\boldsymbol{\gamma})$，它们与 $\gamma_*^{(j)}$无关，使得

$$U_{k+1}(x,\boldsymbol{\gamma})=\gamma_*^{(j)}r_1(x,\boldsymbol{\gamma})+r_2(x,\boldsymbol{\gamma}).$$

于是，

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_j}(\xi,\boldsymbol{\gamma})=r_1(\xi,\boldsymbol{\gamma}).$$

若 $r_1(\xi,\boldsymbol{\gamma})=0$，则 $0=U_{k+1}(\xi,\boldsymbol{\gamma})=r_2(\xi,\boldsymbol{\gamma})$。此时， ξ同时是 $r_1(\xi,\boldsymbol{\gamma})$ 和$r_2(\xi,\boldsymbol{\gamma})$ 的根，它们均不依赖于 $\gamma_*(j)$，这意味着该根的值与 $\gamma_*^{(j)}$无关。□

此时，我们已经初步回答了如何界定 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 的特征值这一问题。只需针对2所描述的多项式，在 $\gamma_E^{(k)}\in\{\alpha_E^{(k)},\ \beta_E^{(k)}\}$、 $\gamma_R^{(k)}\in\{\alpha_R^{(k)},\ \beta_R^{(k)}\}$、 $k=1$、 $\dots N$的每种组合下，求出其极值零点即可。

下一节将进一步探讨给定零点 ξ 关于 γ 参数的单调性。这将使我们能够降低算法的复杂度。

4. How zeros of $\{U_k\}$ move depending on $\gamma_E^{(j)},\gamma_R^{(j)}$

考虑多项式序列 (4)，并固定一个指标 $0\le m\le k$。对于每个 $k\ge 0$，当 ξ 是 U_{k+1}的零点时，我们可以刻画 $U_{k+1}(\xi)$ 关于 $\gamma_E^{(m)}$、 $\gamma_R^{(m)}$ 的导数。

引理5。 设 ξ 是 $U_{k+1}(\lambda)$ 的根。那么，对于 $m\le k$,

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_E^{(m)}}(\xi)=(-1)^{m+1}\frac{(U_m(\xi))^2}{U_k(\xi)}\prod_{i=m+1}^{k}\gamma_R^{(i)}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_R^{(m)}}(\xi)=-\frac{U_m(\xi)U_{m-1}(\xi)}{U_k(\xi)}\prod_{i=m+1}^{k}\gamma_R^{(i)}. \tag{18}$$

证明。 若 $m=k$ 我们直接根据（4）计算，

$$\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_E^{(k)}}(\lambda)=(-1)^{k+1}U_k(\lambda),\qquad \frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_R^{(k)}}(\lambda)=-U_{k-1}(\lambda), \tag{19}$$

若 $m=k$，则对应于（17）和（18）。现在令 $m<k$，为简洁起见，我们用 $U'_{k,\ m}$ 表示$\partial U_{k+1}(\xi)$ $\partial\gamma_E^{(m)}$ 和$\partial U_{k+1}(\xi)$ $\partial\gamma_R^{(m)}$，因为这两个序列满足相同的递推关系（对 $k>m$）：

$$U'_{k+1,m}(\xi)=\underbrace{\left(\xi+(-1)^{k+1}\gamma_E^{(k)}\right)}_{\eta_k}U'_{k,m}(\xi)-\gamma_R^{(k)}U'_{k-1,m}(\xi)\equiv\eta_kU'_{k,m}(\xi)-\gamma_R^{(k)}U'_{k-1,m}(\xi), \tag{20}$$

仅在 起始点（19）不同，该点由 k得到 $=m$.
根据 η_k 先前的定义，我们可以将根 ξ 处的 U_{k+1} 递推关系（4）改写为

$$0=U_{k+1}(\xi)=\eta_kU_k(\xi)-\gamma_R^{(k)}U_{k-1}(\xi)\quad\Longrightarrow\quad\eta_k=\gamma_R^{(k)}\frac{U_{k-1}(\xi)}{U_k(\xi)}$$

因此（20）变为

$$U'_{k+1,m}(\xi)=\frac{\gamma_R^{(k)}}{U_k(\xi)}\underbrace{\left[U_{k-1}(\xi)U'_{k,m}(\xi)-U_k(\xi)U'_{k-1,m}(\xi)\right]}_{W_k(\xi)}\equiv\frac{\gamma_R^{(k)}}{U_k(\xi)}W_k(\xi). \tag{21}$$

现在，对于 $m+1 \le s \le k$，我们将 $W_{s+1}(\xi)$ 改写为关于 $W_s(\xi)$ 的形式。

$$\begin{aligned} W_{s+1}(\xi) &= U_s(\xi)U'_{s+1,m}(\xi) - U_{s+1}(\xi)U_{s,m}(\xi) \\ &= U_s(\xi)\left(\eta_s U'_{s,m}(\xi) - \gamma_R^{(s)} U'_{s-1,m}(\xi)\right) - U_{s+1}(\xi)U'_{s,m}(\xi) \\ &= U'_{s,m}(\xi)\left(\eta_s U_s(\xi) - U_{s+1}(\xi)\right) - \gamma_R^{(s)} U_s(\xi)U'_{s-1,m}(\xi) \\ &= \gamma_R^{(s)}\left(U_{s-1}U'_{s,m}(\xi) - U_s(\xi)U'_{s-1,m}(\xi)\right) = \gamma_R^{(s)} W_s(\xi). \end{aligned}$$

由归纳法可得

$$W_k(\xi) = \gamma_R^{(k-1)}\gamma_R^{(k-2)}\ldots\gamma_R^{(m+1)} W_{m+1}(\xi).$$

为计算 $W_k(\xi)$，现在可以计算 $W_{m+1}(\xi)$，此时区分导数分别关于 $\gamma_E^{(m)}$ 或 $\gamma_R^{(m)}$ 求得的情形。注意，我们可以利用（$\partial U_{m+1}(\xi)\ \partial\gamma_E^{(m)}$，$\partial U_{m+1}(\xi)\ \partial\gamma_R^{(m)}$，19）和 $k=m$ 计算$\partial U_m(\xi)\ \partial\gamma_*^{(m)} = 0$，因为多项式 U_m 不依赖于 $\gamma_*^{(m)}$:

$$W_{m+1}(\xi) = U_m(\xi)\frac{\partial U_{m+1}(\xi)}{\partial\gamma_E^{(m)}} - U_{m+1}(\xi)\frac{\partial U_m(\xi)}{\partial\gamma_E^{(m)}} = (-1)^{m+1}U_m(\xi)^2 \tag{22}$$

$$W_{m+1}(\xi) = U_m(\xi)\frac{\partial U_{m+1}(\xi)}{\partial\gamma_R^{(m)}} - U_{m+1}(\xi)\frac{\partial U_m(\xi)}{\partial\gamma_R^{(m)}} = -U_{m-1}(\xi)U_m(\xi). \tag{23}$$

将（22）或（23）与（21）结合，即得结论。 □

现在考虑 $a_{k+1}(\lambda)$，其定义见（12），并在 $\xi^{(k+1)}$ 的一个根 U_{k+1}处计算

$$0 < a_{k+1}(\xi^{(k+1)}) = U_k(\xi^{(k+1)})U'_{k+1}(\xi^{(k+1)})$$

可得 $U_k(\xi^{(k+1)})$ 与 $U'_{(k+1)}(\xi^{(k+1)})$ 的符号相同。现在将（16）与（17）和（18）结合，在一个根 $\xi^{(k+1)}$ 处，我们得到，

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_E^{(m)}}(\xi^{(k+1)})\right) &= -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_E^{(m)}}(\xi^{(k+1)})\right)\operatorname{sgn}(U'_{k+1}(\xi^{(k+1)})) \\ &= (-1)^m \operatorname{sgn}(U_k(\xi^{(k+1)}))\operatorname{sgn}\left(U'_{k+1}(\xi^{(k+1)})\right) \\ &= (-1)^m \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_R^{(m)}}(\xi^{(k+1)})\right) &= -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial U_{k+1}}{\partial\gamma_R^{(m)}}(\xi^{(k+1)})\right)\operatorname{sgn}(U'_{k+1}(\xi^{(k+1)})) \\ &= \operatorname{sgn}\left(U_m(\xi^{(k+1)})U_{m-1}(\xi^{(k+1)})\right)\operatorname{sgn}(U_k(\xi^{(k+1)}))\operatorname{sgn}\left(U'_{k+1}(\xi^{(k+1)})\right) \\ &= \operatorname{sgn}\left(U_m(\xi^{(k+1)})U_{m-1}(\xi^{(k+1)})\right). \end{aligned} \tag{25}$$

d 的符号　关于 $\gamma_R^{(m)}$ 的导数 λ 需要进一步检查 $U_m(\xi^{(k+1)})U_{m-1}(\xi^{(k+1)}$ 的符号).

引理 6. 设 $\xi^{(k+1)}$ 是 $U_{k+1}(\lambda)$ 的一个根，且 $C_s = U_s(\xi^{(k+1)})U_{s-1}(\xi^{(k+1)})$ 则

$$\operatorname{sgn}(C_s)\begin{cases} <0 & if \quad \xi^{(k+1)} = \xi_1^{(k+1)} \\ >0 & if \quad \xi^{(k+1)} = \xi_{k+1}^{(k+1)}. \end{cases} \tag{26}$$

证明。为证明不等式（26）中的第一个不等式，我们注意到，由于 $\xi_{k+1}^{k+1} > \xi_j^{k+1}$ 对所有 $j \le k$ 均成立，根据命题1，$U_s(\xi_{UB}^{k+1}, +)$ 与 $U_{s-1}(\xi_{UB}^{k+1}, +)$ 符号相同。第二个不等式可由观察到 $\xi_1^{k+1} < \xi_j^{k+1}$ 对所有 $j \le k$ 均成立而得出；命题 1 还意味着 $U_s(\xi_{LB}^{k+1}, -)$ 和 $U_{s-1}(\xi_{LB}^{k+1}, -)$ 符号相反。

□

为了得到负根的上界和正根的下界，无法在所有情形下预测 $U_m(\xi^{(k+1)})U_{m-1}(\xi^{(k+1)})$ 的符号，因而也无法预测给定多项式次数 $k+1$ 下这些根的单调性。然而，我们记得，我们的目标是求预条件矩阵特征值的界，从而计算区间的端点

在（11）中。为此，用 j表示使得 $\xi^{(j)}$ =最大$\{\xi^{(i)}_{-,UB},\ i=2,4,\ldots,i\le N+1\}$ 的指标。在此情形下，对任意 $m<j$，多项式 U_m（$\xi^{(j)}$）与 U_{m-1}（$\xi^{(j)}$）必须分别与 U_m（0）和U_{m-1}（0）同号。鉴于命题2 我们有

$$\operatorname{sgn}(U_m(0)U_{m-1}(0))=\operatorname{sgn}(U_m(\xi^{(j)})U_{m-1}(\xi^{(j)}))=(-1)^m.$$

对于多项式 $U_j(\lambda)$，若其中的 j 满足 $\xi^{(j)}$ = min$\{\xi^{(i)}_{+,LB},\ i$ =1，3，...，$i\le N+1\}$，则结论同样成立。

5. Bounds for the eigenvalues of the preconditioned matrix

总结本节的结果，我们现在可以描述一种计算区间 (11的方法，以界定 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 所具有的 $N+1$ 块的特征值:

- **负特征值的下界**。该下界由多项式 $U_{N+1}(\lambda)$的最小零点给出。关于参数的选择，这由根对两者的导数符号决定，因为我们要使根最小。具体而言，对于 γ_E 参数，导数的符号为 $(-1)^m$，由此得到取值 $\alpha_{(0)\,E}$，$\beta_{(1)\,E}$，$\alpha_{(2)\,E}$，...。根据引理 6，根对 γ_R参数的导数为负；鉴于我们要求最小值，由此得到取值$\beta_{(1)\,R}$，$\beta_{(2)\,R}$，...，$\beta_{(N)\,R}$。

- 负特征值的上界。我们应考虑求出所有多项式 $U_{2i},1\le 2i\le N+1$ 的最大负特征值。参数的选择取决于根相对于两者的导数符号。根相对于 $\gamma_{(m)\,E}$ 和 $\gamma_{(m)\,R}$ 的导数符号为 $(-1)^m$。结合我们需要使零点最大化这一事实，可得此情形下参数的正确选择为：$\beta_{(0)\,E},\alpha_{(1)\,E},\beta_{(2)\,E},\ldots$；$\alpha_{(1)\,R},\beta_{(2)\,R},\alpha_{(3)\,R},\ldots$. 将此根记为 $\xi_{(2i)\,-}$。最后，令

$$b_{N+1}=\max\{\xi^{(2i)}_{-},\ 1\le 2i\le N+1\}.$$

- 正特征值的下界。我们应考虑求出所有多项式 $U_{2i+1},0\le 2i\le N$ 的最小正特征值。与前面一样，根相对于 $\gamma_{(m)\,E}$ 和 $\gamma_{(m)\,R}$ 的导数符号为 $(-1)^m$。结合我们需要使零点最小化这一事实，可得此情形下参数的正确选择为：$\alpha_{(0)\,E},\beta_{(1)\,E},\alpha_{(2)\,E},\ldots$；$\beta_{(1)\,R},\alpha_{(2)\,R},\beta_{(3)\,R},\ldots$ 将此根记为 $\xi_{(2i+1)\,+}$。最后，令

$$a_{N+1}=\min\{\xi^{(2i+1)}_{+},\ 0\le 2i\le N\}.$$

- **正特征值的上界**。该上界由多项式 $U_{N+1}(\lambda)$ 的最大根给出。对于 γ_E 参数，导数的符号为 $(-1)^m$，由此得到数值 $\beta_{(0)\,E}$，$\alpha_{(1)\,E}$，$\beta_{(2)\,E}$，...。根据引理 6，根关于 γ_R参数的导数为正；考虑到我们要寻找最大值，因此得到数值$\beta_{(1)\,R}$，$\beta_{(2)\,R}$，...，$\beta_{(N)\,R}$。

总而言之，即使参数极值的可能组合为 2^{2N+1}，我们仍得到了一个线性算法：只需针对一种参数组合计算二次，...，N次多项式的零点，并对U_{N+1}计算零点四次，每次使用不同的参数组合。

注释 1. 关于双重鞍点线性系统，我们按照第 *4* 节中的推导给出界，这些界与 *[9]*中已经证明的结果一致。考虑分块矩阵 $\mathcal{A}$，其中$N=2$ （三个块）。任意特征值 λ （属于 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ ）满足

$$\lambda\in[\mu^{LB}_{-},\ \mu^{UB}_{-}]\cup[\mu^{LB}_{+},\ \mu^{UB}_{+}] \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mu^{LB}_{-} &= \xi^{(3)}_{LB,-}(\alpha^{(0)}_E,\beta^{(1)}_E,\beta^{(1)}_R,\alpha^{(2)}_E,\beta^{(2)}_R),\\
\mu^{UB}_{-} &= \xi^{(2)}_{UB,-}(\beta^{(0)}_E,\alpha^{(1)}_E,\alpha^{(1)}_R),\\
\mu^{LB}_{+} &= \min\left\{\alpha^{(0)}_E,\xi^{(3)}_{LB,+}(\alpha^{(0)}_E,\beta^{(1)}_E,\beta^{(1)}_R,\alpha^{(2)}_E,\alpha^{(2)}_R)\right\},\\
\mu^{UB}_{+} &= \xi^{(3)}_{UB,+}(\beta^{(0)}_E,\alpha^{(1)}_E,\beta^{(1)}_R,\beta^{(2)}_E,\beta^{(2)}_R).
\end{aligned} \tag{28}$$

6. Numerical experiments: Randomly-generated matrices.

我们现在进行数值测试，以验证定理5的理论界。我们确定 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 在随机生成的线性系统上的极端特征值。具体而言，我们考虑了一个简化情形，取 $E_i \equiv 0,\ i > 0$ ，并运行了若干不同的测试案例，结合所涉及的对称正定矩阵的极端特征值（表1）的取值。特别地

- 案例 $N = 2$。我们有 3 个参数，对应区间有 6 个不同的端点。总共进行了 $3^6 = 729$ 个测试案例。
- 案例 $N = 3$。我们有 4 个参数，对应区间有 4 个不同的端点。总共进行了 $4^4 = 256$ 个测试案例。
- 案例 $N = 4$。我们有 5 个参数，对应区间有 4 个不同的端点。总共进行了 $5^4 = 1024$ 个测试案例。

$\alpha_E^{(0)},\ \alpha_R^{(1)},\ \alpha_R^{(2)}$	0.1	0.3	0.9	$\alpha_E^{(0)},\ \alpha_R^{(1)},\ldots\alpha_R^{(N)}$	0.1	0.9
$\beta_E^{(0)},\ \beta_R^{(1)},\ \beta_R^{(2)}$	1.2	1.8	5	$\beta_E^{(0)},\ \beta_R^{(1)},\ldots\beta_R^{(N)}$	1.2	5
案例 $N = 2$				案例 $N > 2$		

Table 1. 用于验证界的相关对称正定矩阵的极端特征值。

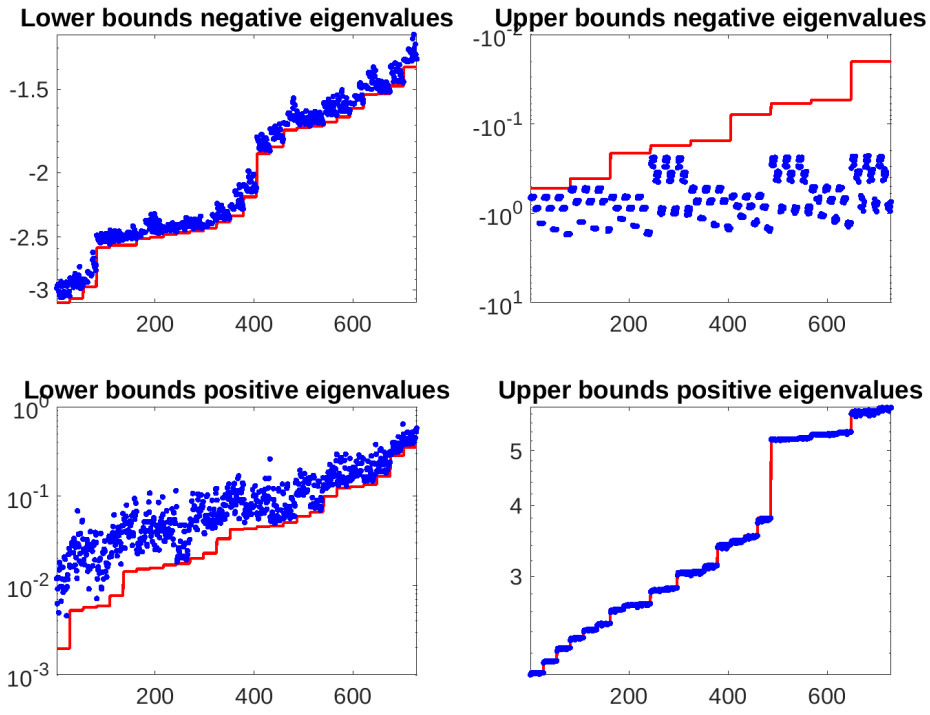

Figure 1. 双重鞍点线性系统。预处理矩阵的极端特征值（蓝点）以及在每种参数组合下运行 10 次后得到的界（红线），参数组合取自表1。

每个测试案例均运行 10 次，生成满足相关谱性质的随机矩阵，并记录每个测试案例中最极端的特征值。

更具体地说，维度 $n_0, n_1, \ldots$ 是通过取最接近 $50 + 10 * \text{rand}$ 的整数来计算的，并使用 MatLab 的 rand函数，必要时重新计算，以确保 $n_k \geq n_{k+1}, \forall k \leq N-1$。矩阵$A_k$ 和 B_k 使用 MATLAB 的 randn函数计算，随后取 A_k的对称部分，再加上单位矩阵乘以最小特征值的绝对值，以确保对称

$\widehat{}$半正定性（当 $k=0$ 时为正定性）。接着，我们将 S_0 选为 A与单位矩阵的线性组合，使得 E_0 的特征值包含于 $[\alpha_E^{(0)}, \beta_E^{(0)}]$中，并以类似方式构造$\frown S_k$，适用于任意 k。

在图 1、2 和 3中，我们给出了计算得到的（按序排列的）极端特征值，以及 $N=2$、3 和 $N=4$ 案例的理论界。我们注意到，图中显示（对于这些问题），四个界中有三个能很好地刻画特征值的变化趋势；而负特征值的上界（对于 $N=2$、4）和正特征值的下界（$N=3$）则不够紧。

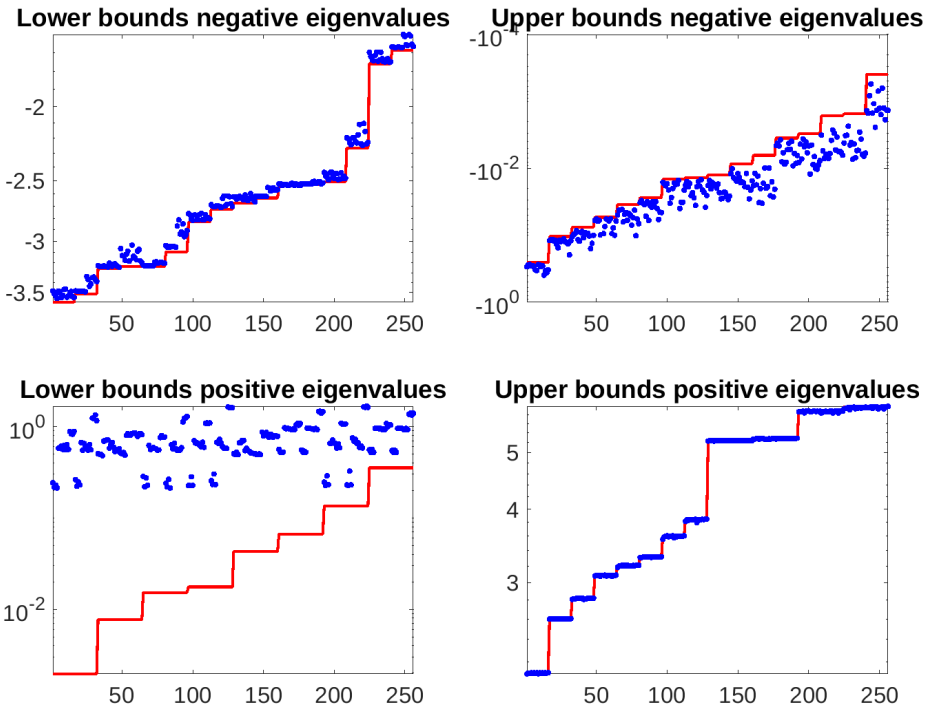

FIGURE 2. 三重鞍点线性系统。每种参数组合（见表1）运行10次后，预条件矩阵的极端特征值（蓝点）和界（红线）。

7. NUMERICAL EXPERIMENTS: A REALISTIC TEST CASE

通过一项关于Biot孔弹性方程混合形式的数值实验，研究预条件矩阵特征值界的准确性，以及所提出的三角预处理子的有效性，并在实际问题中进行检验。关于该模型所遵循的偏微分方程和边界条件，请参见 [8]中的描述。我们选取 [24]最初提出、并已用于 [16]的多孔悬臂梁问题作为实验的参考测试案例。计算域为单位立方体，所有侧面均采用无流边界条件，左边缘位移为零，顶部施加均匀载荷。材料属性见 [8, 表5。1]。我们采用耦合Biot方程的混合杂交有限元离散，由此得到一个双重鞍点线性系统。该测试案例采用单位立方体计算域，并在所有空间维度上以 $h=0.05$ 网格尺寸进行均匀离散。双重鞍点系统的块矩阵规模和非零元总数列于表2。

7.1. 处理这种情况 $n_2 > n_1$。此前建立的理论基于假设 $n_0 \geq n_1 \geq n_2 \ldots$，而在本问题中该假设并不成立，因为 $n_2 = 25200 > n_1 = 8000$。其主要后果是 $R_2 R_2^\top$ 为奇异矩阵，且 $\gamma_R^{(2)} = 0$。可以通过处理以下问题来克服这一缺陷：

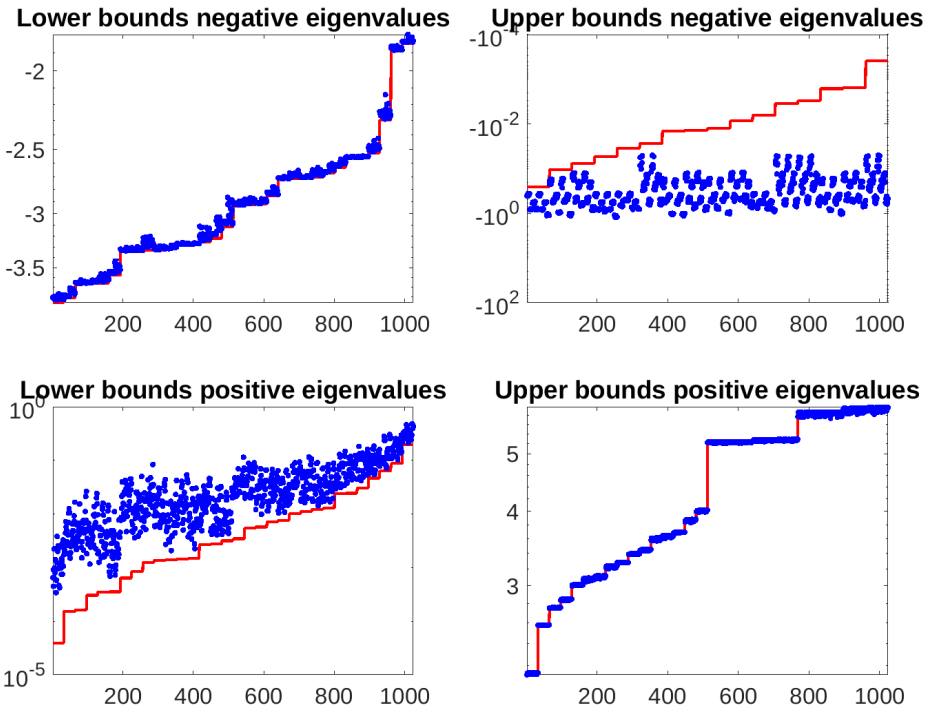

FIGURE 3. 四重鞍点线性系统。使用表中每种参数组合进行 10 次运行后，预条件矩阵的极端特征值（蓝点）和界（红线）1。

TABLE 2. 3D 单位立方体上的悬臂梁问题：测试矩阵的规模和非零元数量。

$1/h$	n_0	n_1	n_2	$n_0+n_1+n_2$	nonzeros
20	27783	8000	25200	60983	2.4×10^6

特征值值问题（2）的另一种处理方式。将（2）写成双重鞍点线性系统 :

$$\begin{array}{ccccccc} (E_0-\lambda I)u_1 & + & R_1^T u_2 & = & 0 & & \\ R_1 u_1 & + & -(E_1+\lambda I)u_2 & + & R_2^T u_3 & = & 0 \\ & & R_2 u_2 & + & (E_2-\lambda I)u_3 & = & 0. \end{array} \tag{29}$$

与定理 1 的证明中一样，对于所有 $\lambda \notin [\alpha_E^{(0)}, \beta_E^{(0)}]$

$$(R_1 Y_1(\lambda)^{-1} R_1^T - \lambda I - E_1)u_2 = R_2^T u_3. \tag{30}$$

现在假设 $\lambda \notin [\alpha_E^{(2)}, \beta_E^{(2)}]$，由（ u_3 29）式的第三个等式可得

$$u_3 = -(E_2-\lambda I)^{-1} R_2 u_2.$$

将其代入（30）可得

$$\left(R_1 Y_1(\lambda)^{-1} R_1^T - \lambda I - E_1 + R_2^\top (E_2-\lambda I)^{-1} R_2\right) u_2 = 0.$$

现在在左侧乘以 $u_2^\top$，并定义 $w = R_1^\top u_2$ 和 $z = R_2 u_2$，可得

$$\frac{w^\top Y_1(\lambda)^{-1} w}{w^\top w}\gamma_R^{(1)} - \lambda - \gamma_E^{(1)} + \frac{z^\top (E_2-\lambda I)^{-1} z}{z^\top z}\overline{\gamma}_R^{(2)} = 0.$$

在继续之前，我们注意到 $\gamma_R^{(2)}$ 与定义（3）不同，是 $R_2^\top R_2$的瑞利商。由于 R_2 列满秩，因此我们可以将 $\gamma_R^{(2)}$ 界定为 $0 < \alpha_R^{(2)} \le \gamma_R^{(2)} \le \beta_R^{(2)}$. 因此，接下来我们将 $\gamma_R^{(2)}$ 简称为 $\gamma_R^{(2)}$。将引理 2 应用于 Y_1，将引理 1 应用于 $E_2 - \lambda I$，并且

利用递推关系定义（4），我们将前一式的左端改写为

$$-\frac{U_2(\lambda)}{U_1(\lambda)}+\frac{1}{\gamma_E^{(2)}-\lambda}\gamma_R^{(2)}=\frac{U_3(\lambda)}{U_1(\lambda)(\lambda-\gamma_E^{(2)})},$$

这表明，任何不属于 $[\alpha_E^{(0)},\beta_E^{(0)}]\cup[\alpha_E^{(2)},\beta_E^{(2)}]$ 的 $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{A}$ 特征值都是 $U_3(\lambda)$ 的零点，或者等价地，$\lambda\in\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_{E_2}\cup\mathcal{I}_3$。

为近似 (1,1) 块，我们采用经典的不完全 Cholesky 分解（IC），并通过^ ^基于丢弃容差的填充 δ。舒尔补的近似 S_1 和 S_2 如 [8], 所示，事实证明它们完全不受问题规模影响。尽管 IC 预条件子不随离散化参数缩放，但研究丢弃容差变化时的谱分析仍有帮助。

表 3 报告了三次运行的指标值，对应的阈值参数分别为 $\delta=10^{-3}$、10^{-4}、10^{-5}和 10^{-6}。结合这些参数，理论得到的界列于表 4，其中还给出了针对所述三个实例求解 $\mathcal{A}x=b$所需的最小残量法迭代次数。右端项通过设定全 1 为精确解来选取；当相对残差范数低于10^{-14}时，迭代即停止。CPU 时间（秒）对应于在一台配备 32 GB 随机存取存储器、主频为 3.8 GHz 的 Intel Core Ultra 7 165U 笔记本电脑上运行的 Matlab 实现。

	$\delta=10^{-3}$	$\delta=10^{-4}$	$\delta=10^{-5}$	$\delta=10^{-6}$
I_{E_0}	$[0.0099,\ 1.2358]$	$[0.0422,\ 1.2036]$	$[0.2563,\ 1.2232]$	$[0.9600,\ 1.0118]$
I_{E_1}	$[5\times10^{-4},\ 0.0889]$			
I_{E_2}	$[0.9976,\ 1.0001]$			
I_{R_1}	$[2\times10^{-4},\ 0.7790]$			
I_{R_2}	$[3\times10^{-5},\ 0.0023]$			

TABLE 3. 不同阈值参数 δ 下指标的极值。

		μ_-^{LB}	μ_-^{UB}	μ_+^{LB}	μ_+^{UB}	n_{it}	CPU
$\delta=10^{-3}$	界	-1.4308	-0.0012	0.0101	1.6958	248	1.63
	精确特征值	-1.0573	-0.3113	0.0108	1.4741		
$\delta=10^{-4}$	界	-1.4221	-0.0012	0.0424	1.6706	132	1.49
	精确特征值	-1.0573	-0.3113	0.0455	1.4787		
$\delta=10^{-5}$	界	-1.3693	-0.0012	0.2565	1.6859	83	2.06
	精确特征值	-1.0573	-0.3113	0.2691	1.4856		
$\delta=10^{-6}$	界	-1.2436	-0.0012	0.9601	1.5241	64	2.90
	精确特征值	-1.0573	-0.3113	0.9629	1.4843		

TABLE 4. 3单位立方体上的D形悬臂梁问题：特征值界与实际特征值。还给出了不同的(1，1)块近似 A下，最小残量法的迭代次数 n_{it} 以及迭代过程的CPU时间（秒）。

从表 4 可见：(i) 对(1，1)块近似的精度主要影响最小正特征值，而我们的界能够很好地捕捉该值；(ii) 总体而言，这些界能够正确描述极端特征值，唯一例外是最大负特征值，其界较为宽松，这一点在第6节中已有观察。

8. 结论

我们分析了将块对角近似舒尔补预条件子应用于对称多重鞍点系统时的谱界。该分析基于递归定义的多项式，其零点与所关注的特征值相一致。我们针对采用近似预处理器的情形，建立了谱的一般界。所得结果表明，理论预测与数值计算得到的特征值在合成测试案例中，以及在求解一个源自三维孔弹性方程建模偏微分方程离散化的实际问题时，

理论预测与在合成测试案例上数值计算的特征值，以及与求解一个源于对描述三维孔弹性方程的偏微分方程进行离散化的实际问题所得结果的一致性。

致谢。AM的工作是在欧盟下一代欧盟（PNRR——任务4组成部分2、投资1.5——第1058号法令，2022年6月23日，ECS 00000043）资助的iNEST（互联东北部创新生态系统）联盟PNRR研究活动框架内开展的。LB感谢PNRR研究活动提供的经费支持，该活动隶属于欧盟下一代欧盟资助的任务4、组成部分2、投资1.1——#2022AKNSE4 005（PE1），CUP C53D2300242000。本手稿仅反映作者的观点和意见，欧盟及欧盟委员会均不对其负责。LM和AM是INdAM研究组GNCS的成员。

References

[1] F. Bakrani Balani, L. Bergamaschi, A. Martínez, and M. Hajarian, *Some preconditioning techniques for a class of double saddle point problems* 31 2024 2551 , Numerical Linear Algebra with Applications, ( ), p. e . [2] F. Bakrani Balani, M. Hajarian, and L. Bergamaschi, *Two block preconditioners for a class of double saddle point linear systems* 190 2023 155 167 , Applied Numerical Mathematics, ( ), p. – . [3] A. Beigl, J. Sogn, and W. Zulehner, *Robust preconditioners for multiple saddle point problems and applications to optimal control problems* 41 2020 1590 1615 , SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, ( ), pp. – . [4] F. P. A. Beik and M. Benzi, *Iterative methods for double saddle point systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 39 (2018), pp. 902–921. [5] , *Preconditioning techniques for the coupled Stokes-Darcy problem: spectral and field-of-values analysis*, Numer. Math., 150 (2022), pp. 257–298. [6] L. Bergamaschi, *On eigenvalue distribution of constraint-preconditioned symmetric saddle point matrices*, Numer. Linear Algebra Appl., 19 (2012), pp. 754–772. [7] L. Bergamaschi and M. Bergamaschi, *Eigenvalue bounds for symmetric multiple saddle-point matrices with SPD preconditioners* 2026 , , ( ). 准备中。 [8] L. Bergamaschi, M. Ferronato, and A. Martínez, *Triangular preconditioners for double saddle point linear systems arising in the mixed form of poroelasticity equations* 47 2026 132 157 , SIAM J. Matrix Anal. Appl., ( ), pp. – . [9] L. Bergamaschi, A. Martinez, J. W. Pearson, and A. Potschka, *Spectral analysis of block preconditioners for double saddle-point linear systems with application to PDE-constrained optimization*, Computational Optimization with Applications, 91 (2024), pp. 423–455. [10] , *Eigenvalue bounds for preconditioned symmetric multiple saddle-point matrices*, Linear Algebra with Applications, (2026)。2026年1月16日在线发表。 [11] S. Bradley and C. Greif, *Eigenvalue bounds for double saddle-point systems*, IMA J. Numer. Anal., 43 (2023), pp. 3564–3592. [12] P. Chidyagwai, S. Ladenheim, and D. B. Szyld, *Constraint preconditioning for the coupled Stokes-Darcy system*, SIAM J. Sci. Comput., 38 (2016), pp. A668–A690. [13] M. Embree, *How descriptive are GMRES convergence bounds?*, 2022. arXiv:2209.01231 [math.NA]. [14] M. Ferronato, A. Franceschini, C. Janna, N. Castelletto, and H. Tchelepi, *A general preconditioning framework for coupled multi-physics problems* 398 2019 108887 , J. Comput. Phys., ( ), p. . [15] B. Fischer, *Polynomial based iteration methods for symmetric linear systems*, Wiley-Teubner 数值数学进展丛书, John Wiley & Sons, Ltd., 奇切斯特; B. G. Teubner, 斯图加特, 1996年。 [16] M. Frigo, N. Castelletto, M. Ferronato, and J. A. White, *Efficient solvers for hybridized three-field mixed finite element coupled poromechanics* 91 2021 36 52 , Computers and Mathematics with Applications, ( ), p. – . [17] A. Greenbaum, *Iterative methods for solving linear systems*, 应用数学前沿第17卷, 工业与应用数学学会（SIAM）, 费城, PA, 1997年。 [18] C. Greif, *A BFBt preconditioner for double saddle-point systems*, IMA《数值分析杂志》, (2026)。即将发表。 [19] C. Greif and Y. He, *Block preconditioners for the marker-and-cell discretization of the Stokes-Darcy equations*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, (2023), pp. 1540–1565. [20] D. Han and X. Yuan, *Local linear convergence of the alternating direction method of multipliers for quadratic programs* 51 2013 3446 3457 , SIAM J. Numer. Anal., ( ), pp. – . [21] C. C. Paige and M. A. Saunders, *Solution of sparse indefinite systems of linear equations*, SIAM J. on Numer. Anal., 12 (1975), pp. 617–629. [22] J. W. Pearson and A. Potschka, *Double saddle-point preconditioning for Krylov methods in the inexact sequential homotopy method* 31 2024 2553 , Numerical Linear Algebra with Applications, ( ), p. e . [23] , *On symmetric positive definite preconditioners for multiple saddle-point systems*, IMA J. Numer. Anal., 44 (2024), pp. 1731–1750. [24] P. J. Phillips and M. F. Wheeler, *Overcoming the problem of locking in linear elasticity and poroelasticity: A heuristic approach* 13 2009 5 12 , Computational Geosciences, ( ), pp. – . [25] A. Ramage and E. C. Gartland, *A preconditioned nullspace method for liquid crystal director modeling*, SIAM Journal on Scientific Computing, 35 (2013), pp. B226–B247. [26] S. Rhebergen, G. N. Wells, A. J. Wathen, and R. F. Katz, *Three-field block preconditioners for models of coupled magma/mantle dynamics* 37 2015 2270 2294 , SIAM J. Sci. Comput., ( ), pp. A –A .

[27] Y. Saad and M. H. Schultz, *GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems*, 《SIAM科学与统计计算杂志》, 7 (1986), pp. 856–869.

[28] J. Sogn and W. Zulehner, *Schur complement preconditioners for multiple saddle point problems of block tridiagonal form with application to optimization problems*, IMA《数值分析杂志》, 39 (2018), pp. 1328–1359.