arXiv:2602.06016v1 [math.CO] 5 Feb 2026

来自单纯伪流形的凸并与完备化

Soohyun Park
lalaland.cappelletti@gmail.com

2026年2月5日

虽然凸集的交仍是凸集，但它们的并集的行为却相当复杂。凸集的交集出现的一些自然情境包括涉及凸集边界与赋值的对偶论证，而赋值具有类似欧拉示性数的结构。不过，在某些情况下，凸性本身也很重要。例如，这包括环面簇上除子的正性在吹降下的保持。对于余法丛（的限制），这可以从存储在有理等价关系中的局部凸性数据之间的相互作用来理解。我们将其推广到单纯伪流形的实现，并以 PL 同胚的作用取代有理等价。

将 PL 同胚分解为边细分与收缩后，我们用凸并与完备化刻画了与局部凸性相容的适当收缩点空间。这会产生某些外部边细分，使起始边的“收缩空间”变为空集；鉴于边细分通常会带来预期的“凸性增强”，这一结果出人意料。我们还得到了强有力的仿射/线性限制，适用于包含邻近边且保持局部凸性的面实现。这意味着，收缩某些邻近边会使起始边的收缩空间变得极大或极小。至于边界行为，PL 同胚对 1-骨架中诱导 4-圈的作用之间存在相似之处

最后，我们探讨 PL 同胚和悬挂对……类似物的影响

这些类似物由参数线性系记录的局部凸性性质。由此可见，与交叉多胞体的边界 PL 同胚的单纯球面，以最自然的方式记录局部凸性变化。

引言

凸性在交集运算下得以保留，但在并集运算下的表现则更为复杂。凸集并集出现的一些常见情形包括：在对偶论证中，将凸集边界上的信息与其支撑平面上的信息相互转换（第 32 页、 [17] 第 33 页的定理 1.6.3，以及第 35 页的定理 1.6.9 ）；以及凸集上的赋值（ [17] 第 6 章）。特别是，在后一种情形中，容斥结构从根本上使得有限个凸集的并集能够以类似于凸集的方式加以处理。不过，在一些自然的情形下，考察这类并集本身的凸性十分重要。例如，这包括吹降之后环面簇上除子的正性（ [6] 第 130–132 页）。若具体考察环面簇上的余法丛（的限制） [12], ，则会发现这与环面簇符号中出现的多项式的正性问题有关，也与许多不同的组合学背景有关，其中包括排列统计量 [2]。

我们将从单纯伪流形实现这一更一般的视角出发，研究其 underlying 组合结构。类似变换下局部凸性性质的保持，可转化为某些集合并集的凸性（定理 3.4）。特别地，我们研究的是单纯伪流形的分片线性（PL）同胚。需要注意的是，文献中涉及凸集有限并集的拓扑性质示例，主要与欧拉示性数有关（例如 [17] 第 339 页的讨论）。不同于环面簇情形下对有理等价关系的专门化，在这里，局部凸性信息存储于有理等价关系中的内积，并进一步专门化为墙关系（ [6]，第 300–302 页命题 1.7）。对于单纯伪流形，我们采用超平面（非）分离的方式来解释局部凸性（命题 2.2），并分析 PL 同胚的影响。

根据 Alexander 的一个结果（ [1] 第 302 页的推论 [10:2d] 和 [11]第 75 页的推论 4.1），问题可归结为考察边细分和收缩。在第 3 节中，我们将假设细分顶点和收缩点是通过对所涉及的边进行线性插值得到的，尽管相关推理往往并未用到这一假设（注 4.1 和注 4.14）。首先，边细分总能保留现有墙穿越的凸性，并在这种情形下引入新的凸墙穿越（命题 3.2）。请注意，各个墙穿越不一定会变得“更凸”。

另一方面，边收缩不一定能保持墙穿越的凸性。例如，交叉多胞体的边界甚至不存在这样的边（例 3.12）。给定一个具有凸墙穿越的单纯伪流形 Δ中的固定边e，同样的推理表明，对某些边进行细分可能会产生这样的单纯伪流形：

在这些流形中，收缩e无法保持墙穿越的凸性（定理 3.20）。考虑到边细分带来了更大的凸墙穿越空间，这一点或许出人意料。这些结果应用了我们对与局部凸性性质相容的收缩点的刻画（定理 3.4、定义 3.3），这也是凸并与完备化之间联系的来源。更一般地说，这个空间是我们分析局部凸性性质与分片线性同胚之间相互作用的主要工具。

在一些应用中，我们需要对包含“邻近”的凸可收缩边（定义 3.3）的面之实现施加仿射/线性限制。我们的主要思路源于凸集的一般性质以及单纯伪流形的强连通性。它们表现为：在包含这些墙的面内，墙具有相同的张成空间，且这些面可通过穿越墙彼此连通（命题 3.14）。这些仿射/线性限制源自凸集边界的交集（命题 3.14）。将这些限制推广开来，则运用了单纯伪流形的强连通性（命题 3.17）。结合定理 3.4，我们发现，收缩一条邻近外部边，可能会使该边e的初始收缩点空间呈现极端情形：它要么至多是一个点，要么就是实现e的整条线段（定理 3.19）。

某些外部边细分也会使收缩点空间呈现这种极端情形（定理 3.20）。一般而言，外部边细分产生的结果取决于抽象单纯复形中的邻接性质。从更广泛的角度看，对邻近凸可收缩边的限制，属于外部边收缩对收缩点空间所产生影响的一部分。与外部边细分不同，即使抽象单纯复形结构中的邻接性质相同，行为也可能有所不同（推论 3.22）。这取决于界定局部凸性性质的半空间之边界超平面是否将被收缩边的端点分开，以及投影到这些超平面上的投影大小（命题 3.21）。若将被收缩边实现顶点的向量长度归一化，则可以将此现象理解为与这些超平面所成角度的比较。

受组合启发式以及上述讨论的启发，我们考察平坦墙穿越的边界情形如何与悬挂及 PL 同胚相互作用。更具体地说，我们发现，PL 同胚对 1-骨架中 4-圈的影响，与由抽象单纯复形结构变化所诱导的平坦墙穿越之间存在相似之处（命题 3.23）。对于完全由 k^d-实现变化导致的情形，我们发现行为上的差异源于凸性条件中包含于界定半空间的超平面所造成的“退化”。这些组合启发式来自旗单纯复形与局部凸性之间的紧密联系，后者出现在由旗单纯复形引出的组合正性问题中（[12], [16], [2]）。注意，旗性与收缩边以保持 PL 同胚类的条件相似（ [13]）。边细分会保持旗性和已有的凸墙穿越，同时增加新的凸墙穿越。相对于边细分而言极小的情形，是指其一维骨架被诱导 4-圈覆盖的情形。运用类似的“极小”思路，引出了与平坦墙穿越的比较。从启发式角度看，我们可以将这些情形视为其他情形的构造基块，而其他情形

则是由它们经过边细分构造而成的。

除了与单纯复形的内在组合数据之间的联系外，我们还要指出，主要结果的推理往往并不依赖线性插值（注 4.1 和注 4.14）。这使我们能够为单纯伪流形的更一般实现推导出类似性质。在此过程中，我们发现线性插值与这类性质及其进一步推广相容（注 4.14，命题 4.15）。我们以参数线性系取代有理等价。参数线性系给出了坐标实现之间的线性关系（例如质心关系，或注 4.6 和注记 4.9 中的应力空间）。例如，这包括环面簇的有理等价关系。这些线性形式也充当抽象单纯复形的组合结构与环面簇 Chow 环的推广之间的桥梁。即使对 1-骨架的正常着色附加假设，后者仍无法充分说明各个面的实现如何彼此拼合。

通过适当选择参数线性系，我们可以得到与墙关系密切相关的线性形式（例 4.7，注 4.10）。我们构造了一种自然的参数线性系选择，用以追踪 PL 同胚带来的变化（命题 4.11 和命题 4.12）。其中涉及的系数符号是对注 4.14 末尾观察结果的一种应用。我们给出一个例子，说明其与线性插值的相容性（例 4.13）。结合这一框架的各个组成部分，我们发现 PL 同胚和悬挂会如何影响由参数线性系记录的局部凸性性质的类似性质（命题 4.15）。从某种意义上说，这表明与交叉多胞体边界 PL 同胚的单纯球面，以最“纯粹”的方式记录局部凸性变化。最后，同样的推理还为更一般的单纯伪流形类导出了类似于局部凸性变化 的性质（推论 4.17）。

上述关于凸性和单纯伪流形的性质将在第 1 节中加以描述。随后，我们将在第 2 节中给出适用于单纯伪流形实现的局部凸性的超平面（非）分离解释，并定义支撑。这是我们在第 3 节分析单纯伪流形实现的局部凸性性质与 PL 同胚之间相互作用影响的主要工具。最后，在第 4 节中，我们将单纯伪流形的环面簇有理等价关系的替代关系与局部凸性的类似概念联系起来。这涉及将我们此前的观察推广到更一般的坐标实现。

1 背景与记号

我们给出一些初步背景，介绍第 3 节和第 4 节中用于分析单纯伪流形实现的（局部）凸性性质的主要工具，这些工具采用第 2 节中凸性的超平面（非）分离解释。

在讨论其他性质之前，我们定义我们所关注的主要几何性质。

定义 1.1.（凸集）

1. 若一个集合 $A \subset k^d$是**凸** 的，则对于 $\alpha, \beta \in A$，任何位于线段$\alpha\beta$ 上的点（$1-\eta$）$\alpha+\eta\beta$（其中 $\eta \in [0,1]$）都属于A。2. “非退化”的凸集（即不是仿射空间或半空间的凸集）既可以表示为边界上各点的凸线性组合，也可以表示为包含它们的半空间的交（第 12 页的推论 1.3.5 和第 16 页的引理 1.4.1； [17], 第 25 页的命题 1.2.8 和第 26–27 页的命题 1.2.10 [6]）。

我们主要关注作为单纯复形实现的集合。借鉴环面簇的做法，我们将其定义为单纯复形的支撑。

定义 1.2。（单纯复形的支撑）
(属 lizing Definiti见第 3.1.2 节，第 106 页 f 6)
支撑 $|S|$ 是 $d-1$ 维单纯复形 S在 k^d 中的一个固定实现。这是 S 的各个面的实现的并集。该术语源自（多面体）扇的术语（例如在环面簇的语境中）。

注 1.3。 **（一个面上的顶点的线性无关性）**
由于单纯复形的面在面上相交，不同的面的非空交集必定位于相应面的边界上。在这一条件下，单纯复形的一个面的顶点的实现将被视为线性无关的。

记号 1.4。（单纯复形的面包含关系）
如果p是 Δ的一个顶点，我们将把面$F \in \Delta$ 的包含关系$p \in F$解释为顶点集的包含关系。然而，对于 k^d 中的一点 α ，若该点*not* 是F的一个顶点的实现，我们将把 $\alpha \in F$解释为 α 作为k^d中的一点包含于*realization* of F的实现中。

我们感兴趣的特殊单纯复形是单纯伪流形，下面将对其进行定义。由于与墙穿越相关的论证对于我们分析局部凸性十分重要，因此也将其纳入定义之中。

定义 1.5。（单纯伪流形与墙穿越）
（ [7], 的第46–48页， [18], 第24节的第90–91页、第23节的第86–87页以及第41节的第152页， [19], 的第24页， [8]的第20页和第37页）

1. 一个（$d-1$）维的**无边界单纯伪流形** Δ 满足以下性质：

a) Δ 的每个面都是 Δ的某个（$d-1$）维面的面。b) Δ 的每个（$d-2$）维面恰好是 Δ 的两个（$d-1$）维面的面。c) 若F和$F\prime$是 Δ的（$d-1$）维面，则存在有限序列$F=F_1,\ldots,F_m=F'$，其中各项都是 Δ 的（$d-1$）维面，且$F_i\cap F_{i+1}$是 Δ的一个（$d-2$）维面。

在我们的设定中，我们就简单地称之为**单纯伪流形**。

2. 在环面簇的语境下，这种余维 1 面称为**墙**。例如，它们出现在环面簇上除子的正性及与凸性相关的性质中（例如， [6], 第 265 页、第 301–302 页； [14]第 419–422 页）。由于我们将使用涉及单纯伪流形实现中面遍历的凸性论证，因此也将单纯伪流形上的面遍历称为**墙穿越**。

注记 1.6. **（关于单纯伪流形的进一步说明）**
关于单纯伪流形定义的讨论见 [7] 第 46–48 页。例如，定义包含了可能导致其并非真正（可三角剖分）流形的低维障碍。请注意，原始定义只包含前两个条件。第三个条件（强连通性）的拓扑动机见 [7] 第 47 页；更多细节见 [18] 第 24 节第 90–91 页、第 23 节第 86–87 页，以及第 41 节第 152 页。第二个条件的一种更“内在”的描述来自与此类对象相关的链接，该描述见 S^1 （ [8] 第 26 页）。请注意，在不同语境中，第三部分是否作为假设存在有所不同（例如，对比 [19] 第 24 页和 [3] 第 20 页与 [15] 第 200 页）。

墙穿越与局部凸性性质，以及我们将用来“铺砌”支撑的凸集之间存在着自然联系（命题 2.2）。在环面簇的背景下，局部凸性数据可用于研究除子的正性（例如， [6]第 266–267 页定理 6.1.7 和第 271 页定理 6.1.14 中无基点除子和丰除子的支撑函数），以及与之相关的组合性质（例如， [12]中的环面簇的符号）。下面的结果给出了墙穿越与局部凸性性质之间的具体关系。

命题 1.7. （有理等价、墙关系与凸性）
（*[14]第 421 页上的引理 14-1-7*）
设 Σ 是位于 k^d 内的一个 $(d-1)$ 维单纯扇。考虑由面 F 和 G 进行的扇Σ 中的一次墙穿越。固定一条墙上射线 $\rho\in\Sigma(1)$。设 $p\in F$ 和 $q\in G$ 是墙外射线

，并且 $\tau := F \cap G$ 是一堵包含 ρ 的墙。墙关系

$$c_p x_p + c_q x_q + \sum_{m \in \tau(1)} c_m x_m = 0$$

与此墙穿越相关联的 $c_p > 0 \; with \; c_q > 0$ 是 k^d 中 $F \cup G$ 的顶点之间的线性关系，且除比例因子外唯一（见 *[6]* 第 *301–302* 页）。

注意到 $\rho \in \tau(1)$，利用 F 的射线的对偶基，我们得到以下等价关系 .

1. $D\rho \cdot V_\tau > 0 \Leftrightarrow \langle \rho^* F, q \rangle < 0 \Leftrightarrow c_\rho > 0 \Leftrightarrow F \cup G$ 关于 ρ 沿 $\tau | \rho /$ 严格凹。 *2.* $D\rho \cdot V_\tau = 0 \Leftrightarrow \langle \rho^* F, q \rangle = 0 \Leftrightarrow c_\rho = 0 \Leftrightarrow F \cup G$ 关于 ρ 沿 $\tau \mid \rho /$ 平坦。 *3.* $D\rho \cdot V_\tau < 0 \Leftrightarrow \langle \rho^* F, q \rangle > 0 \Leftrightarrow c_\rho < 0 \Leftrightarrow F \cup G$ 关于 ρ 沿 $\tau | \rho /$ 严格凸。

证明此结果时所涉及的墙关系（见 [6] 第 301–302 页）体现了从纯粹的组合数据到代数结构的过渡。在命题 2.2 中，我们将从超平面（非）分离的角度，对第 3 部分作出更具几何意义的解释，并阐述其与局部凸性性质的联系。注意，其他部分也可以用同样的方式重新表述。

2 超平面（非）分离与凸性

由于我们研究的是依赖于单纯复形坐标实现的凸性性质，因此先定义相关术语。

定义 2.1。（将 [6] 第 106 页的定义 3.1.2 及 [12] 第 259 页的定义应用于单纯复形）

设有一个（ − 1）维单纯复形 Δ，并在 k^d 中有一个固定的实现。

1. Δ 的**支撑** $|\Delta|$ 是 Δ 各面实现的并集。

2. 若对所有顶点 $p \in V(\Delta)$， Δ 的 $|\mathrm{st}_\Delta(p)|$ 都是凸的，则称单纯复形 Δ 是 **局部凸的** 。

请注意，局部凸性这一性质与介于单峰性和实根性之间的组合正性性质，以及环面簇的余法丛（的限制）的 nef/无基点性质密切相关（[12], [16], [2]）。

接下来，我们将对命题 1.7 作出超平面（非）分离的诠释，并探讨其对局部和整体凸性性质的启示。在分析单纯伪流形实现的局部凸性性质时，我们将采用这一视角。

命题 2.2.（超平面（非）分离与凸性性质）

1. 若墙穿越的墙为 τ，墙外顶点为 r 和 s，则对于墙上的顶点 $p \in \tau$（按 *[14]* 第 *421* 页的定义），该墙穿越相对于 p 是凸的，当且仅当超平面张成空间$(\tau \setminus p, r)$不分离点 p 和 s。注意，这等价于超平面张成空间$(\tau \setminus p, s)$不分离点 p 和 r。若 $s \in$张成空间$(\tau \setminus p, r)$，则该墙穿越相对于 p 是平坦的。

2. 两个共享墙 $F \in \Delta G$ 的面 $F, G \in \Delta$ 的并集 $F \cup G$ 是凸的，当且仅当相应的墙穿越相对于每个位于墙 $F \cap G$ 上的顶点 $p \in F \cap G$ 都是凸的。

3. 星 $|\mathrm{st}_\Delta(p)|$ 的支撑是凸的，当且仅当所有包含位于墙上点 p 的墙穿越 Δ 都相对于 p 是凸的。

注 2.3. 命题 2.2 的第 3 部分是如下等价关系的组合对应物：一个扇具有满维凸支撑时，环面簇上的卡蒂埃除子的数值有效性等价于其与环面不变不可约完备曲线的交数非负（第 291 页的定理 6.3.12 和第 421 页的引理 14-1-7）。

证明。 1。这是命题1.7的非分离超平面解释。

2. 设 $p \in F$ 和 $q \in G$ 是与 $F \cup G$ 相关的墙穿越中的墙外顶点。根据第 16 页的引理 1.4.1，闭凸集是其边界的凸包，除非它是环境空间 $\mathbb{k}^d$ 中的仿射子空间或半空间。因此，集合 $F \cup G$ 是凸集，当且仅当它是其边界的凸包。要使 $F \cup G$ 成为其边界的凸包，整个集合 $F \cup G$ 相对于由 F 或 G 的任一墙的顶点张成的每个超平面，都只能位于其一侧；但 $F \cap G$ 除外（也就是说，F 中包含 p 的任一墙，或 G 中包含 q 的任一墙）。更具体地说，F 的凸性意味着，对于任意 $m \in F \setminus p$，由 Span$(F \setminus m)$ 张成的超平面不会分离点 p 与任意 $r \in F \setminus \{p, m\}$。将 F 换成 G、将 p 换成 q，同样的论断也成立。

由于对于某个 $m \neq p$，F 的顶点总是位于张成空间 Span$(F \setminus m)$ 的同侧，因此唯一可能的“问题顶点”是 q。或者，我们也可以将问题表述为：形如 Span$(G \setminus m)$ 的超平面（其中 $m \in F \cap G$ 是一个墙上顶点）是否会将 p 和 q 分离。考虑它不分离 p 和 q 的情况。如果 $p \in$ Span$(G \setminus m)$，那么超平面 Span$(G \setminus m)$ 不会将 p 和 q 分离，因为 p 同时位于与该超平面相关的两个半空间上。这等价于，与 $F \cup G$ 的墙穿越相关联的墙关系中，m 的系数等于 0。假设 $p \notin$ Span$(G \setminus m)$。这将意味着 $pq \not\subset$ Span$(G \setminus m)$，且交集 $pq \cap$ Span$(G \setminus m)$ 是 —— ——

单点或空集。由于q 已经位于该交集中，因此我们有$pq \cap \mathrm{Span}(G\backslash m) = \{q\}$，并且超平面 $\mathrm{Span}(G\backslash m)$ 不会将p和q分离。半空间的凸性继而意味着，整条线段pq 都位于超平面 $\mathrm{Span}(G\backslash m)$ 的一侧。关于m 而言，F ∪G 的墙穿越的凸性，指的就是$\overline{p}$和m 位于超平面 $\mathrm{Span}(G\backslash m)$ 的同侧。这由第 1 部分的陈述可知。对每个 m ∈ F ∩G 重复这一过程，即可得到所述等价关系。用q 替换p，并用超平面 $\mathrm{Span}(F\backslash m)$ 替换 $\mathrm{Span}(G\backslash m)$，也可以重复同样的论证。

或者，我们可以更直接地利用墙关系来处理。注意，F和G 分别是其顶点的凸线性组合。由于p 和q 都不 位于超平面 张成空间$(F \cap G)$内，直线 pq∩张成空间$(F \cap G)$的交集是一个点。为了使$F \cup G$为凸集，该点必须位于$F \cup G$内。$F \cap \overline{G} \in \Delta$ 中顶点实现的线性无关性意味着该点必须位于墙$F \cap G$上。等价地，我们有

$$(1-\eta)x_p + \eta x_q = \sum_{r \in F \cap G} c_r x_r$$

对于某个 $\eta \in (0,1)$ 和$c_r \geq 0$，满足 $\sum_{r \in F \cap G} c_r = 1$（即凸线性组合）。将其重新整理可得关系

$$(1-\eta)x_p + \eta x_q + \sum_{r \in F \cap G} (-c_r)x_r = 0.$$

这可以理解为：墙上顶点$r \in F \cap G$的系数在与$F \cup G$的墙穿越相关联的墙关系中为非正；这正是该墙穿越相对于每个墙上顶点$r \in F \cup G$为凸的条件（参见 [14]第 421 页上的引理 14-1-7）。

3. 根据第 2 部分中的边界凸包论证，$|\mathrm{st}_\Delta(p)|$ 的凸性意味着，Δ 中包含p 的各面之间的每次墙穿越都相对于p是凸的。现在假设墙上包含p 的所有墙穿越都相对于p是凸的。给定与p相对的一面墙的每个张成空间，墙外顶点都与p位于该超平面的同侧。这意味着p 位于我们为形成支撑 $|\mathrm{st}_\Delta(p)|$而希望取交集的所有半空间的交集中。假设有一个顶点$m \in$链接$_\Delta(p)$，相对于这些超平面之一，它与p 位于另一侧。这会形成一条边，使其与 Δ 的某个面（例如，$\mathrm{st}_\Delta(p)$的一条边或一个面）的内部相交；而对于单纯复形中的一对面，这种情况是不可能的。

□

3 局部凸性的保持、墙穿越与 PL 同胚

本节介绍我们的主要结果，探讨单纯伪流形的实现的凸性性质与 PL 同胚之间的相互作用。在对问题进行初步简化之

后，并研究边细分下的行为，我们将在第3.1节中找出刻画凸墙穿越保持性的空间。第3.2节将介绍该空间在可能的实现、凸可收缩边的邻近性以及该空间可能行为范围方面的主要应用。最后，我们将在第3.3节中进一步考察如何通过边界条件，根据底层抽象单纯复形结构比较其组合性质。

3.1 分片线性同胚与凸并/完备化

如上所述，本小节将找出刻画分片线性同胚下局部凸性保持性质的空间（定理 3.4）。我们首先将对分片线性同胚影响的分析归约为边细分与收缩。

定理3.1。（*Alexander*， *[1]* 第 *302* 页上的推论 *[10:2d]* 以及 *[11]*第 *75* 页上的推论 *4.1*）如果 Δ 和 Γ 是 *PL* 同胚的单纯复形，那么它们可由一系列边细分与收缩相互连接。

由于边的（星式）细分与收缩所引起的变化，源自边上的链接中的局部数据，因此这些变化与面上的链接中的局部 数据相关联。我们将通过由分片线性同胚产生的线性系统参数以及k^d-实现的自然变化，把这一点与局部凸性数据联系起来。虽然我们将假设边的细分顶点和收缩点由线性插值实现，但要注意，大部分论证也适用于更一般的实现（注 4.1 和注 4.14）。

首先，我们证明，若通过线性插值来实现细分顶点，边细分会扩大凸墙穿越的空间。需要注意的是，这不一定会使单个墙穿越“更加凸”。这一点在考察涉及外部边的 PL 同胚所产生的影响时，我们会牢记。虽然我们会用线性插值来实现细分顶点和收缩点，但相关推理往往并不取决于所采用的实现方式。关于实现方式的进一步讨论，另见第 4 节的注 4.1。

命题 3.2.（边细分与（局部）凸性）
设 Δ' 是关于一条边 $e = \{a,b\} \in \Delta$对一个$(d-1)$维 *Cohen–Macaulay* 单纯复形 Δ进行的（星形）细分。令 $v \in \Delta'$为细分顶点。令 x_p为点 $p \in V(\Delta)$在 k^d中的坐标表示。假设对于某个 $\eta \in (0,1)$，有 $x_v = (1-\eta)x_a + \eta x_b$，并且对于 $r \in V(\Delta)$，x_r在 Δ'中与 Δ相同。

若起始单纯复形 Δ具有凸墙交叉，则 Δ' 的墙穿越也是凸的。特别地，以 v 为墙上顶点的墙穿越与 Δ 的那些墙穿越相比“至少同样凸”，也就是说，原先为凸的墙关系仍保持为凸（或变得更

凸），并且新引入的墙穿越是凸的（命题 *1.7* 和命题 *2.2*）。虽然这对 Δ' 中以 v 为墙外顶点的墙穿越未必成立，但所诱导的系数变化并不会引入任何新的平坦墙穿越。

证明。 我们将保持“旧”顶点的k^d-坐标不变，使其与 Δ 到 Δ' 的“原始”坐标相同。除了细分顶点 v之外，它们就是 Δ' 的所有顶点。

我们首先关注涉及细分顶点v、且不 对应于 Δ中那些墙穿越的墙穿越。我们可以将这类墙穿越分为两类：一类将v 作为墙上顶点，另一类将v 作为墙外顶点。 Δ' 中包含v的面与 Δ 中包含$e = \{a,b\}$的面相对应，其中a或b之一被v替换。考虑将a替换为b或将b替换为a的墙穿越时，对于固定的$\eta \in (0,1)$，所选关系$x_v = (1-\eta)x_a + \eta x_b$给出墙关系

$$(1-\eta)x_a + \eta x_b - x_v = 0.$$

由于x_v 的系数为 -1，而其余墙上顶点x_p 在p 处的系数为0，因此在这种情况下我们有一个凸墙穿越（参见 [14]第420–421页关于墙上顶点符号的讨论）。

接下来，我们将考察 Δ' 中由 v引起的墙穿越，它们与 Δ 中的墙穿越相对应。假设包含v的 Δ' 面的起始墙外顶点是一个顶点 $q \in V(\Delta)$，且 $q \neq a,b$。这意味着 v 将是一个墙上顶点。注意，$\mathrm{lk}_{\Delta'}(v) = \mathrm{Susp}_{a,b}(\mathrm{lk}_\Delta(e))$。这对应于 Δ 中的一次墙穿越，其中涉及两个都包含e的面。区别在于， Δ' 中两个墙上顶点a 或b 之一被v 替换。假设v替换了b。由于假设 Δ' 中“旧”顶点（即 Δ' 中除v之外的顶点）的k^d-坐标相同，那么在 Δ 中对于这次墙穿越的墙关系（其中墙记为 τ ）为

$$c_q x_q + c_{q'} x_{q'} + \sum_{m \in \tau} c_m x_m = 0$$

其中$c_q, c_{q'} > 0$和$c_m \leq 0$对所有$m \in \tau$均成立（假设 $\tau \supset e = \{a, b\}$）。它在 Δ' 中的对应墙关系为

$$c_q x_q + c_{q'} x_{q'} + \sum_{\substack{m \in \tau \\ m \neq b}} c_m x_m + c_b\left(\frac{1}{\eta}x_v - \frac{1-\eta}{\eta}x_a\right) = c_q x_q + c_{q'} x_{q'} + \sum_{\substack{m \in \tau \\ m \neq a,b}} c_m x_m + \left(c_a - \frac{1-\eta}{\eta}\right)x_a + \frac{c_b}{\eta}x_v = 0$$

因为

$$x_b = \frac{1}{\eta}(x_v - (1-\eta)x_a) = \frac{1}{\eta}x_v - \frac{1-\eta}{\eta}x_a.$$

注意，$c_a - \frac{1-\eta}{\eta} \leq 0$，因为 $c_a \leq 0$ 且 $\frac{1-\eta}{\eta} \geq 0$。显然，$c\ \frac{b}{\eta} \leq 0$，因为 $c_b \leq 0$ 且 $\eta > 0$。由于 $0 < \eta < 1$，实际上我们有 $c\ \frac{b}{\eta} \leq c_b \leq 0$。因此，墙关系

$$c_q x_q + c_{q'} x_{q'} + \sum_{\substack{m \in \tau \\ m \neq a,b}} c_m x_m + \left(c_a - \frac{1-\eta}{\eta}\right)x_a + \frac{c_b}{\eta}x_v = 0$$

在 Δ' 中，对墙外顶点的系数严格为正，对墙上顶点的系数非正。这意味着，相关的 Δ' 中的墙穿越按照命题 1.7 和命题 2.2 的意义是凸的。注意，它比 Δ 中相应的墙穿越“更凸一些”，因为墙外顶点的所有系数保持不变，而墙上射线的系数要么保持不变，要么变得更加负。当 Δ' 的起始面包含 v，且该面是在 Δ 中包含 $e=\{a,b\}$ 的一个面上将 a 替换为 v 得到的面时，上述论证同样成立。

现在考虑 Δ' 中的墙穿越，从一个包含 v 的面开始，该面使用 v 作为墙外顶点。这意味着顶点 v 被另一个顶点取代。不失一般性，假设这个面是由 Δ 中一个包含 $e=\{a,b\}$ 的面将 b 替换为 v 而得到的。那么，取代 v 的顶点，就是在 Δ 中这次墙穿越的对应墙穿越里取代 b 的顶点 $b'\in V(\Delta)$。对于 Δ 中后者的墙穿越，其墙关系为

$$c_b x_b + c_{b'} x_{b'} + \sum_{m\in\tau} c_m x_m = 0$$

其中，对于所有 $m\in\tau$，有 c_b、$c_{b'}>0$ 和 $c_m\le 0$。由于所选关系 $x_v=(1-\eta)x_a+\eta x_b$ 蕴含 $x_b=\frac{1}{\eta}x_v-\frac{1-\eta}{\eta}x_a$，因此墙关系为

$$c_b\left(\frac{1}{\eta}x_v-\frac{1-\eta}{\eta}x_a\right)+c_{b'}x_{b'}+\sum_{m\in\tau}c_m x_m=\frac{c_b}{\eta}x_v+c_{b'}x_{b'}+\sum_{\substack{m\in\tau\\ m\neq a}}c_m x_m+\left(c_a-\frac{1-\eta}{\eta}c_b\right)x_a=0$$

在 Δ' 中。由于 $0<\eta<1$ 和 $c_b>0$，我们有 $c_{\frac{b}{\eta}}>c_b>0$ 以及 $\frac{1-\eta}{\eta}>0$。结合 $c_a\le 0$，可得 $c_a-\frac{1-\eta}{\eta}c_b<c_a\le 0$。这意味着我们所考虑的墙穿越是凸的。同样，当墙穿越起始面中的墙外顶点 v 被用于将 Δ 中一个包含 $e=\{a,b\}$ 的面里的 a 替换为 v 时，也可以重复上述推理。由于 $0<c_b<c_{\frac{b}{\eta}}$，这些墙穿越未必比它们在 Δ 中的对应情况“更凸”。然而，“未缩放”坐标 c_{σ} 的减小表明，不会产生新的平坦墙穿越。

□

定义 3.3。设 Δ 是一个在 k^d 中具有固定实现的（$d-1$）维单纯复形。假设 Δ 具有凸墙交叉。考虑一条边 $e=\{a,b\}\in\Delta$。e 的**收缩点空间**是所有可能的点 $w\in k^d$ 所组成的空间：用该点替换 a 和 b，使得对 e 的收缩具有凸墙交叉。如果存在这样的点 w，则称边 e 是**凸可收缩**的。

收缩点空间的基本思路是，寻找合适的收缩点，将某个凸集族“完备化”为更大的凸集，并使其与单纯复形的实现相容。我们的第一个主要结果表明，这些凸集与某些承载局部数据的凸集的并集是凸集。我们将用半空间来表述这一结果。一个关键依据是命题 2.2 中对凸性的超平面（非）分离解释。具体而言，我们不 希望指定的超平面将星形中心与顶点分离；我们正是以这些星形中心为参照来衡量凸性。由此得到

满足局部凸性所需的集合的可能“完备化”。

定理 3.4。（相对于固定边 $e = \{a, b\}$）固定一条边 $e = \{a, b\} \in \Delta$。假设 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是凸的，并考虑位于超平面 张成空间(τ) 同侧的顶点 w，其中该超平面对应于墙 $\tau \in$链接$_\Delta(a)$（对于 b，则相应地为 $\eta \in$ 链接$_\Delta(b)$）。注意，前一个假设是相对于 e 的线性收缩点空间非空的必要条件。

在这些点中，相对于 $e = \{\underline{a}, b\}$ 的线性收缩点空间由位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 的（内部）线段 ab 上的点给出

$$\left(\bigcap_{\substack{r \in \text{链接}_\Delta(a) \cup \text{链接}_\Delta(b) \\ \text{面 } F \in \Delta \text{ 使得 } F \ni r \text{ 且 } F \in \mathrm{st}_\Delta(a) H_r^+ \text{由 } H \text{ 界定且包含 } r \text{ 的半空间}}} \text{张成空间}(((F \setminus a) \cup a') \setminus r)_r^+ \right)$$

$$\bigcap \left(\bigcap_{\substack{r \in \text{链接}_\Delta(a) \cup \text{链接}_\Delta(b) \\ \text{面 } F \in \Delta \text{ 使得 } F \ni r \text{ 且 } F \in \mathrm{st}_\Delta(b) H_r^+ \text{由 } H \text{ 界定且包含 } r \text{ 的半空间}}} \text{张成空间}(((F \setminus b) \cup b') \setminus r)_r^+ \right)$$

这是最大的子集 $A \subset |st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$，使得对于通过将 a 或 b 替换为 $a' \notin$ 链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b)$ 或 $b' \in$ 链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b)$ 而得到的任意面 $F \in \Delta$，$A \cup F$ 在 k^d 中的实现都是凸的（即，距离 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$ 仅有一次墙穿越）（参见 *[17]* 第 *16* 页的引理 *1.4.1*）。

推论 3.5. 如果边 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 的收缩点空间非空，那么它是一个凸集，并且与一组指定的凸集的并集也是凸集。

备注 3.6. **(对偶性质)**
由于 Δ 若具有凸墙穿越，则是旗的（见 [12] 第 279 页上的命题 5.3），因此有 $\mathrm{lk}_\Delta(e) = \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(b)$。除了是旗性的一种常见应用之外，条件 $\mathrm{lk}_\Delta(e) = \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 也是收缩 $e = \{a,b\}$ 时保持分片线性同胚类型所需的性质，见 [13]。关于边细分，回想 $\mathrm{lk}_{\Delta'}(v) = \mathrm{Susp}_{a,b}(\mathrm{lk}_\Delta(e))$。由于 $\mathrm{lk}_{\tilde{\Delta}}(w) = \mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$，且定理 3.4 将凸可收缩性表述为指定凸集的并集是凸集，因此存在某种对偶性质，类似于交集与并集的极凸集之间的关系（见 [17] 第 33 页上的定理 1.6.3 和第 35 页上的定理 1.6.9）。

现在我们描述每种墙穿越所涉及的集合。

引理 3.7。（墙上数据：关于 w 的墙穿越凸性）设 Δ 是一个局部凸单纯伪流形，且 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 是 Δ的一条边。

回顾一下，$|st_{\tilde{\Delta}}(w)| = |st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$。如果 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$是凸的，那么 $\tilde{}$*the interior of* $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$ 中的任意点 w，都会相对于 w，在包含 w 的面 Δ之间诱导出凸墙穿越。特别地，任意满足 $w \in ab$ 的点都适用。从墙穿越的凸性角度来看，顶点 w 和顶点 $p \in lk_{\tilde{\Delta}}(w)$，相对于超平面 $Span(F|p)$，位于同侧；其中 F 是一个包含 p 的面 $\in \Delta$，且 F 属于 $st_\Delta(a)|st_\Delta(b)$ 或 $st_\Delta(b)|st_\Delta(a)$。

证明。考虑 $\in \Delta$ 的一个面F，它恰好包含a 或b之一。那么，w 与包含 Δ中$F\setminus a$或$F\setminus b$的另一个面所对应的墙外顶点，位于超平面 Span($F\setminus a$) 或 Span($F\setminus b$) 的同侧。由于我们假设 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$是凸的，这意味着$w$位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$内部。这一点已在命题 2.2 的第三部分中证明。

□

引理 3.8。（墙外数据：w 作为墙外顶点，以及关于$r \in$链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b)$的墙穿越凸性）

设 Δ 是一个局部凸单纯伪流形，且 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 是 Δ 的一条边。

相对于边 $e = \{a, b\}$，能够作为墙穿越的墙外顶点、且这些墙穿越相对于固定墙上顶点 $r \in lk_\Delta(a) \cup lk_\Delta(b)$ 为凸的收缩点空间，可按如下方式构造：固定 $r \in lk_\Delta(a) \cup lk_\Delta(b)$，并考虑形如 $F \in st_\Delta(r) \cap (st_\Delta(a) \cup st_\Delta(b))$ 的面。它们包含 r，且至少包含 a 或 b。令 $a'F$（分别地，$b'F$）为 Δ 中与墙 $F \mid a$（分别地，$F \mid b$）相邻的另一个顶点。然后，对于形如 $(F \mid a) \cup a'$ 或 $(F \mid b) \cup b'$ 的面，取所有与 r 位于超平面 $Span(F \mid r)$ 同侧的点所构成的半空间的交集。

这可概括为以下交集：

$$\left(\bigcap_{\substack{r \in \text{链接}_\Delta(a) \cup \text{链接}_\Delta(b) \\ \text{面 } F \in \Delta \text{ 使得 } F \ni r \text{ 且 } F \in \mathrm{st}_\Delta(a) H_r^+ \text{由 } H \text{ 界定且包含 } r \text{ 的半空间}}} \text{张成空间}(((F \setminus a) \cup a'F) \setminus r)_r^+ \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{r \in \text{链接}_\Delta(a) \cup \text{链接}_\Delta(b) \\ \text{面 } F \in \Delta \text{ 使得 } F \ni r \text{ 且 } F \in \mathrm{st}_\Delta(b) H_r^+ \text{由 } H \text{ 界定且包含 } r \text{ 的半空间}}} \text{张成空间}(((F \setminus b) \cup b'F) \setminus r)_r^+ \right).$$

如果对于某个 r，满足交集所述性质的面集合为空 $\in$链接$_\Delta$（a） $\cup$链接$_\Delta$（b），我们将取平凡交集（即不施加任何条件，并且“交集”就是前面各集合的交集）。

或者，所涉及半空间的交集是满足以下条件的最大子集 $A \subset |st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$：对于通过将 a 或 b 替换为 $a' \notin$ 链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b)$ 或 $b' \in$ 链接$\cup(a)_\Delta$链接$|(b)$ 所形成的任意面 $F \in \Delta$，$A \cup F$ 在 k^d 中的实现都是凸的（即距$|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$一次墙穿越）（见第 *16* 页的引理 *1.4.1 [17]*）。

该交集由 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 中位于以a' 或b' 为中心的锥的交集内的点组成（经单次墙穿越而与a或b相对的顶点），其射线是那些穿过墙的顶点的射线。

~证明。在 Δ 中以 w 为墙外顶点形成的墙穿越，是通过将 a 或 b 替换为 w，从以 a 或 b 为墙外顶点的 Δ 中的墙穿越得到的。上述交集源于考虑此类墙穿越相对于墙上顶点 $\mathrm{r} \in \mathrm{lk}_\Delta($ a) $\cup \mathrm{lk}_\Delta$(b) 的凸性。不失一般性，假设 $\mathrm{r} \in \mathrm{lk}_\Delta$(a)。考虑一个包含 r 的面 $\mathrm{F} \in \mathrm{st}_\Delta$(a) $\setminus \mathrm{st}_\Delta$(b)。根据命题 2.2 的第 3 部分，相对于 r，从 F 到 (F \ a)∪a′F 的墙穿越的凸性，表现为 a′F 与 r 位于 Span(F \r) 的同侧。

□

引理 3.9。 *(w* 作为墙上顶点，以及相对于 $r \in$链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b))$设 Δ 为一个局部凸单纯伪流形，且 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 是 Δ的一条边。

假设 Δ 具有凸墙穿越（这意味着 Δ 是旗），且顶点 $w \in \Delta$ 相对于由 $lk_\Delta(r)$的面张成的超平面，与一个固定顶点 $r \in lk_\Delta(a) \setminus lk_\Delta(b)$ 位于同侧。假设 $|st_\Delta(a)|$、$|st_\Delta(b)|$和 $|st_{\tilde{\Delta}}(w)|$均为凸的。那么，与 w 相容、且相对于与 w 相邻的顶点 $r \in lk_\Delta(a) \cup lk_\Delta(b)$ 的墙穿越凸性的收缩点空间（这些墙穿越将 w 用作另一个墙上顶点）由下列交集给出：

$$\bigcap_{\substack{m \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(r) \\ m \notin \mathrm{Span}(F \setminus \{a,r\}) \\ H_r^+ \text{ contains } r}} \mathrm{Span}(F \setminus \{a,r\}, m)_r^- = \bigcap_{\substack{m \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(r) \\ m \notin \mathrm{Span}(F \setminus \{a,r\}) \\ H_a^+ \text{ contains } a}} \mathrm{Span}(F \setminus \{a,r\}, m)_a^+$$

如果对所有 $m \in$ 张成空间$(F \setminus \{a,r\})$ 都满足 $m \in$链接$_\Delta(a) \cap$链接$_\Delta(r)$，那么除了 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|$和 $|\mathrm{st}_\Delta(w)|$的凸性所蕴含的条件外，不存在其他条件。

对于 $r \in$链接$_\Delta(b) \setminus \mathrm{lk}_\Delta(a)$，交换 a 和 b 后，同样的结论成立。

最后，考虑 $r \in$链接$_\Delta(a) \cap$链接$_\Delta(b)$ 的情形。注意，若以 r 和 a 或 b 作为墙上顶点进行墙穿越，那么这就是 星$_\Delta(a) \cup$星$_\Delta(b)$ 中各面的墙穿越，因为墙至少包含 a 或 b 中的一个。因此，a 和 b 的任意线性插值 w（即 $x_w = (1-\eta)x_a + \eta x_b$属于 k^d且$\eta \in (0,1)$）都能保持 r 周围星的支撑的凸性（即 $|$星$_{\tilde{\Delta}}(r)|$仍为凸集）。

证明。除 w 作为墙外顶点的单独墙穿越外，我们还需要考虑不同类型墙穿越的凸性之间的兼容性。这包括 w 本身是墙上顶点的情形，以及使其与相对于墙上其他顶点的凸性相兼容所需满足的条件。特别是，我们考虑涉及包含 a（相应地，b）的面 $F \in \Delta$ 的、相对于 $r \in$ 链接$_\Delta$(a)（相应地，$r \in$链接$_\Delta$(b)）的墙穿越凸性。注意，a（相应地，b）位于陈述中的半空间内。不失一般性，设 $r \in$链接$_\Delta$(a)。考虑满足 $F \supset$ {r, a} 的面 $F \in \Delta$。根据命题 2.2，这等价于如下陈述：对于任意 $m \in$链接$_\Delta$(a) ∩链接$_\Delta$(r)，张成空间 Span(F \ {a,r }, w) 都不将顶点 m 与 r 分离。

假设 $r \notin$ lk$_\Delta$(a) ∩ lk$_\Delta$(b)。由于 $F \supset$ {r, a}，我们有 $r \in$ lk$_\Delta$(a) \ lk$_\Delta$(b)。对于 $r \in$lk$_\Delta$(b)\lk$_\Delta$(a) 的证明，只需交换 a 和 b，论证相同。回想一下，w 的选取使其与 r 位于同侧，这里所指的是由 lk$_\Delta$(r) 的面所张成的超平面（这些超平面是与 r 另一侧的 Δ 墙）中不包含 a 的那些超平面。若要使形如 Span(F \{r, a}, w) 的超平面分离 m 和 r, 则它与线段 mr 的交点必须是由 Span(F \{r, a}) 中的一个元素与 w 的正倍数之和得到的。这是因为 Span(F \{r, a}) 与 mr 不相交（面相交于面），而且交点会位于 |st$_\Delta$(r)| 内。后一条件要求其中包含 w 的非负倍数，否则我们会得到一个点，它相对于由 lk$_\Delta$(r) 中包含 F \{r, a} 的面所张成的超平面，位于 r 的另一侧。用与 r *(F \a)∪a′ 的内积符号可以更明确地表述这一点，其中对偶是相对于 (F \ {r, a}) ∪ a′ 的顶点取的，而 a′ 是与 a 相对的顶点（即相对于此基展开时 r 的系数）。假设

$$\alpha + c_w x_w = (1-\beta)x_m + \beta x_r$$

对于某个 $\alpha \in$ 张成空间(F \{a, r }) 和 $\beta \in (0, 1)$，该结论成立。|st$\tilde{\Delta}$(r)| 的凸性意味着〈r *(F\a)∪a′, w〉 ≥0 且〈r *(F\a)∪a′, m〉 ≥ 0。此外，由于右侧不包含于张成空间(F \{a, r })，有 $\beta \neq 0$ 意味着 $c_w \neq 0$。由于〈r *(F\a)∪a′, α〉 $= 0, 1-\beta > 0, \beta > 0$，且〈r *(F\a)∪a′, r〉 = 1，因此必有 $c_w > 0$。

在关于 r的初始假设下，将这些假设应用于超平面张成空间($F\setminus\{r,a\},a'$)，则w在由 $(F\setminus a)\cup a' \ni r$的顶点构成的基中的基展开，其$r$系数非负。为了使张成空间($F\setminus\{a,r\}, w$)中的元素能够分离$m$和$r$这两个点（即与线段$mr$的内部相交），该系数必须严格为正。

若 $m \in$ 张成空间($F\setminus\{a,r\}$)，则线性子空间张成空间($F\setminus\{a,r\}, w$)对顶点m和r的分离可归结为如下形式的恒等式

$$\mu + c_w x_w = \beta x_r$$

对于某个 $\mu \in$ 张成空间($F\setminus\{a, r\}$)、$c_w > 0$ 和 $\beta \in (0,1)$，将 $\alpha - (1-\beta)x_m$替换为 μ 后。这意味着 $x_w \in$ 属于张成空间($F\setminus a$)，因为

$$c_w x_w = -\mu + \beta x_r.$$

然而，这是不可能的，因为单纯复形中某个面的顶点的实现是线性无关的。因此，当 $m \in$ 链<|vq_actor_0|>$_{\Delta}(a) \cap$ 链<|vq_actor_0|>$_{\Delta}(r)$ 且 $m \in$ 属于张成空间$(F \setminus \{a,r\})$ 时，并不会*not*产生任何例子，使得线性子空间张成空间$(F \setminus \{a,r\}, w)$ 将顶点 m和 r分离。

仍需考虑 $m \notin$ 张成空间$(F \setminus \{a,r\})$ 的情形。

即使在收缩点 w 保持墙交的凸性的“良好”情形中，关于包含 w 的半空间的初始假设也会在 m $\notin$ 张成空间(F \ a) 时迫使 m 的系数为正。由于 |st$_{\Delta}$(w)| 被视为凸的，因此 m 必须与 w 位于超平面张成空间(F \ a) 的同侧。特别地，w 关于 F-基展开的 a-系数必须严格为正，因为单纯复形中一个面的顶点实现是线性无关的，且该系数由 |st$_{\Delta}$(w)| 的凸性保证为非负。 |st$_{\Delta}$(a)| 的凸性意味着 m 也满足同样的条件。若 m $\notin$ 张成空间(F \ a)，则这意味着 w 关于 ((F \ a)$\cup$m)-基展开的 m-系数严格为正。假设 |st$_{\Delta}$(a)| 和 |st$_{\Delta}$(w)| 满足初始凸性条件，这表明关于 m 与 r 的分离问题，取决于 r 关于 k^d 的 ((F \ a) $\cup$ m)-基的系数符号。

我们可以更具体地用 Δ的顶点（的k^d-坐标）的线性组合来描述“有问题的收缩点w”。在等于线段mr上某一点的、由（$F \setminus \{a,r\}$) $\cup\, w$的顶点构成的线性组合中，w 的系数必须是严格正的，因为链接$_{\Delta}(r)$中包含$F \setminus \{a,r\}$的墙都不张成将m与r分隔开的超平面。于是，超平面张成空间$(F \setminus \{a,r\}, w)$与线段mr的交点可以表示为

$$\alpha + c_w x_w = (1-\beta) x_m + \beta x_r$$

其中某个 $\alpha \in$ 张成空间$(F \setminus \{a,r\})$、$c_w > 0$，以及 $\beta \in (0,1)$。

重新整理各项后，我们有

$$c_w x_w = -\alpha + (1-\beta) x_m + \beta x_r.$$

由于$c_w > 0$，这意味着在w 关于该基的展开中，r 的系数是严格正的。我们可以把这理解为w与r位于超平面张成空间$(F \setminus \{a,r\}, m)$的同侧。

接下来，我们考虑这类线性关系所蕴含内容的“逆向”问题。假设

$$x_w = \delta + \xi_m x_m + \xi_r x_r$$

对于某个 $\delta \in$ 张成空间$(F \setminus \{a,r\})$、$\xi_m > 0$和 $\xi_r > 0$。于是，我们有

$$\begin{aligned} x_w - \delta &= \xi_m x_m + \xi_r x_r \\ \Longrightarrow \frac{1}{\xi_m + \xi_r} x_w - \frac{1}{\xi_m + \xi_r} \delta &= \frac{\xi_m}{\xi_m + \xi_r} x_m + \frac{\xi_r}{\xi_m + \xi_r} x_r. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\xi_m}{\xi_m+\xi_r}$、$\frac{\xi_r}{\xi_m+\xi_r} \in (0,1)$和 $\frac{\xi_m}{\xi_m+\xi_r}+\frac{\xi_r}{\xi_m+\xi_r}=1$，这意味着 $\frac{1}{\xi_m+\xi_r}x_w=\frac{1}{\xi_m+\xi_r}\delta$ 是线段mr内部上的一个点，并且超平面张成空间$(F\backslash\{a,r\}, w)$分离m和r。

上述“问题”情形都是指：对于某个 $m \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(r)$，$w$与$r$位于张成空间 Span($F\backslash\{a,r\}$, m) 的同侧。这样的顶点m是唯一可能使mr被超平面张成空间 Span($F\backslash\{a,r\}$,m) 分离的顶点。这是因为，包含r的任一特定墙（例如 $(F\backslash\{a, r\})\cup r = F\backslash a$）至多只有一侧是“开放”的（即尚未被“占据”）。注意，与一面墙相邻的两个顶点中，至多有一个等于a或b（当 Δ 为旗时，*not*彼此相对的墙外顶点不可能相邻，因此这两个顶点并不彼此相对）。

最后，我们考虑 $r \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cap \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 的情形。假设对于某个 $\eta \in (0,1)$，$x_w = (1-\eta)x_a + \eta x_b$。设存在一个形如 Span(F \{a, r }, w) 或 Span(H\{b, r }, w) 的超平面，将两个顶点 m 和 r 分离，其中 $m \in \mathrm{lk}_{\tilde{\Delta}}(r)$。注意，$F \setminus a \in \mathrm{lk}_\Delta(a)$ 蕴含 $F \setminus a \in \mathrm{lk}_{\tilde{\Delta}}(w)$。我们将重点讨论第一种情形，因为第二种情形采用相同的推理。$|\mathrm{st}_{\tilde{\Delta}}(r)|$的凸性意味着，超平面 Span(F \ {a, r }, w) 不会将 r 与 $\mathrm{lk}_{\tilde{\Delta}}(r)$ 中的任何顶点分离。注意，$\mathrm{lk}_{\tilde{\Delta}}(r)$ 中的顶点由 $\mathrm{lk}_\Delta(r) \setminus \{a, b\}$ 中的顶点和 w 组成。由于 $|\mathrm{st}_{\tilde{\Delta}}(r)| \subset |\mathrm{st}_\Delta(r)|$，我们已经涵盖了所有可能的顶点 $m \in \mathrm{lk}_\Delta(r)$，使得超平面 Span(F \ { a, r }, w) 可能将 m 与 r 分离。

□

引理 3.10。（当w是墙上顶点，而非**“凸性的中心”**时所产生的冗余性）

设 Δ 是一个局部凸单纯伪流形，且 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 是 Δ 的一条边。

对顶点 $p \in \Delta$ 而言，$|\mathrm{st}_\Delta(p)|$ 的凸性意味着，b 位于引理 *3.9* 中与 $r \in$ 链接$_\Delta(a \setminus$ 链接$_\Delta(b)$ 相关的半空间内，而 a 位于与 $r \in$链接$_\Delta(b\setminus$链接$_\Delta(a)$相关的对应半空间内。特别地，这意味着线段 ab 上的任意点都位于引理 *3.9* 中的半空间内。

证明。不失一般性，取 r $\in$链接$_\Delta$(a) \ 链接$_\Delta$(b)。我们将证明 b 也位于引理 3.9 的半空间内。半空间的凸性随即意味着，整个线段 ab 都位于这些半空间内。 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|$和 $|\mathrm{st}_\Delta(r)|$的凸性意味着，交集 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cap |\mathrm{st}_\Delta(r)|$也是凸的。由于 b $\in$链接$_\Delta$(a)，但 b $\notin$链接$_\Delta$(r)，这意味着相对于某个半空间，b 位于“错误一侧”（即 r 的另一侧）；该半空间由 Δ 的某个墙的张成空间界定，其形式为 F \ r，其中 F 是满足 F $\in \Delta$ 且 {a,r } $\supset$的某个面。这意味着线段 br 与面 F \ r 相交于一点 p，该点位于某个面 G $\subset$F \ r 内。考虑一个顶点 m $\in$链接$_\Delta$(a) $\cap$链接$_\Delta$(r)。引理 3.9 中的假设 m $\notin$张成空间(F \ {a, r })意味着它不位于 F 内。

假设 $m \notin \mathrm{Span}(F\setminus\{a,r\})$，因为根据引理 3.9 的证明，“退化”情形 $m \in \mathrm{Span}(F\setminus\{a, r\})$ 是显然的。我们根据 $a \in \mathrm{Span}(F\setminus\{a, r\},m)$ 是否成立，分情况讨论。

如果 a $\in$Span(F \ {a, r }, m)，那么 Span(F \ r,m) =Span(F \ {a, r }, m)。如果 p 位于 F \ r 的顶点的凸包中 =(F \ {a, r }) $\cup$a，那么假设 a $\in$Span(F \ {a, r }, m) 意味着 p $\in$Span(F \ {a, r },m)，因为 p 是 F \ r 的顶点的凸线性组合 =(F \ {a, r }) $\cup$a，而在该线性组合中，a 可以由 Span(F \ {a, r }, m) 中的一个元素替代。由于 Span(F \ r) $\subset$Span(F \ {a, r }), m)，且 Span(F \ r) 是 k^d 中的超平面，这意味着 Span(F \ r) =Span(F \ {a,r },m)，因为 F \ r $\in \Delta$且 a $\notin$Span(F \ {a, r })。因此，相对于超平面 Span(F \r)，b 与 r 位于另一侧，这与 b 位于 Span(F \ {a, r }, m) 的另一侧相同。所以在这种情况下，超平面 Span(F \ {a, r }, m) 将顶点 b 和 r 分离，并且 b 位于第 3 部分中与 m $\in$lk$_\Delta$(a) \ lk$_\Delta$(b) 相关联的半空间内。

假设 $\notin$Span(F \ {a, r }, m)。那么，(F \ r) $\cup$m 的顶点构成 k^d 的一组基。注意，b 与 r 位于超平面 Span(F \a) 的同侧（即该超平面不分离 b 和 r）。由于 b $\notin$F \ a，r $\in$F \ a，且 p $\neq$r，因此 p $\notin$F \ a（作为一个实现）。这意味着，在 p 关于 F 的基展开中，a 的系数为正（p 是 F \ r 的顶点的凸线性组合），且 p $\notin$Span(F \ a)。若 r $\in$Span(F \ {a, r }, m)，则默认情况下，顶点 b 相对于超平面 Span(F \{a, r }, m) 位于 r 的“另一侧”。这是因为 r 包含在所讨论半空间的边界超平面内。注意，r $\in$Span(F \ {a, r }, m) 意味着 Span(F \ {a, r }, m) =Span(F \ a, m)，且 m $\in$Span(F \ a)，因为在我们的设定中，dim Span(F \ {a, r }, m) =d -1。特别地，这意味着 Span(F \ {a, r }, m) =Span(F \ a)。a 和 b 都位于该超平面的同侧。

假设 r ∉ Span(F \ {a, r }, m)。那么，我们面对的情形类似于穿越墙的情形，只不过与 (F \ r) ∪ m 和 (F \ a) ∪ m 相关的单形并不构成 Δ 的面。若 p ∈ Span(F \ {a, r }), 则 p ∈ Span(F \ {a, r }, m)，且超平面 Span(F \ {a, r }, m) 已经分离了 b 和 r。接下来，我们考虑“通常”情形 p ∉ Span(F \ {a, r })。由于 a ∉ Span(F \ {a, r }, m)，且在 p = α + c a 作为 F \ r 的顶点的凸线性组合、并且 = F \ {a, r } ∪ r 的展开中，a 的系数为正（即 c > 0），因此 p ∉ Span(F \ {a, r }, m)。否则，我们就会有 a ∈ Span(F \ {a, r }, m)。注意，m 与 a 位于超平面 Span(F \ a) 的同侧，因为 |st$_\Delta$(a)| 是凸的。换言之，m 关于 k^d 的 F-基展开中，a 的系数为正。其非负性来自凸性。若 m ∈ Span(F \ a) = Span(F \ {a, r }, r)，那么由于我们假设 m ∉ Span(F \ {a, r })，就会有 r ∈ Span(F \ {a, r }, m)。然而，我们讨论的是 r ∉ Span(F \ {a, r }, m) 的情形。

同理， |st$_\Delta$(r)| 的凸性意味着，m 的 F-基展开中 r 的系数非负。由于我们考虑的是 (F \ r) ∪ m 的顶点构成 k^d 的一组基的情形，因此该系数严格为正。否则，m ∈ Span(F \ r)，且 (F \ r) ∪ m 的顶点就不能构成 k^d 的一组基。对 m 的 F-基展开中 r 的系数“求解”后，可以看出，r 在 ((F \ r) ∪ m)-基展开中 a 的系数严格为负，因为我们假设 r ∉ Span(F \ {a, r }, m)。若 x$_m$ = β + bx$_r$ 的 F-基展开为 b > 0，则在 ((F \ r) ∪ m)-基展开中，bx$_r$ = x$_m$ − β，其中 b > 0。回想一下，p 是 F \ r 的顶点的凸线性组合，其中 a 的系数严格为正，且 p ∉ Span(F \ {a,r }, m)。由于 p 在 ((F \ r) ∪ m)-基展开中 a 的系数严格为正，这意味着在线段 pr 上存在一点 z，使得 z 在 ((F \ r) ∪ m)-基下的 a 系数为 0。这意味着 z ∈ Span(F \ {a, r }, m)，且点 p 和 r（因而 b 和 r）被超平面 Span(F \ {a, r }, m) 分离。
—

□

备注 3.11。 **（墙上凸性性质与其他判据之间的联系)**
引理 3.8 和引理 3.9 中的判据可用于刻画单个顶点或一对相邻顶点是否保持a与b上各星的并集的凸性。这对于检验许多实例中线性收缩点空间是否为空具有参考意义。

3.2 可能实现与保凸空间的限制

作为定理 3.4 的初步应用，我们指出，即便是引理 3.7 中简单的并集，也是排除一条边具有凸可收缩性的有用工具。我们考虑的一个例子来自交叉多胞体的边界。具体而言，尽管引理 3.8 中较为“复杂”的墙外条件得到了满足，引理 3.7 中的墙上条件却导致凸可收缩性不成立。稍后我们还会运用同样的推理，描述某些情况下不断缩小的收缩点空间，而这些情况下人们原本可能预期它们会增大（定理 3.20）。在本节其他部分应用这一空间时，我们将先关注凸集和单纯伪流形更一般的几何

性质，然后再探讨它们与 PL 同胚的联系（例如，引出定理 3.19 的相关结果）。

例 3.12.（保持凸性的边收缩与交叉多胞体）
我们注意到，在与交叉多胞体边界 PL 同胚的旗单纯球面中，就边细分/收缩而言，交叉多胞体的边界是极小的，因为每条边都包含在一个诱导 4-圈中（ [11] 第 70 页和第 77 页的定理 1.2）。换言之，收缩一条边会产生一个非旗的单纯复形。这也意味着，边收缩无法保持墙穿越的凸性，因为前者必然蕴含旗性（ [12] 第 279 页的命题 5.3）。

不存在保持墙穿越凸性的边收缩，这与不满足引理 3.7 的条件相符。不失一般性，设我们考虑的边是 $\{1, 2\} \in \Delta$。那么，$\mathrm{lk}_\Delta(1)$ 是由顶点 $\pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \mathrm{d}$ 构成的交叉多胞体，而 $\mathrm{lk}_\Delta(2)$ 是由顶点 $\pm 1, \pm 3, \pm 4, \ldots \pm \mathrm{d}$ 构成的交叉多胞体。注意，在我们的情形中，$\mathrm{st}_\Delta(1) = \text{锥}_1(\mathrm{lk}_\Delta(1))$，且 $\mathrm{st}_\Delta(2) = \text{锥}_2(\mathrm{lk}_\Delta(2))$。尽管 $-1 \in \mathrm{st}_\Delta(2)$ 和 $-2 \in \mathrm{st}_\Delta(1)$，边 $\{-1, -2\} \in \Delta$ 并不位于 $|\mathrm{st}_\Delta(1)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(2)|$ 中。这意味着空间 $|\mathrm{st}_\Delta(1)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(2)|$ 不是凸的，并且收缩边 $\{1, 2\} \in \Delta$ 无法保持顶点上的墙穿越/星的凸性。由于对任意边 $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \in \Delta$，用 a 和 b 替换 1 和 2 后，都可以重复同样的论证，因此交叉多胞体 Δ 不存在任何收缩后能保持顶点上的墙穿越/星凸性的边。

然而，关于收缩点为与 a 或 b 相对的墙外顶点、且与凸墙穿越相容的条件（引理 3.8）仍然满足。所有墙穿越都是用顶点 p 的对跖顶点 $-\mathrm{p}$ 替换 p。对于交叉多胞体的任意顶点 p，从该顶点到与其相邻顶点的射线构成一个锥，且该锥包含整个交叉多胞体。根据定义，这已经包含了除 $-\mathrm{p}$ 之外的每个顶点。由凸性可知，只需证明 $-\mathrm{p}$ 位于这个锥中。注意，$\sum_{\mathrm{q} \in \Delta \setminus \mathrm{p}} (\mathrm{e}_q - \mathrm{e}_p) = -2(\mathrm{d} - 1)\mathrm{e}_p$，它是 $-\mathrm{e}_p$ 的正倍数。除以 $2(\mathrm{d} - 1)$ 后，我们发现 $-\mathrm{e}_p$ 位于该锥中。这意味着，半空间交条件在 $\mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{a}) \cup \mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{b})$ 上是平凡的（对于任意 $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\} \in \Delta$，当 Δ 为交叉多胞体时，该集合等于 Δ）。于是，唯一可能“有意思”的条件来自引理 3.9。由于 $\mathrm{m} \in \mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{a}) \cap \mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{r})$（$\mathrm{r} = -2 \in \mathrm{lk}_\Delta(1) \setminus \mathrm{lk}_\Delta(2)$），我们有 $\mathrm{Span}(\mathrm{F} \setminus \{\mathrm{a}, \mathrm{r}\}) = \mathrm{Span}(3, \ldots, \mathrm{d})$，而引理 3.9 中的半空间条件是平凡的。

定理 3.4 中收缩点空间的表达式还意味着，邻近的凸可收缩边可能会对包含这些顶点的面的实现施加仿射/线性限制（命题 3.14）。特别是，这会迫使具有公共张成空间的墙所对应的某些墙穿越保持平坦（命题 3.17），并使某些外部边收缩后的线性收缩点空间呈现极端行为（定理 3.19）。尽管边的凸可收缩性需要某种“附加凸性”，但值得注意的是，同时凸可收缩性能够使邻近的墙穿越变得平坦。一般而言，可以从以下角度来理解：由涉及外部边细分/收缩的 PL 同胚所引起的收缩点空间变化“快照”的

由涉及外部边细分/收缩的 PL 同胚诱导的收缩点空间。

除定理 3.4 以及被解释为超平面（不）分离的凸性性质之外，我们还运用一些涉及单纯伪流形连通性性质的论证。在此背景下，我们讨论由边收缩所引起的局部拓扑变化。

例 3.13.（边收缩与所涉分支的拓扑）
当我们考虑 $(d-1)$ 维旗单纯伪流形 Δ（例如，依[12]第 279–280 页的命题 5.3 为局部凸者）中边 $e=\{a,b\}\in\Delta$ 的收缩时，受影响的面是那些包含 a 或 b 的面。注意，链接$_\Delta$(a) 与链接$_\Delta$(b) 是 $(d-2)$ 维旗球面（见定义 1.5 及 [19] 第 100 页）。于是，星$_\Delta$(a) $=$ 链接$_\Delta$(a) $*$ a 与星$_\Delta$(b) $=$ 链接$_\Delta$(b) $*$b 均 PL 同胚于 $(d-1)$ 维闭圆盘。由于 Δ 是旗的，且 $e=\{a,b\}\in\Delta$，我们有链接$_\Delta$(e) $=$ 链接$_\Delta$(a) $\cap$ 链接$_\Delta$(b)。由于链接$_\Delta$(e) 是一个 $(d-3)$ 维（旗）单纯球面，我们有星$_\Delta$(e) $=$ 链接$_\Delta$(e) $*$ a $*$ b PL 同胚于一个 $(d-1)$ 维闭圆盘。

综上可得，$|\mathrm{st}_\Delta(a)|$ 和 $|\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是 $(d-1)$ 维闭圆盘，其交集是一个更小的 $(d-1)$ 维闭圆盘 $|\mathrm{st}_\Delta(e)|$。将边 $e=\{a,b\}$ 收缩为一点 w 时，这个交集会收缩为一个 $(d-2)$ 维闭圆盘 $\mathrm{st}_{\tilde{\Delta}}(w)$，它位于关于边 $e=\{a,b\}$ 的 Δ 对 $\tilde{\Delta}$ 的收缩中 $\in\tilde{\Delta}$。从 Δ变为 $\tilde{\Delta}$时，我们以一种使包含 w 的$\tilde{\Delta}$的墙数量加倍的方式“展开”一个 $(d-2)$ 维闭圆盘（在 Δ中用 a 和 b 代替）。注意，$\mathrm{Cone}_w(S)$ 构成一个 $(d-2)$ 维闭圆盘，它像一条“直径”，将 $(d-1)$ 维闭圆盘 $|\mathrm{st}_{\tilde{\Delta}}(w)|$ 分成两部分。

仿射/线性限制与凸集边界交集的“平坦性”有关。下文将其表述为：在我们的设定中，交集涉及的墙的张成空间具有不变性。

命题 3.14.（凸星并的交）
设 $e=\{a,b\}\in\Delta$ 是一条边，且 $|st_\Delta(a)|\cup|st_\Delta(b)|$ 是凸的。取顶点 y 和 z，它们是 Δ 中的相邻顶点，并且通过使用 $lk_\Delta(a)\cup lk_\Delta(b)$ 中的一面墙进行单次墙穿越后，分别与 a 或 b 相对。若 $|st_\Delta(y)|\cup|st_\Delta(z)|$ 是凸的，则 Δ 中 $(lk_\Delta(a)\cup lk_\Delta(b))\cap(lk_\Delta(y)\cup lk_\Delta(z))$ 的所有墙都具有相同的张成空间。

证明。固定一面墙 $\tau\in(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cup\mathrm{lk}_\Delta(z))$。不失一般性，假设$\tau\in\mathrm{lk}_\Delta(a)\cap\mathrm{lk}_\Delta(y)$。这是一面墙，位于边界 $\partial(|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|)$ 和 $\partial(|\mathrm{st}_\Delta(y)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(z)|)$ 上。由于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|$是凸的，$|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|$中的所有点都与 a 位于超平面 $\mathrm{Span}(\tau)$ 的同侧（见 [17]第 12 页上的推论 1.3.5）。类似地，凸性

$|\mathrm{st}_\Delta(y)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(z)|$ 意味着 $|\mathrm{st}_\Delta(y)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(z)|$ 中的所有点都与 y 位于 Span(τ) 的同侧。综合这两点，交集 $(\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)) \cap (\mathrm{lk}_\Delta(y) \cup \mathrm{lk}_\Delta(z))$ 中的点必定都位于超平面 Span(τ) 上。例如，这包括位于 $(\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)) \cap (\mathrm{lk}_\Delta(y) \cup \mathrm{lk}_\Delta(z))$ 中的任意一面 Δ墙的顶点（例如，与 b 和 z 相对的一面墙的顶点）。因此，由维数可知，Δ在 $(\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)) \cap (\mathrm{lk}_\Delta(y) \cup \mathrm{lk}_\Delta(z))$ 中的墙张成的空间都相同。

□

上述结果给出了对附近凸可收缩边的初步约束。

推论 3.15. （非重复墙张成空间与关于$e = \{a,b\}$的收缩空间保持）

1. 假设 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$ 是凸的，并且存在一条边$\{y, z\} \in \Delta$，其中 y 或 z 与 a 或 b 相对。若 $lk_\Delta(a) \cup lk_\Delta(b)$中存在一对与 y 和 z 相对且张成空间不同的墙，则收缩$\{y, z\}$不会保持凸性。

2. 假设第 *1* 部分中的条件对任意一对与 a 和 b 相对的相邻顶点 y 和 z 都成立。那么，任何不属于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 的保凸边收缩，都必须保持关于 $e = \{a,b\}$的收缩点空间。

这个具有公共张成空间的“平坦”区域的第一个连通性性质，是引理 3.7 所蕴含的凸性性质的结果。

命题 3.16. （星的并中的邻接约束）
设 Δ 是一个单纯伪流形，且 $e = \{a,b\} \in \Delta$ 是 Δ 的一条边。取顶点 $r \in \text{链}_\Delta(a \setminus \text{链}_\Delta(b)$ 以及 $s \in \text{链}_\Delta(b \setminus \text{链}_\Delta(a)$。

1. 若 $\{r,s\} \in \Delta$，则线段 $r\,s$ 与 $|\text{星}_\Delta(a)| \cup |\text{星}_\Delta(b)|$ 的交集由互不相交的顶点 r 和 s 构成，且不包含 $r\,s$ 内部的任何点。

2. 若 $|\text{星}_\Delta(a)| \cup |\text{星}_\Delta(b)|$ 是凸的，则$\{r,s\} \notin \Delta$。

证明。 1. 由于$s \notin \text{链}_\Delta(a)$，我们有 $\{r,s\} \notin \text{链}_\Delta(a)$。类似地，由于$r \notin \text{链}_\Delta(b)$，有 $\{r, s\} \notin \text{链}_\Delta(b)$。这意味着 $\{r,s\} \notin \text{星}_\Delta(a) \cup \text{星}_\Delta(b)$，并且线段$r\,s$至少穿过 Δ 的一面墙。

回想一下，单纯复形中两个面的交集是原始面之一的面。如果它们是不同的面，那么交集位于它们各自的边界上。将这一点应用于上述情形可知，$\{r,s\}$ 与一个面的交集

$\mathrm{st}_\Delta(a) \cup \mathrm{st}_\Delta(b)$ 至多是一个单元素集合（顶点 r 或 s）。这便得到了所需的结论，因为支撑是给定单纯复形中各面的实现的并集。

2. 由于 $\mathrm{r} \in \mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{a})$，且 $\mathrm{s} \in \mathrm{lk}_\Delta(\mathrm{b})$，因此 $\mathrm{r}、\mathrm{s} \in |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})|$。于是，$|\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})|$ 的凸性意味着整个线段 r s 都包含在 $|\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})|$ 中。假设 $\{\mathrm{r}, \mathrm{s}\} \in \overline{\Delta}$。那么，根据第 1 部分，$\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a}) \cup \mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})$ 的任意一个面与交集为空，或交集为一个顶点，该顶点是 r 或 s；并且根据第 1 部分，$\mathrm{r\,s} \cap |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})| \subset \{\mathrm{r}, \mathrm{s}\}$。然而，这与我们的假设 $|\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})|$ 是凸的相矛盾。因此，若 $|\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{a})| \cup |\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{b})|$ 是凸的，则有 $\{\mathrm{r}, \mathrm{s}\} \notin \Delta$。

□

另一个关键输入是：交集中具有相同张成空间的墙通过墙穿越彼此连通。为了证明这一点，我们将先前的结果与单纯伪流形的强连通性以及单纯复形实现的性质结合起来（例如，不同的面在边界上相交）。

命题 3.17. 设 Δ 为一个 $(d-1)$ 维单纯伪流形。假设 $|\mathrm{st}_\Delta(r)| \subset k^d$ 是一个 $(d-1)$ 维多胞体，并且 Δ 关于 r 具有凸墙交叉。考虑一面墙 $\tau \in \text{链接}_\Delta(r)$。$\text{链接}_\Delta(r)$ 中张成空间等于 $\text{张成空间}(\tau)$ 的那些墙的集合构成一个单纯伪流形。特别地，这意味着这些面通过 $\text{链接}_\Delta(r)$ 内部的墙穿越彼此连通。作为 $\mathrm{st}_\Delta(r)$ 中 r 位于墙上的墙穿越，它们关于 r 是平坦的。

注记 3.18。 一些关于连通性的观察可以推广到具有实现且其支撑为 $|S|$ 的（$d-1$）维单纯拟流形 S，其中这些实现由（$d-1$）维凸多胞体给出。注意，$\mathrm{Span}(\tau) \cap |\mathrm{st}_S(p)|$ 是一个（$d-1$）维闭圆盘，它或者包含 p 于其内部，或者包含于其边界（参见 [8] 第 24 页的推论 1.16、第 26 页的定义以及第 27 页的引理 1.17）。另一个关键依据是：面 G 的 k^d 实现与非分隔超平面的交集是 S 的 G 的一个（可能为空的）面。

证明。 注意，有限个凸集的交集是凸集，而且凸集是连通的。我们希望利用问题的初始条件，对各个分支如何连通作出更强的陈述。

由于 $\mathrm{st}\,|\mathrm{st}_\Delta(r)|$ 的支撑（即 $\mathrm{st}_\Delta(r)$ 在 k^d 中各面组成的并集）并非环境空间中的仿射子空间或半空间，$|\mathrm{st}_\Delta(r)|$ 是其边界点的凸包。回想一下，每个非空且不是仿射空间或半空间的凸集，都等于其支撑半空间的交集（见 [17] 第 12 页的推论 1.3.5）。在我们的情形中，$\mathrm{Span}(\tau)$ 构成了 $|S|$ 的一个支撑半空间的边界。注意，集合 A 与若干集合的并集的交集，等于这些集合各自与

集合 A 的交集的
并集。

令 $S = \mathrm{st}_\Delta(r)$。从 S 的一面墙的余维 1 面 A（即在 S 中为余维 2）开始，其张成空间等于 $\mathrm{Span}(\tau)$。考虑 A 的顶点与一个不在 A 中的顶点 $m \in |S| \cap \mathrm{Span}(\tau)$ 的凸线性组合。为了覆盖 A 与 m 之间的部分，由 A 的顶点和 m 构成的凸线性组合也必须包含在 S 的一面墙中，且其张成空间等于 $\mathrm{Span}(\tau)$。这是因为 $|S| \cap \mathrm{Span}(\tau)$ 是 S 的各面与 $\mathrm{Span}(\tau)$ 的交集的并集。更准确地说，通过墙穿越引入的每个新顶点，即通过 A 与 m 的线性组合引入的顶点，都位于 Span(S) 中。我们可以通过一次考虑一个墙穿越来证明这一点。例如，单次墙穿越意味着，单个 S $\mathrm{pan}(\tau)$ 外部的新顶点与 A 的顶点的凸线性组合的内部中的点不在 $\mathrm{Span}(\tau)$ 中。随后，在 A 中有一个顶点被新的顶点替换后，我们可以对后续的墙穿越重复这一论证。设 L 为 $\mathrm{lk}_\Delta(r)$ 的一面墙的张成空间，该墙被 m 与 A 的凸线性组合穿越。上述论证归结为：对于一个余维 2 面 $G \in \Delta$ such that $\mathrm{Span}(G) \subset \mathrm{Span}(\tau)$，有严格包含关系 $L \supset \mathrm{Span}(G)$，且 $L \subset \mathrm{Span}(\tau)$。这将意味着 $L = \mathrm{Span}(\tau)$。注意，$|S| \cap \mathrm{Span}(\tau)$ 是凸集，因为一对凸集的交集是凸集。

由于上述墙穿越中每个面除去r后的顶点张成空间都等于 $\mathrm{Span}(\tau)$，因此顶点r不涉及相关的墙关系。这意味着 Δ 中的墙穿越相对于r是平坦的。

□

连通性以及仿射/线性“平坦性”性质对附近的凸可收缩边施加了约束。我们首先得出对可能发生的墙穿越，以及所考虑的一对可收缩边的给定一对“对顶点”之间墙的数量的限制。回到凸可收缩性，先前的限制意味着附近凸可收缩边的线性收缩点空间可能呈现极端行为。

定理 3.19. （凸可收缩边邻接约束）
设一个$(d-1)$维单纯伪流形 Δ 具有凸墙穿越，且 $e = \{a, b\} \in \Delta$ 是 Δ 的一条边，使得 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是凸的。设 y 和 z 是 Δ 中相邻的顶点，它们通过一次以 a 或 b 为墙外顶点的墙穿越，分别与 a 或 b 对顶。

1. 假设 $|st_\Delta(y)| \cup |st_\Delta(z)|$ 是凸的。考虑 $(st_\Delta(a) \cup st_\Delta(b)) \cap (st_\Delta(y) \cup st_\Delta(z))$ 的各面之间的墙穿越。给定一个来自 $r \in \{a, b\}$ 的固定墙上顶点，以及另一个选自 $s \in \{y, z\}$ 的墙上顶点，则在 $lk_\Delta(r) \cap lk_\Delta(s)$ 中，Δ 的墙至多有 d 个。命题 *3.17* 中的材料指向在边 $\{a,b\}$ 与 $\{y, z\}$ 收缩之后可能的推广，前提是它们保持墙穿越的凸性。这些墙通过 Δ 中的墙穿越彼此相连，并使 r 或 s 保持在墙上。

2. 假设$\{y,z\} \in \Delta$ 凸可收缩（定义 *3.3*）到线段 yz 内部的一点。于是，收缩边$\{y,z\}$可得到一个收缩点空间，其

相对于边 $\{a,b\}$ 而言，该集合要么至多包含一个点，要么就是整个线段 ab。

证明。1. 不失一般性，考虑一个 墙 τ，它属于 $\Delta(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cup\mathrm{lk}_\Delta(z))$，且与 a 和 y 相对。若存在另一个同时与 a 和 y 相对的墙，则由命题 3.14 和命题 3.17 可知，存在一个通过“墙交叉”得到的墙，其中只替换了 τ 的一个顶点。令 $\omega\in\Delta$ 为这样的墙。于是，对于某个 $p\in\tau$ 和某个 $q\in(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cup\mathrm{lk}_\Delta(z))$，有 $\omega=(\tau\setminus p)\cup q$。注意，根据命题 3.14，张成空间$(\omega)$ = 张成空间(τ)。

我们将研究相对于 $\tau\cap\omega=\tau\setminus p$ 和 $q=\omega\setminus(\tau\cap\omega)$ 的顶点的墙穿越的凸性。令 $F:=\tau\cup a$，$F':=\tau\cup y$，$G:=\omega\cup a=(F\setminus p)\cup q$，且 $G':=\omega\cup y=(F'\setminus p)\cup q$。我们声称，与 $F\cup F'$ 和 $G\cup G'$ 相关的墙穿越分别相对于 p 和 q 是平坦的。由于与 $G\cup G'$ 相关的墙穿越相对于 q 是凸的，超平面 $\mathrm{Span}(\omega\setminus q, a)=\mathrm{Span}(\tau\setminus p, a)$ 不会将顶点 q 和 y 分离。类似地，与 $F\cup F'$ 相关的墙穿越相对于 p 的凸性意味着，超平面 $\mathrm{Span}(\tau\setminus p, a)$ 不会将 p 和 y 分离。由于 $G=(F\setminus p)\cup q$，面 G 是通过一次以 p 和 q 为墙外顶点的墙穿越从 F 得到的。这意味着 p 和 q 位于超平面 $\mathrm{Span}(\tau\setminus p, a)$ 的两侧。因此，我们有 $y\in\mathrm{Span}(\tau\setminus p, a)=\mathrm{Span}(\omega\setminus q, a)$。特别地，这意味着与 $F\cup F'$ 相关的墙穿越相对于 p 是平坦的，而与 $G\cup G'$ 相关的墙穿越相对于 q 是平坦的。

我们可以对 $(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cup\mathrm{lk}_\Delta(z))$ 内后续的墙穿越重复类似的论证。例如，假设 η 是 Δ 的一面，它是在 $\mathrm{lk}_\Delta(a)\cap\mathrm{lk}_\Delta(y)$ 内的一次墙穿越中用顶点 r 替换顶点 $m\in\omega$ 而形成的。那么，顶点 y 位于一个余维 2 线性子空间中。我们可以将这一论证推广到更高维数。在每一步中，我们所相对于而保持平坦的新顶点，都不在此前所考虑的“凸性中心”的张成空间中。如果 $\mathrm{lk}_\Delta(a)\cap\mathrm{lk}_\Delta(y)$ 中连续发生 d 次“墙穿越”（例如，如果 $+1$ 中存在 d 个这样的面 Δ），那么上述步骤会使我们可以从中选取 y 的线性子空间的维数每次降低 1。换言之，$\mathrm{lk}_\Delta(a)\cap\mathrm{lk}_\Delta(y)$ 的面之间每发生一次墙穿越（这些面是 Δ 中的墙），就会使 Δ 中使用 a 和 y 作为墙外顶点的一个墙关系里系数为 0 的墙上顶点数量增加 1。

2. 目标是证明，存在一个由引理 3.8 中某个半空间的边界超平面，使该超平面所界定的两个半空间都与之相交。墙 $\tau\in\mathrm{lk}_\Delta(m)\cap\mathrm{lk}_\Delta(n)$ 与 $m\in\{a,b\}$ 和 $n\in\{y,z\}$ 不相邻于 $\{y,z\}\setminus n$。这是由 Δ 是单纯伪流形这一点推出的，因为每个余维 1 面恰好包含在两个面中（见定义 1.5）。Δ 的旗性（由 [12] 的第 279–280 页上的命题 5.3 可知，局部凸性蕴含旗性）进而迫使 τ 存在一些“坏”顶点，它们不与 $\{y,z\}\setminus n$ 相连。于是，$\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b)$ 的顶点集同时与 $\mathrm{lk}_\Delta(y)\setminus\mathrm{lk}_\Delta(z)$ 和 $\mathrm{lk}_\Delta(z)\setminus\mathrm{lk}_\Delta(y)$ 的顶点集相交。这意味着存在

Δ 至少有两面不同的墙属于 $(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cup\mathrm{lk}_\Delta(z))$。然后，命题 3.17 蕴含存在一对这样的墙，它们共享除一个顶点外的所有顶点，其中一面墙与 y 相对，另一面墙与 z 相对。收缩边$\widetilde{\ }\{y,z\}$后，我们得到 Δ 的一对面，它们共享一面墙，且包含由 $\{y,z\}$ 收缩得到的收缩点 u，该点是墙上的顶点。这个墙穿越的墙外顶点位于 $(\mathrm{lk}_\Delta(a)\cup\mathrm{lk}_\Delta(b))\cap(\mathrm{lk}_\Delta(y)\cap\mathrm{lk}_\Delta(z))$ 中。这意味着在引理 3.8 中，由该墙张成的超平面所界定的两个半空间都与之相交，并且与线段 ab 的交集具有陈述中所述的性质。

—

□

线性插值呈现出如此广泛行为的另一个例子，来自某些外部边细分。事实上，与例 3.12（引理 3.7）相同的推理，描述了由某些外部边细分所诱导的收缩点空间如何缩小，尽管边细分似乎会增加凸墙穿越的可能性（命题 3.2）。我们注意到，这类情形的推理并不局限于由线性插值实现的收缩点空间。总的来说，由外部边细分引起的固定边 $e=\{a,b\}\in\Delta$ 的收缩点空间变化，既带来了预期之中的行为，也带来了出乎意料的行为。这取决于被收缩的外部边最初的邻接性质 Δ。

定理 3.20. （外部边细分与收缩点空间）
设 Δ 是一个局部凸的$(d-1)$ 维单纯伪流形。在边细分／收缩中，我们假设 Δ 的顶点将保持相同的 k^d 坐标表示，除非它们是边收缩中合并的两个顶点之一。

边$\{y,z\}\in\Delta$ 的（星形）细分，仅当 y 与 z 要么位于$\text{星}_\Delta(a)\cup\text{星}_\Delta(b)$ 中，要么在 Δ 的某次墙穿越中与 a 或 b 相对、并以 a 或 b 作为初始墙外顶点时，才可能影响相对于边 $e=\{a,b\}$ 的收缩点 w 的空间。我们将假定 $|\text{星}_\Delta(a)|\cup|\text{星}_\Delta(b)|$ 是凸的，从而根据引理 *3.7*，e 在 Δ 中的收缩点空间不会自动为空。在此类边$\{y,z\}\in\Delta$中，我们分为以下情形：

1. 假设细分边$\{y,z\}\in\Delta$不位于 $|\text{星}_\Delta(a)|\cup|\text{星}_\Delta(b)|$中。

a) 若 $y,z\notin\text{链接}_\Delta(a)\cup\text{链接}_\Delta(b)$，则相对于边 $e=\{a,b\}$的收缩点 w 的空间没有变化。

b) 假设细分边的形式为 $\{q,z\}$，其中 $q\in\text{链接}_\Delta(a)\cup\text{链接}_\Delta(b)$。那么，相对于边 $e=\{a,b\}$ 的收缩点 w 的空间包含 Δ 的收缩点空间。

2. 假设细分边 $\{y,z\}\in\Delta$位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|$内。

a) 如果 $y,z \notin \{a,b\}$，那么相对于 w 的收缩点空间包含于 Δ 对应的收缩点空间与所有包含细分点（设为 m）以及与 a 或 b 相对的顶点 a' 或 b' 的墙的张成空间的交集之中。这是由这样一面墙导致的：在包含 m 的墙穿越中，它包含第二个墙外顶点，而该墙穿越会用 a' 替换 a，或用 b'替换 b。因此，线性收缩点空间为空集、单个点或整个 ab。

—

b) 假设细分边的形式为 $\{a,z\}$ 或 $\{b,z\}$。若 $z \in$ 链接$_\Delta(a) \cap$ 链接$_\Delta(b)$，则相对于边 $e = \{a,b\}$ 且保持墙穿越凸性的收缩点 w 空间为空。一般而言，保持墙穿越凸性的（线性）收缩点空间为空、为单个点，或为整个线段 ab。

—

证明。 在每个部分中，我们将根据所考虑的外部边类型分情况讨论。边的相关性质包括该边是否位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 中，以及其顶点是否包含 a 或 b 之一。对于定理 3.4 的输入，我们将追踪引理 3.7 和引理 3.8 中相交半空间的变化。

按情形分类之前，对细分边 $\{y,z\} \in \Delta$ 施加初始假设，会筛除那些其细分会影响 $\mathrm{st}_\Delta(a) \cup \mathrm{st}_\Delta(b)$ 的边，以及 $\mathrm{st}_\Delta(q)$ 中连接到某个顶点的边；该顶点在使用 a 或 b 作为初始墙外顶点的墙穿越中，与a 或 b 相对，其中某个$q \in$ 链接$_\Delta(a) \cup$链接$_\Delta(b)$。这基于定理 3.4 中交集的参数。

1. 假设细分边不位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 中。若边细分可能影响 $e = \{a, b\}$ 的收缩空间，则细分边必须位于某个 $q \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 的 $\mathrm{st}_\Delta(q)$ 中。我们注意到，对于引理 3.8 中用于半空间参数的顶点，$q \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \setminus \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 或 $q \in \mathrm{lk}_\Delta(b) \setminus \mathrm{lk}_\Delta(a)$，因为 Δ 中同时包含 a 和 b 的面都位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 的内部。接下来，我们将根据细分边 $\{y, z\}$ 的一个顶点是否等于某个 $q \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 来进一步分类。以下各情形中，a 和 b 的星的并集的支撑在细分 $\{y, z\}$ 后不会改变。若该空间不是凸的，那么即使细分 $\{y, z\}$ 后，$\{a, b\}$ 的收缩点空间仍为空。因此，在以下各情形中，我们将假设 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$。

a) 如果细分边 $\{y, z\}$ 的两个顶点都不属于 $\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$，那么含有一个与 a 或 b 相对的顶点的面 $F \in \Delta$ 不可能满足 $F \supset \{y, z\}$。这是因为墙穿越只会替换其中一个顶点，而除与 a 或 b 相对的顶点外，所有顶点仍属于 $\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$。然而，我们假设 y 和 z 都不属于 $\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$。这意味着，细分边 $\{y, z\} \in \Delta$不会影响任何含有与 a 或 b 相对顶点的面。并集$|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 也保持不变。于是，引理 3.7 和引理 3.8 表明，关于边，收缩点空间中的点 w 不会发生变化

$e = \{a, b\}$。

b) 现在假设细分边的形式为 $\{q,z\}$，其中 $q \in$ 属于 $\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$。同样，令 m 为细分顶点。如前所述，需要考虑的是来自 Δ 同时含有 q 和 z 的面。由于 $\{q, z\} \notin$ | 包含于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$，因此不会影响 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$。如果 z 不与 a 或 b 相对，那么定理 3.4 表明，收缩点空间不会受到影响。因此，我们将重点讨论 z 与 a 或 b 相对的情形。

如上所述，可能导致半空间发生变化的面（参见引理 3.8）是那些包含 $F \in \Delta$、且使 $F \supset \{q, z\}$ 的面。由于 z 与 a 或 b 相对，且 $q \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$，因此，将 z 替换为细分顶点 m 后，得到的与 a 相对的那个顶点所在的新面就是所需的面。若替换的不是 z 而是 q，得到的面将不再与 $\mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$ 共享一堵墙。对于 F 内同时包含 q 和 z 的墙，在边细分中用 m 替换 z 后，与之对应的墙所张成的超平面不会改变，因为我们假设 $x_m = (1-\alpha)x_q + \alpha x_z$，其中某个 $\alpha \in (0, 1)$。这意味着，需要考虑的半空间可能变化的来源，是形如 $F \setminus q$ 的墙，其中 $F \supset \{q, z\}$。换言之，可能发生的变化源自相对于 q 的凸性。

为研究关于q的凸性可能发生的变化，我们将直接利用“墙关系”中系数的性质。在以F为初始面、以z为初始墙外顶点的墙穿越中，第二个墙外顶点由a或b给出。若z与a（分别与b）相对，则根据命题 2.2，顶点a（分别为b）自动落在由引理 3.8 中的顶点$r \in \mathrm{lk}_\Delta(a) \setminus \mathrm{lk}_\Delta(b)$所关联的半空间内。不失一般性，设$z$与$a$相对。我们对 Δ 的初始凸性假设意味着 $|\mathrm{st}_\Delta(z)|$ 是凸的，且$z \notin$张成空间$(F\setminus z)$，因为单纯复形的一个面的顶点的实现是线性无关的。由于k^d中F的实现顶点线性无关，且$F \supset \{q,z\}$，我们得到如下形式的“墙关系”

$$c_z x_z + c_b x_b + \sum_{p \in F \setminus z} c_p x_p = 0$$

其中 $c_z \geq 0$ 和 $c_b > 0$。这是因为，根据我们的假设，$|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是凸的，所以 a 和 b 位于超平面 $\mathrm{Span}(F \setminus z)$ 的同侧。我们可以将其改写为

$$c_z x_z + c_b x_b + c_q x_q + \sum_{p \in F \setminus \{z,q\}} c_p x_p = 0.$$

若$c_q = 0$，则将a替换为b，相对于q会产生一次“平坦墙穿越”，而任意 位于线段 ab 上的点都会产生一个保持相对于q凸性的收缩点。假设$c_q \neq 0$。如果我们通过代换$x_z = \frac{1}{\alpha} x_m - \frac{1-\alpha}{\alpha} x_q$，从$x_m = (1-\alpha)x_q \alpha x_z$中“解出”$x_m$，则有

$$c_z\left(\frac{1}{\alpha}x_m-\frac{1-\alpha}{\alpha}x_q\right)+c_bx_b+c_qx_q+\sum_{p\in F\setminus\{z,q\}}c_px_p=0$$
$$\Longrightarrow\frac{c_z}{\alpha}x_m+c_bx_b+\left(c_q-\frac{1-\alpha}{\alpha}c_z\right)x_q+\sum_{p\in F\setminus\{z,q\}}c_px_p=0.$$

x_q 的系数变得“更负”，因为 $c_z\geq 0$。由于 x_b 的系数仍为 c_b（严格为正），因此，相较于 k^d 的 F -基展开，x_b 展开中 x_q 的系数相对于 $((F\setminus z)\cup m)$-基展开而言更负。注意，用 a 替代 b 时 $c_q\leq 0$，因为 a 相对于 q 保持凸性。前一个系数的减小意味着，线段 ab 中更大的部分（即更多满足 $\eta\in(0,1)$ 的值）会产生与相对于 q 的凸性相容的合适 $(1-\eta)x_a+\eta x_b$)。当 $\eta\in(0,1)$ 时，用 $x_w=(1-\eta)x_a+\eta x_b$ 替代上文的 x_z，可得到一个 x_w 和 x_b 的系数严格为正的墙关系。这可以用墙关系更具体地表示。令

$$\alpha_mx_m+\alpha_ax_a+\alpha_qx_q+\sum_{p\in F\setminus\{z,q\}}\alpha_px_p=0$$

是 Δ' 中关于 $\alpha_m>0$、$\alpha_a>0$、$\alpha_q\leq 0$ 和 $\alpha_p\leq 0$ 的墙关系，其中 $p\in F\setminus\{z,q\}$（见命题 3.2）。由于

$$\frac{c_z}{\alpha}x_m+c_bx_b+\left(c_q-\frac{1-\alpha}{\alpha}c_z\right)x_q+\sum_{p\in F\setminus\{z,q\}}c_px_p=0,$$

将第一个关系乘以 $\frac{1-\eta}{\alpha_a}$，将第二个关系乘以 η_{c_b}，再将二者相加，可得

$$\left(\frac{(1-\eta)\alpha_m}{\alpha_a}+\frac{\eta c_z}{\alpha c_b}\right)x_m+x_w+\left(\frac{(1-\eta)\alpha_q}{\alpha_a}+\frac{\eta\left(c_q-\frac{1-\alpha}{\alpha}c_z\right)}{c_b}\right)x_q+\sum_{p\in F\setminus\{z,q\}}\left(\frac{(1-\eta)\alpha_p}{\alpha_a}+\frac{\eta c_p}{c_b}\right)x_p=0$$

$\tilde{}$ 在边收缩 Δ 中，因为 $x_w=(1-\eta)x_a+\eta x_b$。

最后，我们注意到，$\{y,z\}$ 的细分点 m 不会作为墙穿越中的墙上顶点出现，而该墙穿越涉及相对于 $e=\{a,b\}$ 的收缩点 w。这是因为 $\{y,z\}\notin \mathrm{st}_\Delta(a)\cup\mathrm{st}_\Delta(b)$。因此，相对于 m 的墙穿越的凸性不受 $e=\{a,b\}$ 的收缩点 w 的选择影响。命题 3.2 中的计算表明，当我们取 $x_m=(1-\alpha)x_q+\alpha x_z$（其中 $\alpha\in(0,1)$）时，它们总是凸的。

2. 现在假设细分边 $\{y,z\}$ 确实位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 中。我们将根据其中一个顶点是否属于 $\{a,b\}$ 分情况讨论。假设 $|\mathrm{st}_\Delta(a)|\cup|\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是凸的。

a) 假设细分边不包含 a 或 b。由于 $x_m = (1-\alpha)x_y + \alpha x_z$ 对某个 $\alpha \in (0,1)$ 成立，我们有 $|st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)| = |st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$ 是一个凸集。根据命题 3.16，a 或 b 必须是 y 和 z 都相邻于 Δ 中的公共顶点。不失一般性，假设这个顶点是 b。半空间的变化来自包含 {y, z} 的面的墙，这些墙包含一个墙外顶点 a′ 或 b′，在墙穿越中替换 a 或 b。注意，在这样的墙穿越中，边 $\{y,z\} \in \Delta$ 必须位于墙上。由于 $y, z \in$ 链接$_\Delta$(b)，我们需要对每个包含细分顶点 m 和 b′的墙，取指向墙两侧的半空间的交集。这意味着 y 和 z 都起到引理 3.8 中 r 的作用，而且我们需要考虑它们张成空间的交集。由于参与求交的集合包含超平面，与线段 ab 的交集可能为空集、一个点，或整个 ab。

b) 现在假设 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$ 中的细分边具有形式 $\{a, z\}$ 或 $\{b, z\}$。不失一般性，设它为 $\{a,z\}$，其中某个 $z \in lk_\Delta(a)$。

在某些情况下，$|st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$ 的凸性可能会失效。设 $z \in lk_\Delta(a) \cap lk_\Delta(b)$。在关于 {a, z} 的边细分 Δ'中，有 $z \in lk_{\Delta'}(b) \setminus lk_{\Delta'}(a)$。设 $F \in \Delta$ 为一个包含 a、b 和 z 的面。由于 Δ 是一个单纯伪流形，恰有一个顶点 $s \in V(\Delta)$ 满足 $s \neq b$ 且 $(F \setminus b) \cup s \in \Delta$。考虑线段 zs。虽然 $z \in lk_{\Delta'}(b)$，且 $s \in lk_{\Delta'}(a)$，但有 $\{z, s\} \notin st_{\Delta'}(a) \cup st_{\Delta'}(b)$。如果 $|st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$ 是凸的，那么这将意味着线段 $zs \subset |st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$。然而，线段 zs 内部的点不属于 $|st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$，因为在 $(F \setminus z) \cup m \in \Delta'$（其顶点的凸线性组合）的实现中，k 个点的 F-基展开里，a 的系数必须至少与 z 的系数相同。这意味着 $|st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$ 不是凸的，因为 $z \in lk_{\Delta'}(b) \setminus lk_{\Delta'}(a)$，而 $s \in lk_{\Delta'}(a) \setminus lk_{\Delta'}(b)$。因此，若 $z \in lk_\Delta(a) \cap lk_\Delta(b)$，收缩边 $\{a, z\} \in \Delta$就不可能保持墙穿越的凸性。

从现在起，我们假设 $z \in lk_\Delta(a) \setminus lk_\Delta(b)$。这意味着 $z \notin |st_{\Delta'}(a)| \cup |st_{\Delta'}(b)|$。由于 $z \notin lk_\Delta(b)$，在 Δ 中同时与 a 和 z 相邻的面不会与 b 相邻。考虑在 Δ'中以 z 和 a 为墙外顶点的墙穿越。给定一面墙 $\tau \in \Delta$，使得 $\tau \supset \{a, z\}$，墙 $(\tau \setminus a) \cup m \in \Delta'$恰好连接到 Δ'的两个顶点（它们原本是 Δ的顶点）。包含 $(\tau \setminus a) \cup m$ 的 Δ'的两个面都属于 $st_\Delta(a) \setminus st_\Delta(b)$。这是因为在$\Delta$中同时与 a 和 z 相邻的面不会与 b 相邻，并且 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$被视为凸集（见命题 3.16）。由超平面 $\mathrm{Span}((\tau \setminus a) \cup m)$ 界定的两个半空间都与集合相交，因为 $\alpha, \beta \in lk_\Delta(a) \setminus lk_\Delta(b)$。换言之，根据引理 3.8，$\alpha$ 和 β 都可以充当 $r \in lk_\Delta(a) \cup lk_\Delta(b)$。超平面 $\mathrm{Span}((\tau \setminus a) \cup m)$ 与线段 ab 的交集可能是整条线段 ab、一个点或空集。

□

由外部边诱导的 PL 同胚所导致的收缩点空间变化快照，其另一面来自边收缩。即使在相同的邻接条件下，结果也可能大相径庭。这或许反映了 PL 同胚虽是拓扑等价，但我们确实与单纯复形结构相容。首先要考虑的参数是，定理 3.4 中界定半空间的超平面是否将顶点 a 和b分离。如果分离了，那么收缩点空间的具体选择就很重要。这需要比较投影到这些超平面上的大小。若对表示这些顶点的k^d-向量的大小进行归一化，则比较的将是这些向量与超平面所成的角。

在给出一个具体例子来说明上述讨论（推论 3.22）之前，我们先将这些内容整理成一个用于分析此类情形的一般框架。

命题 3.21.（外部边收缩的框架）

设 Δ 是一个局部凸的$(d-1)$维单纯伪流形。与命题 *3.20* 一样，假设除参与边收缩的两个顶点外，Δ 的顶点都保持相同的 k^d 坐标表示。

考虑将边$\{y,\ z\} \in \Delta$ 收缩到点 u，并且保持每个顶点星的支撑的凸性。假设所涉及的外部收缩是线性插值，其中 $x_u = (1-\eta)x_y + \eta x_z$ 属于 k^d，且某个 $\eta \in (0,1)$。

1. （非平凡外部边）
   收缩Δ 边 $\{y,z\} \in \widetilde{\Delta}$对边 $e = \{a,b\}$ 对应的收缩点空间中的点 w 产生影响，当且仅当 y 和 z 中至少有一个属于 $\mathrm{st}_\Delta(a) \cup \mathrm{st}_\Delta(b)$，或者在以 a 或 b 为初始墙外顶点的墙穿越中，与 a 或 b 相对。

2. 假设第 *1* 部分的条件均满足。我们将 Δ 中边 $e = \{a,b\}$ 对应的收缩点空间所受的影响分为以下邻接性质。注意，根据分离情况和角度／投影性质，同一邻接情形下的表现可能有所不同。

   a)（初始环境凸性条件）
   非空性要求 $|st_{\tilde{\Delta}}(a)| \cup |st_{\tilde{\Delta}}(b)|$具有凸性。注意，当 y、$z \notin st_\Delta(a) \cup st_\Delta(b)$ 时，这等于$|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$。若 $y \in st_\Delta(a) \cup st_\Delta(b)$，或 $z \in st_\Delta(a) \cup st_\Delta(b)$，则将 $\{y, z\}$ 收缩到线段 $y\,z$ 内部的一个点，意味着 $|st_{\tilde{\Delta}}(a)| \cup |st_{\tilde{\Delta}}(b)| \neq |st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)|$。例如，$y = a$ 或 $y = b$ 的情形会产生初始凸性约束，因为我们需要 $|st_\Delta(a)| \cup |st_\Delta(b)| \cup |st_\Delta(z)|$为凸。能产生“凸补全”的适当 k^d-坐标空间

在这种情况下，由类似于引理 *3.8* 中的那些不等式来定义。

b)（收缩点作为位于a或b对面的墙外顶点）

假设 y（分别地，z）是与 a（分别地，b）相对的墙外顶点，二者通过一次从面 $F \in st_{\Delta}(a)$（分别地，$F \in st_{\Delta}(b)$）出发的$\tilde{}$*single wall crossing* 相连。在 Δ 中，包含 y 或 z 的墙 $(F \mid a) \cup y$ 或 $(F \mid a) \cup z$（分别地，$(F \mid b) \cup y$ 或 $(F \mid b) \cup z$）将被 $(F \mid a) \cup u$（分别地，$(F \mid b) \cup u$）替代。引理 *3.8* 中由 $Span((F \mid a) \cup u)$（分别地，$Span((F \mid b) \cup u)$）界定的半空间包含 a（分别地，b）。

这由收缩$\{y,z\} \in \Delta$与墙穿越凸性的相容性可知。对于由特定墙界定的半空间，凸性是相对于链接$\mathrm{lk}_{\Delta}(a)$（分别为链接$\mathrm{lk}_{\Delta}(b)$）中的墙上顶点来考察的；该顶点是从上文包含 y 或 z 的面中移除的，以形成墙。

c)（收缩点作为链接$\mathrm{lk}_{\Delta}(a)$或链接$\mathrm{lk}_{\Delta}(b)$中的墙上顶点）

若 $y \in lk_{\Delta}(a) \cup lk_{\Delta}(b)$，或 $z \in lk_{\Delta}(a) \cup lk_{\Delta}(b)$，则变化发生在涉及以下形式面之墙穿越的墙上顶点中：$G \in st_{\Delta}(a)$（分别为 $G \in st_{\Delta}(b)$）以及 $(G \mid p) \cup x$，其中某个 $x \neq y$，z 位于 a（分别为 b）的对面；其中 $G \ni y$（分别为 $G \ni z$），且 $p \in lk_{\Delta}(a) \cup lk_{\Delta}(b)$ 是一个墙上顶点，满足 $p \neq y$（分别为$\tilde{}p \neq z$）。在 Δ 中，用 y 和 z 的收缩点 u 替换 y 和 z，从而得到面 $\tilde{}(G \mid y) \cup u$（分别为 $(G \mid z) \cup u$），以替换 Δ 中的 G。

此处考虑的墙穿越涉及面 G 和 $(G \setminus x) \cup a$（分别 $(G \setminus x) \cup b$）。变化体现在墙 $G \setminus x$ 上顶点 $r \neq u$ 的凸性方面。请注意，“离墙凸性性质”（见引理 *3.8*）的变化完全源于以顶点 u 替代 y 或 z 而导致的 k^d 坐标变化，而非相关面之单纯复形结构的变化。

与 Δ 相比，交集中的引理 *3.8* 给出的半空间更少，因为涉及包含$\{y, z\}$的面的那些半空间不再参与交集，因为 Δ 不包含与 Δ 中包含边$\{y, z\} \in \Delta$的面相对应的任何面。

d)（收缩包含a或b的边）

如果 $y \in \{a, b\}$ 或 $z \in \{a, b\}$，则情况与 *c)* 部分类似，只是相交形成 $e = \{a,b\}$ 的收缩点空间的半空间在 Δ 中都具有相反的 $\tilde{}$ 部分。区别在于，相较于 $|st_{\Delta}(a)| \cup |st_{\Delta}(b)|$，$|st_{\tilde{\Delta}}(a)| \cup |st_{\tilde{\Delta}}(b)|$ 的变化更小，而且对于 Δ 而言，根据引理 *3.8*，将 $\{y, z\}$ 的收缩点 u 替代 y 或 z 会导致半空间发生变化的半空间更少。

e)（线性插值与通过凸性条件对顶点的（非）分离）~考虑 Δ 中由修正墙张成的超平面，这些超平面界定了相对于固定墙上顶点的凸性半空间（命题 *2.2*）。超平面的（非）分离性质以及投影/角度比较，会导致来自 Δ 的抽象单纯复形结构中具有相同邻接性质的情形表现出不同的变化。如果它们不分离 a 和 b，则整条直线线段 ab 都位于 Δ 中 $e = \{a,b\}$ 的收缩点空间内。否则，情况取决于分别用 b 替换 a（或用 a 替换 b）所产生的影响，以及根据引理 *3.8* 界定凸性条件的半空间的超平面是否分离 y 和 z。后者源于 $\{y,z\}$ 的收缩点 u 是 y 与 z 之间的线性插值。

现在，我们举例说明在相同邻接条件下，外部边收缩所导致的行为差异。

推论 3.22。（线性插值以及收缩包含a或b的边）
假设被收缩边为 $\{b,z\} \in \Delta$。假设收缩这条边保持墙穿越的凸性。令 u 为 $\{b,z\}$ 的收缩点，令 Δ 为收缩 $\{b,z\} \in \Delta$ 后得到的单纯复形。注意，若改为收缩 $\{a,z\}$，则交换 a 和 b 后，同样的陈述仍然成立。

~*1.* Δ 中相对于 u 的墙穿越的凸性，等价于 $\mathrm{st}_{\tilde{\Delta}}(a) \cup \mathrm{st}_{\Delta}(b) \cup \mathrm{st}_{\Delta}(z)$ 的凸性。若 $z \in$ 链接$_{\Delta}(a) \cap$ 链接$_{\Delta}(b)$，则收缩点 u 需要满足特殊的对齐性质。适宜点的空间由一系列半空间的交来参数化，这些半空间与引理 *3.8* 中的类似。它们描述了从单纯复形中移除一个顶点，并在实现空间中以另一个点取而代之后，对凸集进行的“完备化”。

2. 考虑满足 $G \supset \{b,z\}$ 的面 $G \in \Delta$，以及将 b 替换为顶点 $b' \notin \mathrm{st}_{\Delta}(a) \cup \mathrm{st}_{\Delta}(b)$ 的墙穿越，从而得到面 $(G \setminus b) \cup b'$。假设形如张成空间 $(G \setminus \{b,r\},b')$ 的超平面（其中 $r \in G \setminus b$ 且 $r \neq z$）对某个墙上顶点 $r \in G \setminus b$ 分离顶点 a 与 b。否则，线段 ab 上的任意一点都会保持关于 Δ 中 r 的诱导墙穿越的凸性~。换言之，我们假设将 b 与 a 互换不会保持该墙穿越相对于 Δ 中 r 的凸性。假设在将 b 替换为 $\{b,z\}$ 的收缩点 u 之后，同样成立。

对 $\{b,z\}$ 的收缩是否使 a 和 b 将这种“关于 r 超平面的凸性”推向更接近 a 还是 b，取决于交点与 ab 作为 $\underline{\mathrm{Span}}(G \setminus \{b,r\},b')$ 中元素时的 x_z-系数的符号。非负意味着它会被推向更接近 b 的位置，负值则意味着它会被推向更接近 a 的位置。后一种情况必须满足“比值下界”，才能与 a 和 b 的分离相容

相对于该超平面。所涉及的参数与相对于界定半空间（这些半空间定义了凸性性质）的投影/角度数据有关。

证明。1. 首先，关于 {a, u} ∈∼ ∼Δ（用 u 替换 b）的收缩中，对边 {b, z} 的收缩点空间的非空性要求 $\Delta \mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(a)| \cup |\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(u)| = |\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(a)| \cup |\mathrm{st}_{\Delta}(b)| \cup |\mathrm{st}_{\Delta}(z)|$具有凸性。如果 $z \in \mathrm{lk}_{\Delta}(a) \cap \mathrm{lk}_{\Delta}(b)$，那么边 {b, z} 的收缩点 $u \in \Delta$ 可能需要满足特殊条件，因为 $\mathrm{lk}_{\Delta}(a) \setminus \mathrm{lk}_{\Delta}(b)$ 中的一个顶点与 $\mathrm{lk}_{\Delta}(b) \setminus \mathrm{lk}_{\Delta}(a)$ 中的一个顶点之间的线段必须仍然位于 $|\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(a)| \cup |\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(b)|$ 内。与引理 3.8 的联系来自于研究：在 $\mathrm{st}_{\Delta}(a) \cup \mathrm{st}_{\Delta}(b)$ 中用 u 替换单个顶点 z，何时意味着 $|\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(a) | \cup |\mathrm{st}_{\bar{\Delta}}(u)|$ 是凸的。这些情况表明，相对于 r，涉及 $(G \setminus b) \cup a$ 和 $(G \setminus b) \cup b'$ 而非 G 和 $(G \setminus b) \cup b'$ 的“墙穿越”离凸性是更近还是更远。

2. 我们最初假设收缩 $\{b,z\}$ 会保持墙穿越的凸性，这意味着引理 3.8 中与这面墙相关的半空间包含 b。注意，这定义了相对于 r 的墙穿越凸性。这样的分离意味着存在一个参数 $\eta \in (0,1)$，使得存在如下形式的线性关系

$$\sum_{m \in (G \setminus \{b,r\}) \cup b'} c_m x_m = \sum_{m \in (G \setminus \{b,r,z\}) \cup b'} c_m x_m + c_z x_z = (1-\eta) x_a + \eta x_b.$$

注意，$z \in G \setminus \{b,r\}$，因为 $G \supset \{b, z\}$ 且 $r \neq z$。

将边 $\{b,z\} \in \Delta$ 收缩为一点 u，该点是与.....的线性插值

$$x_u = (1-\alpha) x_b + \alpha x_z$$

对于某个 $\alpha \in (0, 1)$，代入

$$x_z = \frac{1}{\alpha} x_u - \frac{1-\alpha}{\alpha} x_b$$

代入上面的恒等式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{m \in (G \setminus \{b,r,z\}) \cup b'} c_m x_m + c_z x_z = (1-\eta) x_a + \eta x_b \\
\Longrightarrow &\sum_{m \in (G \setminus \{b,r,z\}) \cup b'} c_m x_m + c_z \left(\frac{1}{\alpha} x_u - \frac{1-\alpha}{\alpha} x_b \right) = (1-\eta) x_a + \eta x_b \\
\Longrightarrow &\sum_{m \in (G \setminus \{b,r,z\}) \cup b'} c_m x_m + \frac{c_z}{\alpha} x_u - \frac{c_z(1-\alpha)}{\alpha} x_b = (1-\eta) x_a + \eta x_b \\
\Longrightarrow &\sum_{m \in (G \setminus \{b,r,z\}) \cup b'} c_m x_m + \frac{c_z}{\alpha} x_u = (1-\eta) x_a + \left(\eta + \frac{c_z(1-\alpha)}{\alpha} \right) x_b.
\end{aligned}$$

注意，$(G\setminus\{b,z\})\cup\{u,a\}$ 中顶点之间的上述线性关系在缩放意义下是唯一的，因为，单纯复形 $(d-1)$ 的一个面面的实现中的顶点具有k^d维坐标，且彼此线性无关。

由于 $1-\eta>0$，在收缩 $\{b,z\}$ 之后，修改后的墙的张成空间对顶点 a与 b的分离（即 a未能相对于 r诱导凸性）意味着我们需要

$$\eta+\frac{c_z(1-\alpha)}{\alpha}>0\Longleftrightarrow c_z>-\frac{\eta\alpha}{1-\alpha}.$$

若 $c_z\geq 0$，则与线段 ab 内部的交集点更靠近b （即 a 与 b “分离程度更大”）。否则，$c_z<0$，且与线段 ab 内部的交集点更靠近 a （即 a 与 b “分离程度更小”）。

最后，最后一条陈述是命题 1.7 与命题 2.2 的应用。

□

3.3 边界行为

在本小节中，我们关注（局部）凸性的边界条件。具体而言，我们考虑平坦墙穿越（命题 1.7 的第 3 部分），其中命题 2.2 的凸性条件中的超平面同时包含两个墙外顶点（命题 2.2）。这些是“刚刚能够”成为凸的墙穿越。我们用来与平坦墙穿越进行比较的组合对象，是给定单纯复形的 1-骨架中的诱导4-圈。下面我们讨论引出这些 4-圈的组合与几何动机。

鉴于凸墙交叉与来自旗单纯复形的组合正性性质之间的密切联系（[12], [16], [2]），自然会考察旗单纯伪流形的“边界情形”。除此之外，我们注意到，对于边 $e=\{a,b\}\in\Delta$，条件 $\mathrm{lk}_\Delta(a)\cap\mathrm{lk}_\Delta(b)=\mathrm{lk}_\Delta(e)$（常在 Δ为旗时使用）等价于 e 的收缩保持分片线性同胚类型 [13]。关于在 PL 同胚下的变化，我们首先指出，边细分保持旗性质，并扩大凸墙交叉的空间，同时保持原有凸墙交叉的凸性（命题 3.2）。这表明可与相对于边细分极小的单纯伪流形进行比较（即边收缩无法保持旗性）。这些极小情形是指给定单纯复形的 1-骨架被诱导 4-圈覆盖的情形（ [11]的第 79 页）。换言之，同一 PL同胚类中的其他单纯伪流形都是这些“极小构件”的边细分。由于边细分会扩大凸墙交叉的空间并保持原有的凸墙交叉（命题 3.2），且边细分保持旗性，因此这些是自然的比较点。

在此背景下，我们比较 PL 同胚对 1-骨架中的诱导4-圈以及平墙交叉所产生的影响。前者可作为抽象单纯复形结构中“内在”结构的

一种替代指标；在这些结构中，我们发现了有趣的平行现象。坐标实现对于退化线性条件发挥着作用，例如在对单个顶点进行坐标变换后，保持墙穿越平坦性的条件。

命题 3.23. （诱导*4*-圈的变化与墙穿越平坦性的比较）

假设 Δ是位于 k^d 中的单纯球面，它是局部凸的，并且具有凸的墙穿越（按 *[14]* 第*420–421*页的意义）。我们将边细分/收缩的通常实现取为线性插值，使所有未改变顶点的全部 k^d-实现与初始单纯复形中的那些保持相同。虽然我们关注新形成的诱导*4*-圈与平坦墙穿越，但在进行变换之前，我们也会对已有的那些作一些评述。

1. （悬挂）
   悬挂恰好在形成相对于墙上顶点为平坦的新墙关系时形成新的*4*-圈。它们保持已有的*4*-圈与平坦墙穿越。

2. （边细分）

   a) 边细分产生的新*4*-圈来自 a 与 b 对 链接$_\Delta(e)$ 中不相邻顶点所作的悬挂。已有的*4*-圈得以保持，除非它们以 e 作为一条边。*b)* 新的平坦墙穿越是那些以细分顶点 v 作为墙上顶点、并且相对于其余墙上顶点（它们位于链接$_\Delta(e)$中）为平坦的墙穿越。两种情形都有从 $\{a,b\}$ 中移除的对象——在边细分中它不再是一条边——并且需要整条边 $e = \{a,b\}$ 参与才能产生变化。*c)* 对于 Δ 中墙穿越的对应物，唯一可能的变化来自 Δ' 中涉及 v 的墙穿越。在这样的墙穿越中，平坦性仅相对于排除 a 或 b 中不被 v 替换的那个顶点之后的那些顶点得以保持。

3. （边收缩）

   a) 由边收缩产生的新 *4*-圈是较旧 *5*-圈的边收缩（这些 *5*-圈本身仅由边细分/收缩产生，而非由悬挂产生）。现有的 *4*-圈会被保留，除非它们使用边 e。

   b) 考虑由边收缩产生的新平坦墙穿越。更具体地说，我们考察一种平坦性，它仅取决于单纯复形结构的变化以及前一步的凸性性质。对于这类墙

穿越，这是相对于集合$\{a, b\}$的收缩点 w 而言的平坦性。

此类新的平坦墙穿越由 Δ 中连续的墙穿越对$F \cup G$与$G \cup H$产生，其中第一次墙穿越相对于墙上顶点a（相应地为b）是严格凸的，第二次墙穿越相对于墙上顶点b（相应地为a）是严格凸的。顶点a（相应地为b）在第二次墙穿越中处于墙外。

c) 利用严格凸墙穿越来产生平坦墙穿越，类似于需要通过对*4*-圈进行边细分，才能经由边收缩产生*4*-圈。注意，边细分会使未缩放墙关系中带通常符号的顶点系数变得更负（命题 *3.2*）。

d) 至于 Δ中已有平坦墙穿越的对应物，若不涉及a或b，则保持不变。然而，恰好涉及a或b之一、并相对于顶点p产生或保持平坦性的墙穿越，可能需要某些“退化”条件。

对于 Δ 中涉及 a 或 b 的墙穿越的对应情形，相对于某个特定墙上顶点 p 的平坦性意味着包含于某个特定超平面（见命题 *2.2* 与命题 *1.7*）。除非由 a 与 b 张成的直线包含于该超平面，否则线段 ab 上至多有一个这样的点。当我们考虑多个此类墙穿越的平坦性时，该条件更为严格。注意，这并不涉及单纯复形结构的改变，而仅涉及 a 或 b 的 k^d-坐标选择。

证明。 我们将比较悬挂以及边细分/收缩对诱导4-圈和墙穿越平坦性的影响。注意，一个诱导4-圈可以解释为一对不相邻顶点的悬挂。每次变换的起始单纯复形将记为 Δ。

1. 由一对顶点 d 与 $-d$ 所作的悬挂，会由上一步中的非邻接顶点对产生新的诱导4-圈。注意，每个悬挂顶点都与我们对其作悬挂的单纯复形的每个顶点相邻。

从墙关系的角度看，关系 $x_d + x_{-d} = 0$ （x^p 为顶点 p 的 k^d-坐标）是一个新的墙关系，其中墙上其余顶点的坐标为 0。从这个意义上说，在通过将 d 替换为 $-d$ 所形成的悬挂中，墙穿越相对于任意 墙上顶点都是平坦的。从非分隔超平面的角度看，任何包含 x_d 的超平面也包含 x_{-d}，因为它是一个向量空间。这意味着 x_d 与 x_{-d} 不 被由

d与 $\tau\setminus a$的张成空间所给出的超平面分离（相对于我们用以度量凸性的顶点），并且我们得到一个平坦墙穿越。对于已有的墙穿越，若 x_d 或 x_{-d} 位于墙上，则新诱导的墙穿越相对于所使用的悬挂顶点（d 或 $-d$）是平坦的，而其余墙上顶点的平坦性/凸性性质不受影响。

2. 接下来，我们考察对一条边$e = \{a,b\} \in \Delta$进行（星状）细分的影响。不涉及$e = \{a,b\}$的诱导 4-圈 Δ *not* 会保留。另一方面， Δ 使用$e = \{a,b\}$的诱导 4-圈会被移除，因为a 和b 不再相邻（而是形成 5-圈）。由于a 和b 在边细分 Δ'后不再相邻，我们通过顶点a 和b对 $\mathrm{lk}_\Delta(e)$中不相邻的顶点对进行悬挂，从而得到新的诱导 4-圈。

关于墙穿越的平坦性/凸性，我们注意到，墙关系$x_a + x_b - 2x_v = 0$描述了 Δ' 使用细分顶点v 作为墙上顶点的墙穿越。这表明，相对于其余墙上顶点而言，这类墙穿越是平坦的。根据命题 3.2， Δ' 使用v 作为墙外顶点的墙穿越保持其凸性，并且*not* 不会引入任何新的平坦墙穿越。注意，在 Δ 中，面并集不*not* 包含$e = \{a,b\}$的墙穿越在 Δ'中保持不变。包含该边的墙穿越会被移除，并由涉及v的墙穿越替代，后者我们此前已经讨论过。因此，新的诱导 4-圈和新的平坦墙穿越，都是通过在顶点a 和b上进行悬挂而诱导出的。

至于 Δ 现有墙穿越的对应情形，唯一可能的变化来自涉及v的 Δ' 墙穿越。为了寻找平坦墙穿越中的变化，我们考察v 在命题 3.2 证明中的墙穿越里作为墙上顶点或墙外顶点的情形。注意，对于给定的 Δ 墙穿越，v 在其任一面中只能替换a 或b 之一。当v 是墙上顶点时，我们可以直接证明这一点。如果v 是墙外顶点，那么替换它的顶点不等于a 或b ，于是我们得到 Δ 的一个不包含$e = \{a,b\}$的面。虽然已经证明墙穿越的凸性得以保留，但我们还想考察是否存在系数严格减小的情形，从而迫使墙穿越系数严格为负。在v为墙上顶点和墙外顶点的两种情形中，可能发生这种情况的唯一顶点，是给定墙穿越中 $\mathrm{e} = \{a,b\}$ 里未被v 替换的那个顶点。

~3. 最后，我们研究边 $e = \{a,b\} \in \Delta$的收缩。与边细分的情形一样，不使用边 $e = \{a,b\}$的诱导 4-圈会保留下来，而使用边$e = \{a,b\}$的诱导 4-圈则会被移除（在这种情况下变成 3-圈）。~中形成的任何新 4-圈 Δ 都来自 Δ中的 5-圈。诱导 5-圈的一个可能来源，是对诱导 4-圈中一条边 $\{p,q\}$进行细分。这是因为细分顶点v 的链接，是以p 和q 为悬挂点、以$\{p,q\}$的链接为基底的悬挂；而包含 $\{p,q\}$ 的诱导 4-圈中的另外两个顶点不 属于 $\{p,q\}$的链接。此外，悬挂不能 成为新诱导 5-圈的来源，因为悬挂顶点与除另一个悬挂点以外的每个顶点都相邻。然而，

诱导 5-圈中的任一顶点都不 与该诱导 5-圈中另外两个顶点相邻。因此，诱导 5-圈的唯一来源，是对诱导 4-圈进行边细分，或对诱导 6-圈进行边收缩。这两种情况都归结为在更早阶段对诱导 4-圈中的边进行边细分或边收缩。

我们将比较墙穿越对平坦性的影响。重点在于单纯复形结构的变化，因为我们要将其与 1-骨架中由诱导4-圈导致的结构性变化进行比较。与边细分的情况一样，不涉及 a 或 b 的墙穿越不受影响。在 Δ 中包含 $\widetilde{e} = \{a,b\}$ 的墙穿越在 Δ中不再存在。凸性可能发生的变化，来自面位于 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 中的墙穿越，或与其恰好相距一次墙穿越的情形。具体分为以下几种情况：

在收缩过程中，将 a 或 b 替换为一个在 a 和 b 之间插值的“收缩点” w ；与 Δ 中恰好使用 a 或 b 之一的墙穿越相比较。

这不会改变单纯复形结构，而是取决于收缩点 w 的选择（参见定理 3.4 中相交的半空间的边界超平面）。原因在于，旗单纯复形中墙穿越的相对墙外顶点 并不相邻。注意，为了保留相对于 w 的墙穿越的凸性，我们希望 $|\mathrm{st}_\Delta(a)| \cup |\mathrm{st}_\Delta(b)|$ 是凸的。命题 2.2 和命题 1.7 中涉及的墙关系表明，相对于某个特定墙上顶点的墙穿越的凸性，是由该顶点位于某个超平面上来定义的。如果 w 是线段 ab 内部的一个线性插值点，除非整条线段 ab 都包含在该超平面中，否则它不会位于该超平面上。如果 ab 不包含在这个超平面中，那么 Δ中的墙穿越所涉及的顶点 a 或 b 会占用连接 ab 的直线与该超平面的唯一交点。因此，关于从 Δ 继承而来的、涉及 a 或 b 之一的墙穿越的论述成立，因为收缩 e 后，包含 $e = \{\overline{a,b}\}$ 的面不再存在。

—

- **在 Δ 中，原先不共墙的 Δ 的面之间现新形成的墙穿越 $\widetilde{}$。**

这来源于连续两次墙穿越：第一次墙穿越使用只包含 a 而不包含 b 的面 F（分别地，只包含 b 而不包含 a），将初始墙外顶点 p 替换为 b 以形成面 G（分别地，替换为 a）；第二次墙穿越使用 a（分别地，b）作为初始墙外顶点，并将其替换为顶点 q 以形成第三个面 H。相对于顶点 $\mathrm{m} \in (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \setminus \mathrm{a} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \setminus \mathrm{w}$，使用 $\mathrm{F} := (\mathrm{F} \setminus \mathrm{a}) \cup \mathrm{w} \in \Delta$ 和 $\mathrm{H} := (\mathrm{H} \setminus \mathrm{b}) \cup \mathrm{w} = (\mathrm{G} \setminus \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}) \cup \{\mathrm{q}, \mathrm{w}\}$ 所得到的墙穿越的平坦性 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$等价于 $\mathrm{q} \in$ 张成空间 $((\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \setminus \mathrm{m}, \mathrm{p})$。如果

$m = w$，这是一项从边收缩之前继承的性质。否则，~具有 $m \neq w$ 就意味着 w 包含在墙中，因而该选择并不只取决于单纯复形结构。该参数将是用于收缩点的 k^d 坐标，而限定半空间的超平面的交集（来自定理 3.4）将成为点的来源。上面对恰好涉及 a 或 b 之一的墙穿越进行的分析表明，如果没有附加条件，很难保持平坦性。因此，我们将重点关注 $m = w$ 情形。

特别地，我们声称，F ∪G 的墙穿越相对于 a~ ~（即 b ∉张成空间(F \ a)）不是平坦的。假设 q ∈张成空间((F ∩H) \ w, p) =张成空间((F ∩G) \ a, p) =张成空间(F \ a)。由于关于 q 的假设意味着张成空间(H \b) =张成空间(F \ a)，而 H 的顶点线性无关，因此 b ∉张成空间(H \b) = 张成空间(F \a)，且墙穿越 F ∪G 不是平坦的。这是因为，H \ b =(F \ {p, a}) ∪q 且 q ∈张成空间(F \ a)，将意味着张成空间(H \ b) ⊂张成空间(F \ a)。后一条件意味着由维数原因可知两者相等。使用超平面张成空间(H \b)进行同样的推理可知，G ∪H 的墙穿越相对于 b（即 a ∉张成空间(H \ b)）不是平坦的。我们可以利用墙关系中系数符号的明确形式，更直接地证明这一点。利用 G ∪H 的墙关系，将 F ∪G 的墙关系中的 x_a 替换为 x_q 后，需要所得线性关系中 x_b 的系数等于 0，同时 x_q 的系数严格为正。设 F ∪G 的墙关系中 x_r 的系数为 α_r，G ∪H 的墙关系中 x_s 的系数为 β_s，这等价于

$$\alpha_b + \alpha_a \cdot -\frac{\beta_b}{\beta_a} = 0$$

且 $\alpha_a \cdot -\frac{\beta_q}{\beta_a} > 0$。后一个条件由现有的凸性假设推出，因为 $\alpha_a < 0$（$\alpha_a \leq 0$ 以及 $\alpha_a \neq 0$ 来自 $\alpha_b > 0$）且 $\beta_q, \beta_a > 0$。因此，关于收缩点 w，在 Δ 中所得墙穿越的平坦性的定量条件是

$$\alpha_b + \alpha_a \cdot -\frac{\beta_b}{\beta_a} = 0 \Longleftrightarrow \alpha_b = \alpha_a \cdot \frac{\beta_b}{\beta_a} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_a}{\alpha_b} = \frac{\beta_a}{\beta_b}$$

且所涉及的一对墙穿越（$F \cup G$和 $G \cup H$）相对于a和b均不具有平坦性。注意，$\alpha_b > 0, \alpha_a < 0, \beta_b < 0$以及 $\beta_a > 0$。不等式 $\alpha_b > 0$和 $\beta_a > 0$ 由初始假设推出，而 $\alpha_a < 0$ 和 $\beta_b < 0$ 则由将 $\alpha_a \leq 0$ 和 $\beta_b \leq 0$ 与关系式 $\alpha_b + \alpha_a \cdot -\frac{\beta_b}{\beta_a} = 0$结合得到。

墙穿越$F \cup G$（分别为$G \cup H$）相对于a（分别为b）不 平坦，这与 Δ 中由 Δ里的诱导 5-圈产生的新诱导 4-圈类似；这些 5-圈不包含任何诱导 4-圈。

回顾前文，诱导 5-圈不能 由悬挂产生，必须由诱导 4-圈的边细分或诱导 6-圈的边收缩得到。由于悬挂只会产生相对于所有墙上顶点都平坦的墙穿越，因此，要构造 Δ 中那些不 是 Δ中墙穿越对应项的新型墙穿越，就必然需要以某种方式涉及边细分/收缩$\tilde{}$。对于现有墙关系的对应项，我们注意到，边细分无法产生诱导出平坦墙穿越的新顶点（命题 3.2）。由于$F \cup G$和$G \cup H$这两种墙穿越中的 $\alpha_a < 0$ 和 $\beta_b < 0$，要在 Δ 中获得$\tilde{}$这样的墙穿越，从而由 Δ 产生新的平坦墙穿越，它们并非由悬挂诱导，必定以某种方式涉及边细分/收缩。

□

4 存储局部凸性变化类似物并取代有理等价的参数线性系

对于与环面簇相关联的扇，其与局部凸性的联系始于有理等价关系中的内积。决定局部凸性数据的墙关系，来自将这些关系与环面不变曲线相交（ [6] 第 300 页）。对于单纯伪流形，我们已将它们替换为基于初始“基例”的 PL 同胚诱导的变化（例如，单纯球面情形下交叉多胞体的边界）。第 3 节末尾还提出一种启发式方法：研究一维骨架被 4-圈或平坦墙穿越覆盖的单纯复形的边细分（命题 3.23）。这涉及对所涉单纯复形顶点的坐标实现之间的关系作出选择。在第 3 节中，我们假定构成 PL 同胚的边细分与收缩由线性插值实现。然而，主要结果中很大一部分所涉及的推理并未使用这一假设（例如注 4.1 中讨论的意外行为）。

为了探讨更一般的实现，我们研究参数线性系的变化，并将其解释为单纯复形顶点的坐标实现之间的关系（引理4.5、注 4.6、注记 4.9）。它们处于特定坐标实现与代数结构之间，起到一种折中的作用；后者可能无法充分保存那些在很大程度上依赖于实现的几何性质信息。在此背景下，我们选择参数线性系，使其能够自然地保存 PL 同胚和悬挂作用下变化的信息（命题 4.11 和命题 4.12）。它还通过例 4.7 等实例，阐明了第 3 节中的线性插值选择（例如用于边细分的选择）。之后，我们运用这些结果研究 PL 同胚所诱导的局部凸性变化的类似现象（命题 4.15、推论 4.16）。观察到的变化与第 3 节中的变化类似。

回顾一下，我们将细分顶点和边的收缩点都设为通过线性插值实现。我们希望了解与局部凸性相关的信息在更一般的坐标实现选择下会如何变化。为了弄清哪些性质很重要，我们考察了此前使用这些假设的地方。由于这些假设似乎往往并非关键结果所必需，因此这表明，对于更一般的坐标实现，我们也可以预期类似性质成立。

备注 4.1。 **（第 3 节中使用的推理与实现）**

尽管第 3 节中的结果通常假设细分顶点和收缩点通过线性插值来实现，但其背后的推理往往并不需要这一假设。例如，定理 3.4 的证明（引理 3.7、引理 3.8、引理 3.9）的大部分内容便属于此类情况。边界上的凸集的交以及所涉及单纯复形的连通性性质（命题 3.14、命题 3.16、命题 3.17）同样如此；这些性质被用于限制邻近的凸可收缩边（定理 3.19）。最后，引理 3.7 在交叉多胞体的边界和外部边细分中的应用（例 3.12 和定理 3.20）会导出一个空的收缩点空间，这一结论也独立于线性独立的假设。请注意，尽管满足定理 3.4 中更为“复杂”的条件，该性质仍会导致交叉多胞体边界的收缩点空间为空。

牢记这一点，我们考察与用于研究环面簇的单纯伪流形具有共同性质的单纯伪流形的例子和一般结构。我们的目标是探索分析描述单纯复形的面的实现如何组合在一起的组合数据的方法。这些方法将涉及推广到单纯复形的性质，而这些单纯复形不一定来自与环面簇相关的单纯扇。作为开始，我们考察交叉多胞体边界中顶点的实现之间的关系。

例4.2。（Chow环和交叉多胞体中平方为0的项）
为比较相关的代数结构，我们注意到，d维交叉多胞体的边界的h-多项式为$h(x) = (1+x)^d$，并且它给出了乘积 $\mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1$的偶数次贝蒂数。在Chow环中，我们有：与相关扇的一条射线对应的每个变量x_ρ^2的平方x^ρ 等于0（根据 [16]第18–19页的命题1.13，反之亦然）。

这提示我们可以为单纯伪流形寻找环面簇的 Chow 环的类似物。在单纯复形中，环面簇的 Chow 环里有理等价的替代物来自参数线性系。它们可以取为顶点的 k^d-实现之间的某些关系。

定义4.3。（斯坦利–赖斯纳环）
（ [5], 第 209 页的定义 5.1.2； [19]第 53 页的定义 1.1）
给定一个顶点集为 $[n]$,的单纯复形 Δ，其**斯坦利–赖斯纳环/面环**为$k[x_1,\ldots,x_n]/I_\Delta$，其中$I_\Delta$ 是由单项式$x^G := \prod_{p\in G} x_{\ p.G\notin\Delta}$生成的理想

定义4.4。（第81页 [19]）
给定一个线性形式$\theta = \sum_p \alpha_p x_p \in k[\Delta]_1$和一个面$F \in \Delta$， θ在F上的**限制**记作$\theta|_F$，定义为

$$\theta|_F := \sum_{p\in F} \alpha_p x_p.$$

引理4.5。 （参数线性系）
（ *[19],* 第*81–82*页上的引理*2.4*， *[5]*第*220*页）

1. 设 $k[\Delta]$ 是 *Krull*维数为 d 的面环，并设 $\theta_1,\ldots,\theta_d \in k[\Delta]_1$。则 $\theta_1,\ldots,\theta_d$是 $k[\Delta]$ 的线性参数系（*l.s.o.p.*），当且仅当对每个面 $F \in \Delta$ （或等价地，对每个面 $F \in \Delta$），限制 $\theta_1|_F,\ldots,\theta_d|_F$ 张成一个维数等于 $|F|$ 的向量空间。

2. 若 $\theta_1,\ldots,\theta_d$是 $k[\Delta]$的线性参数系，则商环 $k[\Delta]/(\theta_1,\ldots,\theta_d)$（作为 k 上的向量空间）由面单项式 $x^F = \prod_{p\in F} x_{\ p}$（对 $F \in \Delta$）张成。

注记 4.6. （k^d**-顶点坐标的选取与线性参数系 s)**
而非零除顶点的坐标对 $p \in V(\Delta) = [n]$ 构成的（$d-1$）维 Cohen–Macaulay 单纯复形 Δ，线性参数系描述的是点配置之间的关系（类似于常见的加权平均/质心）。Lee 的研究中考虑了涉及应力空间的解释（例如[10]第 394 页）。构成正则序列的线性参数系意味着（Krull）维数实际上会因每个关系而减少 1，并且在 $[n]\setminus F$中选择顶点的k^d坐标，就能唯一确定F的顶点坐标。线性关系的非冗余性可以理解为一组超平面的线性无关法向量，这些超平面的交集具有预期的维数。

上文讨论的k^d坐标性质将在下面的例子中结合交叉多胞体的边界进行讨论。

例 4.7.（交叉多胞体的边界与悬挂）
我们注意到，参数线性系提供的是关于顶点实现的关系，即k^d-坐标之间的信息，而不是具体坐标本身。它们也可以解释为来自重复悬挂的参数线性系。为简单起见，我们将以交叉多胞体的边界为例加以说明。回顾一下，交叉多胞体的边界由重复悬挂构成。我们聚焦于$d = 3$的二维情形。将顶点记作$x_{\pm1}$、$x_{\pm2}$和$x_{\pm3}$，引理4.5表明，一个可能的参数线性系由以下线性形式给出：

- $\theta_1 := x_1 + x_{-1}$
- $\theta_2 := x_2 + x_{-2}$
- $\theta_3 := x_3 + x_{-3}$

考虑阿廷约化 $A^{\cdot}(\Delta) = k[\Delta]/(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$。要得到 k^3，中实际点的坐标，我们需要选择 x_1，、x_2，和 x_3 的坐标表示。这些线性形式作为 $k[x_1]$ 中元素的线性无关性，类似于单纯复形的一个面上点的线性无关性，前提是将每个面视为一个实际单形。为 x_1，、x_2，和 x_3 选择坐标表示中的点，就确定了 x_{-1}、x_{-2} 和 x_{-3} 的相应点。最后，我们注意到，关系 $\theta_1 := x_1 + x_{-1} = 0$、$\theta_2 := x_2 + x_{-2} = 0$ 和 $\theta_3 := x_3 + x_{-3} = 0$ 是墙关系。考察墙上顶点可知，它们对应于平凡的余法丛，如例4.2中所述。

然而，任意选择线性参数系并不能提供足够的信息，以确定单纯复形如何拼合在一起的组合数据。即使将范围限制为（$d-1$）维平衡单纯复形（见 [19]第95页定义4.1），情况仍然如此；在这些复形中，1-骨架具有适当的d着色。对于平衡单纯复形，采用“通常”的线性参数系来代替有理等价关系，也会得到平方为0的项。

命题4.8。（见 *[19]*第*97*页命题*4.3*）

1. 设 Δ 是一个维数为$d-1$、顶点集为V的平衡单纯复形。定义

$$\theta_i = \sum_{\substack{x \in V \\ \kappa(x) = i}} x \in k[\Delta]$$

   对于 $1 \leq i \leq d$。注意，θ_i在 $\mathbb{N}^d$中是次数为e_i的齐次元。因此，$\theta_1, \ldots, \theta_d$是$k[\Delta]$的齐次参数系。

2. 设 $S = k[\Delta]/(\theta_1, \ldots, \theta_d)$。那么对于每个 $x \in V$，都有 $x^2 = x\theta_i = 0 on\ S$。由于我们有一个适当着色，因此对于所有 $i \in [d]$，也有 $\theta^2 i = 0$。

这表明，对于平衡单纯复形，如果允许任意参数线性系，“直接逆命题”似乎并不成立。换言之，我们需要一些与所用k^d-坐标相关信息相联系的附加结构。为了解决这一问题，我们将重点关注参数线性系本身。对于环面簇，我们将具体选用有理等价关系。它们在代数结构与k^d-坐标实现的具体选择之间提供了一个折中。

注记 4.9。 **（参数线性系与墙关系对比坐标表示）**

1. 通过命题 4.11 和命题 4.12，单纯复形的 PL 同胚所引起的参数线性系变化，给出了环面簇墙关系中局部凸性性质的类比。注 4.14 中讨论了一些与符号有关的问题，并在后续结果中加以应用。

2. 固定一个涉及两个共享同一面墙的面 $F,F\prime \in \Delta$ 的墙穿越。给定 Cohen–Macaulay 单纯复形 Δ的一个初始线性参数系 θ，墙关-~ ~系似乎与满足 $\theta|_p = \theta|_p$ 的线性参数系 θ 所成的空间有关，其中对所有 $p \in [n] \setminus (F \cup F\prime)$ 都成立。若再固定 $p \in F \cup F\prime$ 的坐标选择 x^p，则有如下关系

$$\sum_{p \in F \cup F'} (\widetilde{\theta}_{i,p} - \theta_{i,p}) x_p = 0$$

对所有 $i \in [d]$ 都成立。这个关系必定是与 $F \cup F\prime$ 相关联的墙关系的倍数。由于墙外射线的系数必须非零且符号相同，因此，至多只有一个具有命题 4.11 第 2 部分所给形式的线性参数系。

3. 一种“对偶”条件与 $\ker\left(\theta|_\tau \quad \theta|_a \quad \theta|_{a'}\right)$ 有关，其中a 和a' 是在与$F \cup F\prime$相关的墙穿越中的墙外顶点，而 $\tau = F \cap F'$ 是墙。假设我们从一个线性参数系 θ_1、…、θ_d出发，并且固定k^d-坐标表示来表示$p \in [n]\setminus(F \cup F')$。在这些条件下，$k^d$-坐标中$p \in F \cup F\prime$的可能取值构成的空间由这个核参数化，因为

$$\sum_{p \in F \cup F'} \theta_{i,p}(\overline{x}_p - x_p) = 0.$$

在例 4.7 的基础上，我们将构造另一个例子（例 4.13），其中我们可以选择一个线性参数系，使其与墙关系直接关联。事实证明，这一选择也与线性插值相容。在介绍相关的参数线性系之前，我们将把墙关系与上文讨论的周环替代$A^{\cdot}(\Delta)$的限制联系起来。

注记 4.10. **（参数线性系的墙穿越类比）**
从限制的角度考察周环替代的行为，可将参数线性系与墙关系的类比联系起来。锥化（[10]第396–397页上的定理 7）可用于得到分解式 $\mathrm{A}^k(\Delta) \cong \mathrm{A}^k(\mathrm{ast}_\Delta(\mathrm{p})) \oplus \mathrm{A}^k(\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{p})) \cong \mathrm{A}^k(\mathrm{ast}_\Delta(\mathrm{p})) \oplus \mathrm{x}^p\mathrm{A}^{k-1}$(链接$_\Delta$(p))，当 $\dim\Delta = \mathrm{d} - 1$ 时适用于 $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{d}$。若 Δ是旗（例如当它具有凸墙交叉时），我们可以反复应用此结论，对任意满足 $\mathrm{m} \le \mathrm{k}$ 的 $(\mathrm{m}-1)$ 维面 $\mathrm{F} \in \Delta$ 得到 $\mathrm{A}^k(\Delta) \cong \mathrm{A}^k(\mathrm{ast}_\Delta(\mathrm{F})) \oplus \mathrm{A}^k(\mathrm{st}_\Delta(\mathrm{F})) \cong \mathrm{A}^k(\mathrm{ast}_\Delta(\mathrm{F})) \oplus \mathrm{x}^p\mathrm{A}^{k-1}$(链接$_\Delta$(p))。考虑直和的第二项。假设我们将与 x^F 相乘的项写成和

形如 $\alpha+\beta$，其中 $\alpha\in k[\text{链接}_\Delta(F)]$，且 $\beta\in(\theta_1,\ldots,\theta_d)$。然后，用 x^F做乘法会滤去 β 中不构成 F 的面的那些项。若 $m=d-1$（即 F 为墙/脊），则可出现在 Δ 中的顶点是 F 的顶点，或附于其上的 Δ 的另外两个顶点。在某种意义上，链接$_\Delta(F)$ 的这种坐标关系表明，将参数线性系限制到相关的面上，会给出墙关系的类比。

根据上述讨论，我们构造能够自然记录 PL 同胚信息的参数线性系。这将是我们分析局部凸性关系类比的主要工具。关于第 2 部分中符号选择的一些讨论见注 4.14。我们将在后续应用中牢记这一点。

命题 4.11.（参数线性系与悬挂及边细分）

设 Δ 是一个（$d-1$）维 *Cohen–Macaulay* 单纯复形，且 $\theta_1,\ldots,\theta_d$ 是 Δ 的一个线性参数系。

1. 设 Susp(Δ) 是由顶点 p 和 q 对 Δ 作悬挂得到的复形。则 $\theta_1,\ldots,\theta_d,x_p+x_q$ 是 Susp(Δ) 的一个线性参数系。在此线性参数系下，我们有 $x_p=-x_q$ 和 $x_p^2=x_q^2=0$ 属于 $A^{\cdot}(\text{Susp}(\Delta))$。

2. 设 Δ' 是关于边 $e=\{a,b\}\in\Delta$ 的（星形）细分，且 v 为细分顶点。

对于任意 $\alpha,\beta\in k\setminus 0$，以下线性形式集合 ℓ_i（$i\in[d]$）是 Δ' 的一个线性参数系：

- 对于 $q\neq v$，令 $\ell_i|_q:=\theta_i|_q$。换言之，对于所有 $i\in[d]$，都有 $\ell_{i,q}=\theta_{i,q}$。
- 定义 $\ell_i|_v:=\alpha\theta_i|_a+\beta\theta_i|_b$。换言之，对于所有 $i\in[d]$，都有 $\ell_{i,v}=\alpha\theta_{i,a}+\beta\theta_{i,b}$。若 $\alpha+\beta=1$，则 $\ell_i|_v$ 是 kd 中的一个点，位于经过 $\theta_i|_a$ 和 $\theta_i|_b$ 的直线上；当 $0<\alpha,\beta<1$ 时，它也位于线段 $\theta_i|_a\theta_i|_b$ 上。若 $\alpha+\beta=-1$，则 $\ell_i|_v$ 是这样一个点乘以 -1。

证明。 1. 回顾一下，一组线性形式 $\ell_1,\ldots,\ell_d$ 构成一个（$d-1$）维单纯复形 S 的参数线性系统，当且仅当对于每个面 $F\in S$，其限制$\ell_1|_F,\ldots,\ell_d|_F$张成一个维数为 $|F|$ 的向量空间（等价地，对于每个面 $F\in S$）（引理4.5）。

由于 $\theta_1,\ldots,\theta_d$ 构成 Δ 的线性参数系，因此对于每个面 $F\in\Delta$，$\theta_1|_F,\ldots,\theta_d|_F$ 张成一个维数为 $|F|$ 的向量空间。注意，对于 $F\in\Delta$，x_p+x_q 限制为 0。因此，接下来只需研究 Susp(Δ) 中包含 p 或 q 的面的限制。不失一般性，可以假设这些面包含 p。由于它们具有 $G=F\cup p$ 的形式，其中 $F\in\Delta$，因此对于所有 $1\le i\le d$，都有 $\theta_i|_G=\theta_i|_F$。这意味着

$\dim_k(\theta_1|_G, \ldots, \theta_d|_G) = |F|$。由于 θ_i 不包含 x^p 或 x^q，对 $any i \in [d]$, 均成立，这意味着 $\dim_k(\theta_1|_G, \ldots, \theta_d|_G, (x_p + x^q)|_G = x^p) = |F| + 1 = |G|$。因此，线性形式$\theta_1, \ldots, \theta_d, x_p + x^q$ 构成 Susp(Δ) 的线性参数系。

2. 与第 1 部分一样，我们将研究给定单纯复形各面上线性形式限制的张成空间的维数。

我们可以将 Δ' 的面分为两类：包含v 的面，以及不包含v的面。注意，$\mathrm{lk}_{\Delta'}(v) = \mathrm{Susp}_{a,b}(\mathrm{lk}_\Delta(e))$。

考虑所列线性形式在$F \in \Delta'$ 这些不包含v的面上的限制。这些面对应于 Δ 中不包含e的面。由于 $\ell_i|_F = \theta_i|_F$ 根据定义成立，且 θ 是 Δ 的线性参数系，因此这些限制 $\ell_1|_F, \ldots, \ell_d|_F$ 张成一个维数为 $|F|$ 的向量空间。接下来只需考察 $F \in \Delta'$ 这些包含 v 的面上的限制。

若 $F \in \Delta'$ 且 $F \ni v$，则有 $F = G \cup v$、$F = G \cup \{a, v\}$，或 $F = G \cup \{b, v\}$，其中某个 $G \in \mathrm{lk}_\Delta(e)$。由于 θ 是 Δ 的线性参数系，因此 $\dim_k(\ell_1|_G, \ldots, \ell_d|_G) = |G|$，且 $\dim_k(\ell_1|_{G\cup a}, \ldots, \ell_d|_{G\cup a}) = \dim_k(\ell_1|_{G\cup b}, \ldots, \ell_d|_{G\cup b}) = |G| + 1$。考虑矩阵 $(\ell_{i,p})_{\substack{1\le i\le d \\ p\in H}}$，其中 $\ell_{i,j}$ 等于 x^p 在 ℓ_i 中的系数。给定一个面 $H \in \Delta$，这些

维数陈述可以改写为：该 $d \times |H|$ 矩阵的行秩等于 $|H|$。由于行秩等于列秩，这等价于所有列线性无关。在我们的语境中，对于任意一个 $(d-1)$ 维单纯复形 F 的线性参数系 θ，这可以改写为 $\dim_k$张成空间$(\theta_1|_F, \ldots, \theta_d|_F) = \dim_k$张成空间$(\theta|_p)_{p\in F}$。为了使将顶点 v 添加到所考虑的面 H 后维数增加 1，当且仅当 $\ell|_v = \alpha\theta|_a + \beta\theta|_b \notin$张成空间$_k(\ell|_p)_{p\in H}$ 时，列秩增加 1。这里，对于 $G \in$链接$_\Delta(e)$，我们考虑 $H = G$、$H = G \cup a$，或 $H = G \cup b$。

假设对某个 $G \in$链接$_\Delta(e)$，有 $\ell|_v = \alpha\theta|_a + \beta\theta|_b \in$张成空间$_k(\ell|_p)_{p\in G}$。由于 $G \not\ni v$，我们有：对所有 $p \in G$，$\ell|_p = \theta|_p$成立。这意味着 $\ell|_v = \alpha\theta|_a + \beta\theta|_b \in$张成空间$_k(\theta|_p)_{p\in G}$。然而，这将与如下假设相矛盾：

$$\dim \mathrm{Span}_k(\theta_1|_{G\cup e}, \ldots, \theta_d|_{G\cup e}) = \dim \mathrm{Span}_k(\theta|_p)_{p\in G\cup e} = |G| + 2$$

因为要使这种情况发生，这些列必须线性无关。因此，对所有 $G \in$链接$_\Delta(e)$，我们有 $\ell|_v \notin$张成空间$_k(\ell|_p)_{p\in G}$。

若对于某个$G \in$，有 $\ell|_v = \alpha\theta|_a + \beta\theta|_b \in$张成空间$_k(\ell|_p)_{p\in G\cup a} =$张成空间$_k(\theta|_p)_{p\in G\cup a}$链接$_\Delta(e)$，则通过初等列变换从矩阵的$v$ 列中减去 $\alpha\theta|_a$，可得矩阵$(\theta|_p)_{p\in G\cup e}$的列秩为 $\le |G| + 1$。然而，这将与假设θ 是 Δ 的线性参数系相矛盾，因为后者将会

意味着

$$\dim \operatorname{Span}_k(\theta|_p)_{p\in G\cup e} = |G|+2.$$

同样的推理还表明，对于所有 $G \in \mathrm{lk}_\Delta(e)$，$\ell|_v \notin \operatorname{Span}_k(\theta|_p)_{p\in G\cup b}$。因此，如果 $H \in \Delta'$ 和 $H \ni v$ 以及 ℓ_1、.. .、ℓ_d 是 Δ' 的线性参数系，那么矩阵 $(\ell_{i,p})_{\substack{1\le i\le d\\ p\in H}}$ 的所有列线性无关。

□

下面给出了这一结果关于边收缩的对应结论。

命题 4.12。（边收缩与一般线性插值）

设 Δ 是一个 *Cohen–Macaulay* $(d-1)$ 维单纯复形，且 $\theta_1,\dots,\theta_d$ 是 Δ 的线性参数系。假设 k 是一个无限域。

~取一条边 $e = \{a,b\} \in \Delta$。设 Δ 是在 Δ 中将边 e 收缩所得的复形，w 是该边收缩到的点（即 a 和 b 都与 w 重合/收敛到 w）。对于 $k\setminus 0$ 中除有限多个选择外，以下线性形式集合 ℓ_i（$i \in [d]$）是 Δ 的线性参数系：~

- 给定 $\neq a$，b 中的一个顶点 q Δ，令 $\ell|q := \theta|q$。换言之，对于所有 $i \in [d]$，都有 $\ell i, q = \theta i, q$。
- 定义 $\ell|w := (1-\omega)\theta|a + \omega\theta|b$。换言之，对于所有 $i \in [d]$，都有 $\ell i,w = (1-\omega)\theta i,a + \omega\theta i,b$；并且 $\ell|w$ 是 kd 中直线 $L(\theta|a, \theta|b)$ 上的一个点，该直线由 $\theta|a$ 和 $\theta|b$ 张成。如果$\omega \in (0, 1)$，那么 $\ell|w$ 是 kd 中直线 $L(\theta|a,\theta|b)$ 上的一个点，该直线由 $\theta|a$ 和 $\theta|b$ 张成，且位于$\theta|a$ 和 $\theta|b$ 之间。

证明。回忆一下，对于任意一组定义在 $x_1,..., x_n$ 上的 d 个线性形式$\ell_1,\dots,\ell_d$，都有 $\dim_k \operatorname{Span}(\ell_1|_F,\dots,\ell_d|_F) = \dim_k \operatorname{Span}(\ell|_p)_{p\in F}$（参见命题 4.11 的证明）。特别地，这意味着

$$\dim_k \operatorname{Span}(\ell_1|_F,\dots,\ell_d|_F) = |F|$$

当且仅当 $(\ell|_p)_{p\in F}$ 具有线性无关的列。

~我们将边收缩 Δ 的面分为包含w 的面，以及~不 包含w的面。如果一个面$F \in \Delta$ 不 包含 w，则$F \in \Delta$ 且不 包含a或b。由于 $\ell|_q = \theta|_q$对$q \neq a$、b，我们有 $\ell_i|_F = \theta_i|_F$对每个$i \in [d]$。这意味着 $\dim_k$张成空间$(\ell_1|_F,\dots,\ell_d|_F) = \dim_k$张成空间$(\theta_1|_F,\dots,\theta_d|_F) = |F| = d$，因为$\theta$是 Δ 的参数线性系统，且$F \in \Delta$。

~ ~现在假设$F \in \Delta$ 是一个确实包含w的面。由于 Δ 是边$e = \{a,b\} \in \Delta$的收缩，因此 $\mathrm{lk}_{\tilde\Delta}(w) = \mathrm{lk}_\Delta(a) \cup \mathrm{lk}_\Delta(b)$。这意味着，对于某个面$G \in \mathrm{lk}_\Delta(a)$ 或 $\mathrm{lk}_\Delta(b)$ 中的面$G \in$，有$F = G \cup w$。注意，$G \in \Delta$ 在这两种情况下都成立。由于 θ 是一个线性参数系的

对于 Δ 和 $\ell|_q = \theta|_q$ 的线性参数系，其中顶点 q ≠ a,b 属于 Δ，只需证明：考虑限制到 F =G ∪w，而不是 G，会使限制矩阵 $(\ell|_p)^{p\in H}$ 的（列）秩增加 1。若 G ∈ lk_Δ(a)，那么 $\theta|_a \notin$ 张成空间 $k(\ell|_p)^{p\in G}$ = 张成空间 $k(\theta|_p)^{p\in G}$，因为 G ∪a ∈ Δ 且 θ 是 Δ的线性参数系。特别地，这意味着直线 $\mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b) \not\subset$ 张成空间 $k(\ell|_p)^{p\in G}$ = 张成空间 $k(\theta|_p)^{p\in G}$，并且 $\mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b) \cap$ 张成空间 $k(\ell|_p)^{p\in G}$ = $\mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b) \cap$ 张成空间 $k(\theta|_p)^{p\in G}$ 是 k^d 的有限子集。由于 lk_Δ(a) 有有限多个面，这也意味着

$$\mathscr{S}_a := \bigcup_{G\in \mathrm{lk}_\Delta(a)} \left(L(\theta|_a,\theta|_b) \cap \mathrm{Span}_k(\ell|_p)_{p\in G}\right) = L(\theta|_a,\theta|_b) \cap \left(\bigcup_{G\in \mathrm{lk}_\Delta(a)} \mathrm{Span}_k(\ell|_p)_{p\in G}\right)$$

是有限的。

运用相同的推理，我们可得

$$\mathscr{S}_b := \bigcup_{H\in \mathrm{lk}_\Delta(b)} \left(L(\theta|_a,\theta|_b) \cap \mathrm{Span}_k(\ell|_p)_{p\in H}\right) = L(\theta|_a,\theta|_b) \cap \left(\bigcup_{H\in \mathrm{lk}_\Delta(b)} \mathrm{Span}_k(\ell|_p)_{p\in H}\right)$$

是有限的。

若 $\ell|_w \in \mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b) \setminus (\mathscr{S}_a \cup \mathscr{S}_b)$，这意味着对于任意面 A ∈ lk_Δ(a) ∪ $\widetilde{\mathrm{lk}}_\Delta$(b)，$\ell|_v \notin \mathrm{Span}k(\ell|_p)^{p\in A}$，且 ℓ 是边 e ={a, b} ∈ Δ对应的 Δ 关于 Δ 的收缩的线性参数系。由于直线 $\mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b)$ 上的每个点都可写成 $\theta|_a + \omega(\theta|_b - \theta|_a)$ =$(1-\omega)\theta|_a+\omega\theta|_b$ 的形式，其中 $\omega \in$ k，因此我们有 $\ell|_w = (1-\omega)\theta|_a+\omega\theta|_b$，其中 $\omega \in$ k\0 是某个“一般的”取值。若 $\omega \in (0, 1)$，则 $\ell|_w$ 位于直线 $\mathrm{L}(\theta|_a,\theta|_b)$ 上 $\theta|_a$ 与 $\theta|_b$ 之间。

□

我们将上述结果专门应用于交叉多胞体的边界。命题 4.11 中的线性参数系将与细分顶点所用的“通常”线性插值坐标相兼容。这提供了一个具体例子，说明适当选择线性参数系可以产生实际的墙关系（见注 4.10）。请注意，无法通过收缩交叉多胞体边界的边来保持墙穿越的凸性（例 3.12）。

例 4.13.（交叉多胞体边界的边细分）

使用例 4.7 中的初始顶点 ±1、±2、±3，我们用 12 表示细分边 {1, 2} 的顶点 ∈ Δ。令 Δ′ 为相对于边 {1,2} 对 Δ 作（星形）细分所得的顶点。设 $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ 属于命题 4.11 的第 2 部分。那么，例 4.7 中的线性参数系现在修改为 $\ell_1 = x_1 + x_{-1} - \frac{1}{2}x12$, $\ell_2 = x_2 + x_{-2} - \frac{1}{2}x_{12}$, 和 $\ell_3 = x_3 + x_{-3}$。

如注 4.6 所述，我们需要先进行初始坐标选择，以确定其余坐标。我们将把 x_1, x_2, x_3 分别指定为 k^3 中某个基的元素。设 $x_{12} = \frac{x_1+x_2}{2}$。现在我们来考察边细分对

使用这一参数线性系统和细分点x_{12}的坐标选择所得墙关系的影响。

包含 12 的 Δ'的面是形如 $\{1, 12, \pm 3\}$ 或 $\{12, 2, \pm 3\}$ 的面。以此类面开始的墙穿越具有以下形式之一：

- 将 3 替换为 -3，或将 -3 替换为 3。墙穿越中的两个面都包含 12。相应的墙关系为

$$x_3 + x_{-3} = 0.$$

  墙上顶点（1 和 12，或 12 和 2）的系数为 0。这与 Δ 的面之间将 3 替换为 -3 时的墙关系相同。

- 将 1 替换为 2，或将 2 替换为 1。墙穿越中的两个面都包含 12。所选关系 $x_{12} = \frac{x_1+x_2}{2}$ 意味着墙关系为

$$x_1 + x_2 - 2x_{12} = 0.$$

  注意，在这两种墙穿越中，x_3 或 x_{-3} 的系数（取决于墙穿越）均为 0。这是一种 Δ中未曾考虑过的新型墙穿越。

- 将 $\{1, 12, \pm 3\}$ 中的 12 替换为 -2。墙穿越中的第二个面不包含细分顶点 12。在这次墙穿越中，我们注意到，在起始面中，12 扮演着 Δ 中 2 的角色。在我们选定的线性参数系下，有 $x_2 + x_{-2} - \frac{1}{2}x_{12} = 0$ 来自 $\ell_2 = 0$。选择$x_{12} = \frac{x_1+x_2}{2}$ 意味着$x_2 = 2x_{12} - x_1$。将此代入关系 $x_2 + x_{-2} - \frac{1}{2}x_{12} = 0$，可得 $2x_{12} - x_1 + x_{-2} - \frac{1}{2}x_{12} = 0$，而墙关系为

$$\frac{3}{2}x_{12} + x_{-2} - x_1 = 0.$$

  与前一种情形一样，对于这类墙穿越，x_3 或 x_{-3} 的系数为 0。这类似于 Δ 中将 2 替换为 -2 的墙穿越，其墙关系为$x_2 + x_{-2} = 0$。从某种意义上说，边细分后的墙穿越相对于墙上顶点 1 而言“更加凸”（见 [14] 第 421 页的引理 14-1-7）

- 将 $\{12, 2, \pm 3\}$ 中的 12 替换为 -1。然后，按照与前一种情况相同的推理，可得墙关系为

$$\frac{3}{2}x_{12} + x_{-1} - x_2 = 0.$$

  对于此类墙穿越，x_3 或x_{-3} 的系数为 0。这是 Δ 中墙穿越的一个类比，其中用 -1 替换 1，墙关系为 $x_1 + x_{-1} = 0$。与前一情形相同，该墙穿越相对于墙上顶点 2 “ 更为凸 ”（见 [14] 第 421 页的引理 14-1-7 ）。

注记 4.14. **(边细分与边收缩的实现)**
我们注意到，如命题 3.2 那样使用线性插值进行边细分之后，凸墙交叉的可得性有所增加，这与边细分后单纯复形旗性的保持是一致的。注意，我们可以证明，命题 4.11 中的参数线性系统可以与线性插值保持一致（见例 4.13）。由于局部凸单纯复形是旗的（[12]第 279–280 页的命题 5.3），我们可以将在与起始对象 PL 同胚的旗单纯伪流形中沿边细分继续推进，理解为“凸性增强”。在命题 4.11 中使用负权重来细分顶点及其后续应用的情形中，我们会考虑到这一点。由于边收缩使保持凸性更加困难，并且当它们属于一条细分边时是边细分的逆，我们将赋予正权重。

借助例 4.13 中计算所用的思路，可以对此作更具体的描述；在该例中，初始线性参数系由实际的墙关系构成。具体而言，将形如 $x_v = (1-\eta)x_a + \eta x_b$ 与 $\eta \in (0,1)$ 的线性插值表达式代入边 $e = \{a, b\}$ 的细分顶点 ab，会使新的墙关系发生系数变化；这些变化与上文及命题 3.2 中讨论的凸性保持相容。这表明，命题 4.11 中赋予细分顶点的负权重，与墙关系以及保持墙穿越凸性的条件相容。若将边收缩视为边细分的某种“逆运算”，那么就意味着给收缩点赋予负号。

4.2 PL 同胚诱导的变化：墙关系的类比

现在，我们将上一小节中涉及参数线性系及相关符号的框架（例如命题 4.11、命题 4.12 和注 4.14）应用于局部凸性变化的类似情形。凭直观而言，可以考虑与交叉多胞体 PL 同胚的单纯球面的实现，以记录局部凸性的变化。

命题 4.15。 设 Δ 是一个与交叉多胞体的边界 *PL* 同胚的单纯球面。假设我们分别使用命题 *4.11* 和命题 *4.12* 中用于边细分和收缩的参数线性系。由 *PL* 同胚引起的参数线性系变化如下所述。

1. 与顶点 $p \in V(\Delta)$ 相关联的变量 x^p 的系数，是悬挂点和边细分点的系数的加权平均。这些权重是顶点作为（嵌套）输入所涉及的边收缩各“层”中的权重之积。对于边细分和收缩，我们分别取这些权重属于 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 。这是受“凸性增强”以及命题 *3.2* 和例 *4.13* 中边细分所产生的细分顶点的负系数所启发的，相关讨论见注 *4.14*。

2. 如果第 *1* 部分中的所有权重都等于 $\pm\frac{1}{2}$，那么 x_p 的系数就是悬挂点和细分点的“加权差”；这些点要么等于 p，要么是通向 p 的收缩点。某个输入顶点 m 的权重由涉及 m 的边收缩次数，或对 m 进行（嵌套）收缩的次数决定。注意，权重可以任意接近 $\pm\frac{1}{2}$，因为对于任意特定变量，只有有限多个权重需要排除（命题 *4.12*）。根据命题 *4.11* 和命题 *4.12*，我们可以使 $(0,1)$ 和 $(-1,0)$ 中的权重分别任意接近 12 和 $-\frac{1}{2}$。

证明。 顶点 $p \in V(\Delta)$ 最初是通过悬挂或边细分引入的。悬挂会产生关于 ℓ_k 的新线性形式：$x_k + x_{-k}$（系数为 1）；而当引入 p 时，边细分会将 -1 乘以限定细分边的顶点系数的加权平均值。在后一种情况下，相对于边 $e = \{a,b\}$ 的细分顶点 x_w，会出现在使用 x_a 或 x_b 的线性形式中。如果该顶点不是 边收缩的收缩点，这就给出了它的实际坐标。

假设 p 是某次边收缩的收缩点。逆向考察，从交叉多胞体开始进行的边细分／收缩的最后一步中，顶点 p 的系数是合并形成它的那对顶点的加权平均值。这些顶点本身又都是通过悬挂或边细分（作为细分顶点）引入的。一般而言，我们可以追踪边收缩中涉及的顶点。沿着“层”逆向追踪，我们看到，$\theta|_p$ 是用于形成构成边收缩输入的顶点的初始悬挂顶点和细分顶点的加权平均值，这些边收缩的输入最终形成当前顶点 p。例如，若对某个 $\eta \in (0,1)$，有 $\theta|_w = (1-\eta)\theta|_a + \eta\theta|_b$；对某个 $\omega \in (0,1)$，有 $\theta|_a = (1-\omega)\ell_r + \omega\ell_s$，且 a 是边 $\{r,s\} \in \Delta$ 的收缩点，而 ℓ 是边 $e = \{a,b\}$ 收缩前的线性参数系，那么这意味着 $\theta|_w = (1-\eta)(1-\omega)\ell|_r + (1-\eta)\omega\ell|_s + \eta\theta|_b$。与悬挂顶点相关的权重为正，而与边的细分顶点相关的权重为负。

如果将 $(0,1)$ 中的所有权重都设为 1 2，这相当于用 $\frac{1}{2^m}$ 对输入顶点加权，其中 m 是该顶点作为输入参与边收缩（无论是直接参与还是作为“嵌套”输入参与）的次数，之后再乘以 1（若为悬挂顶点）或 -1（若为细分顶点）。变量出现在哪些线性形式中，也可以通过逆向追踪来确定。特别是，变量 x_p 会出现在这样的线性形式中：其中包含导向顶点 p 的边收缩所涉及的（嵌套）输入顶点（如果 p 不是收缩点，则只需考虑 p 本身）。

□

推论 4.16. （“预期的”凸性性质与边细分/收缩）
设 Δ 是一个旗单纯复形。追踪符号并将范围限制为与 Δ 的特定余维 *1* 面／墙相连的顶点，命题 *4.15* 给出了墙关系的类似结果。于是，相关顶点 p 的符号分别给出墙穿越关于 p 的（非）凸性的对应情形，这分别对应于墙关系中的非正／非负坐标。

证明。 其中大部分内容已在注 4.10 中讨论。设 $F \in \Delta$ 是 Δ 的一个面。回顾一下，每个 $A^k(\Delta)$ $(0 \le k \le d)$ 都可分解为乘以 $x^F(A^k(\mathrm{ast}_\Delta(F)))$ 的核与乘以 $x^F(A^k(\mathrm{st}_\Delta(F)))$ 的像的直和。设 $F \in \Delta$ 是一个余维 1 面／墙。于是，将参数线性系限制到这样的面 F 上，便得到墙关系。结论由应用 [14] 第 420–421 页的内容及命题 4.15 得出。

□

上述相同的推理可用于分析线性参数系和由重复悬挂构成的单纯复形的 PL 同胚类的凸性性质的变化。关于墙关系与线性参数系之间联系的一些相关材料见注记 4.9。

推论 4.17。 （将 ***PL*** 同胚推广到（重复）悬挂）
假设 Δ 是一个与某个单纯复形 A 的重复悬挂 PL 同胚的单纯复形。设我们使用命题 *4.11* 和命题 *4.12* 中的参数线性系。那么，从 A 的这个重复悬挂到 Δ 的线性参数系和凸性性质的变化由命题 *4.15* 和推论 *4.16* 给出。

证明。 这是因为 PL 同胚的单纯复形可以通过一系列（星形）边细分及其逆操作相互连接（第 302 页的推论 [10:2d] 和 [1] 中第 75 页的推论 4.1）。

□

注 4.18. **（关于所涉参数的评论）**
上一节凸性语境中的结果也有一个直接类似的版本，可通过直接代换得到（另见注 4.14）。悬挂将产生线性形式 $\ell_k = x_k + x_{-k}$，如上一节所示；边细分则来自直接代换：以 x_a 代替 x_v，或以 $x_a + x_b - 2x_v = 0$ 代替 x_b。例如，变量 x_a 将被替换为 $2x_v - x_b$。我们如何处理墙关系中的符号关系，取决于被替换的顶点是墙外顶点还是墙上顶点。对于边收缩，我们将使用命题 4.12 中的线性参数系。这将使墙关系中的系数或系数变化成为加权平均。然而，输入符号不仅取决于边细分/收缩，还取决于引入的顶点是否构成墙穿越的墙外顶点或墙上顶点。

参考文献

[1] J. W. Alexander，复形的组合理论，《数学年刊》第二辑 31 卷第 2 期（1930 年），292–320 页。

[2]C. A. Athanasiadis，组合学与几何学中的伽马正性，《洛塔林组合学研讨会》77（2018），1 – 64。

[3] C. A. Athanasiadis，旗单纯伪流形与球面的某些组合性质，《Arkiv för Matematik》49（2011），17 – 29。[4] K. Baclawski 和 A. M. Garsia，一类环的组合分解，《Advances in Mathematics》39(2)（1981），155 – 184。[5] W. Bruns 和 H. J. Herzog，《Cohen-Macaulay 环》，剑桥大学出版社 39（1998）。[6] D. Cox、J. Little 和 H. Schenck，《环面簇》，Graduate Studies in Mathematics 124，美国数学学会（2011）。[7] G. Friedman，《奇异交叉同调》，剑桥大学出版社（2020）。[8] J. P. F. Hudson（与 J. L. Shaneson 和 J. Lees 合著），《分片线性拓扑》，芝加哥大学讲义，W. A. Benjamin, Inc.（1969）。[9] M. Kubitzke 和 E. Nevo，可剥复形重心细分的 Lefschetz 性质，《美国数学会会刊》361(11)（2009），6151 – 6163。[10] C. W. Lee，分片线性球面、凸多胞体与应力，《离散与计算几何》15(389)（1996），389 – 421。[11] F. Lutz 和 E. Nevo，旗复形的星形理论，《Mathematica Scandinavica》118(1)（2016），70 – 82。[12] N. C. Leung 和 V. Reiner，环面簇的符号，《杜克数学杂志》111(2)（2002），253 – 286。[13] E. Nevo，高阶子式与范坎彭障碍，《Mathematica Scandinavica》101(2)（2007），161 – 176。[14] K. Matsuki，《森程序导论》，Springer Science+商业媒体纽约（2002）。[15] I. Novik 和 E. Swartz，具有孤立奇点的拟流形的面数，《Mathematica Scandinavica》110（2012），198 – 222。[16] S. Park，符号为 0 的环面簇、墙穿越与类交叉多胞体结构，`https://arxiv.org/abs/2509.13296`[17] R. Schneider，《凸体：Brunn-Minkowski 理论——第二次扩充版》，剑桥大学出版社（2014）。[18] H. Seifert 和 W. Threfall，《Seifert 与 Threfall：一本拓扑学教科书》，纯粹与应用数学，第 89 卷，Academic Press，纽约，NY（1980）；由 M. A. Goldman 从1934年的德文版翻译（J. S. Birman 和 J. Eisner 编）。与 H. Seifert 所著、W. Hell 翻译的《Seifert：三维纤维空间的拓扑学》收录于同一卷。

[19] R. P. Stanley, 《组合学与交换代数》（第二版），数学进展41，Birkhäuser Boston（1996）。

[20] G. M. Ziegler, 《多面体讲义》，数学研究生教材，Springer Science+Business Media 纽约（2007）。