arXiv:2602.05990v1 [math.CT] 5 Feb 2026

按群同态分次的范畴

Jonathan Davies

诺丁汉大学数学科学学院，University Park，诺丁汉 NG7 2RD，英国。

ppyjed@nottingham.ac.uk

我们将 Sözer 和 Virelizier 的 χ 分次范畴推广到群同态 τ。这些范畴中的态射和对象都具有相容的次数。我们给出了一个“半富化”的 Yoneda 引理、关于半单 τ 分次范畴的结构定理，以及另一种关于 τ 分次范畴的描述，即将其表示为取值于 $\mathbb{C}$at 的伪函子。

目录

1 引言 21.1 约定.4

2 按群同态分级的范畴 **4**

2.1 定义.4 2.2 Yoneda 引理.6 2.3 移位对象.9

3 S半单性 1 **0**

3.1 R-线性范畴的半单性回顾.10 3.2 τ-分级范畴的直和与可加性.12 3.3 τ-分级范畴的半单性.13 3.4 结构定理.16

4 R与模范畴的关系 **19**

4.1 H模范畴回顾.19 4 2 2 – $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ 20. 4 3 2 – • H-$\mathbb{M}$ $\mathbb{C}$ → $\mathbb{C}$ $H\langle\cdot\rangle$ 作为群作用的移位；函子 ( )[1] : at$^{H,\langle\cdot\rangle}$ → H-$\mathbb{M}$od at . . . . . 函子 ( ) : od at at, . 23 4 4 2 $\mathbb{C}$ $H\langle\cdot\rangle$ H-$\mathbb{M}$ $\mathbb{C}$ 27. at, 与od at之间的等价.4.5 $\mathbb{C}$at$_\tau^{\langle\cdot\rangle}$与 H-$\mathbb{M}od\mathbb{C}at_\tau$ 之间的2-等价.29

致谢 **30**

参考文献 **31**

日期： 2026年2月5日*2020*年数学主题分类： 18N10,18A50, 18D20关键词和短语：2-范畴、分次范畴、富集范畴、模范畴

1 引言

同伦量子场论（HQFT，参见 [TV12]）通过允许流形附带到某个固定目标空间的映射，推广了拓扑量子场论（TQFT）。著名的 Turaev-Viro 态和构造利用球面融合范畴构造三维拓扑量子场论，而近期的研究则将这一构造推广到了某些良好的目标空间上的同伦量子场论。扩展后的构造采用如下源范畴，其中 G 表示一个群， χ表示一个交叉模。

目标空间	三维态和构造的来源	参考文献
可缩的[1]	球面融合范畴	[电视92], [带宽96]
连通 1-型	G-分次球面融合范畴	[TV12]
连通 2-型	χ-分次球面融合范畴	[SV23]。

更多关于 χ-分次范畴的例子见 [SV25]。值得记住的是，根据同伦假设，连通同伦 n-型对应于 n-群，而连通 2-型可以用交叉模建模（参见 [Hau24] 的第 1.5 节）。交叉模是一个群同态，连同一个相容的群作用；但χ-分次范畴只将这一群作用用于幺半结构。

本文不考虑任何幺半结构，因此我们可以针对群同态 $\tau\colon H \to G$ 自由定义 τ-分次范畴（定义 2.1）。这里， H 为态射赋予次数， G 为对象赋予次数，因此普通的 G-分次范畴就是带有 $H = 1$ 的τ-分次范畴。当 $G = 1$ 时， τ-分次等同于对由 H-分次 R-模构成的幺半范畴 R-$\mathbf{Mod}_H$ 的富化（其中 R 是一个固定的非零交换环）。我们还引入了 τ-分次函子和自然变换，以定义由 τ-分次范畴构成的 2-范畴 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$ 。

标准的富化 Yoneda 引理（如 [Kel05] 中所述）要求富化底范畴具有对称编织结构，但除非 H 是阿贝尔范畴，否则 R-$\mathbf{Mod}_H$ 根本没有任何编织结构。因此，我们从头证明 Yoneda 型定理 2.9。对于 H 的每个元素，我们最终得到一个如下形式的 Yoneda 嵌入

$$\text{よ}^a_X\colon Y \mapsto \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}^{ha}(X, Y)\,,$$

“半富化”，使得每个 よ^a_X 都是 R-$\mathbf{Mod}_H$-富化的，而 $\text{よ}^a_{(-)}$ 只是 R-线性的。接着，我们定义移位对象，它们彼此表示这些嵌入。移位对象是 τ-分次范畴上的附加结构，但我们稍后将在推论 3.16 和命题 3.18 中证明，它们会自动存在于所有加性或半单的 τ-分次范畴中（因而也存在于 χ-分次融合范畴中）。移位对象提供了一种从其 1 次态射的视角观察整个 τ-分次范畴的方式，并将在本文余下部分中贯穿使用。

现在我们已经介绍了所有基本概念，第 3 节和第 4 节大体上相互独立。第 3 节讨论半单 τ-分次范畴这一特殊情形。我们回顾 [SV23] 中的定义，并给出一个以移位表述的等价定义。本节其余部分致力于建立一个结构定理，对半单 τ-分次范畴进行分类。在定义 3.23 中，我们定义了一类形如 $\mathcal{M}_\tau(L,\ \psi)\langle g\rangle$ 的不可分解半单 τ-分次范畴，其中 L 是 $\ker(\tau)$ 的子群，ψ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L,\ R^\times)$ 中的归一化 2-余循环，而 g 是 G 的一个元素。

[1]当目标空间可缩时，同伦量子场论与拓扑量子场论相同。

定理 A (定理 3.30)。 τ-分次范畴 $\mathcal{C}$ 是半单的，当且仅当存在一个 τ-分次等价

$$\mathcal{C} \simeq \coprod_{i\in I} \mathcal{M}_\tau(L_i, \psi_i)\langle g_i\rangle$$

对于某些子群 $L_i \leq \ker(\tau)$、2-余链 $\psi_i\colon\ H^2 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L_i, R^\times)$ 以及元素 $g_i \in G$，我们可以选择 $(g_i)_{i\in I}$ 作为一组简单对象代表元的次数。

定理 B (定理 3.33)。 每个 τ-分次等价

$$\mathcal{M}_\tau(L, \psi)\langle g\rangle \to \mathcal{M}_\tau(L', \psi')\langle g'\rangle$$

对应于群元素和规范化 1-余链的一个选择

$$t \in \tau^{-1}(gg'^{-1}) \qquad \gamma\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L, R^\times)$$

其中 $L = tL't^{-1}$ 和 $\psi = \psi'^t \cdot d\gamma$，记 $\psi'^t(a, b)(hL') = \psi'(a, b)(thL')$。自然同构态射 $F_{t,\gamma} \Rightarrow F_{s,\delta}$ 要求 $tL' = sL'$，并对应于 0-余链 $\eta\colon\ H/L \to R^\times$，其中 $\gamma = \delta \cdot d\eta$。

这两个定理都是通过构造显式的 τ-分次等价函子来证明的。我们还详细说明了如何构造群 L_i 和 2-余链 ψ_i。这些结果让人联想到 [Ost03] 以及 [Nat17]中关于半单模范畴的结果。还可以将这里对余链的使用，与 [BL04] 的定理 8.3.7 中对 2-群之间的函子和自然变换进行分类而使用的余链相比较。不过，在那种情况下，源和靶分别与两个不同的二元组 $(H, G) \to (H', G')$ 相关；而在这里，我们使用相同的群（由 τ 介导），并允许额外数据发生变化。

我们在第 4 节考察模范畴与 τ-分次范畴之间的关系。当一个 τ-分次范畴具有移位时，我们证明其 1 次态射子范畴成为一个 H-模范畴。[1] 在特殊情形 $G = 1$ 下，我们将其推广为 H-模范畴的 2-范畴与带移位的 τ-分次范畴的 2-范畴之间的一个 2-函子（定理 4.17）。

每个群同态都会诱导一个规范的群胚 $\mathcal{G}_\tau$，如例 2.4 所示。我们引入 τ-模范畴，它们是从 $\mathcal{G}_\tau$ 的离散范畴化到 $\mathbb{C}$at 的伪函子。在 $G \neq 1$ 的情形下，这些模范畴推广了 H-模范畴，而最终定理则通过推广定理 4.17 得出。

定理 C (定理 4.19)。 存在一个 2-等价

$$\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau^{(\cdot)} \simeq H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau\,,$$

其中 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau^{(\cdot)}$ 是带移位的 τ-分次范畴的 2-范畴，而 H-$\mathbb{M}$od$\mathbb{C}$at$_\tau$ 是 τ-模范畴的 2-范畴。

这进一步将半单 τ-分次范畴与 τ-模范畴之间的关系限制为一种 2-等价。当 $G = 1$ 时，该 2-等价精确地对应于定理 A 和定理 B，以及 [Ost03] 和 [Nat17]的结果。

当 $\chi = \tau$ 是交叉模时，我们 $\mathbb{C}$在χ 承认一种幺半 2-范畴结构，将 χ-分次幺半范畴表现为代数对象。我们将在后续论文中重点讨论这一点。

[1]此处与 [EGNO15], 中的定义一样， H-模范畴是一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$，并配有一个幺半函子 Disc(H) →Aut($\mathcal{C}$), 其中 Disc(H) H 被视为离散范畴。

1.1 约定

在此我们介绍一些将在全文中使用的约定与记号。我们固定一个非零交换环 R、任意群 G 与 H，以及一个群同态 $\tau\colon\ H \to G$。我们对富化范畴的约定来自 [Kel05], ，对2-范畴与伪函子的约定来自 [JY21] （特别地，我们将2-范畴视为严格双范畴）。

如果一个范畴 R是线性的，即它在范畴 R-Mod（由 R-模组成）上富化，我们就称其为 R线性范畴。集合 X 的 R-线性化是自由 R-模 RX，其元素是集合 X中元素的有限 R-线性组合。归纳地， n-范畴 $\mathcal{C}$ 的 R-线性化是范畴 $R\mathcal{C}$，它具有相同的对象，并且每个 $\mathrm{Hom}_{R\mathcal{C}}(X,Y)$ 都变为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$。

如果一个范畴 是加性的，即它在由阿贝尔群组成的范畴 Ab 上富化，并且具有所有有限直和，我们就称其为加性范畴。对于每个范畴 $\mathcal{C}$，我们都可以添加形式上的有限直和，得到加性完备化 $\mathcal{C}^{\oplus}$；如果 $\mathcal{C}$ 已经是加性范畴，那么就有 $\mathcal{C}^{\oplus} \simeq \mathcal{C}$。

对于任意 n-范畴 $\mathcal{C}$ （包括作为集合的 $n=0$），我们记

- $\mathbf{B}\mathcal{C}$ 表示去环化，也就是只有一个对象 $\bullet$ 的 $(n+1)$-范畴，其自同态范畴为 $\mathcal{C}$

- $\mathrm{Disc}(\mathcal{C})$ 表示离散范畴化，也就是将 $\mathcal{C}$ 视为一个仅含平凡 $(n+1)$-态射的 $(n+1)$-范畴。

在所有范畴中，我们都假设选择公理成立，这样便可以使用等价类的代表元，并且函子是等价当且仅当它们全忠实且本质满射。我们用双箭头（$\Rightarrow$）在线性文本中或

在 1-态射的图中表示 2-态射；除此之外，我们始终使用单箭头（$\to$）。我们用 $*$表示（沿 1-态射的）水平复合，用 $\circ$ 表示（沿对象的）垂直复合。

2 群同态分次的范畴

我们介绍由 τ 分次的范畴构成的 2-范畴 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$，以及若干重要的子 2-范畴和性质。我们在第 2.2 节证明 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$ 的 Yoneda 型引理，并在第 2.3 节介绍移位对象。移位对象将贯穿本文其余部分，成为核心概念。

2.1 定义

我们回顾 [SV23] 中 H-Hom-分次范畴和 G-分次范畴的定义。

- 若一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$ 是 H-Hom-分次 </style}的，则它是由范畴 R-Mod_H（即 H-分次 R-模的范畴）赋范的。也就是说，每个同态空间都是一个 H-分次 R-模，每个恒等态射都是次数为 1 的齐次元素，并且复合由 R-线性映射给出。我们记 $\mathcal{C}^1$ 为仅包含次数为 1 的态射的 R-线性子范畴；当且仅当 $X \cong Y$ 在 $\mathcal{C}^1$中时，我们记 $X \cong Y$ 在 $\mathcal{C}$ 中。

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \otimes_R \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z).$$

- 一个范畴 $\mathcal{D}$ 是 G-分次的，$_{g\in G}$ 如果存在彼此不相交的子范畴（$\mathcal{D}_g$），使得每个对象 $X \in \mathcal{D}$ 都具有一个分解 $\bigoplus_{g\in G} X_g$，且其中只有有限个非零分量$X_g \in \mathcal{D}_g$。

在这两种情形下，我们都用 $|\cdot|$ 表示将齐次对象或态射映射到其次数的映射。对于由 H-Hom-分次范畴构成的 2-范畴，我们记作 $\mathbb{C}\mathrm{at}^H$，遵循 [Kel05] 中关于富化范畴的标准构造；特别地，H-Hom-分次函子保持态射度，而 H-Hom-分次自然变换的分量的次数均为 1。对于 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D} \in \mathbb{C}\mathrm{at}^H$，我们还记作

$$\mathrm{Fun}^H(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{at}^H}(-,-) \qquad \mathrm{Nat}^H(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}^H(\mathcal{C},\mathcal{D})}(-,-)\,.$$

我们将 $\mathbb{C}$在$_G$ 处记作由 R-线性 G-分次范畴构成的 2-范畴，其中 1-态射保持对象次数。

在 [SV23], Sözer 和 Virelizier 定义了由交叉模分次的幺半范畴。交叉模是带有额外结构的群同态，而这种额外结构对于此类范畴中的幺半相干性是必要的。在本文中，我们不考虑任何幺半结构，因此只需在普通群同态上工作。下面关于 τ-分次范畴的定义正是这一推广。

定义 2.1。设 $\tau\colon H \to G$ 是一个群同态。若一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为 τ-分次：

1. $\mathcal{C}$ 是 H-Hom-分次的；2. $\mathcal{C}^1$ 是 G-分次的；3. 对于 $X \in \mathcal{C}_x$ 和 $Y \in \mathcal{C}_y$，有 $\mathrm{Hom}^h_{\mathcal{C}}(X,\ Y) = 0$，除非 $y = \tau(h)x$。

我们将 $\mathbb{C}$在$_\tau$ 处记作由 τ-分次范畴构成的 2-范畴，其中

- τ-分次函子是满足 $|FX| = |X|$ 的 H-Hom-分次函子，其中 X对所有齐次对象都成立。
- τ-分次自然变换是分量次数为 1 的 H-Hom-分次自然变换。

对于 $\mathcal{C}$，$\mathcal{D} \in \mathbb{C}$在$^\tau$处，我们也记作

$$\mathrm{Fun}_\tau(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau}(-,-) \qquad \mathrm{Nat}_\tau(-,-) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}_\tau(\mathcal{C},\mathcal{D})}(-,-)\,.$$

定义 2.2。我们将 $(-)^1$ 记作严格满射 2-函子 $\mathbb{C}$在$_\tau \twoheadrightarrow \mathbb{C}$处$_G$，它映射

- 每个 τ-分次范畴 $\mathcal{C}^1$ 到仅包含次数为 1 的态射的 R-线性子范畴 $\mathcal{C}^1$
- 1-和 2-态射映到相应的限制（分别记作 $F \mapsto F^1$ 和 $\eta \mapsto \eta^1$）。

注记 2.3。存在典范嵌入

$$\mathbb{C}\mathrm{at}_G \hookrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}_\tau \hookleftarrow \mathbb{C}\mathrm{at}^H\,.$$

在 $\mathbb{C}\mathrm{at}_G$ 中的嵌入只添加非平凡次数的零态射。2-函子 $(-)^1$ 提供了一个回缩；当 $H = 1$ 时，这给出一个 2-等价。另一方面，在 $\mathbb{C}\mathrm{at}^H$ 中的嵌入为每个对象赋予次数 1。通过遗忘对象次数可得到一个回缩；当 $G = 1$时，这给出一个 2-等价。

以下例子将在后续章节中频繁出现。例 2.4 和例 2.5 可由 [SV23]的例 4.4 和例 4.5 忘却幺半结构得到。例 2.6 是本文的新例子。

例 2.4. $R\mathcal{G}_\tau$。
每个群同态 $\tau\colon H \to G$ 都会诱导一个典范群胚 $\mathcal{G}_\tau$。对象是元素 $g \in G$，态射是对 $(h,\ g)$：$g \to \tau(h)g$，其中 $g \in G,\ h \in H$。R-线性化 $R\mathcal{G}_\tau$ 是 τ-分次的，其中每个 $|g| = g$ 和 $|(h,\ g)| = h$。

例 2.5. R-模$_\tau$ 与 R-模$^\bullet_H$。
回顾一下，我们用 R-模$_H$ 表示 H-分次 R-模的范畴。除非 H 是阿贝尔群，否则它没有编织结构。不过，它仍然是双闭幺半群，其右内部 Hom 和左内部 Hom

$$[M,N] = \bigoplus_{h\in H}\{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)\colon f(M_a) \subseteq N_{ha}\ \forall a \in H\}$$
$$\langle M,N\rangle = \bigoplus_{h\in H}\{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)\colon f(M_a) \subseteq N_{ah}\ \forall a \in H\}$$

通过通常的前复合和后复合作用于态射。对于任意群同态 $\tau\colon H \to G$，我们定义由 G-分次 R-模组成的 τ-分次范畴 R-模$_\tau$，其

$$\mathrm{Hom}^h_{R\text{-}\mathrm{Mod}_\tau}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)\colon f(M_g) \subseteq N_{\tau(h)g}\ \forall g \in G\}\,.$$

记作 R-Mod$^\bullet_H = R$-Mod$^{\mathrm{id}_H}$，我们有 Hom$^{R\text{-}\mathrm{Mod}^\bullet_H}(M,\ N) = [M,N]$，因此可以将 R-Mod$^\bullet_H$ 视为 R-Mod$_H$ 在自身上的右富化。我们还有R-Mod$^1_\tau = R$-Mod$_H$。

例 2.6。 $\tau\colon\ C_8 \to C_2$。
设 $H = C_8 = \langle x\rangle$ 和 $G = C_2 = \langle y\rangle$。存在唯一的非平凡群同态$\tau\colon\ H \to G$，其作用为 $x \mapsto y$。对于这样的 τ，我们在下表中定义四种不同的 τ-分次范畴。除非另有说明，否则同态空间分量均假定为零，复合由 R中的乘法给出。

范畴	对象	Hom$^{x^n}(a,\ b) = R$ 当	$\dim_R(\mathrm{Hom}(a,\ b))$
$\mathcal{C}_1$	$\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	$a+n \equiv b$ （模 8）	1
$\mathcal{C}_2$	$\{0,1,2,3\}$	$a+n \equiv b$ （模 4）	2
$\mathcal{C}_4$	$\{0,1\}$	$a+n \equiv b$ （模 2）	4
$\mathcal{C}_8$	$\{0\}$	$a+n = b$	8

每个对象 a 的次数为 $|a| = \tau(x^a) = y^a$。在上述任一范畴中，Hom$^{x^n}(a,\ b) \neq 0$因此蕴含 τ-分次条件

$$\tau(x^n) + |a| = y^n + y^a = y^{a+n} = y^b = |b|\,.$$

对于 $\mathcal{C}_8$，对象分次是平凡的；对于 $\mathcal{C}_1$，同态空间分次是平凡的。范畴$\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_4$ 则介于两者之间。

2.2 Yoneda 引理

如 [Kel05] 中所述，标准的 $\mathcal{V}$-充实 Yoneda 嵌入具有如下形式

$$\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V})\,.$$

然而，当我们试图设定 $\mathcal{V} = R$-Mod$_H$ 时，我们会遇到一系列问题：

1. 若 R-Mod$_H$上没有编织结构，则 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 并非良定义

2. Fun$^H(\mathcal{C}, R\text{-Mod}_H)$ 并非良定义，因为 R-Mod$_H$本身并非 Hom-分次

3. Fun$^H(\mathcal{C}, R\text{-Mod}_H^\bullet)$ 仅平凡地为 H-Hom-分次，因为 Hom-分次自然变换的次数必须为 1。

我们转而定义如下形式的"半富化"反变 Yoneda 嵌入

$$(\mathcal{C}^1)^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathrm{Fun}^H(\mathcal{C}, R\text{-}\mathrm{Mod}_H^\bullet)\,.$$

事实上，我们得到一族以 H 为指标的 Yoneda 嵌入。我们沿用 [JS17] 的记号，使用日文符号 ょ（读作 "yo"）。

命题 2.7. 设 $\mathcal{C}$ 为 H-*Hom*-分次范畴。则对每个 $a \in H$ 与 $X \in \mathcal{C}$，存在一个 H-*Hom*-分次函子 $ょ_X^a \colon \mathcal{C} \to R\text{-}\mathrm{Mod}_H^\bullet$，分别作用于对象与态射，其方式为

$$Y \mapsto \bigoplus_{h\in H} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{ha}(X,Y) \qquad y \mapsto y \circ (-)\,.$$

此外，对每个 $a \in H$，存在一个 R-线性函子 $ょ^a : (\mathcal{C}^1)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}^H(\mathcal{C}, R\text{-}\mathrm{Mod}_H^\bullet)$，将对象映为 $X \mapsto ょ_X^a$，将态射映为 $x \mapsto (-)\circ x$。

备注 2.8。当 $a = 1$ 和 $\mathcal{C} = R$-Mod$_H$（视为仅含 1 次态射的 H-Hom-分次范畴）时，$ょ^a$ 正是例 2.5 中的右内 Hom 函子。

证明。固定齐次态射

$$\begin{aligned} y &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{k}(Y,Y') & y' &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{k'}(Y',Y'') \\ x &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{1}(X,X') & x' &\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{1}(X',X'') \end{aligned}$$

以及 $f \in (ょ_X^a Y)_h = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{ha}(X,Y)$。$ょ_X^a$的良定义性由

$$(ょ_X^a y)(f) = y \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{kha}(X,Y') = (ょ_X^a Y')_{kh}$$

因此，$ょ_X^a y$确实是一个次数为 k的态射 $ょ_X^a Y \to ょ_X^a Y'$。$ょ^a$的良定义性由复合的结合律保证，这给出了交换的自然性方块

$$\begin{array}{ccc} (ょ_X^a Y)_h & \xrightarrow{ょ_x^a = (-)\circ x} & (ょ_{X'}^a Y)_h \\ {\scriptstyle ょ_x^a y = y\circ(-)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle ょ_{x'}^a y = y\circ(-)} \\ (ょ_X^a Y')_{kh} & \xrightarrow[ょ_x^a = (-)\circ x]{} & (ょ_{X'}^a Y')_{kh}\,. \end{array}$$

函子性则由

$$\begin{aligned} ょ_X^a \,\mathrm{id}_Y &= \mathrm{id}_Y \circ (-) = \mathrm{id}_{ょ_X^a Y} & ょ_{\mathrm{id}}^a &= (-)\circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \\ ょ_X^a(y'\circ y) &= y'\circ y \circ (-) = ょ_X^a y' \circ ょ_X^a y & ょ_{x'\circ x}^a &= (-)\circ x'\circ x = ょ_x^a ょ_{x'}^a\,. \end{aligned}$$ □

定理 2.9（Hom-分次范畴的 Yoneda 引理）。设 $\mathcal{C}$ 是一个 H-*Hom*-分次范畴，并固定 $a \in H$。那么对于每个 $a \in H$、$X \in \mathcal{C}$和 $F \in$ 函子$^H(\mathcal{C}, R\text{-模}_H^\bullet)$，存在一个同构

$$\Phi_{X,F}^a \colon \mathrm{Nat}^H(ょ_X^a, F) \to (FX)_{a^{-1}}$$

在 R-模中，其中

- $\Phi^a_{X,\,F}$将 $\eta\colon\ \text{ょ}^a_X \Rightarrow F$映射到 η_X(恒等$_X$)
- $(\Phi^a_{X,F})^{-1}$ 映射 $v \in (FX)_{a^{-1}}$ 到具有以下分量的自然变换

$$(\Phi^a_{X,F})^{-1}(v)_Y\colon f \mapsto (Ff)(v)\,.$$

此外，将源和目标视为 R-线性函子时，这对 X 和 F 也是自然的

$$\mathcal{C}^1 \otimes_R \mathrm{Fun}^H(\mathcal{C}, R\text{-}\mathrm{Mod}^\bullet_H) \to R\text{-}\mathrm{Mod}\,.$$

证明。对每个 $X \in \mathcal{C}$，我们都有

$$\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X,X) = \mathrm{Hom}^{a^{-1}a}_{\mathcal{C}}(X,X) = (\text{ょ}^a_X X)_{a^{-1}} = (\text{ょ}^a_X X)_{a^{-1}}\,.$$

那么，对每个 $\eta \in \mathrm{Nat}^H(\text{ょ}^a_X, F)$，我们也必须有 $\eta_X(\mathrm{id}_X) \in (FX)_{a^{-1}}$，因此 $\Phi^a_{X,F}$是良定义的。

现在固定 $v \in (FX)_{a^{-1}}$和 $f \in (\text{ょ}^a_X Y)_h = \mathrm{Hom}^{ha}_{\mathcal{C}}(X,Y)$，并记 $\Psi(v)_Y(f) = (Ff)(v)$。由于 $Ff \in \mathrm{Hom}^{ha}_{\mathcal{C}}(FX, FY)$，我们有

$$\Psi(v)_Y(f) \in (FY)_{haa^{-1}} = (FY)_h$$

因此 $\Psi(v)_Y$作为态射 $\text{ょ}^a_X Y \to FY$的次数为 1。由下式可得 $\Psi = (\Phi^a_{X,F})^{-1}$

$$(\Phi^a_{X,F} \circ \Psi)(v) = \Psi(v)_X(\mathrm{id}_X) = (F\,\mathrm{id}_X)(v) = \mathrm{id}_{FX}(v) = v$$
$$\big((\Psi \circ \Phi^a_{X,F})(\eta)\big)_Y(f) = (Ff \circ \eta_X)(\mathrm{id}_X) = (\eta_Y \circ \text{ょ}^a_X f)(\mathrm{id}_X) = \eta_Y(f)\,,$$

并且 $\Psi(v)_Y$ 关于 Y 是自然的

$$\big(\Psi(v)_{Y'} \circ \text{ょ}^a_X y\big)(f) = \Psi(v)_{Y'}(y \circ f) = (Fy \circ Ff)(v) = \big(Fy \circ \Psi(v)_Y\big)(f)\,.$$

最后，对于 $x \in \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X, X')$ 和 $\alpha\colon F \Rightarrow F'$，由 Φ 的自然性可得

$$\begin{aligned}(Fx \circ \Phi^a_{X,F})(\eta) &= (Fx \circ \eta_X)(\mathrm{id}_X)\\ &= (\eta_{X'} \circ \text{ょ}^a_X x)(\mathrm{id}_X)\\ &= \eta_{X'}(x)\\ &= (\eta \circ \text{ょ}^a_x)_{X'}(\mathrm{id}_{X'})\\ &= \Phi^a_{X',F}(\eta \circ \text{ょ}^a_x)\\ &= (\Phi^a_{X',F} \circ \mathrm{Nat}^H(\text{ょ}^a_x, F))(\eta)\end{aligned}$$

and

$$(\alpha_X \circ \Phi^a_{X,F})(\eta) = (\alpha \circ \eta)_X(\mathrm{id}_X) = \Phi^a_{X,F'}(\alpha \circ \eta) = (\Phi^a_{X,F'} \circ \mathrm{Nat}^H(\text{ょ}^a_X, \alpha))(\eta)\,.$$

□

推论 2.10. 每个 ょ^a 都是全忠实的。

证明。根据定理 2.9，我们考虑 R-线性同构

$$\Phi^a_{X,\text{ょ}^a_Y}\colon\ \mathrm{Nat}^H(\text{ょ}^a_X, \text{ょ}^a_Y) \to (\text{ょ}^a_Y X)_{a^{-1}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1}(Y,X)\,.$$

F或者对于态射 $v \in \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C}^1)^{\mathrm{op}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1}(Y,X)$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1}(Y,Y')$，我们有

$$(\text{ょ}^a_v)_{Y'} f = f \circ v = (\text{ょ}^a_Y f)(v) = (\Phi^a_{X,\text{ょ}^a_Y})^{-1}(v)_{Y'}(f)\,.$$

由于 $(\Phi^a_{X,\text{ょ}^a_Y})^{-1}$ 可逆，ょ^a 在同态集上是双射，因此是全忠实的。 □

2.3 移位对象

直观地说，移位对象为 $\mathcal{C}^1$ 提供了一种“观察” $\mathcal{C}$其余部分的方式。这使我们能够轻松推广普通的 R-线性范畴性质，例如可加性和半单性。我们还将在命题 2.14 中看到，移位对象表示命题 2.7 的 Hom分次米田嵌入。

定义 2.11. 设 X 是一个 τ-分次范畴中的对象，并设 $a \in H$。如果存在，则 X按 a的平移 是一个对象 $X\langle a\rangle$ ，并附带一个次数为 a 的同构 $r_{X,a}\colon X \to X\langle a\rangle$。

注记 2.12。 平移自动诱导 R-线性同构

$$(-)\circ r_{X,a}\colon \operatorname{Hom}^h_{\mathcal{C}}(X\langle a\rangle, Y) \Rightarrow \operatorname{Hom}^{ha}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$
$$r_{Y,a}\circ(-)\colon \operatorname{Hom}^h_{\mathcal{C}}(X,Y) \Rightarrow \operatorname{Hom}^{ah}_{\mathcal{C}}(X, Y\langle a\rangle)\,.$$

注记 2.13。 若 X 是次数为 x的齐次元素，则任何平移 $X\langle a\rangle$ 的次数必为 $\tau(a)x$。给定 X 按 a的另一个平移 $X[a]$ ，很容易构造一个 1 次同构 $X[a] \to X\langle a\rangle$。

命题 2.14. 设 X 和 Y 是 τ-分次范畴 $\mathcal{C}$中的对象，并固定 $a \in H$。对于$b \in H$，注意到 $\yo^b_Y \cong \yo^{ba}_X$与以下说法相同

$$\bigoplus_{h\in H} \operatorname{Hom}^{hb}_{\mathcal{C}}(Y,-) \cong \bigoplus_{h\in H} \operatorname{Hom}^{hba}_{\mathcal{C}}(X,-)\,.$$

以下各项等价:

1. 存在一个次数为 a 的同构 $X \to Y$，使得 Y 是 X 的一个移位
2. 对某个 $b \in H$，我们有 $\yo^b_Y \cong \yo^{ba}_X$
3. 对所有 $b \in H$，我们有 $\yo^b_Y \cong \yo^{ba}_X$。

证明。 显然，(3) 蕴含 (2)。由 Hom分次米田引理（定理 2.9），对于每个 $b \in H$， H-Hom-分次自然同构 $\yo^b_Y \Rightarrow \yo^{ha}_X$ 与下列范畴中的同构之间存在一个对应关系

$$(\yo^{ha}_X Y)_{b^{-1}} = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^a}(X,Y)\,.$$

因此，(2) 蕴含 (1)；考虑所有 $b \in H$ 后，(1) 蕴含 (3)。 □

定义 2.15。 若一个 τ-分次范畴 $\mathcal{C}$ 具有移位，则对于每个 $X \in \mathcal{C}$ 和 $a \in H$，都存在一个移位对象 $X\langle a\rangle \in \mathcal{C}$。我们将 $\mathbb{C}\mathrm{at}^{(\cdot)}_\tau$ 记作包含具有移位的 τ-分次范畴的 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$ 的子2-范畴。

注记 2.16。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个在带有平移的 τ 分次范畴之间的 τ 分次函子。于是我们自动得到 1 次同构

$$Fr_{X,a}\circ r^{-1}_{FX,a}\colon (FX)\langle a\rangle \to F(X\langle a\rangle)\,.$$

注记 2.17。 对于任意 τ-分次范畴 $\mathcal{C}$，我们可以通过添加新对象 $X\langle h\rangle$ 和态射 $r_{X,h} \in \operatorname{Hom}^h_{\mathcal{C}^{(\cdot)}}(X, X\langle h\rangle)$ 来构造一个 τ-分次范畴 $\mathcal{C}^{(\cdot)}$，其中每个 $X \in \mathcal{C}$ 和 $h \in H$ 都对应一个这样的对象和态射。由于平移在 1 次同构意义下唯一，因此只要 $\mathcal{C}$ 已经有平移，我们就有 $\mathcal{C}^{(\cdot)} \simeq \mathcal{C}$ 。

例 2.18。 回忆例 2.4 中的 τ-分次范畴 $R\mathcal{G}_\tau$。每个对象 $g \in R\mathcal{G}_\tau$ 的平移由下式给出

$$g\langle a\rangle = \tau(a)g \qquad r_{g,a} := (g,a) \in \mathrm{Hom}_{R\mathcal{G}_\tau}\left(g, \tau(a)g\right).$$

例 2.19. 回忆例 2.5 中的 τ-分次范畴 R-Mod$_\tau$。每个对象$M \in R$-Mod$_\tau$ 都具有如下形式：仅有有限多个非零的 $M_g \in R$-Mod。于是我们可以构造 $M\langle a\rangle = \bigoplus_{g\in G} M_{\tau(a)^{-1}g}$，使得每个 $M\langle a\rangle_{\tau(a)g} = M_g$。平移同构 $r_{M,a}$ 通过置换分量来作用。

例 2.20. 对于 $H = C_8 = \langle x\rangle$ 和 $G = C_2 = \langle y\rangle$，回忆例 2.6 中的 τ-分次范畴 $(\mathcal{C}_k)_{k=1,2,4,8}$。 $\mathcal{C}_k$ 中的每个对象 a 的平移由下式给出

$$a\langle x^n\rangle = a + n \qquad r_{a,x^n} = 1 \in \mathrm{Hom}^{x^n}(a, a+n)$$

其中 ob($\mathcal{C}_k$) 中的加法按模 k 定义。

3 半单性

我们首先回顾 R-线性范畴的半单性。Sözer 与 Virelizier 使用我们所谓的 R-线性半单性，它往往不同于阿贝尔范畴半单性的标准定义。我们依次讨论这两个概念及其相互关系，并证明 R-线性半单范畴的一个结构定理（定理 3.9）。该结构定理广为人知，但似乎缺少已发表的证明或明确表述。

在第 3.2 节中，我们接着讨论 τ-分次范畴的可加性；Sözer 与 Virelizier 借助他们所谓的 h-直和来定义这一概念。我们证明，他们的定义等价于要求移位，并且仅要求那些满足 $h = 1$的 h-直和。在第 3.3 节中，我们沿类似思路解释 τ-分次范畴的半单性。最后，我们据此在第 3.4 节中证明半单 τ-分次范畴的一个新结构定理。

3.1 R-线性范畴的半单性回顾

文献中对半单范畴有多种不同的定义。 [Bai17], 对这一主题作了有益的讨论，并为每种类型提出了名称。 [EGNO15] 采用阿贝尔半单性，这可能是最标准的概念。

另一方面， [SV23]采用了 [Bai17] 所称的对象半单性；我们则称之为 R-线性半单性，以强调它对基环 R的依赖。需要注意的是，这两种半单性概念可能大不相同；特别是，即使满足 $R = \mathbb{C}$， R-线性“简单”对象也未必是阿贝尔简单的。

3.1.1 阿贝尔半单性

In a阿贝尔范畴中，回顾一下，对象 X 的子对象 是一个单态射 $Y \hookrightarrow X$.

定义 3.1. 阿贝尔范畴中的非零对象 X 称为阿贝尔简单 ，如果它没有非平凡子对象。若一个范畴是阿贝尔范畴，且其中每个对象都是阿贝尔简单对象的有限直和，则称该范畴为阿贝尔半单 。

阿贝尔范畴的舒尔引理广为人知——例如，参见 [EGNO15] 的引理 1.5.2。我们稍后将用它给出充分条件，使一个 R-线性半单范畴成为阿贝尔半单范畴。

引理 3.2（舒尔引理）。设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，其阿贝尔简单对象为 S 和 T。那么 自同态环 $_{\mathcal{C}}(S)$ 是一个除环，并且每个态射 $S \to T$ 要么为零，要么是同构。若进一步假设 $\mathcal{C}$ 是代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维同态 $\Bbbk$- 线性范畴，那么每个阿贝尔简单对象 $S \in \mathcal{C}$ 都满足 自同态环 $_{\mathcal{C}}(S) \cong \Bbbk$。

□

推论 3.3。设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-线性阿贝尔范畴。假设存在一个阿贝尔简单对象 $S \in \mathcal{C}$，使得 自同态环$_{\mathcal{C}}(S) \cong R$。那么 R 是一个域。

证明。舒尔引理（引理 3.2）说明 End$_{\mathcal{C}}(S)$ 是一个除环，而交换除环就是域。

□

例 3.4。 R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}}$ 当且仅当 R 是一个域。

R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}}$ 中的所有对象都具有 R^n 的形式，其中 $n \in \mathbb{N}$。若 $n = 0$，则 $R^n = 0$。若$n > 1$，则 R^n 有一个子对象 $R \hookrightarrow R^n$。现在假设 R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}}$ 是阿贝尔半单的。那么它至少有一个阿贝尔简单对象，通过排除法可将其认定为R。由于 Hom$_{R\text{-Mod}^{\text{free},\ \text{fg}}}(R) = R$，由推论 3.3可知 R 是一个域。

反过来，若 $R =$k 是域，则 R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}} =$ k-Vect 是阿贝尔半单的，具有标准矩阵核与余核。

3.1.2 R-线性半单性

若一个 R-线性范畴具有所有有限直和，我们就称它为加性的。回顾一下，在一个 R-线性范畴中，对象 X和 Y 称为不相交的，如果我们有

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) = 0\,.$$

定义 3.5. 若对象 X 满足 End$(X) \cong R$，则称它为一个 R-线性范畴中的 R-线性简单对象。若一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$ 是加性的，并且存在一个由两两不相交的 R-线性简单对象组成的集合 S，使得 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是 S 中对象的有限直和，则称 $\mathcal{C}$ 为 R-线性半单的。

例 3.6. R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}}$。
一个 R-模 M 是自由的，当且仅当对于某个集合 I 有 $M \cong \bigoplus_{i\in I} R$；此时， M 也是有限生成的，当且仅当 I 是有限集。我们还有 End$(R) \cong R$，因此 R-Mod$^{\text{free},\ \text{fg}}$ 是 R-线性半单的，且只有一个线性简单对象 R。

命题 3.7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 R-线性范畴，并假设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔半单的。若$\mathcal{C}$ 是有限维同态的，且 R 是代数闭域，那么 $\mathcal{C}$ 也是 R-线性半单的。

证明. 这直接由舒尔引理（引理 3.2）得出。 □

定义 3.8. 加性范畴 $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$ 的直和定义为加性范畴 $\coprod_{i\in I} \mathcal{C}_i$，其对象是形式列表 $\coprod_{i\in I} X_i$，其中包含有限多个非零的 $X_i \in \mathcal{C}_i$，其态射定义为

$$\mathrm{Hom}_{\coprod_{i\in I}\mathcal{C}_i}\left(\coprod_{i\in I} X_i, \coprod_{i\in I} Y_i\right) = \coprod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(X_i, Y_i)\,.$$

显然，该直和同时保持 R-线性半单性和阿贝尔半单性。对象$X \in \coprod_{i\in I} \mathcal{C}_i$ 是（R-线性或阿贝尔）简单的，当且仅当它只有一个非零分量X_i，且该分量在 $\mathcal{C}_i$ 中是（R-线性或阿贝尔）简单的。下面的结构定理众所周知，但似乎缺乏已发表的证明或明确表述。

定理 3.9。 范畴 $\mathcal{C}$ 是 R-线性半单的，当且仅当存在一个 R-线性等价

$$\mathcal{C} \simeq \coprod_{i\in I} R\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{free,fg}}.$$

此外， I 与 $\mathcal{C}$ 的线性简单对象（在同构意义下）之间存在双射。

证明。假设 $\mathcal{C}$ 是以 R 为系数的半单范畴，其简单对象（在同构意义下）为 $(S_i)_{i\in I}$ 。我们可以将态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ 视为矩阵，其分量为 $f_{ji}\,\mathrm{id}_{S_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_i,S_j)$。于是我们可以定义一个全忠实函子 $\coprod_{i\in I} R\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{free,fg}} \to \mathcal{C}$，它在对象和态射上的作用分别为

$$\coprod_{i\in I} R^{n_i} \mapsto \bigoplus_{i\in I} S_i^{\oplus n_i} \qquad\qquad \coprod_{i\in I} (f_{ijk})_{j,k\in I} \mapsto \coprod_{i\in I} (f_{ijk}\,\mathrm{id}_{S_i})_{j,k\in I}.$$

本质满性直接由 $\mathcal{C}$ 的 R-线性半单性得出。反向结论则由 $\coprod_{i\in I} R\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{free,fg}}$ 的 R-线性半单性得出。 □

推论 3.10. 设 $\mathcal{C}$ 是一个以 R 为系数的半单范畴。那么， $\mathcal{C}$ 是阿贝尔半单的，当且仅当 R 是一个域。

证明。 我们在例 3.4 中证明了， R-$\mathrm{Mod}^{\mathrm{free,fg}}$ 是阿贝尔半单的，当且仅当 R 是一个域。 □

3.2 τ-分次范畴的直和与可加性

为了讨论半单的 τ-分次范畴，我们首先需要确立可加性的概念。在 [SV23], Sözer 和 Virelizier 的第 3.4 节中，他们定义了所谓的 H-可加性，并使用 h-直和处理 $h \in H$。这可以立即推广到 τ-分次情形:

定义 3.11。 设 $(X_i)_{i\in I}$ 是一个 τ-分次范畴中的对象族，且 $h \in H$。$(X_i)_{i\in I}$ 的一个 h-直和 是一个对象 ${}^h\bigoplus_{i\in I} X_i$，连同态射

$$\pi_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{h^{-1}}\left({}^h\bigoplus_{i\in I} X_i, X_i\right) \qquad\qquad \iota_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{h}\left(X_i, {}^h\bigoplus_{i\in I} X_i\right)$$

使得对所有 $i,j \in I$，都有 $\sum_{i\in I} \iota_i \circ \pi_i = \mathrm{id}^h\!\oplus_{i\in I} X_i$ 和 $\pi_i \circ \iota_j = \delta_{ij}\,\mathrm{id}_{X_i}$。当 $h=1$ 时，我们省略 h。

定义 3.12. 若一个 τ-分次范畴对所有 $h \in H$ 都具有有限个 h-直和，则称其为 H-加性的。

Sözer 和 Virelizier 指出，若 h-直和存在，则它在 1 次同构意义下唯一。因此， τ-分次范畴 $\mathcal{C}$ 中的（1-）直和与 $\mathcal{C}^1$中的通常的直和相同。若 $\mathcal{C}$ 具有平移，则总可以通过与适当的平移同构复合，将一个次数为 h的态射转化为 $\mathcal{C}^1$ 中的态射。因此，可以合理地预期，许多概念都可以仅参照 $\mathcal{C}^1$来表述。

定义 3.13. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 τ-分次范畴。

- 若具有平移且 $\mathcal{C}^1$ 是加性的，我们称其为 $\mathcal{C}$ 加性的。
- 如果一个 τ-分次函子或自然变换在 $\mathcal{C}^1$上的限制是加性的，我们就称它为加性的。

- 我们用 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau^\oplus$表示由加性 τ-分次范畴、加性 τ-分次函子和加性 τ-分次自然变换构成的 2-范畴。

我们用 $(-)^\oplus$ 表示加性完备化。对于 τ-分次范畴，这意味着添加移位和有限直和。

注 3.14。 如果 τ-分次范畴 $\mathcal{C}$ 已经具有移位，那么 $\mathcal{C}^\oplus$ 通过次数 h 同构具有相容的移位

$$\textstyle\bigoplus_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\bigoplus_{i=1}^n r_{X_i,h}} \bigoplus_{i=1}^n X_i\langle h\rangle\,.$$

下面的技术引理精确描述了移位如何与 h-直和相互作用。该推论将我们对可加性的定义与 Sözer 和 Virelizier 的定义联系起来。

引理 3.15。 设 $(X_i)_{i\in I}$ 是一个分次范畴中的对象族，并设 $h \in H$。

1. 假设 $\mathcal{C}$ 包含 *1*-直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ 和移位对象 $(\bigoplus_{i\in I} X_i)\langle h\rangle$。那么 $(\bigoplus_{i\in I} X_i)\langle h\rangle$ 是 $(X_i)_{i\in I}$的一个 h-直和。 *2.* 假设 $\mathcal{C}$ 包含移位对象 $(X_i\langle h\rangle)_{i\in I}$ 和 *1*-直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i\langle h\rangle$。那么 $\bigoplus_{i\in I} X_i\langle h\rangle$ 是 $(X_i)_{i\in I}$的一个 h-直和。 *3.* 假设 $\mathcal{C}$ 包含某个 X 对应的单元素 h-直和 ${}^h\bigoplus X$ 。那么${}^h\bigoplus X$ 是将 X 按 h移位所得。

Pro的。假设我们有 $(X, \pi_i, \iota_i) := \bigoplus_{i\in I} X_i$，其平移为 $(X\langle h\rangle, r_{X,h})$。于是我们可以定义 e

$$\pi_i' := \pi_i \circ r_{X,h}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{h^{-1}}(X\langle h\rangle, X_i) \qquad \iota_i' := r_{X,h} \circ \iota_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{h}(X_i, X\langle h\rangle)$$

with

$$\sum_{i\in I} \left(\iota_i' \circ \pi_i'\right) = r_{X,h} \circ \sum_{i\in I} (\iota_i \circ \pi_i) \circ r_{X,h}^{-1} = r_{X,h} \circ \mathrm{id}_X \circ r_{X,h}^{-1} = \mathrm{id}_{X\langle h\rangle}$$
$$\pi_i' \circ \iota_j' = (\pi_i \circ r_{X,h}^{-1}) \circ (r_{X,h} \circ \iota_j) = \pi_i \circ \iota_j = \delta_{ij}\,\mathrm{id}_{X_i}$$

对所有 $i, j \in I$。(2) 的证明类似。最后，余投影 $\iota\colon X \to {}^h\bigoplus_{i=1}^1 X$ 是次数为 h 的同构，其逆由相应的投影给出。因此我们有 ${}^h\bigoplus_{i=1}^1 X = X\langle h\rangle$ ，其中 $r_{X,h} = \iota$。

□

推论 3.16. *τ-分次范畴是加性的，当且仅当它是 H-加性的。*

3.3 τ-分次范畴的半单性

既然我们已经有了直和的概念，并回顾了 R-线性范畴的半单性，我们便能够给出 τ-分次范畴半单性的新定义。我们在命题 3.18 中证明，这与 [SV23], 中结合其第 3.1 节和第 3.5 节所使用的概念一致。随后，我们将定义并探讨半单 τ-分次范畴的一个新参数化类，它将在结构定理中发挥作用。

3.3.1 定义与基本结果

定义 3.17. 设 $\mathcal{C}$ 为一个 τ-分次范畴。则

- $\mathcal{C}$ 中的对象若在 $\mathcal{C}^1$中是 R-线性简单的，则称为简单。
- $\mathcal{C}$ 是 H-半单的当且仅当

  1. 对任意 $h \in H$， $\mathcal{C}$ 中的每个对象都可以写成有限个简单对象的 h-直和。2. 任意两个简单对象在 $\mathcal{C}^1$中要么同构，要么不相交。

- 若 $\mathcal{C}$ 具有平移且 $\mathcal{C}^1$ 是 R-线性半单的（或者等价地，若$\mathcal{C}$ 是加性的且 $\mathcal{C}^1$ 是 R-线性半单的），则称 $\mathcal{C}$ 半单。

命题 3.18。设 $\mathcal{C}$ 是域$\Bbbk$上的$\Bbbk$-线性 τ-分次范畴。则 $\mathcal{C}$ 是半单的，当且仅当它是加性的且 H-半单。

注记 3.19. 在一个方向上，这等价于 [SV23]的引理 3.1(i)。

证明。 首先，注意到引理 3.15 使我们能够说： $\mathcal{C}$ 是加性 H-半单的，当且仅当它具有移位，并且 $\mathcal{C}^1$ 除可加性外还满足以下两条公理:

1. 每个对象都可以写成线性单对象的有限直和
2. 任意两个简单对象要么同构，要么不相交。

由舒尔引理 (3.2)，这等价于 k-线性半单性。 □

例 3.20. $R\mathcal{G}_\tau^\oplus$。
回顾例 2.4 中的 τ-分次范畴 $R\mathcal{G}_\tau$，它具有例 2.18 所给出的移位。对每个 $g, g' \in R\mathcal{G}_\tau$，加性完备化 $R\mathcal{G}_\tau^\oplus$具有

$$\mathrm{Hom}^1_{R\mathcal{G}_\tau^\oplus}(g, g') = \mathrm{Hom}^1_{R\mathcal{G}_\tau}(g, g') = \delta_{\tau(1)g,g'} R(1, g) \cong \delta_{g,g'} R\,,$$

从而 $\mathrm{ob}(R\mathcal{G}_\tau)$ 的包含给出 $(R\mathcal{G}_\tau^\oplus)^1$ 中一组两两不相交的 R-线性单对象。于是 $R\mathcal{G}_\tau^\oplus$按构造是半单的。简单对象在一般同构意义下的等价类与陪集空间 $\mathrm{im}(\tau)\backslash G$ 成双射。

例 3.21. $R\text{-}\mathrm{Mod}_\tau^{\text{free fg}}$,。
回顾例 2.5 中的 τ-分次范畴 $R\text{-}\mathrm{Mod}_\tau$，它具有例 2.19 所给出的移位。定义 R-Mod $_\tau^{\text{free fg}}$,为仅包含那些自由且有限生成的 G-分次模的 τ-分次子范畴。于是我们有

$$(R\text{-}\mathrm{Mod}_\tau^{\text{free,fg}})^1 = R\text{-}\mathrm{Mod}_G^{\text{free,fg}} \simeq \coprod_{g \in G} R\text{-}\mathrm{Mod}^{\text{free,fg}}$$

作为 R-线性范畴，从而 $R\text{-}\mathrm{Mod}_\tau^{\text{free fg}}$,由例 3.6 可知是半单的。简单对象在 1 次同构意义下由符号 $(R_g)_{g \in G}$ 给出，其分量为 $(R_g)_{g'} = \delta_{gg'} R$。在一般同构意义下，它们对应于陪集空间 $\mathrm{im}(\tau)\backslash G$ 的代表元。

例 3.22. $\tau\colon\ C_8 \to C_2$。
对于 $H = C_8 = \langle x \rangle$ 与 $G = C_2 = \langle y \rangle$，回顾例 2.6 中的 τ-分次范畴$(\mathcal{C}_k)_{k=1,2,4,8}$，由例 2.20 可知它们具有移位。我们已经得到每个自同态环$^1_{\mathcal{C}_k} = R$，因此加性完备化$\mathcal{C}_k^\oplus$ 是半单的。这些 $8/k$ 简单对象在 1 次同构意义下互不相同，但整个范畴在一般同构意义下是连通的。

3.3.2 τ 分次范畴 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$

我们最后一类例子更为复杂，但将在我们关于半单 τ-分次范畴的结构定理（第 3.4 节）中发挥核心作用。它们原来是不可分解的，而定理 3.30 的一个推论将是：所有不可分解半单τ-分次范畴都具有这种形式。

给定一个子群 $L \le H$，回忆一下，$M := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L, R^\times)$ 是一个右 H-模，其乘法定义在 $R^\times$ 上，右 H-作用为 $(f\triangleleft h)(kL) = f(hkL)$。记 $\mathbf{1}: H/L \to R^\times$ 为常值函数 $hL \mapsto 1$。于是，M 上的归一化 2-余循环是一个函数 $\psi\colon H^2 \to M$，满足

$$d\psi(a,b,c) = \psi(b,c)\cdot\psi(ab,c)^{-1}\cdot\psi(a,bc)\cdot\psi(a,b)^{-1} \triangleleft c = 1$$

且所有 $\psi(1,h) = \psi(h,1) = 1$。

定义 3.23。设 $L \le \ker(\tau) \lhd H$，并设 $\psi\colon H^2 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L, R^\times)$ 是一个归一化 2-余循环。记 $\mathcal{S}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 为如下 τ-分次范畴：

- 对象 $(R_{hL})^{hL\in H/L}$
- 次数 a 态射由 $\mathrm{Hom}^a(R_{hL}, R_{h'L}) = \delta_{ahL,h'L} R e^a_{hL}$ 给出，其中每个 $e^1_{hL} = \mathrm{id}_{R_{hL}}$
- 复合由 $e^a_{bhL}\circ e^b_{hL} = \psi(a,b)(hL)^{-1} e^{ab}_{hL}$给出
- 对象次数由 $|R_{hL}| = \tau(h)g$给出。

于是我们将 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 记为 $\mathcal{S}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 在直和下的完备化，并且我们也记 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi) = \mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle 1\rangle$。

注 3.24. 将 L 限制到 $\ker(\tau)$ 的一个子群是必要的，以确保得到一个τ-分次范畴。这是因为定义 2.1 要求：只要 $\mathrm{Hom}^a(R_{hL}, R_{h'L}) \neq 0$，就有 $|R_{h'L}| = \tau(a)|R_{hL}|$，但我们有 $\mathrm{Hom}^a(R_{hL}, R_{h'L}) \neq 0$ 当且仅当存在 $\ell \in L$使得 $ah = h'\ell$。于是我们有

$$\tau(h')g = |R_{h'L}| = \tau(a)|R_{hL}| = \tau(ah)g = \tau(h'\ell)g$$

当且仅当 $\ell \in \ker(\ell)$。

例 3.25. $\tau\colon C_8 \to C_2$。
对于 $H = C_8 = \langle x\rangle$ 和 $G = C_2 = \langle y\rangle$，回顾例 2.6 中的 τ-分级范畴 $(\mathcal{C}_k)_{k=1,\,2,\,4,\,8}$，它们根据例 2.20 有平移。直接由例 3.22 可得，每个 $\mathcal{C}_k \cong \mathcal{M}_\tau(C_k,\,1)$。

引理 3.26。每个 e^a_{hL} 都是可逆的，且 $(e^a_{hL})^{-1} = \psi(a^{-1},a)(hL)e^{a^{-1}}_{ahL}$，并且 $e^1_{hL} = \mathrm{id}_{R_{hL}}$。

证明。对于任意 $h,\ a \in H,\ \psi$ 的归一化给出

$$e^1_{ahL}\circ e^a_{hL} = \psi(1,a)(hL)e^a_{hL} = e^a_{hL} \qquad e^a_{hL}\circ e^1_{hL} = \psi(a,1)(hL)e^a_{hL} = e^a_{hL}\,.$$

由此可得

$$\begin{aligned} e^a_{hL}\circ\psi(a^{-1},a)(hL)e^{a^{-1}}_{ahL} &= \psi(a,a^{-1})(ahL)^{-1}\cdot\psi(a^{-1},a)(hL)\cdot\mathrm{id}_{R_{ahL}} \\ &= \big(\psi(a,a^{-1})\triangleleft a\big)(hL)^{-1}\cdot\psi(a^{-1},a)(hL)\cdot\mathrm{id}_{R_{ahL}} \\ &= \psi(1,a)(hL)\cdot\psi(a,1)(hL)^{-1}\cdot\mathrm{id}_{R_{ahL}} \\ &= \mathrm{id}_{R_{ahL}} \\ \psi(a^{-1},a)(hL)e^{a^{-1}}_{ahL}\circ e^a_{hL} &= \psi(a^{-1},a)(hL)^{-1}\cdot\psi(a^{-1},a)(hL)\,\mathrm{id}_{R_{hL}} = \mathrm{id}_{R_{hL}}\,. \end{aligned}$$

□

命题 3.27。 每个形如 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 的 τ-分次范畴都是不可分解半单的，其平移为 $r_{R_{hL},h} := e^a_{hL}\colon\ R_{hL}\to R_{ahL}$，并且在一般同构意义下只有一个简单对象 R_{1L}。

证明。 根据定义，$\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle^1$ 是 R-线性半单范畴，其简单对象为 $(R_{hL})_{hL\in H/L}$，这些对象都通过一般态射 e^a_{hL}彼此连通。根据引理 3.26，这些态射均可逆，因此给出了平移。

我们注意到，一个 τ-分次范畴是不可分解的，当且仅当其在一般分次同构意义下只有一个简单对象：若 $\mathcal{C}\cong\mathcal{A}\boxplus\mathcal{B}$ 对于半单的 $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 以及简单的 $A\in\mathcal{A}$、 $B\in\mathcal{B}$成立，则 $A\boxplus 0$和 $0\boxplus B$是 $\mathcal{C}$中的两个不同构简单对象。 □

命题 3.28。 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 中存在次数为 x 的简单对象，当且仅当$x\in\mathrm{im}(\tau)g$，在此情形下，这些对象与$\ker(\tau)/L$构成双射。

证明。 任意次数为 x 的简单对象都具有 R_{hL} 的形式，其中 $x=\tau(h)g$。反之，设 $x=\tau(b)g\in\mathrm{im}(\tau)g$。于是，对于每个 $hL\in H/L$，我们有 $|R_{hL}|=\tau(h)g=x$，当且仅当对于某个 $k\in\ker(\tau)$ 成立。 □

我们注意到， $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 中的两个简单对象相等，当且仅当它们是次数为 1 的同构对象。从某种意义上说，这是半单 τ-分次范畴所能达到的最高骨架性水平。

3.4 结构定理

最后，我们证明半单 τ-分次范畴的结构定理。这给出了任意此类范畴的直和分解，其中每个直和项都具有 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 的形式，其中某个 L，ψ，g成立。本节的第一个结果是一个技术引理，它描述了如何为 L 和 ψ取得值。定理 3.30 是主要结果。接下来我们证明定理 3.33，并以此结束本节；该定理精确确定了何时以及如何将形如 $\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle$ 的两个范畴视为 τ-分次等价。

引理 3.29。 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有移位和简单对象 S 的 τ-分次范畴。记

$$L_S=\{a\in H\colon S\langle a\rangle\cong S\}\le\ker(\tau)$$

并固定陪集代表元 $(h_i)_{i\in I}$，使得 $H=\coprod_{i\in I}h_iL_S$。由此可知， I 带有由 $h_{ai}L_S=ah_iL_S$ 诱导的H-作用 $i\mapsto ai$。

对所有 $i\in I$ 和 $a\in H$，固定一个态射 $f^a_{S,i}$，使其张成 $\mathrm{Hom}^a_{\mathcal{C}}(S\langle h_i\rangle,S\langle h_{ai}\rangle)\cong R$。特别地，固定每个 $f^1_{S,i}=\mathrm{id}^{S\langle h_i\rangle}$。于是

$$f^{ab}_{S,i}=\psi_S(a,b)(h_iL_S)\cdot f^a_{S,bi}\circ f^b_{S,i}\,. \tag{1}$$

定义了一个归一化 2-余循环 $\psi_S\colon H^2\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L_S,R^\times)$。

证明。由于$f^a_{S,\,bi}\circ f^b_{S,\,i}$是可逆的，它在$\mathrm{Hom}^{ab}_{\mathcal{C}}(S\langle h_i\rangle,\ S\langle h_{abi}\rangle)=Rf^{ab}_{S,\,i}$中给出一个非零态射。由于每个 i选出 L_S的唯一陪集，我们必定有某个函数 $\psi_L\colon\ H^2\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L_S,\ R^\times)$满足 (1)。于是我们有

$$\begin{aligned}
f^a_{S,bci}\circ(f^b_{S,ci}\circ f^c_{S,i}) &= \psi_S(b,c)(h_iL_S)^{-1}\cdot f^a_{S,bci}\circ f^{bc}_{S,i}\\
&= \psi_S(b,c)(h_iL_S)^{-1}\cdot\psi_S(a,bc)(h_iL_S)^{-1}\cdot f^{abc}_{S,i}\\
(f^a_{S,bci}\circ f^b_{S,ci})\circ f^c_{S,i} &= \psi_S(a,b)(h_{ci}L_S)^{-1}\cdot f^{ab}_{S,ci}\circ f^c_{S,i}\\
&= \psi_S(a,b)(ch_iL_S)^{-1}\cdot\psi_S(ab,c)(h_iL_S)^{-1}\cdot f^{abc}_{S,i}\,,
\end{aligned}$$

由 $\mathcal{C}$中复合的结合律给出2-余循环条件。归一化由$f^1_{S,\ i} = \mathrm{id}_{S\langle h_i\rangle}$ 通过

$$\mathrm{id}_{S\langle h_{ai}\rangle} \circ f^a_{S,i} = \psi_S(1,a)(h_i L_S)\cdot f^a_{S,i} \qquad f^a_{S,i}\circ \mathrm{id}_{S\langle h_i\rangle} = \psi_S(a,1)(h_i L_S)\cdot f^a_{S,i}\,. \qquad \square$$

定理 3.30. *τ-分次范畴 $\mathcal{C}$是半单的，当且仅当存在一个 τ-分次等价*

$$\mathcal{C} \simeq \coprod_{i\in I} \mathcal{M}_\tau(L_i,\psi_i)\langle g_i\rangle$$

对于某些子群 $L_i \le \ker(\tau)$、2-余链 $\psi_i\colon H^2 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L_i, R^\times)$ 和元素$g_i \in G$。假设 $\mathcal{C}$ 是半单的，并固定 $\mathcal{C}$ 中简单对象的一个代表元集合$(S_i)_{i\in I}$，取至一般同构意义下。于是，可以按照引理 3.29 选取每个 $g_i = |S_i|$、$L_i = L_{S_i}$ 和$\psi_i = \psi_{S_i}$。

证明. 不失一般性，我们可以假设 $\mathcal{C}$ 是加性的。固定 $\mathcal{C}$ 中简单对象的一个代表元集合（S_i）$_{i\in I}$，取至一般同构意义下，即使 $\mathcal{C}$ 不是半单的。按照引理 3.29 设定每个 $g_i = |S_i|$、$L_i = L_{S_i}$ 和 $\psi_i = \psi_{S_i}$。另外，为每个 L_i 固定陪集代表元（h_{ij}）$_{j\in J_i}$，使得 $H = \coprod_{j\in J_i} h_{ij}L_i$。

于是，我们可以逐分量定义一个 τ-分次函子 $F\colon \coprod_{i\in I}\mathcal{M}_\tau(L_i,\ \psi_i)\langle g_i\rangle \to \mathcal{C}$：

$$R_{h_{ij}L_i} \mapsto S_i\langle h_{ij}\rangle \qquad e^a_{h_{ij}L_i} \mapsto f^a_{S_i,j}\,,$$

使用引理 3.29 中的态射 $f^a_{S_i,\ j}$。选取陪集代表元可确保这一构造定义良好，并将非同构对象映射为非同构对象。显然，F 保持对象和态射的分次，因此根据引理 3.29 中的复合规则，可得 τ-分次函子性。此外，F 是全忠实的，因为它将非零态射映射为非零态射，且源范畴中每个 a-次数的态射集至多是一维。因此，F 选出了 $\mathcal{C}$ 中最大的半单 τ-分次子范畴；当且仅当 $\mathcal{C}$ 是半单的时，该子范畴就是 $\mathcal{C}$。

$\square$

推论 3.31。 </style}一个-Hom-分次范畴是半单的，当且仅当它与某个)(L_i, ψ_i)*呈现H-Hom-分次等价。*

例 3.32。 $R\mathcal{G}^{\oplus}_\tau \cong R\text{-Mod}^{\text{free fg}}_{\tau,\ }$。
由例 3.20 可知，$R\mathcal{G}^{\oplus}_\tau$是半单的，其代表简单对象由陪集空间 im(*τ*)\$G$的代表元 $(g_i)_{i\in I}$ 给出。每个 g_i 的次数也为 $g_i \in G$，并且当且仅当 $a \in$ker(*τ*) 时，我们有 $g_i = g_i\langle a\rangle = \tau($*a*$)g_i$。复合由群乘法直接诱导。

此外，由例 3.21 可知，R-Mod$^{\text{free fg}}_{\tau,}$ 的简单对象在一般同构意义下也由陪集空间 im(*τ*)\$G$标号。每个简单对象 R_{g_i} 的次数为g_i，并且当且仅当 $a \in$ ker(*τ*) 时，我们再次有 $R_{g_i} = R_{g_i}\langle a\rangle = R_{\tau(a)g_i}$。我们有

$$r_{R_{\tau(a)g},a'} \circ r_{R_g,a} = r_{R_g,a'a}$$

因为置换的复合总是另一个置换。因此我们有 τ-分次等价

$$R\mathcal{G}^{\oplus}_\tau \simeq R\text{-Mod}^{\text{free,fg}}_\tau \simeq \coprod_{\mathrm{im}(\tau)g\in \mathrm{im}(\tau)\backslash G} \mathcal{M}_\tau(\ker(\tau),1)\langle g\rangle\,.$$

作为一个特例，$\tau = \mathrm{id}_H$给出 $\mathcal{M}_{\mathrm{id}_H}$(1，1) $\simeq$(*R*-Mod$^{\text{free fg}}_{H,\ }$)•。

定理 3.33。 每个 τ-分次等价

$$\mathcal{M}_\tau(L,\psi)\langle g\rangle \to \mathcal{M}_\tau(L',\psi')\langle g'\rangle$$

对应于群元素和规范化 *1*-余链的一个选择

$$t \in \tau^{-1}(gg'^{-1}) \qquad \gamma\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L, R^\times)$$

其中 $L = tL't^{-1}$ 和 $\psi = \psi'^t \cdot d\gamma$，记作 $\psi'^t(a,\ b)\ hL') = \psi'(a,\ b)\ thL')$。由这些数据诱导的等价由下式给出

$$F_{t,\gamma}\colon R_{hL} \mapsto R'_{htL'}, \qquad e^a_{hL} \mapsto \gamma(a)(hL)e'^a_{htL'},$$

使用撇号表示 $\mathcal{M}_\tau(L',\ \psi')\ \langle g'\rangle$中的简单对象和基态射。自然同构 $F_{t,\ \gamma} \Rightarrow F_{s,\ \delta}$ 要求 $tL' = sL'$，并对应于满足 $\gamma = \delta \cdot d\eta$的 *0*-余链 $\eta\colon\ \ H/L \to R^\times$。

证明。记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\tau(L,\ \psi)\langle g\rangle$和 $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_\tau(L',\ \psi')\langle g'\rangle$。由于 $\mathcal{M}$在一般同构意义下只有一个简单对象 R_{1L}，任意函子 $F\colon\ \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 在对象上的取值由 R_{1L} 的像决定，在态射上的取值则由对每个 $h,\ a \in H$的 e^a_{hL} 的像决定。

如果 F 是一个 τ-分次等价，它必须保持简单性和对象次数。由于$|R_{1L}| = g$，因此我们必有 $FR_{1L} = R'_{tL'}$，其中某个 $t \in H$满足 $|R'_{tL'}| = \tau(t)g' = g$；也就是说，$t \in \tau^{-1}(gg'^{-1})$。更一般地，$F$必须将每个简单对象 R_{hL} 映射到某个 $R'_{aL'}$。于是我们有

$$\delta_{htL',aL'}Re'^h_{tL'} = \mathrm{Hom}^h_{\mathcal{M}}(R'_{tL'}, R'_{aL'}) \cong \mathrm{Hom}^h_{\mathcal{M}}(R_{1L}, R_{hL}) = Re^h_{1L}$$

因此 $aL' = htL'$。所以 F 在对象上的定义为 $R_{hL} \mapsto R'_{htL'}$。良定义性要求当 $R_{aL} = R_{bL}$时，$R'_{atL'} = R'_{btL'}$成立。记 $\ell = a^{-1}b$，这等价于要求当 $\ell \in L$时，$t^{-1}\ell t = (at)^{-1}bt \in L'$ 成立；也就是说，$L \le tL't^{-1}$。

对于态射，F现在必须由某个函数按 $e^a_{hL} \mapsto \gamma(a)(hL) \cdot e'^a_{htL'}$ 的方式作用

$$\gamma\colon H \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(H/L, R^\times).$$

函子性要求 $\gamma(1)(hL) = 1$，并且

$$\begin{aligned}
\psi(a,b)(hL)^{-1} \cdot \gamma(ab)(hL) \cdot e'^{ab}_{htL'} &= F\big(\psi(a,b)(hL)^{-1} \cdot e^{ab}_{hL}\big) \\
&= F(e^a_{bhL} \circ e^b_{hL}) \\
&= Fe^a_{bhL} \circ Fe^b_{hL} \\
&= \gamma(a)(bhL) \cdot e'^a_{bhtL'} \circ \gamma(b)(hL) \cdot e'^b_{htL'} \\
&= \gamma(a)(bhL) \cdot \gamma(b)(hL) \cdot \psi'(a,b)(htL')^{-1} \cdot e'^{ab}_{htL'},
\end{aligned}$$

重新整理后得到 $\psi = \psi'^t \cdot d\gamma$。那么 F 是

- 自动是满的，因为每个 e^a_{hL} 的像都非零，而且 $\mathcal{M}'$ 中所有简单对象的自同态空间都是一维的
- 自动是满射，因为任意 $R'_{hL'}$ 都有 $R'_{hL'} = F_{t,\ \gamma}(R_{ht^{-1}L})$
- 忠实当且仅当 $atL' = btL'$ 蕴含 $hL = L$；也就是说，当且仅当 $tL't^{-1} \le \qquad L.$

一个 τ-分次自然同构 $F_{t,\gamma} \Rightarrow F_{s,\delta}$ 的次数为 1 的分量具有如下形式

$$\eta_{R_{hL}} = \eta(hL)\,\mathrm{id}_{R'_{htL'}} \colon R'_{htL'} \to R'_{hsL'}$$

对于某个函数 $\eta\colon\ H/L \to R^\times$。当且仅当 $tL' = sL'$ 时，这一定义良好，并且自然性方块

$$\begin{array}{ccc} F_{s,\gamma}R_{hL} = R'_{hsL'} & \xrightarrow{\eta(hL)\,\mathrm{id}} & F_{s,\delta}R_{hL} = R'_{hsL'} \\ {\scriptstyle \gamma(a)(hL)e'^{a}_{hL'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta(a)(hL)e'^{a}_{hL'}} \\ F_{t,\gamma}R_{ahL} = R'_{ahtL'} & \xrightarrow{\eta(ahL)\,\mathrm{id}} & F_{s,\delta}R_{khL} = R'_{ahsL'}\,, \end{array}$$

当且仅当 $\gamma = \delta \cdot d\eta$ 时交换。 □

使用 n-上同调（此处取 $n = 2$）来分类对象、使用 $(n-1)$-上链来分类 1-态射，以及使用 $(n-2)$-上链来分类 2-态射，可能会让人想起 [BL04] 中的定理 8.3.7。不过请注意，Baez 和 Lauda 采用的是 $n = 3$。Baez 和 Lauda 同样研究 2-群（我们已将其推广为群同态；见第 2.1 节），但关键区别在于，他们改变的是 2-群，而我们固定群同态并改变其他数据。

4 与模范畴的关系

本节将从模范畴的角度构造 τ-分次范畴的另一种图景。我们首先回顾 [EGNO15] 中 H-模范畴的概念，并描述其 2-范畴 $H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}$。在特殊情形 $G = 1$ 下，我们接着证明，H-Hom-分次范畴 $\mathcal{C}$ 上的平移会在 $\mathcal{C}^1$ 上诱导出一个 H-模范畴结构。我们将其扩展为一个 2-函子

$$\mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle} \to H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}\,,$$

其中 $\mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}$ 是带移位的 H-Hom-分次范畴的 2-范畴（定义 2.15）。我们构造一个 2-函子

$$H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at} \to \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}$$

在第 4.3 节中，然后证明它们在第 4.4 节中构成一个 2-等价。最后，在第 4.5 节中，我们定义 2-范畴 $H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$，并导出一般的 2-等价 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau^{\langle\cdot\rangle} \simeq H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$。

4.1 H-模范畴回顾

定理 3.30 中使用的数据与 H-模范畴结构定理中使用的数据非常相似。不可分解的 H-模范畴见[EGNO15, Example 7.4.10], , 更完整的论述见 [Ost03] 和 [Nat17]。遵循 [EGNO15, §2.7] , 我们将 H-模范畴定义为 R-线性的 Disc(H)-模范畴的别称。

定义 4.1. 一个 H-模范畴 $(\mathcal{C}, \alpha)$ 是一个 R-线性范畴 $\mathcal{C}$ ，并配备一个R-线性幺半函子 $\alpha^{(-)}$: Disc(H) $\to$ Aut($\mathcal{C}$)，称为 H-作用。具体而言， α 是

一族 $(\alpha^h)_{h\in H}$ 的 R-线性等价 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，并配备自然同构$\epsilon\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow\alpha^1$和 $\mu_{a,b}\colon \alpha^a\alpha^b\Rightarrow\alpha^a b$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} \alpha^h & \xrightarrow{\epsilon*\mathrm{id}} & \alpha^1\alpha^h \\ {\scriptstyle \mathrm{id}*\epsilon}\downarrow & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mu_{1,h}} \\ \alpha^h\alpha^1 & \xrightarrow[\mu_{h,1}]{} & \alpha^h \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \alpha^a\alpha^b\alpha^c & \xrightarrow{\mu_{a,b}*\mathrm{id}} & \alpha^{ab}\alpha^c \\ {\scriptstyle \mathrm{id}*\mu_{bc}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{ab,c}} \\ \alpha^a\alpha^{bc} & \xrightarrow[\mu_{a,bc}]{} & \alpha^{abc} \end{array}$$

交换。在存在歧义时，我们写作 ϵ^α 和 μ^α。

定义 4.2。 H-模函子 $(F,s)\colon(\mathcal{C},\alpha)\to(\mathcal{D},\beta)$ 是一个 R-线性函子$F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，并配有自然同构 $(s^h\colon \beta^hF\Rightarrow F\alpha^h)_{h\in H}$，使下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ {\scriptstyle \epsilon^\beta*\mathrm{id}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \mathrm{id}*\epsilon^\alpha} \\ \beta^1F & \xrightarrow[s^1]{} & F\alpha^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \beta^a\beta^bF & \xrightarrow{\mathrm{id}*s^b} & \beta^aF\alpha^b & \xrightarrow{s^a*\mathrm{id}} & F\alpha^a\alpha^b \\ {\scriptstyle \mu^\beta_{a,b}*F}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}*\mu^\alpha_{a,b}} \\ \beta^{ab}F & & \xrightarrow[s^{ab}]{} & & F\alpha^{ab} \end{array}$$

交换。 H-模自然变换 $(E,r)\Rightarrow(F,s)$ 是一个 R-线性自然变换 $\eta\colon E\Rightarrow F$，且满足交换关系

$$\begin{array}{ccc} \beta^hE & \xrightarrow{r^h} & E\alpha^h \\ {\scriptstyle \beta^h*\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta*\alpha^h} \\ \beta^hF & \xrightarrow[s^h]{} & F\alpha^h \end{array}$$

对所有 $h\in H$ 都成立。相容的 H-模函子按如下方式复合：$(E,r)\circ(F,s)=(EF,rs)$，其中

$$(rs)^h_X = Es^h_X\circ r^h_{FX}\,.$$

我们用 H-$\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}$ 表示由 H-模范畴、 H-模函子和H-模自然变换构成的 2-范畴。

4.2 作为群作用的移位；2-函子 $(-)^1\colon \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}\to H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}$

现在我们说明， τ-分次范畴 $\mathcal{C}$ 上对象的移位如何直接对应于 H 在 $\mathcal{C}^1$ 上的作用。回顾第2.3节中的定义与记号。

定义 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 为一个 H-Hom-分次范畴。 $\mathcal{C}$ 的移位函子是一个函子

$$\phi\colon \mathrm{Disc}(H)\to\mathrm{Aut}(\mathcal{C}^1)$$

（即对每个 $a\in H$ 的一个自等价 $\phi^a\colon \mathcal{C}^1\to\mathcal{C}^1$），以及一个固定的次数为 a 的同构 $r^\phi_{X,a}\colon X\to\phi^aX$，对每个 $X\in\mathcal{C}$ 和 $a\in H$ （使得每个 ϕ^aX 成为 X 沿 a 的一个平移）。

当此类同构出现在交换图中时，我们不为其标注；其标记可由源与靶明确看出。此外，形如 $\phi^aX\to\phi^a\phi^bX$ 的未标记箭头应读作 $r^\phi_{\phi^bX}\circ r^\phi_{X,b}\circ(r^\phi_{X,a})^{-1}$，从而该方块

$$\begin{array}{ccc} \phi^aX & \longrightarrow & \phi^a\phi^bX \\ \uparrow & & \uparrow \\ X & \longrightarrow & \phi^bX \end{array}$$

可交换。

引理 4.4。设 $\mathcal{C}$ 是一个 H-*Hom*-分次范畴。当且仅当 $\mathcal{C}$ 具有移位函子时，$\mathcal{C}$ 具有移位（定义 *2.15* 中的意义）。

特别地，移位的每一组固定选取$(r_{X,a}\colon X \to X\langle a\rangle)_{X\in\mathcal{C},a\in H}$ 定义一个移位函子ϕ，它将对象 $X \mapsto X\langle a\rangle$ 与态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1}(X,Y)$ 映到$r_{Y,a}\circ f\circ r_{X\,a}^{-1}$，其中每个$r_{X,a}=r_{X\,,a}^{\phi}$。

证明。显然，一个移位函子直接给出一组移位的选取。反之，设 $\mathcal{C}$ 具有固定的移位，并如上定义 ϕ。对 $\mathcal{C}^1$ 中的每个态射 f，我们有 $|\phi^a f| = a1a^{-1} = 1$，并且 ϕ^a 的函子性由

$$\phi^a \mathrm{id}_X = r_{X,a}\circ \mathrm{id}_X \circ r_{X,a}^{-1} = r_{X,a}\circ r_{X,a}^{-1} = \mathrm{id}_{X\langle a\rangle} = \mathrm{id}_{\phi^a X}$$

以及交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\phi^a X & & \xrightarrow{\quad\phi^a(f'\circ f)\quad} & & \phi^a Z \\
\uparrow & & & & \uparrow \\
X & \xrightarrow{\quad f'\quad} & Y & \xrightarrow{\quad f\quad} & Z \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\phi^a X & \xrightarrow[\phi^a f']{} & \phi^a Y & \xrightarrow[\phi^a f]{} & \phi^a Z\,.
\end{array}$$

这可平凡地延拓为一个函子 $\phi\colon$ Disc(H) $\to$ 自同构群($\mathcal{C}^1$)，这是由于Disc(H)的离散性；并且不难证明我们有 $\phi^{a^{-1}}\phi^a \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}^1} \cong \phi^a\phi^{a^{-1}}$。 □

命题 4.5. 移位函子在自然同构意义下是唯一的。设 $\mathcal{C}$ 为一个 H-*Hom*-分次范畴，并带有移位函子 ϕ 和 ψ。则存在自然同构$\phi \cong \psi$。

证明. 假设 $\mathcal{C}$ 是一个 H-Hom-分次范畴，带有移位函子 ϕ 和 ψ。我们可以通过复合定义同构 $\eta_X^a \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^1}(\psi^a X, \phi^a X)$

$$\begin{array}{ccccc}
\psi^a X & & \xrightarrow{\quad\eta_X^a\quad} & & \phi^a X\,. \\
& \longleftarrow & X & \longrightarrow &
\end{array}$$

在 a 和 X 上的自然性由 Disc(H) 的离散性以及交换图得出

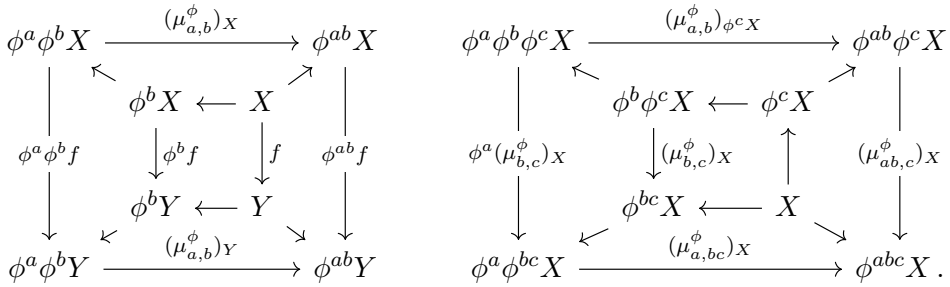
$$\begin{array}{ccccc}
\psi^a X & & \xrightarrow{\quad\psi^a f\quad} & & \psi^a Y \\
& \swarrow & & \nearrow & \\
\eta_X^a\downarrow & & X & \xrightarrow{\quad f\quad} Y & \downarrow\eta_Y^a \\
& \searrow & & \nearrow & \\
\phi^a X & & \xrightarrow[\phi^a f]{} & & \phi^a Y\,.
\end{array}$$

□

命题 4.6. 设 $\mathcal{C}$ 是一个带有固定平移、并由此诱导出移位函子 ϕ 的 H-*Hom*-分次范畴。则 $(\mathcal{C}^1,\phi)$ 定义了一个 H-模范畴，其 $\epsilon_X^{\phi} = r_{X,1}$ 和 μ^{ϕ} 由下列复合给出

$$\begin{array}{ccccccc}
\phi^a\phi^b X & & \xrightarrow{\qquad(\mu_{a,b}^{\phi})_X\qquad} & & & & \phi^{ab}X\,. \\
& \longleftarrow & \phi^b X & \longleftarrow & X & \longrightarrow &
\end{array}$$

证明。 μ^ϕ 的自然性和相干性由下列交换图给出

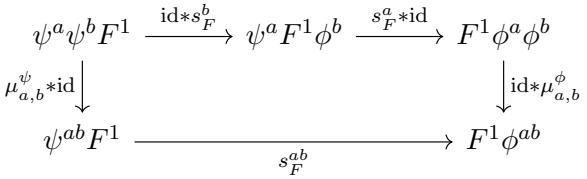


$r_{X,\,1}$的自然性由 $\phi^1 f \circ r_{X,\,1} = r_{Y,\,1} \circ f \circ r_X^{-1}{}_{,\,1} \circ r_{X,\,1}$给出，而相干性直接由 μ^ϕ 的定义得出。 □

引理 4.7。 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 H-*Hom*-分次函子，并固定 $a \in H$。假设 $\mathcal{C}$ 和$\mathcal{D}$ 具有固定的平移，分别诱导移位函子 ϕ和 ψ。那么

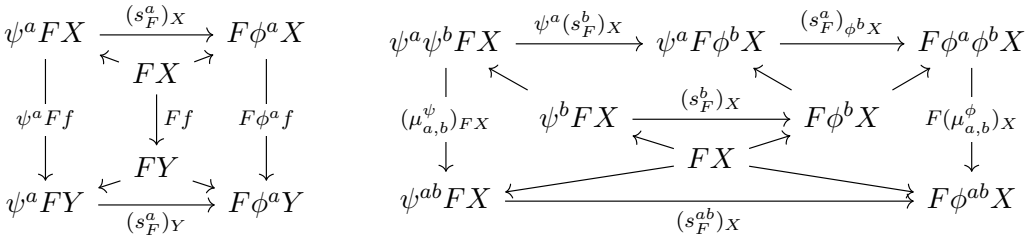
$$(s_F^a)_X = Fr_{X,a} \circ r_{FX,a}^{-1}$$

定义了一个 R-线性自然同构 $s_F^a\colon \psi^a F^1 \Rightarrow F^1\phi^a$。此外，对所有 a、$b \in H$，都有一个交换图



使得 (F^1, s) 定义了一个 H-模函子 $(\mathcal{C}^1, \phi) \to (\mathcal{D}^1, \psi)$。

证明。 自然性和相干性由以下交换图给出

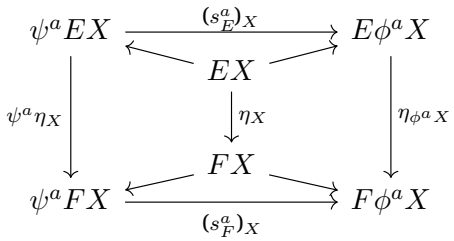


对于次数为 1 的 f。 □

命题 4.8. 则存在一个 *2*-函子 $(-)^1\colon \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle} \to H\text{-}\mathbb{M}^{\mathrm{od}}\mathbb{C}\mathrm{at}$ 将

- 每个对象 $\mathcal{C}$ 映到 $(\mathcal{C}^1, \phi)$ 如命题 *4.6* 中所述
- 每个 *1*-态射 F映到 (F^1, s_F) 如引理 *4.7* 中所述
- 每个 *2*-态射 η 到 η^1。

证明。 命题 4.6 和引理 4.7 表明，这在对象和 1-态射上定义良好。对于 2-态射，自然性给出了交换方块



从而 η^1 确实是一个 H-模自然变换，并且 $(-)^1$ 有良好定义。我们有 $(s^{\mathrm{id}_{\mathcal{C}}})_X = r_{X,\ a} \circ r^{-1}_{X\ ,\ a} = \mathrm{id}_{\phi^a}$，因此 $\mathrm{id}^1_{\mathcal{C}} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^1}$，并且

$$\begin{aligned}(s_{F'} s_F)^a_X &= F'(s^a_F)_X \circ (s^a_{F'})_{FX} \\ &= F'Fr_{X,a} \circ F'r^{-1}_{FX,a} \circ F'r_{FX,a} \circ r^{-1}_{F'FX,a} \\ &= F'Fr_{X,a} \circ \circ r^{-1}_{F'FX,a} \\ &= (s^a_{F'F})_X\end{aligned}$$

因此 $F'^1F^1 = (F'F)^1$，于是 $(-)^1$ 是底层 1-范畴之间的函子。由于 $(-)^1$对 2-态射的作用仅限于限制源和目标，因此它自动保留垂直复合、水平复合和恒等 2-态射。因此 $(-)^1$ 是一个 2-函子。

□

4.3 2-函子 $(-)^\bullet$: $H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at} \to \mathbb{C}\mathrm{at}^H{}_{,(\cdot)}$

反向构造——从 H-模范畴构造 H-Hom-分次范畴——更加困难，因为我们需要添加新的态射。受到 Hom-分次范畴中同构 $\mathrm{Hom}^h(X,\ Y) \cong \mathrm{Hom}^1(X\langle h\rangle,\ Y)$ 的启发，我们可以通过改变态射的源对象来记录其次数。然而，这意味着我们还必须改变态射的复合方式。

定义 4.9. 设 $(\mathcal{C}, \alpha)$ 是一个 H-模范畴。我们将 $(\mathcal{C}, \alpha)^\bullet$ 记作带有以下结构的 H-Hom-分次范畴：

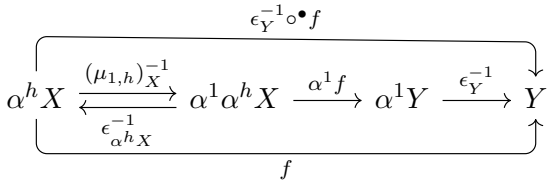
- 对象与 $\mathcal{C}$相同
- 次数为 h 的态射由 $\mathrm{Hom}^h{}_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^h X, Y)$ 给出
- 复合定义为

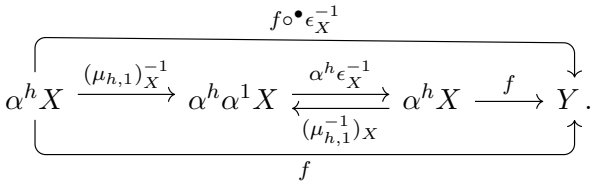
$$\alpha^{h'h}X \xrightarrow{\quad f'\circ^\bullet f \quad} \alpha^{h'}\alpha^h X \xrightarrow[(\mu_{h',h})^{-1}_X]{} \alpha^{h'}\alpha^h X \xrightarrow[\alpha^{h'}f]{} \alpha^{h'}Y \xrightarrow[f']{} Z$$

  对于态射 $f \in \mathrm{Hom}^h_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X,Y)$ 和 $f' \in \mathrm{Hom}^{h'}{}_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(Y,Z)$

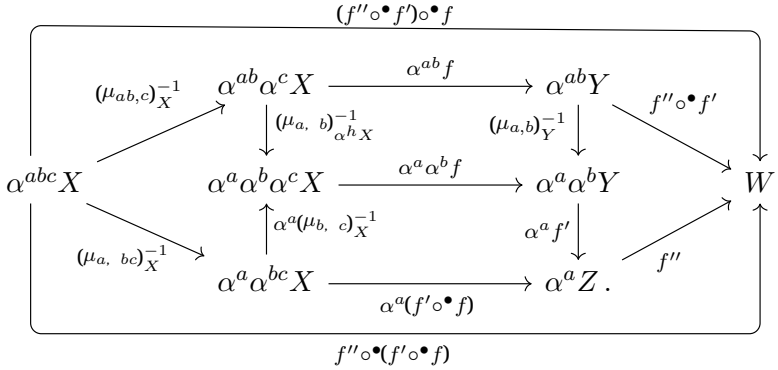
- 由 $\mathrm{id}^\bullet_X = \epsilon^{-1}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^1 X, X) = \mathrm{Hom}^1{}_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X,X)$给出的恒等态射。

复合 $\circ^\bullet$ 根据定义保持态射度，而恒等态射则由





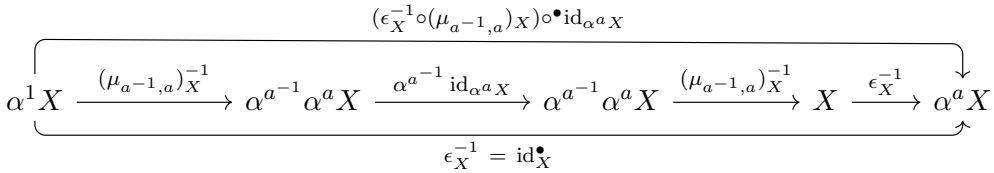
对于次数分别为 a, b, c 的齐次态射 f'', f', f，结合律由下列交换图给出

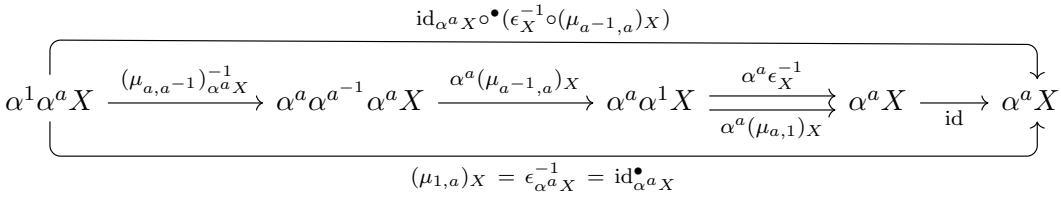


引理 4.10。 对于每个 H-模范畴 $(\mathcal{C}, \alpha)$， H-*Hom*-分次范畴 $(\mathcal{C}, \alpha)^\bullet$ 具有由 $X\langle a\rangle = \alpha^a X$ 给出的移位，以及同构

$$\begin{aligned} r^\alpha_{X,a} &= \mathrm{id}_{\alpha^a X} && \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^a X, \alpha^a X) = \mathrm{Hom}^a_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X, \alpha^a X) \\ (r^\alpha_{X,a})^{-1} &= \epsilon_X^{-1}\circ(\mu_{a^{-1},a})_X && \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^{a^{-1}}\alpha^a X, X) = \mathrm{Hom}^{a^{-1}}_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(\alpha^a X, X)\,. \end{aligned}$$

证明。 根据定义，这些态射具有正确的次数、源对象和目标对象。可逆性由交换图得出



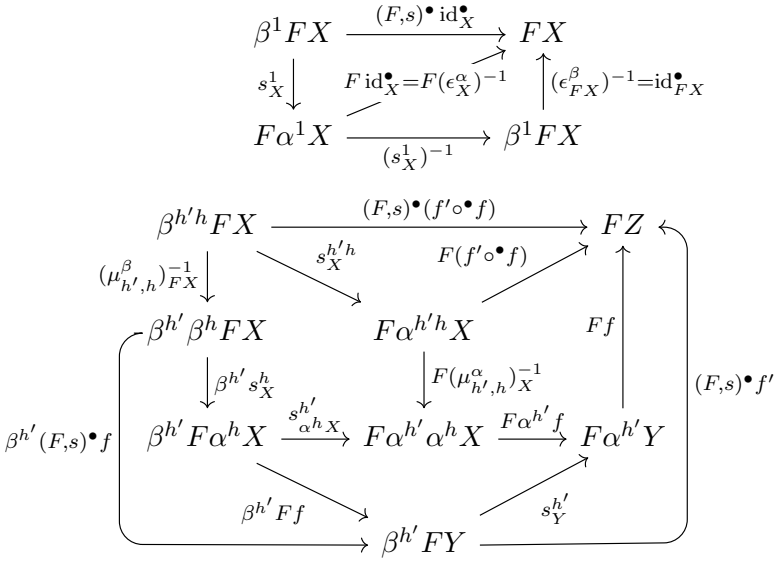


□

引理 *4.11.* 设 $(F,s)\colon(\mathcal{C},\alpha)\to(\mathcal{D},\beta)$ 是一个 H-模函子。则存在一个 H-$\mathbf{Hom}$-分次函子 $(F,s)^\bullet\colon(\mathcal{C},\alpha)^\bullet\to(\mathcal{D},\beta)^\bullet$，将每个对象 $X\mapsto FX$ 以及每个态射 $f\in\mathbf{Hom}^h_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X,Y)=\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^hX,Y)$ 映射为

$$(F,s)^\bullet f=Ff\circ s^h_X\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\beta^hFX,FY)\in\mathrm{Hom}^h_{(\mathcal{D},\beta)^\bullet}(FX,FY)\,.$$

证明。 根据定义，$(F,s)^\bullet$ 保持态射度。函子性由下列交换图表给出



因为后者的底部路径恰好就是 $(F,s)^\bullet f'\circ^\bullet(F,s)^\bullet f$ 的定义。 □

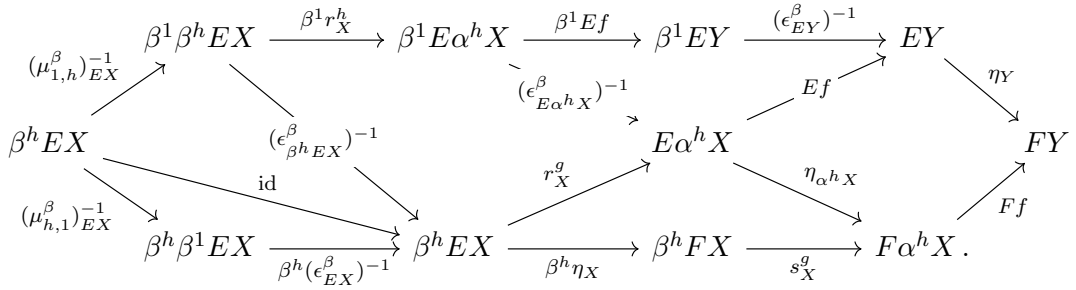
引理 *4.12.* 设 $(E,r),(F,s)\colon(\mathcal{C},\alpha)\to(\mathcal{D},\beta)$ 是 H-模函子，并设有一个 H-模自然变换 $\eta\colon(E,r)\Rightarrow(F,s)$。那么存在一个 H-$\mathbf{Hom}$-分次自然变换 $\eta^\bullet\colon(E,r)^\bullet\to(F,s)^\bullet$，其分量定义为

$$\eta^\bullet_X=\eta_X\circ(\epsilon^\beta_{EX})^{-1}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\beta^1EX,FX)\in\mathrm{Hom}^1_{(\mathcal{D},\beta)^\bullet}(EX,FX)\,.$$

*Pro*关于。 令 $f\in\mathbf{Hom}^h_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X,Y)=\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^hX,Y)$。展开复合规则可得 s

$$\eta^\bullet_Y\circ^\bullet(E,r)^\bullet f=(\eta_Y\circ(\epsilon^\beta_{EY})^{-1})\circ^\bullet(Ef\circ r^h_X)=\eta_Y\circ(\epsilon^\beta_{EY})^{-1}\circ\beta^1Ef\circ\beta^1r^h_X\circ(\mu^\beta_{1,h})^{-1}_{EX}$$
$$(F,s)^\bullet f\circ^\bullet\eta^\bullet_X=(Ff\circ s^h_X)\circ^\bullet(\eta_X\circ(\epsilon^\beta_{EX})^{-1})=Ff\circ s^h_X\circ\beta^h\eta_X\circ\beta^h(\epsilon^\beta_{EX})^{-1}\circ(\mu^\beta_{h,1})^{-1}_{EX}\,,$$

根据交换图，这两条线相等



□

命题 4.13。 存在一个 *2*-函子 $(-)^\bullet\colon\ H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}\ \to \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}$ 由定义 *4.9* 以及引理 *4.11* 和 *4.12* 定义。

证明。 由引理 4.10 可知，这定义良好。设 $f \in \mathrm{Hom}^h_{(\mathcal{C},\alpha)\bullet}(X,\ Y)$。则 $(-)^\bullet$ 由下式保持恒等 1-态射

$$\mathrm{id}^\bullet_{(\mathcal{C},\alpha)}X = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}X = X \qquad \mathrm{id}^\bullet_{(\mathcal{C},\alpha)}f = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}f \circ \mathrm{id}_{\alpha^h X} = f$$

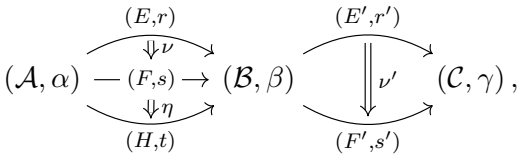
并由下式保持 1-态射的复合

$$\begin{aligned}((E,r)\circ(F,s))^\bullet X &= EFX = E^\bullet F^\bullet X\\ ((E,r)\circ(F,s))^\bullet f &= (EF, E(s^h_X \circ r^h_{FX}))^\bullet f\\ &= EFf \circ Es^h_X \circ r^h_{FX}\\ &= E^\bullet(Ff \circ s^h_X)\\ &= E^\bullet F^\bullet f\,.\end{aligned}$$

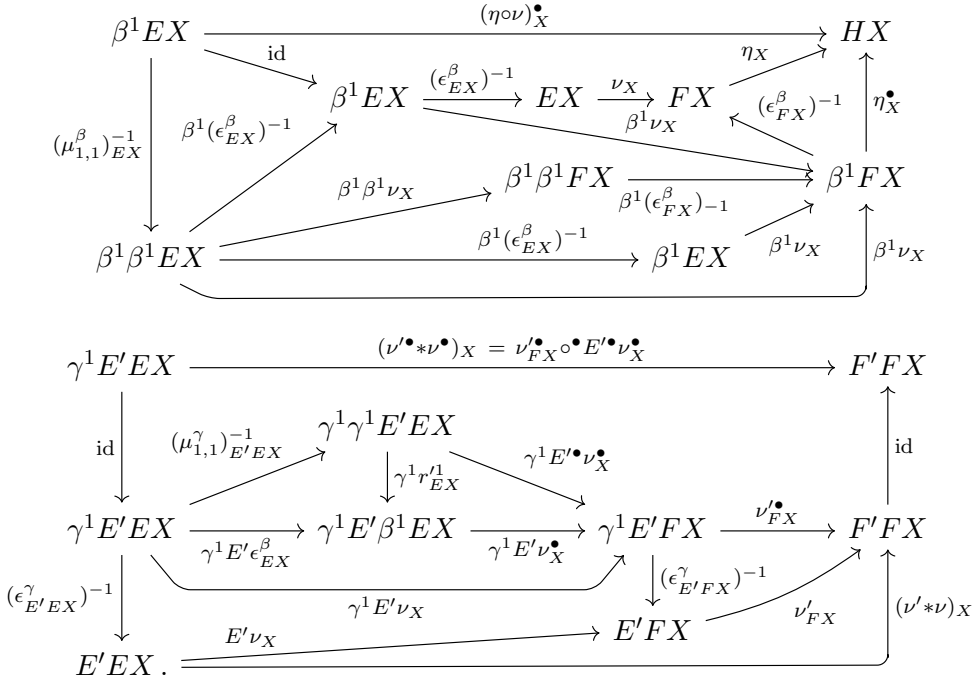
恒等 2-态射由下式保持

$$(\mathrm{id}_{(F,s)})^\bullet_X = \mathrm{id}_{FX} \circ (\epsilon^\beta_{FX})^{-1} = \mathrm{id}^\bullet_{FX} = (\mathrm{id}^\bullet_{(F,s)\bullet})_X$$

对于 $(F,\ s)\colon (\mathcal{C},\ \alpha) \to (\mathcal{D},\ \beta)$。给定 $H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}$ 中如下形式的图



我们已由交换图得到垂直复合与水平复合的保持



□

4.4 $\mathbb{C}\mathrm{at}^{H}{}_{,\langle\cdot\rangle}$ 与 H-$\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}$之间的 2-等价

尚需证明2-函子$(-)^1$ 与$(-)^\bullet$ 构成一个2-等价。也就是说，我们必须找到2-自然同构

$$\boldsymbol{\nu}\colon ((-)^\bullet)^1 \to \mathbf{id}_{H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}} \qquad \boldsymbol{\eta}\colon ((-)^1)^\bullet \to \mathbf{id}_{\mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}}\,.$$

引理 4.14。 设$(\mathcal{C},\alpha)$ 是一个 H-模范畴。那么$((\mathcal{C},\alpha)^\bullet)^1$ 上的 H-作用由 $\phi\colon \mathrm{Disc}(H) \to \mathrm{Aut}((C)^1)$ 给出，其中

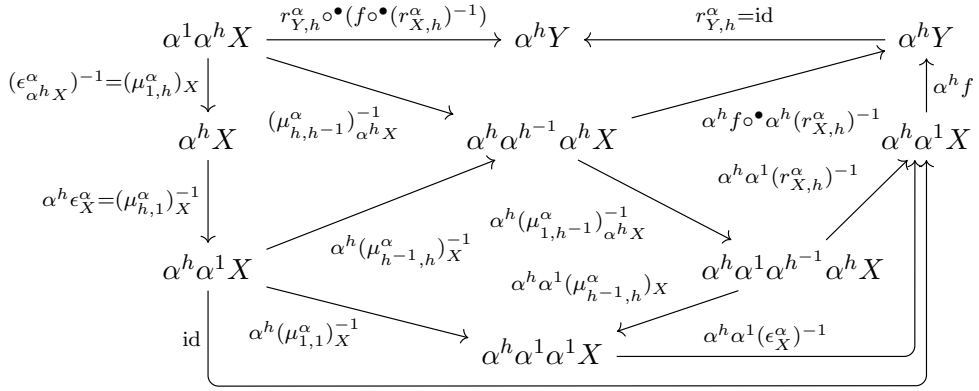
$$\phi^h X = \alpha^h X \qquad \epsilon^\phi_X = r^\alpha_{X,1} = \mathrm{id}_{\alpha^1 X}$$
$$\phi^h f = \alpha^h f \circ \alpha^h \epsilon^\alpha_X \circ (\epsilon^\alpha_{\alpha^h X})^{-1} \qquad (\mu^\phi_{a,b})_X = (\mu^\alpha_{a,b})_X \circ (\epsilon^\alpha_{\phi^a\phi^b X})^{-1}$$

对于态射 $f \in \mathrm{Hom}_{((\mathcal{C},\alpha)^\bullet)^1}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^1 X, Y)$。

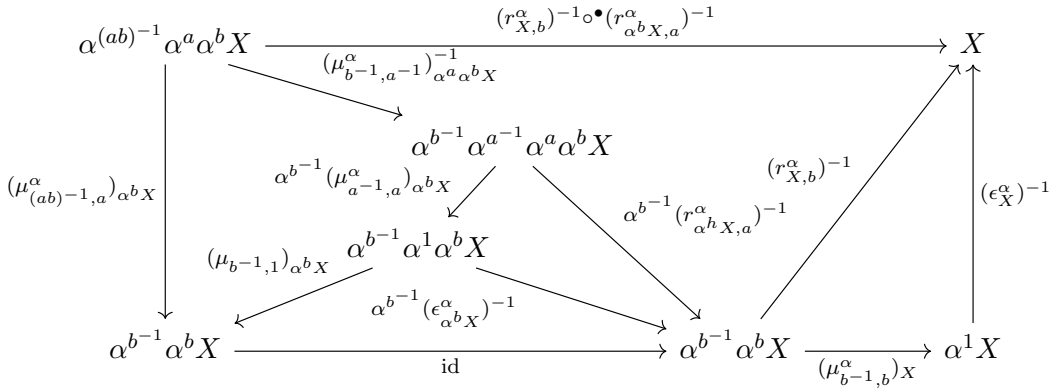
证明。 应用这些 2-函子，得到

$$\phi^h X = \alpha^h X \qquad \epsilon^\phi_X = r^\alpha_{X,1} = \mathrm{id}_{\alpha^1 X}$$
$$\phi^h f = r^\alpha_{Y,h} \circ^\bullet f \circ^\bullet (r^\alpha_{X,h})^{-1} \qquad (\mu^\phi_{a,b})_X = r^\alpha_{X,ab} \circ^\bullet (r^\alpha_{X,b})^{-1} \circ^\bullet (r^\alpha_{\alpha^b X,a})^{-1}\,.$$

交换图

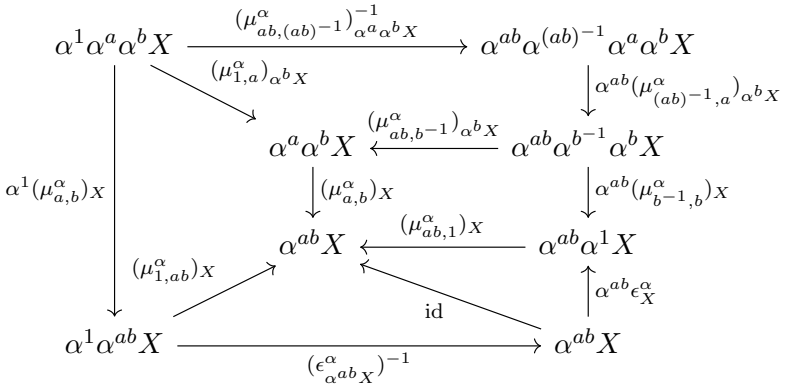


给出 $\phi^h f = \alpha^h f \circ \alpha^h \epsilon^\alpha_X \circ (\epsilon^\alpha_{\alpha^h X})^{-1}$。交换图



使 $\alpha^{ab}((r^\alpha_{X,\ b})^{-1}\circ^\bullet(r^\alpha_{\alpha^b X,\ a})^{-1})$ 与下方右侧的进一步交换图相匹配

交换图



给出

$$\begin{aligned}(\mu^\phi_{a,b})_X &= r^\alpha_{X,ab}\circ^\bullet (r^\alpha_{X,b})^{-1}\circ^\bullet (r^\alpha_{\alpha^bX,a})^{-1}\\ &= r^\alpha_{X,ab}\circ\phi^{ab}((r^\alpha_{X,b})^{-1}\circ^\bullet (r^\alpha_{\phi^bX,a})^{-1})\circ(\mu^\alpha_{ab,(ab)^{-1}})^{-1}_{\phi^a\phi^bX}\\ &= \mathrm{id}_{\phi^{ab}X}\circ(\epsilon^\alpha_{\phi^{ab}X})^{-1}\circ\alpha^1(\mu^\alpha_{a,b})_X\\ &= (\mu^\alpha_{a,b})_X\circ(\epsilon^\alpha_{\phi^a\phi^bX})^{-1}\,.\end{aligned}$$

□

引理 4.15. 对于每个 H-模范畴 $(\mathcal{C},\alpha)$，存在一个 H-模等价

$$\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)} = (\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)},\mathrm{id})\colon((\mathcal{C},\alpha)^\bullet)^1\to(\mathcal{C},\alpha)$$

将对象 $X\mapsto X$ 与态射 $f\in\mathrm{Hom}_{((\mathcal{C},\alpha)^\bullet)^1}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha^1X,Y)$ 映到$f\circ\epsilon^\alpha_X$。

证明。 可以给出一个严格逆，将态射 $f\mapsto f\circ(e^\alpha_X)^{-1}$映过去。对于 1 次态射 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{f'}Z$，我们有

$$f'\circ^\bullet f = f'\circ\alpha^1f\circ(\mu^\alpha_{1,1})^{-1}_X = f'\circ\alpha^1f\circ\epsilon^\alpha_{\alpha^1X} = f'\circ\epsilon^\alpha_Y\circ f\,,$$

从而 $\boldsymbol{\nu}^1_{(\mathcal{C},\alpha)}$ 的函子性由下式给出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\,\mathrm{id}^\bullet_X = \mathrm{id}^\bullet_X\circ\epsilon^\alpha_X = (\epsilon^\alpha_X)^{-1}\circ\epsilon^\alpha_X = \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}X}\\ \boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}(f'\circ^\bullet f) = f'\circ\epsilon^\alpha_Y\circ f\circ\epsilon^\alpha_X = \boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}f'\circ\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}f\,.\end{aligned}$$

现在 $\mathrm{id}_{\alpha^h\alpha}$ 按下式给出自然变换 $\alpha^h\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\Rightarrow\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\phi^h$

$$\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\phi^hf = \phi^hf\circ\epsilon^\alpha_{\alpha^hX} = \alpha^hf\circ\alpha^h\epsilon^\alpha_X\circ(\epsilon^\alpha_{\alpha^hX})^{-1}\circ\epsilon^\alpha_{\alpha^hX} = \alpha^h\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}f\,,$$

而 H-模等价的相容性图表可直接由

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\epsilon^\phi_X = \epsilon^\phi_X\circ\epsilon^\alpha_X = \mathrm{id}_X\circ\epsilon^\alpha_X = \epsilon^\alpha_X\\ \boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}(\mu^\phi_{a,b})_X = (\mu^\phi_{a,b})_X\circ\epsilon^\alpha_{\phi^a\phi^bX} = (\mu^\alpha_{a,b})_X\circ(\epsilon^\alpha_{\phi^a\phi^bX})^{-1}\epsilon^\alpha_{\phi^a\phi^bX} = (\mu^\alpha_{a,b})_X\,.\end{aligned}$$

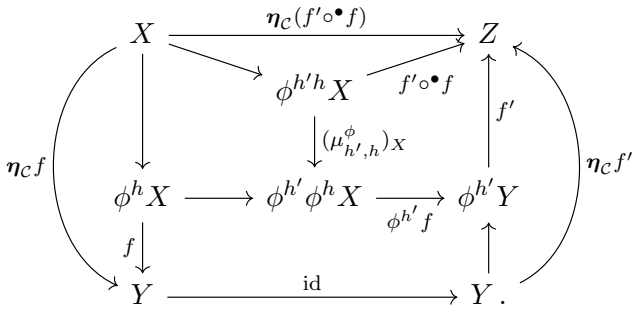
□

引理 4.16. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 H-*Hom*-分次范畴，其平移记作 $r_{X,a}\colon X\to X\langle a\rangle$。那么存在一个 H-*Hom*-分次等价 $\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}}\colon(\mathcal{C}^1)^\bullet\to\mathcal{C}$，它将对象 $X\mapsto X$ 以及态射 $f\in\mathrm{Hom}^{\overset{h}{}}_{(\mathcal{C}^1)^\bullet}(X,Y) = \mathrm{Hom}^1_{\mathcal{C}}(X\langle h\rangle,Y)$ 映射到 $f\circ r_{X,h}$。

证明. 可以定义一个严格逆，将态射 $f \mapsto f \circ r^{-1}_{X\,h,}$映射为。函子性由

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{id}^{\bullet}_{X} = \mathrm{id}^{\bullet}_{X} \circ r_{X,1} = \epsilon_X^{-1} \circ e_X = \mathrm{id}_X$$

以及交换图



□

The定理 4.17。 函子 $(-)^1 \colon \mathbb{C}\mathrm{Cat}^{H,\langle\cdot\rangle} \rightleftarrows H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{Mod}\mathbb{C}\mathrm{Cat}$: $(-)^{\bullet}$ 构成一个 *2*-等价 .

*Pro*证。 我们证明 $\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}}$ 给出了 2-自然同构的分量

$$\boldsymbol{\nu} \colon ((-)^{\bullet})^1 \Rightarrow \mathbf{id}_{H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}} \qquad \boldsymbol{\eta} \colon ((-)^1)^{\bullet} \Rightarrow \mathbf{id}_{\mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}} .$$

我们已经看到这些分量是可逆的。

首先，设 $(F,s)\colon (\mathcal{C},\alpha) \to (\mathcal{D},\beta)$ 是一个 H-模函子。分别用 ϕ 和 ψ 表示在 $(\mathcal{C},\alpha)^{\bullet}$ 和 $(\mathcal{D},\beta)^{\bullet}$ 上诱导的移位函子。根据引理 4.7 和 4.11，$((F,s)^{\bullet})^1$将对象 $X \mapsto FX$ 以及态射 $f \in \mathrm{Hom}_{((\mathcal{C},\alpha)^{\bullet})^1}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C},\alpha)}(\alpha^1 X, Y)$ 映到$Ff \circ s^h_X$。回顾引理 4.15 中的 H-模等价 $\boldsymbol{\nu}$； s的相干性给出

$$\big(\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{D},\beta)} \circ ((F,s)^{\bullet})^1\big)X = FX = \big((F,s) \circ \boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\big)X$$
$$\big(\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{D},\beta)} \circ ((F,s)^{\bullet})^1\big)f = Ff \circ s^1_X \circ e^{\alpha}_{FX} = F(f \circ \epsilon^{\alpha}_X) = \big((F,s) \circ \boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}\big)f$$

使得 $\boldsymbol{\nu}_{(\mathcal{C},\alpha)}$ 在 $(\mathcal{C},\alpha)$ 中是自然的。

现在设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 H-Hom-分次函子。假设 $\mathcal{C}$ 具有移位，记作$r_{X,a}\colon X \to \phi^a X$，而 $\mathcal{D}$ 具有移位，记作 $s_{Y,a}\colon Y \to \psi^a Y$。回顾引理 4.16 中的 H-Hom-分次等价 $\boldsymbol{\eta}$；我们有

$$(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{D}} \circ (F^1)^{\bullet})X = \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{D}}(FX) = FX = (F \circ \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}})X$$
$$(\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{D}} \circ (F^1)^{\bullet})f = \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{D}}(F^1 f \circ (s^h_F)_X) = \big(Ff \circ Fr^{\phi}_{X,h} \circ (r^{\psi}_{FX,h})^{-1}\big) \circ r^{\psi}_{FX,h} = (F \circ \boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}})f$$

使得 $\boldsymbol{\eta}_{\mathcal{C}}$ 在 $\mathcal{C}$ 中是自然的。 □

4.5 Cat· τ 与 H(cid:57)ModCatτ 之间的 2-等价

我们将这个最终的 2-等价作为定理 4.17 的限制得到，但首先需要确定与 $\mathbb{C}\mathrm{at}^{(\cdot)}_{\tau} \supseteq \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle}$ 对应的 H-$\mathbb{M}$od$\mathbb{C}$at 的扩张。

定义 4.18. A τ-模范畴 是一个 H-模范畴 $(\mathcal{C},\alpha)$，满足

1. $\mathcal{C}$ 是带有 $\mathcal{C} = \coprod_{g\in G} \mathcal{C}_g$的 G分级
2. 对所有 $h \in H$、 $g \in G$ 和 $X \in \mathcal{C}_g$，我们有 $\alpha^h X \in \mathcal{C}_{\tau(h)g}$。

我们用 $H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$ 表示 τ-模范畴构成的 2-范畴，其中

- τ-模函子是 H-模函子（F, s），对所有齐次对象 X满足 $|FX| = |X|$

- τ-模自然变换就是τ-模函子之间的 H-模自然变换。

如 [JY21] 中那样，将伪函子的2-范畴记作$\mathrm{Fun}^{ps}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$，并回顾例 2.4中的群胚 $\mathcal{G}_\tau$，对数据的直接比较可得

$$H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau = \mathrm{Fun}^{ps}(\mathrm{Disc}(\mathcal{G}_\tau), \mathbb{C}\mathrm{at})\,.$$

当 $\tau = \chi$ 是交叉模时， $\mathcal{G}_\chi$ 成为一个2-群。存在2-群表示的标准概念（例如见 [Elg07]），但这**并不**与$H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}$在$x$处的对象相符。2-群的表示则是从 $\mathcal{G}_\chi$的去环化出发的伪函子，或许可以记为

$$\mathcal{G}_\chi\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at} = \mathrm{Fun}^{ps}(\mathbf{B}\mathcal{G}_\chi, \mathbb{C}\mathrm{at})\,.$$

特别地，Disc($\mathcal{G}_\chi$)的对象来自 G，1-态射来自 H，而$\mathbf{B}\mathcal{G}_\chi$ 的1-态射来自 G，2-态射来自 H。

定理 4.19。 定理 *4.17* 中的 *2*-等价 $(-)^1\colon\ \mathbb{C}\mathrm{at}^{H,\langle\cdot\rangle} \rightleftarrows H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}\colon\ (-)^\bullet$可扩展为 *2*-等价 $\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau^{\langle\cdot\rangle} \simeq H\text{-}\mathbb{M}\mathrm{od}\mathbb{C}\mathrm{at}_\tau$。

证明。 设 $\mathcal{C}$ 是一个带移位的 τ-分次范畴。 H-模范畴 $\mathcal{C}^1$ 从 $\mathcal{C}$ 继承对象次数。由于 H-作用恰好是移位函子，根据注 2.13， $\mathcal{C}^1$ 是一个 H-模范畴。

反过来，现设 $(\mathcal{C},\ \alpha)$ 是一个 τ-模范畴。 H-Hom-分次范畴 $(\mathcal{C},\ \alpha)^\bullet$ 再次从 $(\mathcal{C},\ \alpha)$ 继承对象次数。对于齐次的 X 和 Y，我们有 $|\alpha^h X| = \tau(h)|X|$，因此

$$\mathrm{Hom}^h_{(\mathcal{C},\alpha)^\bullet}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{(\mathcal{C},\alpha)}(\alpha^h X, Y) = 0$$

除非 $|Y| = \tau(h)|X|$。

如果 F 是一个 τ-分次函子，那么 $|FX| = |X|$ 自动成立。如果 $(F,\ s)$ 是一个 τ-模函子，那么我们还有 $|(F,\ s)^\bullet X| = |FX| = |X|$。对 2-态射没有额外条件。 □

备注 4.20。 当 $G = 1$时，不可分解半单的 H-Hom-分次范畴$\mathcal{M}_\tau(L,\ \psi)$（见定义 3.23）在此 2-等价下对应于 [EGNO15 中例 7.4.10] 的不可分解 H-模范畴。这正是定理 3.30 推广 H-模范畴结构定理的确切含义。

致谢

这项工作作为作者博士项目的一部分完成，项目得到诺丁汉大学数学科学学院奖学金的支持。作者谨此感谢 Robert Laugwitz 的指导与帮助。

参考文献

[Bai17] James Bailie。《半单范畴》。2017年。网址：https: // jameshbailie . github . io / files / papers / 2017 - 06 - 26 - Semisimple - categories . pdf（访问于2026年1月29日）。预发表。[BL04] John C. Baez 和 Aaron D. Lauda。“高维代数 V：2-群”。载于：范畴理论与应用 12.14（2004年），第423–491页。[BW96] John W. Barrett 和 Bruce W. Westbury。“分段线性三维流形的不变量”。载于：美国数学会会刊 348（1996年），第3997–4022页。doi：10.1090/S0002-9947-96-01660-1。arXiv：hep- th/9311155。[EGNO15] Pavel Etingof、Shlomo Gelaki、Dmitri Nikshych 和 Victor Ostrik。《张量范畴》。第205卷。数学调查与专著。美国数学会，2015年。isbn：978-1-4704-2024-6。网址：https://math.mit.edu/~etingof/egnobookfinal.pdf。[Elg07] Josep Elgueta。“Kapranov 和 Voevodsky 的 2-向量空间上的 2-群表示论”。载于：《数学进展》213.1（2007年），第53–92页。issn：00018708。doi：10.1016/j.aim.2006.11.010。arXiv：math/0408120。[Hau24] Rune Haugseng。《高阶范畴论》。载于：数学物理百科全书。第2版。Elsevier，2024年。isbn：978-0-323-95703-8。arXiv：2401.14311。[JS17] Theo Johnson-Freyd 和 Claudia Scheimbauer。“（伪）松自然变换、扭曲量子场论与‘偶数更高’的 Morita 范畴”。载于：《数学进展》307（2017年），第147–223页。issn：00018708。doi：10.1016/j.aim.2016.11.014。arXiv：1502.06526。[JY21] N. Johnson 和 D. Yau。《2-维范畴》。牛津大学出版社，2021年。isbn：978-0-19-887137-8。arXiv：2002.06055。[Kel05] G. M. Kelly。《富化范畴论基本概念》。范畴理论与应用重印本，第10卷。2005年。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10.pdf。[Nat17] Sonia Natale。“关于群论……上的模范畴等价性”。

l

融合范畴”。载于：《对称性、可积性与几何：方法与应用》13.042 (2017年)。ISSN：18150659。doi：10.3842/SIGMA.2017.042。arXiv：1608.04435。[Ost03] Viktor Ostrik。“有限群 Drinfeld 双上的模范畴”。载于：《国际数学研究通知》27 (2003)，第 1507–1520 页。ISSN：1073-7928。doi：10.1155/S1073792803205079。arXiv：math/0202130。[SV23] Kürşat Sözer 和 Alexis Virelizier。“由交叉模分次的幺半范畴与三维同伦量子场论”。载于：《数学进展》428 (2023)。ISSN：0001-8708。doi：10.1016/j.aim.2023.109155。arXiv：2207.06534。[SV25] Kürşat Sözer 和 Alexis Virelizier。“Hopf 交叉模（余）代数”。载于：《纯粹与应用代数杂志》229 (2025)。ISSN：0022-4049。doi：10. 1016/j.jpaa.2025.108083。arXiv：2305.15485。[TV12] Vladimir Turaev 和 Alexis Virelizier。“关于三维同伦量子场论，I”。载于：《国际数学杂志》23.09 (2012)。ISSN：0129-167X，1793-6519。doi：10.1142/S0129167X12500942。arXiv：1202.6292。

[TV92] V. G. Turaev 和 O. Y. Viro.《3维流形的状态和不变量与量子 6j-符号》。载于：*Topology* 31.4 (1992)，第 865–902 页。ISSN：0040-9383。DOI：10.1016/0040-9383(92)90015-A。