arXiv:2602.06068v1 [math.NT] 1 Feb 2026

混合调和数与中心二项式系数的新求和公式

MICHEL BATAILLE 和 ROBERT FRONTCZAK

Abstract. 我们研究了两类含有二项式系数倒数和调和 ic
数的新型和式。此外，我们还为以下幂和建立了递推解

$$U_d(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\cdot k^d \quad \text{and} \quad V_d(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\cdot k^d\,H_k,$$

其中， d是一个正整数。

Key words and phrases: 和式、二项式系数倒数、调和数。MSC 2020: 05A10、11B37、11B39。

1. Introduction

涉及（中心）二项式系数倒数的组合和式是重要的数学量。过去许多数学家都曾研究过这些和式，直到今天，人们对它们的兴趣仍未减退 [7, 12, 17, 19, 21]。这一领域中一个广为人知的恒等式是下面这个和式：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{k}. \tag{1.1}$$

这个恒等式由 Rockett 于 1981 [16] 推导得出，但 Comtet [9, Page294] 和 Gould [10, Entry 2.25] 早已知晓。关于这个恒等式的更多信息，请参阅 Pla[14], 、Trif [20], 、Batir 及其合作者 [4, 5, 6], 的文章，以及 Mansour 的文章；后者在 [12] 中推导出了如下形式的广义和式表达式（以及其他结果）：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k b^{n-k}}{\binom{n}{k}},\quad a,b\in\mathbb{C}.$$

另一个涉及中心二项式系数倒数的重要组合恒等式是（[2, 5, 17, 21]）

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}=\frac{1}{3}\left((n+1)\frac{2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}}+1\right), \tag{1.2}$$

wh 它也可以等价地用卡特兰数 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ a 表示 —— s

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}=\frac{1}{3}\left(\frac{2^{2n+1}}{C_n}+1\right).$$

恒等式 (1.2) 最近由 Bataille 和 Frontczak 在 [3, 定理 4.2] 中推广：对于整数 m， $n\geq 0$ 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}=\frac{1}{2m+3}\left((m+n+1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}2^{2n+1}+1\right). \tag{1.3}$$

Bataille 和 Frontczak 对 n 使用数学归纳法证明了 (1.3)。然而，仔细考察后会发现，这个结论实际上对所有 $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ 和 $m \neq -3/2$ 都成立。这一点对下面的一些证明至关重要。

在本文中，我们推导了与 (1.3) 相关的两类（可能是）新的涉及调和数的组合和恒等式。例如，我们将证明 (1.2) 的调和和对应式由下式给出

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} H_k = -\frac{2}{9} + \frac{2^{2n+1}}{3\binom{2n}{n}} \left((n+1)H_n - \frac{2n-1}{3} \right) \tag{1.4}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} H_{2k} = \frac{1}{9} + \frac{2^{2n}}{3\binom{2n}{n}} \left(2(n+1)H_{2n} - \frac{4n+1}{3} \right), \tag{1.5}$$

两者均见 ming 为新结果。此外，我们建立了该和式的递推公式 s

$$U_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \quad \text{and} \quad V_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \, H_k,$$

其中 d 为正整数。

我们以若干定义和初步观察结束引言部分。对于复数 r 与 s，广义二项式系数定义为

$$\binom{r}{s} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(r-s+1)},$$

其中，伽马函数 $\Gamma(z)$ 对于 $\Re(z) > 0$ 由积分 [18 定义]

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt.$$

函数 $\Gamma(z)$ 可以通过解析延拓扩展到整个复平面。它在以下各点都有一个简单极点： $z = \cdots$, -3, -2, -1, 0。伽马函数将经典阶乘函数扩展到了复平面，即 $(z-1)! = \Gamma(z)$；这表明，若 r 和 s 是非负整数，则可得到通常的二项式系数

$$\binom{r}{s} = \begin{cases} \dfrac{r!}{s!(r-s)!}, & r \geq s; \\ 0, & r < s. \end{cases}$$

调和数 H_z 和奇调和数 O_z 对于 $0 \neq z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ 由递推关系定义

$$H_z = H_{z-1} + \frac{1}{z} \qquad \text{and} \qquad O_z = O_{z-1} + \frac{1}{2z-1},$$

其中 $H_0 = 0$ 和 $O_0 = 0$。调和数与双伽马函数通过以下基本关系相联系 [18]

$$H_z = \psi(z+1) + \gamma, \tag{1.6}$$

其中 γ 是欧拉-马歇罗尼常数， $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$是双伽马函数（或psi函数）。基本关系式 (1.6)表明，调和数一般必须解释为双伽马函数。特别地，在有理数自变量 $z = p/q$ 处，调和数可用相应的双伽马（或多伽马）值来计算。当

每个 z 为正整数，记为 n，我们便有调和数与奇调和数序列 H_n 和 O_n，并且递推关系给出

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\qquad\text{and}\qquad O_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.$$

调和数 H_n 与奇调和数 O_n 之间的显然关系为

$$H_{2n}=\frac{1}{2}H_n+O_n\qquad\text{and}\qquad H_{2n-1}=\frac{1}{2}H_{n-1}+O_n. \tag{1.7}$$

此外还有更多此类关系，稍后将会用到。

2. A first result

本节将介绍本文的第一个主要发现。

定理 2.1. 对于所有 $n\geq 0$ 以及所有 $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 和 $m\neq -3/2$，都有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}H_{k+m}=&\frac{1}{2m+3}\left(2^{2n+1}(m+n+1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}H_{n+m}+H_m\right)\\&-\frac{2}{(2m+3)^2}\left(2^{2n}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}+1\right).\end{aligned} \tag{2.1}$$

证明。对（1.3）关于 m 求导，并使用

$$\frac{d}{dm}\binom{m+k}{k}=\binom{m+k}{k}(H_{k+m}-H_m).$$

化简时再次使用 (1.3)。 □

结构上“互逆”且符号交替的和式可见于 Chu [8]以及 Jin 和 Du [11]的文章。例如，我们有如下求值

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+k}{k}}H_k=\frac{m}{n+m}\left(H_{m-1}-H_{n+m-1}\right).$$

推论 2.2. 对所有 $n\geq 0$ 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}H_k=\frac{2^{2n+1}}{3\binom{2n}{n}}\left((n+1)H_n-\frac{2n-1}{3}\right)-\frac{2}{9}, \tag{2.2}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\binom{n+k}{k}H_{n+k}=\frac{2^{2n+1}}{2n+3}\left((2n+1)H_{2n}-\frac{2n-1}{2n+3}\right)+\frac{1}{2n+3}\left(H_n-\frac{2}{2n+3}\right). \tag{2.3}$$

证明。依次在定理 2.1 中令 $m=0$ 与 $m=n$，并化简。 □

注 2.3. 我们注意到，恒等式 (2.2) 的奇数调和数对应式是已知的。它最近由 *Campbell* 以及 *Batir* 和 *Sofo* 独立发现：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}O_k=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}(n+1)(3O_n-1). \tag{2.4}$$

参见 [5] 中的例 *11* 和注 *3*。这可用于求出含偶数调和数的和的闭式。

推论 2.4. 对于所有 $n \geq 0$ 我们有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} H_{2k} = \frac{1}{9} + \frac{2^{2n}}{3\binom{2n}{n}} \left(2(n+1)H_{2n} - \frac{4n+1}{3} \right). \tag{2.5}$$

证明。 利用 (1.7) 的第一部分，将 (2.2) 与 (2.4) 合并。 □

定理 2.1 的另外两个特殊情形，让我们重新发现了两个涉及奇调和数的求和恒等式。

推论 2.5. 对于所有 $n \geq 0$ 我们有

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)O_{k+1} = \frac{1}{4}\left((2n+1)(2n+3)O_{n+1} - (n-1)(n+1)\right) \tag{2.6}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} O_k = \left(n + \frac{1}{2}\right) O_n - \frac{n}{2}. \tag{2.7}$$

证明。 为得到第一个和式，在定理 2.1 中令 $m = 1/2$ 。二项式系数关系

$$\binom{u+1/2}{v} = 2^{-2v} \binom{2u+1}{2v} \frac{\binom{2v}{v}}{\binom{u}{v}}$$

给出

$$\frac{\binom{k+1/2}{k}}{\binom{2k}{k}} = 2^{-2k}(2k+1)$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1)H_{k+1/2} = \frac{1}{4}\left((2n+1)(2n+3)H_{n+1/2} + H_{1/2}\right) - \frac{1}{8}\left((2n-1)(2n+1)+1\right).$$

接下来，使用（参见 [1]以获取证明）

$$H_{n+1/2} = 2O_{n+1} - 2\ln(2),$$

比较有理部分和无理部分即可得到结果。类似地，对于 $m = -1/2$，第二个和式可通过使用

$$\binom{u-1/2}{v} = 2^{-2v} \binom{u}{v} \frac{\binom{2u}{u}}{\binom{2(u-v)}{u-v}}$$

再次比较有理部分和无理部分。 □

3. Two recursive results

本节通过建立和式的递推公式，研究公式 (1.2) 和 (1.4) 的其他推广形式

$$U_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \quad \text{and} \quad V_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \, H_k,$$

其中 d 是一个正整数。我们先证明以下定理。

定理 3.1. 设 d、 n 为正整数。则，

$$(2d+3)U_d(n) = \frac{(n+1)2^{2n+1}n^d}{\binom{2n}{n}} - \sum_{j=1}^{d}(-1)^j c_{d,j}U_{d-j}(n) \tag{3.1}$$

with

$$U_0(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n+1)2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}} - 2\right),$$

and

$$c_{d,j} = \binom{d+1}{j+1} + \binom{d}{j+1}. \tag{3.2}$$

证明。 我们采用以下记号

$$u_k = \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}, \qquad a_k = (2k-1)(k-1)^d.$$

由于 $u_0 = 1$，由（1.2）可立即得到上述 $U_0(n)$ 的值。接下来，使用 g

$$\binom{2k+2}{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+1}\binom{2k}{k}$$

简短计算可得

$$(2k+1)(u_{k+1} - u_k) = u_k,$$

由此我们推出

$$U_d(n) = \sum_{k=0}^{n} k^d u_k = \sum_{k=0}^{n} k^d(2k+1)(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(u_{k+1} - u_k).$$

借助阿贝尔变换（即分部求和），我们得到

$$U_d(n) = a_{n+1}u_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)u_k.$$

我们有

$$\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= (2k+1)k^d - (2k-1)\sum_{j=0}^{d}\binom{d}{j}(-1)^j k^{d-j} \\
&= (2k+1)k^d - (2k-1)k^d - (2k-1)\sum_{j=1}^{d}\binom{d}{j}(-1)^j k^{d-j} \\
&= (2d+2)k^d - 2\sum_{j=2}^{d}\binom{d}{j}(-1)^j k^{d-j+1} + \sum_{j=1}^{d}\binom{d}{j}(-1)^j k^{d-j} \\
&= (2d+2)k^d + \sum_{j=1}^{d}\left(2\binom{d}{j+1} + \binom{d}{j}\right)(-1)^j k^{d-j} \\
&= (2d+2)k^d + \sum_{j=1}^{d} c_{d,j}(-1)^j k^{d-j}.
\end{aligned}$$

因此

$$U_d(n) = a_{n+1}u_{n+1} - (2d+2)U_d(n) - \sum_{j=1}^{d} c_{d,j}(-1)^j U_{d-j}$$

定理立即得证。 □

经过直接计算，可得 $U_1(n)$ $U_2(n)$ 和 $U_3(n)$ 的明确值：

推论 3.2. 对于任意正整数 n，有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k = \frac{1}{15}\left(\frac{(3n+1)(n+1)2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}} - 2\right), \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^2 = \frac{1}{105}\left(\frac{(15n^2+12n-1)(n+1)2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}} + 2\right), \tag{3.4}$$

and

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^3 = \frac{1}{945}\left(\frac{(105n^3+135n^2+3n-9)(n+1)2^{2n+1}}{\binom{2n}{n}} + 18\right). \tag{3.5}$$

接下来的定理将说明如何通过递推公式计算 $V_d(n)$，以及 $U_d(n)$ 的值。

定理 3.3. 设 d, n 为正整数。则，

$$(2d+3)V_d(n) = \frac{(n+1)2^{2n+1}n^d H_{n+1}}{\binom{2n}{n}} - \sum_{j=1}^{d}(-1)^j c_{d,j}V_{d-j}(n) - 2U_d(n), \tag{3.6}$$

其中系数$c_{d,\ j}$ 由 (3.2) 给出，而 $V_0(n)$ 的值由 (1.4)给出。

证明。 同样，设 $a_k = (2k-1)(k-1)^d$ 和 $c_{d,\ j}$ 如定理 3.1 中所定义。令$v_k = \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}H_k$, 可轻易得到

$$(2k+1)(v_{k+1} - v_k) = v_k + 2u_k$$

并推得

$$V_d(n) = \sum_{k=0}^{n} k^d v_k = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(v_{k+1} - v_k) - 2\sum_{k=1}^{n} u_k k^d = a_{n+1}v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)v_k - 2U_d(n).$$

定理现在由下式可得

$$V_d(n) = a_{n+1}v_{n+1} - (2d+2)V_d(n) - \sum_{j=1}^{d}(-1)^j c_{d,j}V_{d-j}(n) - 2U_d(n).$$

□

作为推论，我们给出 $V_1(n)$ 和 $V_2(n)$的值：

推论 3.4. 我们有

$$V_1(n) = \frac{(3n+1)(n+1)2^{2n+1}H_n}{15\binom{2n}{n}} - \frac{(18n^2-11n+1)2^{2n+1}}{225\binom{2n}{n}} + \frac{2}{225} \tag{3.7}$$

and

$$V_2(n)=\frac{(n+1)(15n^2+12n-1)2^{2n+1}H_n}{105\binom{2n}{n}}-\frac{(450n^3-261n^2-328n+173)2^{2n+1}}{11025\binom{2n}{n}}+\frac{346}{11025}. \tag{3.8}$$

注 3.5. 由 (1.4)，并注意到

$$V_1(n)=\frac{2^{2n+1}}{15\binom{2n}{n}}\left((n+1)(3n+1)H_n-\frac{(2n-1)(9n-1)}{15}\right)+\frac{2}{225}$$

and

$$V_2(n)=\frac{2^{2n+1}}{105\binom{2n}{n}}\left((n+1)(15n^2+12n+1)H_n-\frac{(2n-1)(225n^2-18n-173)}{105}\right)+\frac{346}{11025}$$

我们注意到 $V_d(n)$ 可以写成

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\cdot k^d\,H_k=\frac{2^{2n+1}}{N(d)\binom{2n}{n}}\left((n+1)P_d(n)H_n-\frac{(2n-1)Q_d(n)}{N(d)}\right)+\frac{C(d)}{N^2(d)}, \tag{3.9}$$

其中多项式 $P_d(n)$ 和 $Q_d(n)$ 的次数均为 d, $C(d)$ 是常数项，而归一化因子 $N(d)$ 为

$$N(d)=\prod_{j=0}^{d+1}(2j+1).$$

对于 $U_d(n)$，也可以作出类似的观察。

4. A second family of harmonic sums

定理 4.1。 对于所有 $n\geq 1$ 以及所有 $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 和 $m\neq -3/2$，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{m+k+1}{k}}H_{m+k+1}=\frac{4m+5}{(m+1)(2m+3)^2}+\frac{H_m}{2m+3}$$
$$-\frac{2^{-2n}}{2m+3}\frac{\binom{2n}{n}}{\binom{m+n+1}{n}}\left(H_{m+n+1}+\frac{2}{2m+3}\right). \tag{4.1}$$

证明。B ataille 和 Frontczak 已在 [3,定理 4.2] 中证明了组合恒等式 y

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^{2k}}{2(n-k)-1}\frac{\binom{m+n+1}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}}{\binom{n}{k}}=2^{2n}\frac{m+n+1}{(m+1)(2m+3)}\binom{m+n}{n}-\frac{1}{2m+3}\binom{2n}{n}. \tag{4.2}$$

对 m 求导，并使用

$$\frac{d}{dm}\binom{m+n+1}{k}=\binom{m+n+1}{k}(H_{m+n+1}-H_{m+n-k+1}).$$

化简时再次使用（4.2）。通过以下方式更改求和指标后，

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{n-k},$$

可得

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{m+n+1}{m+k+1}\binom{2k}{k}}{\binom{n}{k}}H_{m+k+1}=\frac{(m+n+1)}{(m+1)(2m+3)}\binom{m+n}{n}\left(H_{n+m+1}-H_{n+m}+H_m\right)$$
$$+\frac{n(4m+5)+2(m+1)^2}{(m+1)^2(2m+3)^2}\binom{m+n}{n}-\frac{2^{-2n}}{2m+3}\binom{2n}{n}\left(H_{n+m+1}+\frac{2}{2m+3}\right). \tag{4.3}$$

最后一步是利用

$$\binom{u+1}{v+1}=\frac{u+1}{v+1}\binom{u}{v},$$

将 (4.3) 的左边写成

$$\binom{m+n+1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{m+k+1}{k}}H_{m+k+1}$$

进一步化简，并注意

$$\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{m+n+1}{n}}=\frac{m+1}{m+n+1}.$$

□

推论 4.2。我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}H_{k+1}=\frac{5}{9}-\frac{2^{-2n}}{3(n+1)}\binom{2n}{n}\left(H_{n+1}+\frac{2}{3}\right) \tag{4.4}$$

and

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{(k+1)(k+2)}H_{k+2}=\frac{19}{100}-\frac{2^{-2n}}{5(n+1)(n+2)}\binom{2n}{n}\left(H_{n+2}+\frac{2}{5}\right). \tag{4.5}$$

证明。 在定理 **4.1** 中依次令 $m=0$ 和 $m=1$。 □

推论 4.3. 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{n+k}{k}}H_{n+k}=\frac{1}{2n+1}\left(H_n+\frac{2}{2n+1}\right)-\frac{2^{-2n}}{2n+1}\left(H_{2n}+\frac{2}{2n+1}\right). \tag{4.6}$$

证明。 在定理 **4.1** 中令 $m=n-1$。 □

最后一个恒等式在某种程度上让我们想起了

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{-2k}}{2k-1}\binom{2k}{k}=-2^{-2n}\binom{2n}{n}, \tag{4.7}$$

可在 Riordan 的书 [15, 第130]页中找到。例如， [1], 中还可以找到更多此类恒等式。

5. 一个最终恒等式

我们最后一个恒等式涉及二阶调和数，即 $H_n^{(2)}=\sum_{k=1}^n 1/k^2$。

定理 5.1. 对于所有 $n\geq 1$ 和所有 $m\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ 及 $m\neq -3/2$，我们有

$$\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}\left(H_{k+m}^2-H_{k+m}^{(2)}\right)=\frac{A(m,n)}{2m+3}-\frac{B(m,n)}{(2m+3)^2}+8\frac{C(m,n)}{(2m+3)^3},\tag{5.1}$$

with

$$A(m,n)=H_m^2-H_m^{(2)}+2^{2n+1}\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}\left(H_{m+n}+(m+n+1)\left(H_{m+n}^2-H_{m+n}^{(2)}\right)\right),\tag{5.2}$$

$$B(m,n)=2^{2n+2}(m+n+1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}H_{m+n}+4H_m+2^{2n+1}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}H_{m+n},\tag{5.3}$$

and

$$C(m,n)=2^{2n}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}+1.\tag{5.4}$$

特别地，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\left(H_k^2-H_k^{(2)}\right)=\frac{2^{2n+1}}{3\binom{2n}{n}}&\left((n+1)\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)-\frac{2}{3}(2n-1)H_n\right)\\&+\frac{8}{27}\left((2n-1)\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}+1\right).\end{aligned}\tag{5.5}$$

证明。由 (1.6) 得

$$\frac{d}{dz}H_z=\frac{d}{dz}\psi(z+1)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(j+1+z)^2}=\zeta(2)-H_z^{(2)},$$

其中 $H_z^{(2)}$由 $H_0^{(2)}=0$ 和 $H_z^{(2)}=H_{z-1}^{(2)}+\frac{1}{z^2}$定义。 —

我们对恒等式中的参数 m 求导，其中该恒等式见定理 2.1。由于

$$\frac{d}{dm}\binom{m+k}{k}H_{k+m}=\binom{m+k}{k}\left(H_{m+k}(H_{m+k}-H_m)-H_{m+k}^{(2)}+\frac{\pi^2}{6}\right),$$

左边可见为

$$\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}\left(H_{k+m}^2-H_{k+m}^{(2)}\right)-H_m\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}H_{k+m}+\frac{\pi^2}{6}\sum_{k=0}^{n}2^{2k}\frac{\binom{m+k}{k}}{\binom{2k}{k}}.$$

第二个求和再次利用定理 2.1 计算，第三个求和则由 (1.3) 得出。对定理 2.1 中恒等式右边求导并不复杂，但过程较为冗长。我们有

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dm}\left(\frac{1}{2m+3}\left(2^{2n+1}(m+n+1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}H_{n+m}+H_m\right)\right)\\&=-\frac{2}{(2m+3)^2}\left(2^{2n+1}(m+n+1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}H_{n+m}+H_m\right)+\frac{1}{2m+3}\left(\frac{\pi^2}{6}-H_m^{(2)}\right)\\&+\frac{2^{2n+1}}{(2m+3)\binom{2n}{n}}\left(\binom{m+n}{n}H_{m+n}+(m+n+1)\binom{m+n}{n}\left(H_{m+n}(H_{m+n}-H_m)+\frac{\pi^2}{6}-H_{m+n}^{(2)}\right)\right)\end{aligned}$$

and

$$\frac{d}{dm}\left(\frac{2}{(2m+3)^2}\left(2^{2n}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}+1\right)\right)=\frac{1}{(2m+3)^2}2^{2n+1}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}(H_{n+m}-H_m)$$
$$-\frac{8}{(2m+3)^3}\left(2^{2n}(2n-1)\frac{\binom{m+n}{n}}{\binom{2n}{n}}+1\right).$$

我们看到，含有 $\pi^2/6$ 的部分相互抵消，经过若干步化简后即可得到最终结果。□

推论 5.2。对于所有 $n\geq 1$，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}H_k^2=\frac{44}{27}+\frac{2^{2n+1}}{3\binom{2n}{n}}\left((n+1)H_n^2-\frac{2(2n-1)}{3}H_n+\frac{8n-22}{9}\right)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}\tag{5.6}$$

并且

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}H_k^{(2)}=\frac{4}{3}+\frac{2^{2n+1}}{3\binom{2n}{n}}\left((n+1)H_n^{(2)}-2\right)+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{k^2\binom{2k}{k}}.\tag{5.7}$$

证明。我们计算如下

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}H_k^{(2)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j^2}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\sum_{k=j}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}-\sum_{k=1}^{j-1}\frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}}\right)\\&=\frac{1}{3}\frac{2^{2n+1}}{C_n}H_n^{(2)}-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}\frac{2^{2j-1}}{C_{j-1}}\\&=\frac{1}{3}\frac{2^{2n+1}}{C_n}H_n^{(2)}-\frac{2}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{2j}}{j\binom{2j}{j}}+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{2j}}{j^2\binom{2j}{j}},\end{aligned}$$

其中在最后一步中我们使用了递推关系

$$C_{n-1}=\frac{(n+1)C_n}{2(2n-1)}.$$

第一个和式的表达式

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{2j}}{j\binom{2j}{j}}=2\left(\frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}}-1\right)$$

称为 Parker 公式（见 [21] 或 [17] 中的定理 4.1），由此得到 (5.7)。将 (5.7) 代入 (5.5)，得到 (5.6)，证明完毕。□

注 5.3。这个看似无害的和

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{2^{2j}}{j^2\binom{2j}{j}}$$

很难求值。我们在文献中未能找到它，尽管竭尽全力也未能解决。

6. Conclusion

本文是对 [3]的补充。我们采用了众所周知的导数算子方法，推导出涉及调和数和（逆）中心二项式系数的几类看似新颖的和式。作为更一般结论的特例，恒等式 (2.2)、(2.5) 和 (5.5) 凸显了本文的研究成果。此外，我们还为幂和建立了递归解

$$U_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \quad \text{and} \quad V_d(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \cdot k^d \, H_k,$$

其中 d 是一个正整数。进一步研究注 3.5 中出现的多项式 $P_d(n)$ 和 $Q_d(n)$ 可能会很有趣。另一个值得探索的研究方向是沿着 Mansour 在 [12] 以及 Batir 和 Sofo 在 [5] 中的思路，推导这些多项式的表达式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{\binom{n}{k}} \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \, x^k.$$

这样做有助于更深入地理解多项式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \, H_k \, x^k, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \, O_k \, x^k, \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{\binom{2k}{k}} \, H_{2k} \, x^k$$

是值得的。

References

[1] K. Adegoke 和 R. Frontczak, 《关于 Frisch 一个恒等式的若干注记》, Open J. Math. Sci. 8 (2024), 216–226. [2] K. Adegoke、R. Frontczak 和 T. Goy, 《斐波那契-卡塔兰级数》, Integers 22 (2022), A#110, 19 页. [3] M. Bataille 和 R. Frontczak, 《一个多项式恒等式及其若干新推论》, Electron. J. Math. 10 (2025), 111–123. [4] N. Batir, 《二项式系数倒数的若干不完全和》, Contrib. Math. 12 (2025), 56–63.[5] N. Batir 和 A. Sofo, 《涉及二项式系数与中心二项式系数倒数及调和数的有限和》, Symmetry 13 11 2021 10 3390 13112002 ( ) ( ).
[6] https://doi.org/ . /sym N. Batir 和 K.-W. Chen, 《涉及二项式系数与中心二项式系数倒数及调和数的组合恒等式》, J. Difference Eq. Appl. 28 (2022), 222–243. [7] H. Belbachir、M. Rahmani 和 B. Sury, 《涉及二项式系数倒数矩的和》, J. Integer Seq. 14 (2011), 文章 11.6.6. [8] W. Chu, 《涉及调和数的求和公式》, Filomat 26 (2012), 143–152. [9] L. Comtet, 《高等组合学》, D. Reidel, 多德雷赫特, 1974. [10] H. W. Gould, 《组合恒等式》, 作者自出版, 修订版, 1972. [11] H.-T. Jin 和 D. K. Du, 《Abel 引理与调和数恒等式》, Integers 15 22, 11 2015( ), #A pp. [12] T. Mansour, 《组合恒等式与二项式系数倒数》, Adv. Appl. Math. 28 (2002), 196–202.[13] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, https://oeis.org. [14] J. Pla, 《二项式系数倒数和再探》, Fibonacci Quart. 29 (1997), 97–103. [15] J. Riordan, *Combinatorial identities*, R. E. Krieger Publishing Co., (1979).
[16] 19 1981 433 445 M. A.
[17] 6 2006 27, 18 Rockett, 《二项式系数倒数的和》, Fibonacci Quart. ( ), – R. Sprugnoli, 《中心二项式系数倒数的和》, Integers ( ), #A pp. [18] H. M. Srivastava 和 J. Choi, *Series Associated with the Zeta and Related Functions*, 施普林格科学+传媒有限公司, 2001. [19] B. Sury、T. Wang 和 F.-Z. Zhao, 《涉及二项式系数倒数的恒等式》, J. Integer Seq. 7 (2004), 文章 04.2.8.

[20] T. Trif, 《涉及二项式系数倒数的组合和与级数》, Fibonacci Quart. 38 (2000), 79–84. [21] R. Witu-la 和 D. S-lota, 《与中心二项式数和卡特兰数倒数相关的有限和》, Asian-European J. Math. 1 (2008), 439–448.

Independent Researcher, 76520 Franqueville-Saint-Pierre, France*Email address*: michelbataille@wanadoo.fr

Independent Researcher, 72764 Reutlingen, Germany
Email address: robert.frontczak@web.de