arXiv:2602.06010v1 [math.FA] 5 Feb 2026

局部倍增空间上的向量值奇异积分

MATTIA CALZI, ELENA RIZZO

摘要。我们证明了在连通局部倍增度量测度空间上，（适当的）Calderón-Zygmund 算子以及（截断的）Hardy–Littlewood 极大函数的向量值有界性。

1. 引言

给定一个满足倍增性质的度量（或拟度量）测度空间 (X, d, μ)，也就是说，存在常数 $C > 0$ 使得

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant C\mu(B(x, r)) \tag{1}$$

对每个 $x \in X$ 和每个 $r > 0$，自 Coifman 和 Weiss 的工作 [4] 以来，人们已知可以像 $\mathbb{R}^n$ 的经典情形那样，发展出一套相当完备的 Calderón–Zygmund 算子理论。特别地，参见 [8] 中关于向量值 Calderón–Zygmund 算子的一些结果。

众所周知，从某种意义上说，这类理论也具有“全局性”，因为它所依据的 Calderón–Zygmund 分解具有某种程度的非局部性质。因此，如果需要处理一个仅局部倍增的空间，即一个(1)式仅对 $r \in (0, R]$ 且对某个固定的 $R > 0$成立的空间，那么通常的 Calderón–Zygmund 理论便无法应用，尽管人们已经在各种不同的背景下研究了该理论某些方面的若干扩展。

如果度量空间 (X, d) 是测地的，即 X 中的任意两点都可以由一条极小曲线连接，那么可以证明，在(1)式对 $r \in (0, R]$ 成立的条件下（参见注 3），每个半径为 $\leqslant R$ 的球，配备诱导距离和测度，都是一个倍增度量测度空间。相反，如果 (X, d) 是超度量空间，则更容易证明，半径为 $\leqslant 2R$ 的球是倍增的（具有相同的常数）。因此，在这两种情况下，都可以在每个球上“局部地”应用通常的 Calderón–Zygmund 理论，并使用一致的常数，然后在一定程度上重构出一个全局理论。

然而，如果 (X, d) 既不是测地空间，也不是超度量空间，那么目前尚不清楚其中是否存在任何（非空的）倍增开子空间。本文旨在探讨这一问题，并说明在此背景下或可发展某种“局部”的 Calderón–Zygmund 理论。我们将仅证明向量值

关键词与短语。局部倍增空间、Calderón–Zygmund 算子、极大函数、向量积分。*2020* 年数学主题分类：46G10，47B90。作者均为意大利国家高等数学研究所（INdAM）下属的国家数学分析、概率及其应用小组（GNAMPA）的成员。作者的研究部分受到 INdAM-GNAMPA 项目资助，项目编号为 CUP_E5324001950001。

Calderón–Zygmund 算子的主要定理（定理 14 和推论 15 和 17）以及向量值截断 Hardy–Littlewood 极大函数的有界性（参见定理 18）的局部类比。尽管我们会说明结果适用所需的倍增条件 (1) 所涉及的最大半径，但并不声称这些要求是最优的；事实上，更精细的分析或许能使这些要求中的半径更小。作出这一选择是因为局部倍增空间通常满足条件 (1)，其中常数 C_r 依赖于 r，且映射 $r \mapsto C_r$ 递增但处处有限。由于最初促使我们撰写本文的应用（参见 [3]），在研究 Hardy–Littlewood 极大函数的向量值有界性时，我们不考虑取值于 $\ell^q(\mathbb{N})$的函数，而是考虑更一般的混合范数空间。除此之外，我们基本遵循该主题的经典文献（参见 [4, 8]），但为求简便，我们在度量空间而非拟度量空间上工作；此外，为了建立 Whitney 引理的一个恰当类比，我们还需要假设空间 X 是连通的。尽管证明只是对经典证明作了相对简单的修改，我们仍在若干细节处讨论了一些微妙之处，并修正了部分经典证明中的一些小错误（参见推论 15 和定理 18）。

2. 主要结果的陈述与证明

我们固定一个局部紧、连通的[1]度量空间（X，d），其上赋有一个非零正的内正则 Radon 测度 μ，使得 $\operatorname{Supp}\mu = X$。对于每个 $R > 0$，我们将 D_R 记作 $[1, +\infty]$ 中满足以下条件的最小元素：

$$\mu(B(x, 2r)) \leqslant D_R \mu(B(x, r))$$

对每个 $x \in X$ 以及每个 $r \in (0, R]$。注意，由于我们假设 $\operatorname{Supp}\mu = X$，对每个 $x \in X$ 和每个 $r > 0$，都有 $\mu(B(x, r)) > 0$，因此D_R 总是有定义的（无论有限与否）。

注意，除非 X 可分，否则 μ 不一定是外正则的。此外，回顾一下，定义在 X 上的内正则 Radon 测度 μ 是满足以下条件的博雷尔测度：

- μ 是内正则的，也就是说，对 X的每个博雷尔子集 B，$\mu(B)$等于所有 $\mu(K)$的上确界，其中 K 遍历 B的所有紧子集；
- 每个 $x \in X$ 都有一个具有有限测度的开邻域。由于 X 是局部紧的，这等价于说 X的每个紧子集都具有有限测度。

于是可以把 μ 延拓为 μ可测集的 σ-代数上的一个测度，也就是延拓到 X 中满足如下条件的子集 E 的全体：对 X的每个紧子集 K，都存在博雷尔集 B, N，使得 $B \subseteq E \cap K \subseteq B \cup N$且 $\mu(N) = 0$。注意，我们并不假设 μ 是 σ-有限的。

注记 1. 如果我们不假定 X 是局部紧的，仍可考虑 X 上的一个正的 内正则 Radon 测度 μ。若 $D_R < \infty$ 对某个 $R > 0$ 成立，则可证明每个球 $B(x, r)$，$r \leqslant R$，都是相对紧的（且具有有限测度）。作为推论，X 的完备化 $\widehat{X}$ 是局部紧的，并且 μ 诱导一个正的

[1]我们仅在证明引理 5 时需要连通性。事实上，一个更弱的假设就已足够，只需要求：对 X的每个非空真有界开子集 U，存在 $x \in X \setminus U$，使得直径$(U) =$ 直径$(U \cup \{x\})$。

^Radon 测度，定义在 X 上，并具有相同的倍增常数。换言之，假定 X 是局部紧的并不会在一般性上造成实质性损失。

引理 2. 取 $R > 0$ 使得 $D_R < \infty$。那么 $\mu(U)\ \mu(B(x,r)) \in (0,+\infty)$ 对 X 的每个非空开子集 U 都成立，且满足 直径$(U) < 2R$；对每个 $x \in X$ 以及每个 $r \in (0, 2R]$ 也成立。

证明。首先注意，对每个 $x \in X$，存在 $r \in (0, R]$ 使得 $\mu(B(x,r)) \in (0,\infty)$，因为 μ 是 Radon 测度。于是，对每个 $r' \in (0,r]$，$\mu(B(x,r'))$ 也满足同样的结论，因为 Supp $\mu = X$；因此，对每个 $k \in \mathbb{Z}$ 以及每个 $r' \in (0,r]$ 使得 $2^k r' \leqslant 2R$，$\mu(B(x,2^k r'))$ 也满足同样的结论，因为 D_R 是有限的。由此，对每个 $x \in X$ 以及每个 $r \in (0,2R]$，$\mu(B(x,r)) \in (0, +\infty)$。现在，设 U 是 X 的一个非空开子集，且 diam$(U) < 2R$。由于对每个 $x \in U$，$U \subseteq B(x,2R)$，显然 $\mu(U) < \infty$。由于 Supp $\mu = X$，显然 $\mu(U) > 0$。□

注 3. 假设 X 是测地的，且对某个 $R > 0$，D_R 有限。那么，对每个 $x \in X$，μ 在 $B(x, R)$ 上的限制都是倍增的，其倍增常数为 $\leqslant 3D_R$。

为此，固定 $x \in X$ 和 $r \in (0, R]$，并取 $y \in B(x, r)$ 和 $r' \in (0, 2r]$。取一条最短测地线 $\gamma\colon [0,1] \to X$，满足 $\gamma(0) = x$ 且 $\gamma(1) = y$。若 $d(x, y) \leqslant r'/2 (\leqslant r)$，则 $B(x, r'/2) \subseteq B(y, r') \cap B(x, r)$，因此

$$\begin{aligned}\mu(B(y,r') \cap B(x,r)) &\geqslant \mu(B(x, r'/2)) \\ &\geqslant D_R^{-3} \mu(B(x, \min(4r', r))) \\ &\geqslant D_R^{-3} \mu(B(y, 2r') \cap B(x,r)).\end{aligned}$$

否则，若 $d(x, y) > r'/2$，则我们可以适当选取 $t \in (0, 1)$，使得 $d(\gamma(t)\ y) = r'/2$，因此

$$d(\gamma(t), x) = d(x,y) - d(\gamma(t), y) = d(x,y) - r'/2 < r - r'/2.$$

于是，$B(\gamma(t)\ r'/2) \subseteq B(y, r') \cap B(x, r)$，因此

$$\begin{aligned}\mu(B(y,r') \cap B(x,r)) &\geqslant \mu(B(\gamma(t), r'/2)) \\ &\geqslant D_R^{-3} \mu(B(\gamma(t), \min(4r', 2r))) \\ &\geqslant D_R^{-3} \mu(B(y, 2r') \cap B(x,r)).\end{aligned}$$

因此，$B(x, r)$ 在诱导结构下是一个倍增度量测度空间，其倍增常数为 $\leqslant D_R^3$。

接下来我们介绍一些覆盖引理（倍增情形参见 [4, 第三章的定理 1.2 和 1.3] ）。

引理 4。 取 $R > 0$，使得 $D_R < \infty$。令 E 为 X 的一个子集，且直径 $E < 2R$，并令 $r\colon\ E \to (0, R]$ 为一个函数。那么，存在 E 的一个可数子集 N，使得 $B(x, r(x))$，$x \in N$，两两不相交，而 $B(x, 3r(x))$，$x \in N$，覆盖 E。

证明。我们通过归纳法构造一个（可能有限的）序列 $(x_j)_j$，其元素取自 E，如下所示。假设已构造出 $x_{j'}$, $j' < j$，使得$B(x_{j'}, r(x_{j'}))$ 两两不相交，且

$$E_{j'} := E \setminus \Big(\bigcup_{j'' < j'} B(x_{j''}, 3r(x_{j''})) \Big)$$

非空，并且 $r(x_{j'}) > \frac{1}{2}\sup\{r(x) : x \in E_{j'}\}$。若 $E_j = \emptyset$，也就是说，若这些$B(x_{j'}, 3r(x_{j'}))$ 覆盖 E，则停止。否则，若 $E_j \neq \emptyset$，则选取 $x_j \in E_j$，使得 $r(x_j) > \frac{1}{2}\sup\{r(x) : x \in E_j\}$。现在注意，若 $j' < j$，则 $x_j \in E_j \subseteq E_{j'}$，因此

$$d(x_j, x_{j'}) \geqslant 3r(x_{j'}) \text{ and } r(x_{j'}) > \frac{1}{2}r(x_j)$$

根据归纳假设。因此，

$$B(x_j, r(x_j)) \cap B(x_{j'}, r(x_{j'})) = \emptyset \text{ for every } j' < j.$$

现在令 N 为 x_j 的集合。根据构造显然，$B(x, r(x)), x \in N$ 两两不相交。此外，若 N 有限，由构造可立即得出，$B(x, 3r(x)), x \in N$ 覆盖 E。另一方面，若 N 无限，我们用反证法证明，对于 $j \to \infty$，$r(x_j) \to 0$。假设存在 $\varepsilon \in (0, 2R - \text{直径}(E)]$，以及 N 的一个无限子集 N'，使得对于每个 $x \in N'$，$r(x) \geqslant \varepsilon$。取 $k \in \mathbb{N}$，使得 $\varepsilon > R/2^k$，并固定 $\tilde{x} \in E$。于是，

$$\mu(B(x, \varepsilon)) \geqslant \mu(B(x, R/2^k)) \geqslant D_R^{-k-1}\mu(B(x, 2R)) \geqslant D_R^{-k-1}\mu(B(\tilde{x}, \varepsilon))$$

对于每个 $x \in N'$，因此

$$\mu(B(\tilde{x}, 2R)) \geqslant \sum_{x \in N'} \mu(B(x, \varepsilon)) = +\infty,$$

这与引理 2 矛盾。因此，对于 $j \to \infty$，$r(x_j) \to 0$。因此，若反设存在 $x' \in E \setminus \left(\bigcup_{x \in N} B(x, 3r(x))\right)$，则存在 $j \in \mathbb{N}$ 使得 $r(x_j) < r(x')/2$。然而，由于 $x' \in E \setminus \left(\bigcup_{x \in N} B(x, 3r(x))\right) \subseteq E_j$，我们还有

$$\sup_{x \in E_j} r(x) \geqslant r(x') > 2r(x_j),$$

这与我们对 x_j 的选择矛盾。 □

引理 5。取 $R > 0$ 使得 $D_R < \infty$。令 U 为 X 的一个真[2] 开子集，且满足 直径$(U) < R$。那么，存在 U 的一个可数子集 N 和一个函数$r\colon N \to (0, R/2]$，使得

$$\chi_U \leqslant \sum_{x \in N} \chi_{B(x, r(x))} \leqslant D_R^5 \chi_U,$$

对每个$x \in N$ 和每个 $\kappa > 2$，$B(x, r(x)/3)$、$x \in N$ 两两不相交，且 $B(x, \kappa r(x)) \setminus U \neq \emptyset$。

证明。不妨设 $U \neq \emptyset$。我们将引理 4 应用于集合 U 和函数 $r'\colon U \to (0, R]$，该函数定义为对每个 $x \in U$，$r'(x) = \frac{1}{6}d(x, X \setminus U)$。注意，由于 X 连通且 $U \neq \emptyset, X$，存在 $\tilde{x} \in U \setminus U$。因此

$$d(x, X \setminus U) \leqslant d(x, \tilde{x}) \leqslant R$$

对每个 $x \in U$，使得 $r'(x) \in (0, R/6]$ 对每个 $x \in U$。于是，根据引理 4，存在一个可数集 $N \subseteq U$，使得 $B(x, r'(x))$，$x \in N$，两两不相交，而 $B(x, 3r'(x))$，$x \in N$，覆盖 U。令

$$r(x) \coloneqq 3r'(x) = \frac{1}{2}d(x, X \setminus U) \in (0, R/2]$$

[2]也就是说，$U \neq X$。如果 $\operatorname{diam}(X) \geqslant R$，则这一条件自动满足（这是一个自然的假设，因为否则 μ 是倍增的）。

对每个 $x \in N$，使得球 $B(x, r(x))$，$x \in N$，覆盖 U。显然，$r(x) < d(x, X \setminus U)$，因此 $B(x, r(x)) \subseteq U$对每个 $x \in N$。此外，若 $\kappa > 2$且 $x \in N$，则根据 $r'(x)$ 的定义，$B(x, \kappa r(x)) = B(x, 3\kappa r'(x)) \not\subseteq U$，因为 $3\kappa > 6$。接下来注意，若 $x \in U$且 $N_x := \{ x' \in N : \ d(x', x) < r(x') \}$，则对每个 $x' \in N_x$，

$$2r(x') = 6r'(x') \leqslant d(x, X \setminus U) + d(x, x') < d(x, X \setminus U) + r(x'),$$

使得 $r(x') < d(x, \ X \setminus U)$，进而 $N_x \subseteq B(x, \ d(x, \ X \setminus U))$。类似地，

$$6r'(x) = d(x, X \setminus U) \leqslant d(x, x') + 6r'(x') < 9r'(x'),$$

使得对于每个 $x' \in N_x$，$B(x, \ 6r'(x)) \subseteq B(x', \ 6r'(x) + r(x')) \subseteq B(x', \ 12r'(x'))$。因此，

$$\begin{aligned}
\mu(B(x, 12r'(x))) &\geqslant \sum_{x' \in N_x} \mu(B(x', r'(x'))) \\
&\geqslant D_R^{-4} \sum_{x' \in N_x} \mu(B(x', 12r'(x'))) \\
&\geqslant \operatorname{Card}(N_x) D_R^{-4} \mu(B(x, 6r'(x))) \\
&\geqslant \operatorname{Card}(N_x) D_R^{-5} \mu(B(x, 12r'(x))),
\end{aligned}$$

由引理 2，$\operatorname{Card}(N_x) \leqslant D_R^5$，因为 $\mu(B(x, \ 12r'(x))) \in (0, \ +\infty)$。 □

定义6。设 B 是一个 Banach 空间。对于每个 $R > 0$，我们定义

$$(\mathcal{M}_R f)(x) := \sup_{\substack{y \in X, r \in (0, R] \\ x \in B(y, r)}} \fint_{B(y,r)} |f| \, \mathrm{d}\mu$$

and

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_R f)(x) := \sup_{r \in (0, R]} \fint_{B(x,r)} |f| \, \mathrm{d}\mu$$

对于每个 μ-可测函数 $f\colon X \to B$ 以及每个 $x \in X$，约定$\frac{\infty}{\infty} = 0$。

—

回顾一下，f 是 μ-可测的，当且仅当对每个 X的紧子集 K 以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在 K 的紧子集 K'，使得 $\mu(K \setminus K') < \varepsilon$，且 f 在 K' 上的限制连续。特别地，$|f|$ 也是μ-可测的。因此，我们讨论的是“强”可测性和“Bochner”积分（参见 [6, 5]）。

注7。取 $R > 0$，并设 $f\colon X \to B$ 是取值于某个 Banach 空间 B的 μ-可测函数。那么，

$$\widetilde{\mathcal{M}}_R f \leqslant \mathcal{M}_R f \leqslant D_R \widetilde{\mathcal{M}}_{2R} f.$$

现在我们证明极大函数 $\mathcal{M}_R$的有界性，这对于建立某种“局部”Calderón–Zygmund 分解至关重要（参见倍增情形下 [4,第三章的定理2.1和推论2.3] ）。

引理8。取 $R > 0$，使得 $D_{3R} < \infty$。以下结论成立：

(1) 对于每个 μ-可测函数 f：$X \to B$，$\mathcal{M}_R f$ 是 X 上的下半连续函数；

(2) 对于每个 μ-可测集 $E \subseteq X$，满足 直径$(E) < 6R$；对于每个 μ-可测函数 $f\colon X \to B$，以及每个 $\lambda > 0$,

$$\mu\Big(\{\, x \in E\colon (\mathcal{M}_R f)(x) > \lambda \,\}\Big) \leqslant \frac{D_{3R}^4 \|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\lambda};$$

(3) 对于每个 μ-可测集合 $E \subseteq X$，其直径$(E) < 6R$；对于每个 μ-可测函数 $f\colon X \to B$；以及对于每个 $p \in (1,\infty]$,

$$\|\chi_E \mathcal{M}_R f\|_{L^p(\mu)} \leqslant 2p'^{1/p} D_{3R}^{4/p} \|f\|_{L^p(\mu;B)};$$

(4) 对于每个 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu;\ B)$,

$$\fint_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\mu \to f(x)$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in X$。[3]

注意，实际上可以改进 (2) 和 (3)，去掉关于 diam(Supp f) 的假设。这里我们不证明这一事实，只在定理 18 中证明。

证明。(1) 取 $\lambda \geqslant 0$，并取 $x \in X$ 使得 $(\mathcal{M}_R f)(x) > \lambda$。那么，存在 $y \in X$和 $r \in (0, R]$，使得 $x \in B(y,r)$ 且 $\fint_{B(y,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu > \lambda$，因此对于每个 $x' \in B(y,r)$，都有 $(\mathcal{M}_R f)(x') > \lambda$。断言得证。

(2) 取 $\lambda > 0$，并注意到，根据 (1),

$$U_\lambda \coloneqq \{\, x \in X\colon (\mathcal{M}_R f)(x) > \lambda \,\}$$

是 X 的一个开子集。若 $x \in U_\lambda$，则存在 $y_x \in X$ 和 $r_x \in (0,\ R]$ 使得$x \in B(y_x,\ r_x)$ 且 $\fint_{B(y_x,\ r_x)} |f| \,\mathrm{d}\mu > \lambda$。若令 $r(x) \coloneqq 2r_x \in (0,\ 2R]$，则

$$\fint_{B(x,r(x))} |f| \,\mathrm{d}\mu \geqslant \frac{1}{D_{3R}^2} \fint_{B(y_x,r_x)} |f| \,\mathrm{d}\mu > \frac{\lambda}{D_{3R}^2}$$

因为

$$\mu(B(x,r(x))) \leqslant D_{3R}\mu(B(x,r_x)) \leqslant D_{3R}\mu(B(y_x,2r_x)) \leqslant D_{3R}^2 \mu(B(y_x,r_x)).$$

于是，由引理 4，我们可以找到 $E \cap U_\lambda$ 的一个可数子集 N，使得 $B(x,\ r(x))$、$x \in N$ 两两不相交，而 $B(x,\ 3r(x))$、$x \in N$ 覆盖 $E \cap U_\lambda$。于是,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mu;B)} &\geqslant \sum_{x\in N} \int_{B(x,r(x))} |f| \,\mathrm{d}\mu \\
&\geqslant \frac{\lambda}{D_{3R}^2} \sum_{x\in N} \mu(B(x,r(x))) \\
&\geqslant \frac{\lambda}{D_{3R}^4} \sum_{x\in N} \mu(B(x,3r(x))) \\
&\geqslant \frac{\lambda}{D_{3R}^4} \mu(E \cap U_\lambda)
\end{aligned}$$

由此，利用 λ 的任意性即可得出结论。

[3]注意，我们假设 μ 是内正则的。因此，将满足 $\mu(N) = 0$ 的 μ-可测集 N 称为 μ-零测集是很自然的；我们将不 采用 [2], 的术语，按照该术语，这些集合应称为局部 μ-零测集。

(3) 这由插值可得，因为显然，对于每个$x \in X$，$(\mathcal{M}_R f)(x) \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mu;B)}$（参见 [7, 定理 1.3.2]）。

(4) 由于该断言是局部的，[4] 我们可以假定 $f \in L^1(\mu; B)$，并且直径(Supp f) $< 6R$。根据 [2, 第九章§ 5 第1], 号命题 3 的注 3，存在一列从 X 映到 B 的连续函数 (g_j)，使得对每个 $j \in \mathbb{N}$都有 $\|f - g_j\|_{L^1(\mu;B)} < 2^{-j}$，并且所有 g_j 都支撑在一个直径为 $< 6R$的固定集合中。我们还可以假定对 μ-几乎处处的$x \in X$有 $g_j(x) \to f(x)$。因此，

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0^+} \left| \fint_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\mu - f(x) \right| \\
&\quad \leqslant \limsup_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} |f - g_j| \,\mathrm{d}\mu + |f(x) - g_j(x)| + \limsup_{r\to 0^+} \left| \fint_{B(x,r)} g_j \,\mathrm{d}\mu - g_j(x) \right| \\
&\quad \leqslant \mathcal{M}_R(f - g_j)(x) + |f(x) - g_j(x)|
\end{aligned}$$

对每个 $x \in X$ 以及对每个 $j \in \mathbb{N}$。该断言借助 (2) 得出。 □

引理 9. 设 $\kappa \in (2, 3]$ 与 $R > 0$ 使得 $D_{3\kappa R} < \infty$。设 E 是 X 的一个 μ-可测子集，满足 $\mu(E) > 0$ 且直径$(E) < R$，并取集中于E的 $f \in L^1(\mu; B)$，以及 $\alpha > D^4_{3\kappa R}\|f\|_{L^1(\mu;B)}/\mu(E)$。存在 E的一个可数子集 N、一个函数$r\colon N \to (0, R]$，以及 μ-可测函数 $g, h_x\colon X \to B$, $x \in N$，使得下列结论成立：

(1) $f = g + \sum_{x\in N} h_x$;(2) $g \in \chi_{B(E,R/2)} L^\infty(\mu; X)$ 和

$$\|g\|_{L^\infty(\mu;X)} \leqslant D^2_{3\kappa R}\alpha;$$

(3) $g \in L^1(\mu; B)$ 且

$$\|g\|_{L^1(\mu;B)} \leqslant 3\|f\|_{L^1(\mu;B)};$$

(4) h_x 集中在 $B(x, r(x)) \subseteq B(E, R/2)$ 对每个 $x \in N$ 都成立，并且

$$\sum_{x\in N} \mu(B(x, r(x))) \leqslant \frac{D^6_{3\kappa R}\|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\alpha};$$

(5) $\int_X h_x \,\mathrm{d}\mu = 0$ 对每个 $x \in N$ 都成立；(6) $h_x \in L^\infty(\mu; B)$ 并且

$$\|h_x\|_{L^\infty(\mu;B)} \leqslant 2\|f\|_{L^\infty(\mu;B)}$$

对每个 $x \in N$ 都成立，此外

$$\sum_{x\in N} \|h_x\|_{L^1(\mu;B)} \leqslant 2\|f\|_{L^1(\mu;B)};$$

(7) 球族 $(B(x, r(x))_{x\in N}$ 具有一致有界重叠，特别是

$$\sum_{x\in N} \chi_{B(x,r(x))} \leqslant D^5_{3\kappa R}.$$

这是一个有些“局部”的 Calderón–Zygmund 分解。正如预期的那样，它仅适用于有界支撑的函数，并可能导致支撑发生适当（但受控）的扩张。

[4] 注意，根据内正则性，集合 N是 μ-零测集，当且仅当对于每个 $x \in X$， $N \cap B(x, R)$ 都是 μ-零测集，即使 X 不一定可分。

证明。注意，若 $x \in X \setminus B(E,\ R/2)$，且若 $y \in X$ 和 $r \in (0,\ \kappa R]$ 满足 $x \in B(y,\ r)$，并且 $⨍_{B(y,\ r)} |f| \,\mathrm{d}\mu > 0$，则 $r > R/4$ 和 $d(y,\ E) < r \leqslant \kappa R$，因此

$$\mu(B(y,r)) \geqslant D_{3\kappa R}^{-4} \mu(B(y,(1+\kappa)R)) \geqslant D_{3\kappa R}^{-4} \mu(E),$$

因为 $(1+\kappa)R \leqslant 4R$。因此，

$$⨍_{B(y,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{\|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\mu(B(y,r))} \leqslant \frac{D_{3\kappa R}^4 \|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\mu(E)}.$$

由此我们证明了

$$(\mathcal{M}_{\kappa R} f)(x) \leqslant \frac{D_{3\kappa R}^4 \|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\mu(E)} < \alpha$$

对于每个 $x \in X \setminus B(E,\ R/2)$。因此，水平集

$$U_\alpha \coloneqq \{\, x \in X \colon (\mathcal{M}_{\kappa R} f)(x) > \alpha \,\}$$

包含于 $B(E,\ R/2)$。此外，将引理8应用于有界开集 $B(E,\ R/2)$，且 $\operatorname{diam}(B(E,\ R/2)) < 2R$，可知 U_α 是开集，并且

$$\mu(U_\alpha) \leqslant \frac{D_{3\kappa R}^4 \|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\alpha} < \mu(E) \leqslant \mu(X),$$

因此 $U_\alpha \neq X$。然后，根据引理 5，存在一个（可能为空的） U_α 的可数子集 N 以及一个函数 $r\colon N \to (0,\ R]$，使得 $\bigcup_{x\in N} B(x,\ r(x)) = U_\alpha \subseteq B(E,\ R/2)$，$\sum_{x\in N} \chi_{B(x,r(x))} \leqslant D_{3\kappa R}^5$（由此得到 (7)），$B(x,\ r(x)/3)$，$x \in N$，两两不相交，并且对每个 $x \in U_\alpha$，$B(x,\ \kappa r(x)) \not\subseteq U_\alpha$。

现在，令

$$\eta_x \coloneqq \frac{\chi_{B(x,r(x))}}{\sum_{y\in N} \chi_{B(y,r(y))}}$$

and

$$h_x \coloneqq f\eta_x - \left(⨍_{B(x,r(x))} f\eta_x \,\mathrm{d}\mu \right) \chi_{B(x,r(x))}$$

对每个 $x \in N$，使得 $\sum_{x\in N} \eta_x = \chi_{U_\alpha}$ 逐点成立，并且

$$g \coloneqq f\chi_{X\setminus U_\alpha} + \sum_{x\in N} \left(⨍_{B(x,r(x))} f\eta_x \,\mathrm{d}\mu \right) \chi_{B(x,r(x))},$$

从而由构造知(1)成立。注意到(5)显然成立，(4)亦然，因为

$$\sum_{x\in N} \mu(B(x,r(x))) \leqslant D_{3\kappa R}^2 \sum_{x\in N} \mu(B(x,r(x)/3)) \leqslant D_{3\kappa R}^2 \mu(U_\alpha) \leqslant \frac{D_{3\kappa R}^6 \|f\|_{L^1(\mu;B)}}{\alpha}$$

由引理8。关于(6)，注意到

$$\sum_{x\in N} \|h_x\|_{L^1(\mu;B)} \leqslant 2 \sum_{x\in N} \|f\eta_x\|_{L^1(\mu;B)} \leqslant 2\|f\|_{L^1(\mu;B)}$$

由于 $\sum_{x\in N} \eta_x = \chi_{U_\alpha}$（逐点收敛）；另一个断言的证明类似。由 $g = f - \sum_{x\in N} h_x$ 这一事实，(3) 也随之成立。最后，注意到根据引理8，对于 μ-几乎处处的 $x \in X \setminus U_\alpha$，(2) 显然成立。此外，对于每个 $x \in N$，

$$⨍_{B(x,r(x))} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant D_{3\kappa R}^2 ⨍_{B(x,\kappa r(x))} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant D_{3\kappa R}^2 \alpha$$

由于 $B(x,\ \kappa r(x)) \setminus U_\alpha \neq \emptyset$ 且 $\kappa r(x) \leqslant \kappa R$，因此

$$\fint_{B(x,\kappa r(x))} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant (\mathcal{M}_{\kappa R} f)(y) \leqslant \alpha$$

对于每个 $y \in B(x,\ \kappa r(x)) \setminus U_\alpha$。断言得证。 □

定义 10。我们定义

$$\varphi(r,p) \coloneqq \inf_{q\in(1,p)} \left(q' + \frac{1}{r/q-1}\right)^{(1/p-1/r)/(1-q/r)}$$

对于每个 $p \in (1,\ r]$，并令 $\varphi(r,\ p) \coloneqq \varphi(r',\ p')$ 对于每个 $p \in [r,\infty)$。

这一定义的动机来自马尔钦凯维奇插值定理的以下版本。

引理 11。设 $(Y_j, \mathfrak{M}_j, \nu_j)$、$j = 1$、2 是两个测度空间（$\sigma$-有限或非有限），设 B_1、B_2 是两个 *Banach*空间，并设 V 是从 Y_1 到 B_1 的 ν_1-可测映射所构成的向量空间，使得对于每个 $f \in V$ 以及每个 $g \in L^\infty(\nu_1)$，都有 $fg \in V$。设 T 是从 V 到从 Y_2 到 B_2 的 $\mathfrak{M}_2$-可测映射空间的线性算子。取 $r \in (1、\ \infty]$，并假设存在 A、$B > 0$ 使得

$$\nu_2(\{\, y \in Y_2 \colon |(Tf)(y)| > \lambda \,\}) \leqslant \frac{A\|f\|_{L^1(\nu_1;B_1)}}{\lambda}$$

对每个 $f \in V$ 和每个 $\lambda > 0$，并且满足

$$\|Tf\|_{L^r(\nu_2;B_2)} \leqslant B\|f\|_{L^r(\nu_1;B_1)}$$

对每个 $f \in V$。于是，对每个 $p \in (1,\ r]$ 以及每个 $f \in V$，

$$\|Tf\|_{L^p(\nu_2;B_2)} \leqslant 2\varphi(r,p) A^{r'(1/p-1/r)} B^{r'/p'} \|f\|_{L^p(\nu_1;B_1)}.$$

对于证明，可以使用 [7, 定理 1.3。2]（用相同的证明将其推广到向量值情形），以得到 T的（q，q）界估计，然后在 L^q 和 L^r之间应用 Riesz–Thorin插值。通过检查证明可知，[7, 定理 1.3。2] 可应用于 $\chi_E V$，对每个 σ-有限的 $E \in \mathfrak{M}_1$（具有相同的界）。由于 $L^p(\nu_1)$，$p < \infty$中的每个元素都集中在 $\mathfrak{M}_1$的某个 σ-有限元素上，故断言得证。类似地可知，Riesz–Thorin定理可应用于 V。

我们还整理了以下一些基本观察，或许有助于估计$\varphi(r,\ p)$。在讨论定理14和18以及推论 15中所出现常数的一致有界性时，后一个观察十分重要。

注12。显然，对于每个 $p \in (1,\ \infty)$，$\varphi(\infty,\ p) = p'^{1/p}$。此外，

$$\varphi(r,p) \leqslant \left(\frac{\sqrt{r}+1}{\sqrt{r}-1}\right)^{(1/p-1/r)/(1-1/\sqrt{r})}$$

对于每个 $\sqrt{r} \leqslant p \leqslant r$，而

$$\varphi(r,p) \leqslant \left(p' + \frac{1}{r/p-1}\right)^{1/p}$$

对于 $1 < p \leqslant \sqrt{r}$。

证明。第一个断言显然。第二个断言可分别在 $\varphi(r,\ p)$ 的定义中取 $q \to \sqrt{r}^{-}$ 和 $\overline{q} \to p^{-}$ 得出。为说明这些选择的动机，注意到函数 $q \mapsto q' + \frac{1}{r/q-1}$ 是 $\geqslant 1$，在 $(1,\ \sqrt{r}]$ 上递减，在 $[\sqrt{r}, p)$ 上递增；而函数 $q \mapsto (1/p - 1/r)/(1 - q/r)$ 在 $(1,\ p)$ 上递增。□

注13。取 $C_1, C_2 > 1$。存在常数 $C_3 > 0$，使得 $\varphi(r,p) \leqslant C_3$对每个满足 $p \leqslant \min(C_2 r, r/(1 - C_2/\log r))$ 的 $r, p \in [C_1, \infty]$ 都成立。[5]

证明。情形 $p \leqslant r$ 可由注12得出。现在，假设 $r < p$（因此$r < \infty$，也有 $p < \infty$），并在 $\varphi(r', p')$ =$\varphi(r,p)$ 的定义中选取 $q \in (1, p')$，使得 $q' = cr$ 对某个 $c > C_1$ 成立（这是可能的，因为 $cr > C_1 r \geqslant p$）。于是，

$$\varphi(r,p) \leqslant \left(cr + \frac{1}{r'/q - 1} \right)^{(1/p' - 1/r')/(1 - q/r')}.$$

注意到 $1/p' - 1/r' = 1/r - 1/p$,

$$\begin{aligned} r'/q - 1 &= r'(1 - 1/(cr)) - 1 \\ &= (cr - 1)/(cr - c) - 1 = (c-1)/(cr - c), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} 1 - q/r' &= 1 - [cr/(cr-1)][(r-1)/r] \\ &= 1 - (cr - c)/(cr - 1) = (c-1)/(cr-1), \end{aligned}$$

因此

$$\varphi(r,p) \leqslant \left(cr + c\frac{r-1}{c-1} \right)^{(1/r - 1/p)(cr-1)/(c-1)}.$$

现在，若 $r \leqslant \mathrm{e}^{C_2^2/(C_2-1)}$，则 $1/r - 1/p \leqslant 1/r(1 - 1/C_2)$（因为 $p \leqslant C_2 r$）；若 $r \geqslant \mathrm{e}^{C_2^2/(C_2-1)}$，则 $1/r - 1/p \leqslant C_2/(r \log r)$（因为 $1 - C_2/\log r \geqslant 1/C_2 > 0$）。断言得证。□

现在我们可以陈述一个关于向量值 Calderón–Zygmund 算子连续性的结果（参见 [8, 定理 1.1]，适用于倍增情形）。由于我们的结果具有某种“局部”性质，我们首先考虑“局部化”算子，然后说明在适当假设下，如何将这些“局部化”算子拼接起来，从而得到一个“整体”结果。

取两个 Banach 空间 B_1，B_2, $R > 0$, $r \in (1,\ \infty]$，一个关于 X 的 μ-可测子集 E，满足 $\operatorname{diam}(E) < R$，以及一个连续线性映射

$$T \colon \chi_{B(E,R/2)} L^r(\mu; B_1) \to \chi_E L^r(\mu; B_2),$$

以及 $K \colon\ E \times B(E,\ R/2) \to \mathcal{L}(B_1; B_2)$ 一个 $(\mu \otimes \mu)$-可测映射。考虑以下条件:

(i)$_R$对于每个 $B(E,\ R/2)$ 的开子集 F，K 在 $(E \setminus F) \times F$ 上是 $(\mu \otimes \mu)$-可积的，并且

$$(Tf)(x) = \int_F K(x,y) f(y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

对于几乎处处的 μ，对每个 $f \in \chi_F L^\infty(\mu;\ B_1)$;

(ii)$_R$存在 $A_R > 0$，使得$\|Tf\|_{L^r(\mu;B_2)} \leqslant A_R \|f\|_{L^r(\mu;B_1)}$对每个 $f \in \chi_{B(E,R/2)} L^r(\mu;\ B_1)$都成立;

[5]当 $r = \infty$ 时，将此条件解释为 $p \leqslant \infty$。

$\mathrm{(iii)}_R$ 存在一个常数 $C_R > 0$，使得

$$\int_{E\setminus B(y,2d(y,y'))} |K(x,y) - K(x,y')|\,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant C_R$$

对于几乎处处的 μ- y，$y' \in B(E,\ R/2)$，满足 $d(y,\ y') < R$。

定理 14. 沿用上述记号，取 $\kappa > 2$，假设 $D_{3\kappa R} < \infty$，且$\mathrm{(i)}_R$、$\mathrm{(ii)}_R$ 和 $\mathrm{(iii)}_R$ 成立。则有

$$\|Tf\|_{L^p(\mu;B_2)} \leqslant 16\,\varphi(r,p)(D^9_{3\kappa R}A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_1)}$$

对于每个 $p \in (1,\ r]$，以及对于每个 $f \in \chi_E L^r(\mu;\ B_1)$。

请注意，尽管假设针对集中于 $B(E,\ R/2)$ 上的函数，但结论仅对集中于 E 上的函数成立。

证明。由引理 11，只需证明算子 $T_E\colon\ f \mapsto T(\chi_E f)$ 是弱型 (1，1)，其范数为 $\leqslant 8(D^9_{3\kappa R}A_R + C_R)$。取 $f \in \chi_E L^\infty(\mu;\ B_1)$ 和 $\lambda > 0$。令 $\alpha := \lambda/(2D^2_{3\kappa R}A_R)$。若 $\alpha \leqslant D^4_{3\kappa R}\|f\|_{L^1(\mu;\ B_1)}/\mu(E)$，则

$$\mu(\{\,x \in X\colon |(T_E f)(x)| > \lambda\,\}) \leqslant \mu(E) \leqslant 2D^6_{3\kappa R}A_R\frac{\|f\|_{L^1(\mu;B_1)}}{\lambda}.$$

否则，$\alpha > D^4_{3\kappa R}\|f\|_{L^1(\mu;\ B_1)}/\mu(E)$，则取 N、r、g以及引理 9 中的 h_x。注意，$h = \sum_{x\in N} h_x$ 和 g 有界，并集中于$B(E,\ R/2)$上（参见引理 9 中的 (1)、(2) 和 (4)）；更准确地说，$\|g\|_{L^\infty(\mu;\ B_1)} \leqslant \lambda/(2A_R)$。注意，由于 $T_E f = Tf = Tg + Th$，

$$\begin{aligned}\mu(\{\,x \in X\colon |(T_E f)(x)| > \lambda\,\}) \leqslant& \mu(\{\,x \in E\colon |(Tg)(x)| > \lambda/2\,\})\\ &+ \mu(\{\,x \in E\colon |(Th)(x)| > \lambda/2\,\}).\end{aligned}$$

如果 $r < \infty$，则

$$\begin{aligned}\mu(\{\,x \in E\colon |(Tg)(x)| > \lambda/2\,\}) &\leqslant (\lambda/2)^{-r}\|Tg\|^r_{L^r(\mu;B_2)}\\ &\leqslant \left(\frac{2A_R}{\lambda}\right)^r \|g\|^r_{L^r(\mu;B_1)}\\ &\leqslant \frac{2A_R}{\lambda}\|g\|_{L^1(\mu;B_1)}\\ &\leqslant \frac{6A_R}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mu;B_1)},\end{aligned}$$

由前面的论述和引理 9 中的 (3) 可知。如果 $r = \infty$，则 $\|Tg\|_{L^\infty(\mu;\ B_2)} \leqslant A_R\|g\|_{L^\infty(\mu;\ B_1)} \leqslant \lambda/2$，从而

$$\mu(\{\,x \in E\colon |(Tg)(x)| > \lambda/2\,\}) = 0.$$

接下来，令 $B' := \bigcup_{x\in N} B(x,\ 2r(x))$，并注意到

$$\mu(\{\,x \in E\colon\ |(Th)(x)| > \lambda/2\,\}) \leqslant \mu(B') + \mu(\{\,x \in E\setminus B'\colon\ |(Th)(x)| > \lambda/2\,\})$$

以及那个

$$\begin{aligned}\mu(B') &\leqslant \sum_{x\in N}\mu(B(x,2r(x)))\\ &\leqslant D_{3\kappa R}\sum_{x\in N}\mu(B(x,r(x)))\\ &\leqslant 2A_R D^9_{3\kappa R}\|f\|_{L^1(\mu;B)}/\lambda\end{aligned}$$

由引理 9 的 (4) 可知。最后，对于几乎处处的 μ,

$$\begin{aligned}|Th(x)| &= \left|\int_{B'} K(x,y)h(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \\ &= \left|\sum_{x'\in N}\int_{B'} K(x,y)h_{x'}(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \\ &\leqslant \sum_{x'\in N}\left|\int_{B'} K(x,y)h_{x'}(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|,\end{aligned}$$

其中，第一个等式由 (i)_R 得出，因为 $h \in \chi_{B'}L^\infty(\mu; B_1)$；第二个等式则由 (i)_R 和控制收敛定理得出，因为对于 μ-几乎处处的 $x \in E\setminus B'$，$K(x,\ \cdot)$ 在 B' 上是 μ-可积的，并且根据引理 9 的 (6) 和 (7)，对于 μ-几乎处处的 $y \in B'$，$\sum_{x'\in N}|h_{x'}(y)| \leqslant 2D_{3\kappa R}^5\|f\|_{L^\infty(\mu;\ B_1)}$。此外，根据引理 9 的 (4) 和 (5)，由于 $h_{x'}$ 集中于 $B(x',\ r(x'))$ 上，且 $\int_X h_{x'}\,\mathrm{d}\mu = 0$，

$$\int_{B'} K(x,y)h_{x'}(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{B(x',r(x'))}[K(x,y)-K(x,x')]h_{x'}(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

对每个 $x' \in N$ 以及 μ-几乎处处的 $x \in X$ 都成立。因此，由托内利定理（由于根据引理 2，μ 在 $B(E,\ R/2) \supseteq E,\ B'$ 上有限，故可应用该定理），并根据引理 9 的 (6),

$$\begin{aligned}\mu(\{\, x\in E\setminus B' \colon |(Th)(x)| > \lambda/2\,\}) &\leqslant \frac{2}{\lambda}\int_{E\setminus B'}|Th|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{2}{\lambda}\sum_{x'\in N}\int_{B(x',r(x'))}\int_{E\setminus B(x',2r(x'))}|K(x,y)-K(x,x')|\,\mathrm{d}\mu(x)|h_{x'}(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \\ &\leqslant \frac{2C_R}{\lambda}\sum_{x'\in N}\int_X |h_{x'}|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leqslant \frac{4C_R}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mu;B_1)}.\end{aligned}$$

断言得证。 □

现在，取 $R>0$, $r\in[1,\infty)$，一个 μ-可测子集 E of X，满足 $\operatorname{diam}(E) < R$，以及一个连续线性映射

$$T\colon \chi_E L^r(\mu;B_1) \to \chi_{B(E,R/2)}L^r(\mu;B_2),$$

且 $K\colon B(E,\ R/2)\times E \to \mathcal{L}(B_1;\ B_2)$ 是一个 $(\mu\otimes\mu)$-可测映射。考虑以下条件：

$\text{(i)}'_R$ 对于 $B(E,\ R/2)$ 的每个开子集 F，K 在 $F\times(E\setminus F)$ 上是 $(\mu\otimes\mu)$-可积的，并且

$$(Tf)(x) = \int_{E\setminus F} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

对于 μ-几乎处处的 $x\in F$ 以及每个 $f\in \chi_{E\setminus F}L^\infty(\mu;\ B_1)$；

$\text{(ii)}'_R$ 存在 $A_R>0$，使得 $\|Tf\|_{L^r(\mu;\ B_2)} \leqslant A_R\|f\|_{L^r(\mu;\ B_1)}$ 对于每个 $f\in\chi_E L^r(\mu;\ B_1)$；

$\text{(iii)}'_R$ 存在常数 $C_R>0$ 使得

$$\int_{E\setminus B(x,2d(x,x'))}|K(x,y)-K(x',y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant C_R$$

for μ-almost every $x, x' \in B(E, R/2)$ with $d(x, x') < R$.

推论 15。沿用上述记号，取 $\kappa > 2$，假设 $D_{3\kappa R} < \infty$，并且 $(\mathrm{i})'_R$、$(\mathrm{ii})'_R$ 以及 $(\mathrm{iii})'_R$ 成立。则有：

$$\|\chi_E T f\|_{L^p(\mu;B_2)} \leqslant 16\,\varphi(r,p)(D^9_{3\kappa R}A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_1)}$$

对每个 $p \in [r,\infty)$ 以及每个 $f \in \chi_E L^\infty(\mu;\ B_1)$。

请注意，与 [8]，相比，我们必须采用稍有不同的方法，因为一般而言，$L^r(\mu; B_1)$ 的对偶空间并非 $L^{r'}(\mu; B_1')$，而引用的文献中却隐含地声称二者相同。幸运的是，只需将 B_1 替换为其有限维向量子空间来证明该结果，即可解决这一问题。

证明。设 $\mathfrak{F}$ 为 B_1 的有限维向量子空间所成的集合，并取 $F \in \mathfrak{F}$。用 T_F 表示 T 在 $\chi_E L^r(\mu;\ F)$ 上的限制。注意，得益于 [1, 第四章命题3，第六节第 4] 号，$\chi_{B(E,R/2)}L^{r'}(\mu;\ B_2')$ 可典范地嵌入 $\chi_{B(E,R/2)}L^r(\mu; B_2)$ 的对偶空间。因此，连续线性映射 $T_F\colon\ \chi_E L^r(\mu;\ F) \to \chi_{B(E,R/2)}L^r(\mu;\ B_2)$ 的转置诱导出一个连续线性映射 T_F'，将 $\chi_{B(E,R/2)}L^{r'}(\mu;\ B_2')$ 映入 $\chi_E L^{r'}(\mu;\ F')$。

注意到，根据 $(\mathrm{ii})'_R$，对于每个 $f \in \chi_{B(E,R/2)}L^{r'}(\mu; B_2')$，

$$\sup_{\|g\|_{L^r(\mu;F)}\leqslant 1} |\langle \chi_E g, T_F' f\rangle| = \sup_{\|g\|_{L^r(\mu;F)}\leqslant 1} |\langle T(\chi_E g), f\rangle| \leqslant A_R\|f\|_{L^{r'}(\mu;B_2')}$$

根据 [1, 第四章命题3，第 6 节，第 4] 号。特别地，将 T 和 r 分别替换为 T_F' 和 r' 后，$(\mathrm{ii})_R$ 的类似结论仍成立。接下来，用 ${}^tK_F(y,x)$ 表示典范（等距）嵌入 $F \to B_1$ 与 $K(x,y)$ 的复合映射的转置，因此 ${}^tK_F\colon\ E \times B(E,R/2) \to \mathcal{L}(B_2', F')$ 是 $(\mu\otimes\mu)$-可测的。取 $B(E,R/2)$ 的一个开子集 E'、$f \in \chi_{E'}L^\infty(\mu;\ B_2')$ 和 $g \in \chi_{E\setminus E'}L^\infty(\mu;\ F)$，并注意到

$$\begin{aligned}
\langle g, T_F' f\rangle &= \langle T_F g, f\rangle \\
&= \int_{E'} \left\langle \int_{E\setminus E'} K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}\mu(y), f(x)\right\rangle \mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{E'}\int_{E\setminus E'} \left\langle g(y), {}^tK(y,x)f(x)\right\rangle \mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{E\setminus E'} \left\langle g(y), \int_{E'} {}^tK_F(y,x)f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\rangle \mathrm{d}\mu(y)
\end{aligned}$$

根据富比尼定理。因此，

$$(T_F' f)(y) = \int_{E'} {}^tK_F(y,x)f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

对于 μ-几乎处处的 $y \in E\setminus E'$，因此，将 T 和 K 分别替换为 T_F' 和 ${}^tK_F$ 后，$(\mathrm{i})_R$ 的类似结论成立。此外，显然，将 K 和 C_R 分别替换为 ${}^tK_F$ 和 C_R' 后，$(\mathrm{iii})_R$ 的类似结论也成立。因此，定理 14 表明

$$\|T_F' f\|_{L^p(\mu;F')} \leqslant 16\,\varphi(r,p)(D^9_{3\kappa R}A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_2')}$$

对于每个 $p \in (1,\ r']$，对于每个 $f \in \chi_E L^\infty(\mu;\ B_2')$，以及对于每个 $F \in \mathfrak{F}$。那么，对于每个 $p \in [r, \infty)$、每个 $f \in \chi_E L^\infty(\mu;\ F')$，以及每个 $g \in \chi_E L^\infty(\mu;\ B_2')$，

$$\begin{aligned}|\langle Tf, g\rangle| &= |\langle T_F f, g\rangle| = |\langle f, T_F' g\rangle| \\ &\leqslant 16\,\varphi(r,p)(D_{3\kappa R}^9 A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_1)}\|g\|_{L^{p'}(\mu;B_2')}.\end{aligned}$$

利用 $\sum_{F\in\mathfrak{F}} \chi_E L^\infty(\mu;\ F)$ 在 $\chi_E L^\infty(\mu;\ B_1)$ 中稠密这一事实以及 [1, 第四章命题3, 第6节，第 4], 号，我们进而可得

$$\|\chi_E Tf\|_{L^p(\mu;B_2)} \leqslant 16\,\varphi(r,p)(D_{3\kappa R}^9 A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_1)}$$

对每个 $f \in \chi_E L^\infty(\mu; B_1)$。 □

现在我们来说明如何将前述结果“拼接”起来，从而得到一个“全局”结果。

定义16。 将 $L_c^\infty(\mu; B_1)$ 定义为 $L^\infty(\mu;\ B_1)$ 中具有紧支撑的元素所构成的空间。

若 $D_R < \infty$，则 $L_c^\infty(\mu; B_1)$ 可刻画为 $L^\infty(\mu; B_1)$ 中集中于有限个 μ-可测集上的元素所构成的空间，这些集合的直径为 $< 2R$ （因为这些集合必然是相对紧的）。

推论17。 取 $\kappa > 2$、 $r \in (1、\ \infty]$ （分别为 $r \in [1, \infty)$ ）和 $R > 0$，并假设 $D_{3\kappa R} < \infty$。设 T 是从 $L_c^\infty(\mu;\ B_1)$ 到 μ-可测函数空间的线性算子，其中这些函数从 X 映射到 B_2；设 $K\colon\ X \times X \to \mathcal{L}(B_1;\ B_2)$ 是一个 $\mu\otimes\mu$)-可测映射，并满足以下条件：

(a) 对于 X 的每个 μ-可测子集 E，若 直径$(E) < R$，则映射 $f \mapsto \chi_E T(\chi_{B(E,R/2)} f)$ 以及将 K限制在 $E\times B(E, R/2)$ 上的限制满足 $(i)_R$、$(ii)_R$ 和 $(iii)_R$（分别地，映射 $f \mapsto \chi_{B(E,R/2)} T(\chi_E f)$ 以及将 K限制在 $B(E, R/2) \times E$ 满足 $(i)'_R$、$(ii)'_R$ 和 $(iii)'_R$）；

条件 (b) $(Tf)(x) = -T(\chi_{B(E,R/3)} f)(x)$ 对于 μ-几乎处处的 $x \in E$，对于每个 $f \in L_c^\infty(\mu; B_1)$，以及 X 中每个 μ-可测子集 E，满足 直径$(E) < R/4$。于是，

$$\|Tf\|_{L^p(\mu;B_2)} \leqslant 16\,\varphi(r,p) D_R^{5/p}(D_{3\kappa R}^9 A_R + C_R)\|f\|_{L^p(\mu;B_1)}$$

对于每个 $p \in (1、\ r]$ （分别地，对于每个 $p \in [r, \infty)$）以及每个 $f \in L_c^\infty(\mu;\ B_1)$。

注意，例如当 T 由积分核 K“全局”定义，且 $\operatorname{Supp} K \subseteq \{(x,\ y) \in X \times X\colon\ d(x, y) \leqslant R/3\}$时，条件 (b) 成立。

证明。 令 $(x_j)_{j\in J}$ 为 X 中一个极大的 $(R/8)$-分离族，因此 $B(x_j,\ R/16)$ 两两不相交，而 $B(x_j,\ R/8)$ 覆盖 X。然后，对集合 $E = B(x_j,\ R(1/3 + 1/8))$ 应用定理 14（分别地，推论 15），可得

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(x_j,R/8)} Tf\|_{L^p(\mu;B_2)} &= \|\chi_{B(x_j,R/8)} T(\chi_{B(x_j,R(1/3+1/8))} f)\|_{L^p(\mu;B_2)} \\ &\leqslant \|\chi_{B(x_j,R(1/3+1/8))} T(\chi_{B(x_j,R(1/3+1/8))} f)\|_{L^p(\mu;B_2)} \\ &\leqslant 16\,\varphi(r,p)(D_{3\kappa R}^9 A_R + C_R)\|\chi_{B(x_j,R/2)} f\|_{L^p(\mu;B_1)}\end{aligned}$$

对任意 $j \in J$。如果 $p = \infty$，由于 μ 是内正则的，因此可得结论。如果情况相反，即 $p < \infty$，那么将所有这些不等式[6] 提升到 p 次幂，

[6]参见 [1, 第四章命题 8，第 1 节，第 2] 号，适用于 J 不可数的情形。实质上，应注意到 $\chi_{B(x_j,R/2)} Tf$ 仅对可数多个 j 在 μ-几乎处处意义下不为零，并利用 μ的内正则性。

并考虑到这一事实：$\sum_{j\in J}\chi_{B(x_j,R/2)}\leqslant D_R^5$（其证明基本上可参照引理 5 的证明），我们便可得出结论。□

现在我们可以着手证明极大函数 $\mathcal{M}_R$ 的向量值有界性。出于技术上的考虑，我们更倾向于对以中心为基准的Hardy–Littlewood极大函数 $\widetilde{\mathcal{M}}_{2R}$ 给出这一结论。

定理 18。取 $R>0$，使得 $D_R<\infty$、$k\in\mathbb{N}$、p_1、…、$p_{k+1}\in(1,\infty)$，以及σ-有限测度空间 $(Y_j,\mathfrak{M}_j,\nu_j)$、$j=1,\dots,k$。那么，

$$\Big\|[\widetilde{\mathcal{M}}_{2R}f(y,\cdot)](x)\Big\|_{L^{p_1,\dots,p_{k+1}}_{(y,x)}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)}\leqslant(1+16^{k+1})D_R^{25+16k}p_1'^{1/p_1}\prod_{j=1}^k\varphi(p_j,p_{j+1})\|f\|_{L^{p_1,\dots,p_{k+1}}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)}.$$

对每个 $f\in L^{p_1,\dots,p_{k+1}}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)$，

我们将 $L^{p_1,\dots,p_{k+1}}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)$ 定义为由 $(\nu_1\otimes\dots\otimes\nu_k\otimes\mu)$-可测函数 $f\colon Y_1\times\dots\times Y_k\times X\to\mathbb{C}$ 组成的空间，其中这些函数满足[7]

$$\left(\int_X\left(\int_{Y_k}\dots\left(\int_{Y_1}|f(y_1,\dots,y_k,x)|^{p_1}\mathrm{d}\nu_1(y_1)\right)^{p_2/p_1}\dots\mathrm{d}\nu_k(y_k)\right)^{p_{k+1}/p_k}\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p_{k+1}}$$

是有限的。我们明确指出，在陈述中我们写的是

$$\Big\|\big(\widetilde{\mathcal{M}}_{2R}f(y,\cdot)\big)(x)\Big\|_{L^{p_1,\dots,p_{k+1}}_{(y,x)}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)}$$

而不是

$$\Big\|(y_1,\dots,y_k,x)\mapsto\big(\widetilde{\mathcal{M}}_{2R}f(y_1,\dots,y_k,\cdot)\big)(x)\Big\|_{L^{p_1,\dots,p_{k+1}}(\nu_1,\dots,\nu_k,\mu)}$$

为简洁起见。我们回顾一个将在证明中反复用到的基本结果；为简洁起见，我们考虑 $k=1$ 的情形。

引理 19. 取 $p,q\in[1,\infty)$、一个 *Banach* 空间 B，以及一个 σ-有限测度空间$(Y,\mathfrak{M},\nu)$。那么，映射

$$L^{p,q}(\nu,\mu;B)\ni f\mapsto[x\mapsto f(\,\cdot\,,x)]\in L^q(\mu;L^p(\nu;B))$$

是等距同构。

证明的关键在于说明，对于每个 $f\in L^{p,q}(\nu,\mu;B)$，映射 $X\ni x\mapsto f(\,\cdot\,,x)\in L^p(\nu;B)$ 都是 μ- 可测的；通过先将问题归结为可积简单函数，再归结为形如 χ_N 的示性函数，即可证明这一点；其中 N $(\nu\otimes\mu)$-可忽略（此时结论由托内利定理得出），或者 $\chi_{A\times B}$（此时结论显然）。映射是等距的这一事实显然成立，而它是满射这一事实则由一个基本观察得出：其像包含所有简单函数。

现在我们来讨论选择考虑 $\widetilde{\mathcal{M}}_R$ 而不是 $\mathcal{M}_R$：这是因为我们无法证明函数 $(y,\ x)\ \mapsto\ [\mathcal{M}_Rf(y,\ \cdot)](x)$ 是

[7]我们明确指出，μ 是唯一不要求具有 σ-有限性的测度。这是因为它是“最后一个”测度，同时也是内正则的：因此，可测性是“局部的”，而 X 上的积分在适当意义下是 X 的紧子集上的积分的极限。

$(\nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_k \otimes \mu)$-可测的。对于中心极大函数，可测性是以下初等观察的推论。

注记20. 设 $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$ 为一个 σ-有限测度空间，并取 $R > 0$ 以及一个 $(\nu \otimes \mu)$-可测函数 $f\colon Y \times X \to \mathbb{C}$。假设对每一个 $x \in X$，都有 $\mu(B(x,R)) < \infty$。则函数

$$Y \times X \ni (y,x) \mapsto \big(\widetilde{\mathcal{M}}_R f(y,\cdot)\big)(x) \in [0,+\infty]$$

是 $(\nu \otimes \mu)$-可测的。

应当将此结果应用于 $(Y, \mathfrak{M}, \nu)$，将其取为测度空间 $(Y_j, \mathfrak{M}_j, \nu_j)$、$j = 1$、……、$k$ 的完备化乘积，记号同定理 18。此外，必须以适当方式理解 $(\nu \otimes \mu)$-可测性，使得 $Y \times X$ 的子集 E 是 $(\nu \otimes \mu)$-可测的，当且仅当对 X 的每个紧子集 K，$E \cap (Y \times K)$ 属于 σ-代数 $\mathfrak{M}$ 与 X 上的 Borel σ-代数的完备化乘积。然后可以验证，$\nu \otimes \mu$ 在 $(\nu \otimes \mu)$-可测集的 σ-代数上诱导出一个测度。

证明。首先注意，对于每个 $r \in (0,R]$，映射 $(x,x') \mapsto \chi_{D_r}(x,x')$，其中 $D_r := \{(x,x') \in X \times X\colon d(x,x') < r\}$，在 $X \times X$ 上是下半连续的。因此，根据托内利定理，映射 $x \mapsto \mu(B(x,r)) = \int_X \chi_{D_r}(x,x')\,\mathrm{d}\mu(x')$ 也是下半连续的。再根据托内利定理，由于映射 $(y,x,x') \mapsto f(y,x')\chi_{D_r}(x,x')$ 是 $(\nu \otimes \mu \otimes \mu)$-可测的，映射 $(y,x) \mapsto \int_{B(x,r)} |f(y,x')|\,\mathrm{d}\mu(x')$ 是 $(\nu \otimes \mu)$-可测的。[8] 因此，映射

$$Y \times X \ni (y,x) \mapsto \sup_{r \in (0,R] \cap \mathbb{Q}} \fint_{B(x,r)} |f(y,x')|\,\mathrm{d}\mu(x') \in [0,+\infty]$$

是 $(\nu \otimes \mu)$-可测的。结论由映射

$$(0,R] \ni r \mapsto \fint_{B(x,r)} |f(y,x')|\,\mathrm{d}\mu(x') \in [0,+\infty]$$

根据单调收敛是左连续的，因此

$$\sup_{r \in (0,R] \cap \mathbb{Q}} \fint_{B(x,r)} |f(y,x')|\,\mathrm{d}\mu(x') = \sup_{r \in (0,R]} \fint_{B(x,r)} |f(y,x')|\,\mathrm{d}\mu(x')$$

对每个 $x \in X$ 都成立。 □

现在我们沿用倍增情形中的方法证明一个技术引理。

引理21。 取 $R > 0$ 使得 $D_{4R} < \infty$。定义 $V_r(x) := \mu(B(x,r))$ 对每个$x \in X$ 及每个 $r > 0$成立。存在一族$(S_r)^{r \in (0,R]}$ 正连续函数，定义在 $X \times X$ 上，以及一个常数 $C > 1$，使得以下结论成立：

(1) $S_r(x,y) = 0$ 若 $d(x,y) \geqslant 3r$;(2) $S_r(x,y) = S_r(y,x)$ 对任意 $x,y \in X$;(3) $\int_X S_r(x,y)\mathrm{d}\mu(y) = 1$ 对任意 $x \in X$;

[8]如果 μ 不是 σ-有限的，这里需要特别留意。不过，我们可以将问题化归到$r < R$ 的情形，并证明在 $Y \times B(x_0, R-r)$ 上对每个 $x_0 \in X$均具有可测性；由于 $(y,x,x') \mapsto \chi_{B(x_0,R-r)}(x) f(y,x')\chi_{D_r}(x,x')$ 集中在 $Y \times B(x_0,R) \times B(x_0,R-r)$ 上，因此可以应用通常的托内利定理。

(4) 对任意 $x, y \in X$，满足 $d(x, y) < r/2$

$$S_r(x, y) \geqslant \frac{1}{D_{4R}^5 \min(V_r(x), V_r(y))};$$

(5) 对每个 $x, y \in X$

$$S_r(x, y) \leqslant \frac{2D_{4R}^2}{V_r(x) + V_r(y)};$$

(6) 对每个 $x, x', y \in X$

$$|S_r(x, y) - S_r(x', y)| \leqslant \frac{CD_{4R}^8 d(x, x')}{r(\min(V_r(x), V_r(x')) + V_r(y))}.$$

这个引理本质上是 [9, 引理 2.1] 的一个特例。我们对一些论证做了（轻微的）简化，并强调了对相应倍增常数的依赖。

证明。取具有 $\chi_{[0,1]} \leqslant h \leqslant \chi_{[-1,\eta]}$ 的 $h \in C^1(\mathbb{R})$，其中 $\eta \in (1, 7/6]$。对每个 $r \in (0, R]$，考虑如下定义的算子 T_r

$$(T_r f)(x) = \int_X h(d(x, y)/r) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y)$$

对每个 μ-可测函数 f，以及每个使上述积分有定义的 $x \in X$。注意，根据引理 2 和控制收敛定理，T_r 将 $L^\infty(\mu)$ 连续映射到 $C(X)$，且 $V_r \leqslant T_r 1 \leqslant V_{\eta r}$，并且

$$\begin{aligned} D_{4R}^{-2} V_{2\eta r}(x) \leqslant & D_{4R}^{-2} V_{3\eta r}(y) \leqslant V_r(y) \leqslant (T_r 1)(y) \\ \leqslant & V_{\eta r}(y) \leqslant V_{2\eta r}(x) \leqslant D_{4R}^2 V_r(x) \end{aligned}$$

对每个满足 $d(x, y) \leqslant \eta r$ 的 $x, y \in X$。因此，对每个 $x \in X$，

$$\begin{aligned} D_{4R}^{-2} \leqslant & \int_{B(x,r)} \frac{1}{(T_r 1)(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leqslant T_r(1/T_r 1)(x) \\ \leqslant & \int_{B(x,\eta r)} \frac{1}{(T_r 1)(y)} \, \mathrm{d}\mu(y) \leqslant D_{4R}^2. \end{aligned}$$

对每个 $x, y \in X$，定义

$$S_r(x, y) := \frac{1}{(T_r 1)(x)(T_r 1)(y)} \int_X \frac{h(d(x, z)/r) h(d(z, y)/r)}{T_r(1/T_r 1)(z)} \, \mathrm{d}\mu(z).$$

S_r 的连续性显然成立，(1)（将 3 替换为 2η）和 (2) 也成立；由富比尼定理可得 (3)。关于 (4)，注意到若 $d(x, y) < r/2$，则

$$\begin{aligned} S_r(x, y) \geqslant & \frac{1}{D_{4R}^2 V_{\eta r}(x) V_{\eta r}(y)} \mu(B(x, r) \cap B(y, r)) \\ \geqslant & \frac{1}{D_{4R}^4 V_r(x) V_r(y)} \mu(B(x, r) \cap B(y, r)), \end{aligned}$$

由此得出我们的断言，因为

$$\mu(B(x, r) \cap B(y, r)) \geqslant \max(V_{r/2}(x), V_{r/2}(y)) \geqslant D_{4R}^{-1} \max(V_r(x), V_r(y)).$$

现在，注意到

$$S_r(x, y) \leqslant \frac{D_{4R}^2}{(T_r 1)(x)(T_r 1)(y)} \int_X h(d(z, y)/r) \, \mathrm{d}\mu(z) \leqslant \frac{D_{4R}^2}{V_r(x)}.$$

由对称性，我们还有 $S_r(x,y) \leqslant \frac{D_{4R}^2}{V_r\ y}()$,由此得到 (5)。

最后，我们来证明 (6)。注意，若 $d(x,x') \geqslant 4\eta r$，则要么 $S_r(x,y) = 0$ or$S_r(x',y) = 0$，因此由 (5) 可得结论。接着，假设 $d(x,x') < 4\eta r$，并注意到，若 $S_r(x,y) - S_r(x',y) \neq 0$，则 $d(x,y) < 6\eta r$ 且 $d(x',y) < 6\eta r$，因此，仿照前面的论证可知

$$\min(V_r(x), V_r(x')) \geqslant D_{4R}^{-3} \min(V_{8r}(x), V_{8r}(x')) \geqslant \frac{\min(V_r(x), V_r(x')) + V_r(y)}{2D_{4R}^3}.$$

接下来，注意到

$$\begin{aligned}
&S_r(x,y) - S_r(x',y) \\
&= \left(\frac{1}{(T_r1)(x)} - \frac{1}{(T_r1)(x')}\right) \frac{1}{T_r(y)} \int_X \frac{h(d(x,z)/r)h(d(z,y)/r)}{T_r(1/T_r1)(z)} \,\mathrm{d}\mu(z) \\
&\quad + \frac{1}{(T_r1)(x')(T_r1)(y)} \int_X \frac{[h(d(x,z)/r) - h(d(x',z)/r)]h(d(z,y)/r)}{T_r(1/T_r1)(z)} \,\mathrm{d}\mu(z).
\end{aligned}$$

关于第一项，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{(T_r1)(x)} - \frac{1}{(T_r1)(x')}\right| &\leqslant \frac{|(T_r1)(x) - (T_r1)(x')|}{V_r(x)V_r(x')} \\
&\leqslant \frac{1}{V_r(x)V_r(x')} \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{B(x',5\eta r)} \frac{|d(x,y) - d(x',y)|}{r} \,\mathrm{d}\mu(y) \\
&\leqslant \frac{V_{8r}(x')}{V_r(x)V_r(x')} \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d(x,x')}{r} \\
&\leqslant D_{4R}^3 \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d(x,x')}{rV_r(x)},
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{1}{(T_r1)(x)} - \frac{1}{(T_r1)(x')}\right) \frac{1}{(T_r1)(y)} \int_X \frac{h(d(x,z)/r)h(d(z,y)/r)}{T_r(1/T_r1)(z)} \,\mathrm{d}\mu(z)\right| \\
&\qquad \leqslant D_{4R}^5 \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d(x,x')}{rV_r(x)}.
\end{aligned}$$

关于第二项，仿照前面的论证可知

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(T_r1)(x')(T_r1)(y)} \int_X \frac{|h(d(x,z)/r) - h(d(x',z)/r)|h(d(z,y)/r)}{T_r(1/T_r1)(z)} \,\mathrm{d}\mu(z) \\
&\qquad \leqslant \frac{D_{4R}^2}{(T_r1)(x')} \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d(x,x')}{r} \\
&\qquad \leqslant \frac{D_{4R}^2}{V_r(x')} \|h'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{d(x,x')}{r},
\end{aligned}$$

由此即可得出该断言。 □

定理 *18* 的证明。 取 $(S_r)_{r\in(0,R/4]}$，并按引理21中的定义设定 V_r，则存在常数 $C_1>1$，使得

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_R^6V_{r/2(x)}}\chi_{B(x,r/2)}(y)&\leqslant\frac{1}{D_R^5V_r(x)}\chi_{B(x,r/2)}(y)\leqslant S_r(x,y)\\&\leqslant\frac{2D_R^2}{V_r(x)}\chi_{B(x,3r)}(y)\leqslant\frac{2D_R^4}{V_{3r}(x)}\chi_{B(x,3r)}(y)\end{aligned}$$

对每个 $x,y\in X$，以及每个 $r\in(0,R/4]$，当

$$|S_r(x,y)-S_r(x,y')|\leqslant\frac{C_1D_R^8d(y,y')}{r\min(V_r(y),V_r(y'))}$$

对每个 $x,y,y'\in X$。令 $R':=R/63$。对于 $\mathbb{N}$ 的每个有限子集 J，考虑线性算子 $T_J\colon L^\infty(\mu)\to L^\infty(\mu;\ell^\infty(J))$，其定义为 $T_Jf(x)=\int_X K_J(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$，其中

$$K_J(x,y)=(S_{2^{-j}R'}(x,y))_{j\in J}$$

对每个 $x,y\in X$。注意到 $K_J\colon X\times X\to\ell^\infty(J)$ 是连续的，因此 T_J定义良好。此外，显然

$$\|(T_Jf)(x)\|_{\ell^\infty(J)}\leqslant2D_{4R'}^4\|f\|_{L^\infty(\mu)}$$

对每个 J、每个 $x\in X$，以及每个 $f\in L^\infty(\mu)$。现在，取 $y,y'\in X$，其中$y\neq y'$。于是，

$$\begin{aligned}&\int_{X\setminus B(y,2d(y,y'))}\|K_J(x,y)-K_J(x,y')\|_{\ell^\infty(J)}\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad\leqslant\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_{X\setminus B(y,2d(y,y'))}|S_{2^{-j}R'}(x,y)-S_{2^{-j}R'}(x,y')|\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad=\sum_{2^{-j}3R'\geqslant d(y,y')}\int_{(B(y,2^{-j}3R')\cup B(y',2^{-j}3R'))\setminus B(y,2d(y,y'))}|S_{2^{-j}R'}(x,y)-S_{2^{-j}R'}(x,y')|\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad\leqslant\frac{C_1D_R^8}{R'}\sum_{2^{-j}3R'\geqslant d(y,y')}\int_{B(y,2^{-j}3R')\cup B(y',2^{-j}3R')}\frac{2^jd(y,y')}{\min(V_{2^{-j}R'}(y),V_{2^{-j}R'}(y'))}\,\mathrm{d}\mu(x)\\&\quad\leqslant\frac{C_1D_R^8}{R'}\sum_{2^{-j}3R'\geqslant d(y,y')}2^jd(y,y')\frac{V_{2^{-j}3R'}(y)+V_{2^{-j}3R'}(y')}{\min(V_{2^{-j}R'}(y),V_{2^{-j}R'}(y'))}\\&\quad\leqslant2\frac{C_1D_R^8}{R'}\sum_{2^{-j}3R'\geqslant d(y,y')}2^jd(y,y')\frac{\min(V_{2^{3-j}R'}(y),V_{2^{3-j}R'}(y'))}{\min(V_{2^{-j}R'}(y),V_{2^{-j}R'}(y'))}\\&\quad\leqslant12C_1D_R^{11}.\end{aligned}$$

由推论17，我们可以得出

$$\|T_Jf\|_{L^p(\mu;\ell^\infty(J))}\leqslant16\,D_R^5p'^{1/p}(2D_R^{13}+12C_1D_R^{11})\|f\|_{L^p(\mu)}$$

对于每个 J 以及每个 $f\in L_c^\infty$（μ）。

为简化记号，对于每个 $k'\in\{0,\dots,k\}$，我们记作 $p^{(k')}:=(p_1,\dots,p_{k'})$ 和 $\nu^{(k')}:=(\nu_1,\dots,\nu_{k'})$。现在，假设通过归纳法，对于某个

$k' \in \{0, \dots, k-1\}$（略微滥用记号），

$$\left\| [T_J f(\,\cdot\,)(y)](x) \right\|_{L^p_x(\mu; L^{p^{(k')}}_y(\nu^{(k')}; \ell^\infty(J)))}$$

$$\leqslant 16^{k'+1}(2+(k'+1)12C_1) D_R^{18+16k'} p_1'^{1/p_1} \varphi(p_{k'}, p) \prod_{j=1}^{k'-1} \varphi(p_j, p_{j+1}) \|f\|_{L^p(\mu; L^{p^{(k')}}(\nu^{(k')}))}$$

对每个 $f \in L^p\big(\mu;\ L^{p^{(k')}}\big(\nu^{(k')}\big)\big)$ 以及每个 J，并证明关于 $k'+1$ 的类似断言（注意，情形 $k'=0$ 已在上文证明）。为此，我们将把推论17应用于 $B_1 = L^{p^{(k'+1)}}(\nu^{(k'+1)})$、$B_2 = L^{p^{(k'+1)}}(\nu^{(k'+1)}; \ell^\infty(J))$、$r = p_{k'+1}$、$\kappa = 7/3$、$R = 9R'$，以及如下定义的算子 T

$$Tf(x) = \int_X K_J(x, x') f(x') \,\mathrm{d}\mu(x'),$$

其中，对几乎每个 y，$[K_J(x,x')f(x')](y) = K_J(x,x')[f(x')(y)]$。注意，$K_J(x,y) - K_J(x',y')$ 作为 $\ell^\infty(J)$ 的元素，与其作为 $\mathcal{L}(B_1; B_2)$ 的元素的典范延拓，具有相同的范数（前提是所有 ν_j、$j=1$、……、$k'+1$ 均非平凡；否则无需证明）。注意，由于 $L^{p_{k'+1}}(\mu)$ 范数与 $L^{p_{k'+1}}(\nu_{k'+1})$ 范数可交换，$\text{(ii)}_{9R'}$ 和 $\text{(ii)}'_{9R'}$ 成立，且

$$A_{9R'} = 16^{k'+1}(2+(k'+1)12C_1) D_R^{18+16k'} p_1'^{1/p_1} \prod_{j=1}^{k'} \varphi(p_j, p_{j+1}).$$

于是，借助推论17)，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|T_J f\|_{L^p(\mu; L^{p^{(k'+1)}}(\nu^{(k'+1)}; \ell^\infty(J)))} \\
&\quad \leqslant 16^{k'+2}(2+(k'+2)12C_1) D_R^{18+16(k'+1)} \times \\
&\qquad \times p_1'^{1/p_1} \varphi(p_{k'+1}, p) \prod_{j=1}^{k'} \varphi(p_j, p_{j+1}) \|f\|_{L^p(\mu; L^{p^{(k'+1)}}(\nu^{(k'+1)}))}
\end{aligned}$$

对每个 $p \in (1, \infty)$ 以及每个 $f \in L^\infty(\mu;\ L^{p^{(k'+1)}}(\nu^{(k'+1)}))$。

现在注意，对每个 $j \in \mathbb{N}$、每个 μ-可测函数 $f\colon X \to \mathbb{C}$以及每个 $x \in X$ 和 $r \in (2^{-j-2}R', 2^{-j-1}R']$，

$$\fint_{B(x,r)} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant D_{R'} \fint_{B(x, 2^{-j-1}R')} |f| \,\mathrm{d}\mu$$

因为 $\mu(B(x,r)) \geqslant D_{R'}^{-1} \mu(B(x, 2r)) \geqslant D_{R'}^{-1} \mu(B(x, 2^{-j-1}R'))$。因此，由单调收敛定理，

$$(\widetilde{\mathcal{M}}_{R'/2} f)(x) \leqslant D_{R'} \sup_{j \in \mathbb{N}} \fint_{B(x, 2^{-j-1}R')} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{D_{R'}^7}{C_1} \sup_{J \in \mathcal{P}_0(\mathbb{N})} \|T_J f(x)\|_{\ell^\infty(J)}$$

其中 $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ 表示 $\mathbb{N}$ 的有限子集所组成的集合。将 $2R$ 替换为 $R'/2 = R/126$ 后的断言即可由单调收敛定理得出。

为了完成证明，我们需要估计由以下方式定义的算子 $\mathcal{M}'$

$$(\mathcal{M}' f)(x) \coloneqq \frac{1}{V_{R/126}(x)} \int_{B(x,2R)} |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

注意，由闵可夫斯基积分不等式可知，我们不再需要处理混合范数空间。接下来，只需应用舒尔引理，因为

$$\sup_{x\in X}\int_{B(x,2R)}\frac{1}{V_{R/126}(x)}\,\mathrm{d}\mu(y)\leqslant D_R^8.$$

该断言由此得出。 □

参考文献

[1] Bourbaki, N., 积分 *I*, 数学原理, Springer-Verlag, 2004年.[2] Bourbaki, N., 积分 *II*, 数学原理, Springer-Verlag, 2004 年 .[3] Bruno, T., Calzi, M., Peloso, M. M., 加权次强制算子的函数空间 , 准备中.[4] Coifman, R. R., Weiss, G., 某些齐性空间上的非交换调和分析,数学讲义**242**, Springer, 柏林, 1971年.[5] Diestel, J., Uhl, J. J.,向量测度, 美国数学学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1977年.[6] Dunford, N., Schwartz, J.T., 线性算子，第*I*部分, Interscience Publishers, Inc.纽约, 1958年.[7] Grafakos, L., 经典傅里叶分析, 第3版, Springer, 2014年.[8] Grafakos, L., Liu, L., Yang, D., 齐性型空间上的向量值奇异积分与极大函数, 斯堪的纳维亚数学杂志 **104** (2009年), 第296–310页.[9] Han, Y., Müller, D., Yang, D., 以Carnot–Carathéodory空间为模型的度量测度空间上的Besov空间与Triebel–Lizorkin空间理论, 抽象与应用分析 **208** (2008年), 第1–250页.

数学系，米兰大学，Via C. Saldini 50号，20133米兰，意大利电子邮箱：mattia.calzi@unimi.it，elena.rizzo@unimi.it