arXiv:2602.06094v1 [math.RT] 5 Feb 2026

# Kac–Moody 代数的酉化测度

GUILLAUME BAVEREZ

Abstract. 给定一个对偶Coxeter数为 $\check{h}$、层级为$\kappa < -2\check{h}$的紧致连通李群 $G$，我们结合 $G$ 的环群的 K¨ahler 几何，以及层级分别为 $\kappa$和 $-2\check{h}-\kappa > 0$的一对 Kac–Moody 代数的作用，在 $\mathbb{D}$中引入 $\nu_\kappa$ 这一概率测度，它定义在取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的全纯 (1，0)-形式空间上。我们证明， $\nu_\kappa$由一种协方差性质刻画，这一性质使形式路径积分“$\mathrm{d}\nu_\kappa(\gamma) = e^{-\kappa\mathscr{S}(\gamma)}D\gamma$”具有严格意义，其中 $D\gamma$ 是环群上并不存在的哈尔测度，而 $\mathscr{S}$ 是右不变 Kac–Moody 度量的 K¨ahler 势。从无穷小层面看，协方差公式给出了 Kac–Moody 表示的沙波瓦洛夫形式。

## Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 7 3. Kac–Moody 代数的复表示 11 4. Kac–Moody 代数的实表示 16 5. 定理 1.1 的证明 22 参考文献 32

## 1. Introduction

1.1. **环群上的积分与朗兰兹对应。** 本节的主要参考文献是 [Fre07,Fre20,EFK21,EFK23, Lan].

算术 朗兰兹纲领是一张庞大的猜想网络，将椭圆曲线与模形式联系起来；从初步的角度看，它可以理解为 $\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{F}}}(X)$ 上的调和分析。这里，$\mathbb{F}$ 是有限域， $G_{\mathbb{F}}$ 是定义在 $\mathbb{F}$上的连通约化代数群，$X$ 是定义在 $\mathbb{F}$上的光滑射影曲线，而 $\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{F}}}(X)$ 是 $G_{\mathbb{F}}$-丛在 $X$上的模叠。关键的是，$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{F}}}(X)$ 从 $G_{\mathbb{F}}(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})$ 上的哈尔测度继承了一个规范测度； $G_{\mathbb{F}}(\mathbb{A}_{\mathbb{F}})$ 是 $G_{\mathbb{F}}$ 的 $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}$-点群，其中 $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}$ 是 $\mathbb{F}$ 的阿代尔环。这使我们能够讨论 $\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{F}}}(X)$ 上的平方可积函数（亦称自守形式），并在 $L^2(\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{F}}}(X))$ 上定义一族积分变换，称为*Hecke*算子。朗兰兹对应旨在研究这些算子的谱数据（亦称朗兰兹参数）与朗兰兹对偶群 ${}^L G_{\mathbb{F}}$ 的表示论之间的关系。

几何朗兹对应旨在探讨同样的问题，只不过其中的 $\mathbb{F}$ 被复数域 $\mathbb{C}$取代，因此 $G_{\mathbb{C}}$ 现在是一个复李群（更准确地说，是一个紧致连通李群 $G$的复化）， $X$ 是一个紧黎曼曲面，并且

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类：60G60；17B67。次分类：81T40。
*Key words and phrases.* 随机场、环群、Kac–Moody 代数。

模叠$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(X)$可以实现为环群 $LG_{\mathbb{C}} = C^{\infty}(\mathbb{S}^1; G_{\mathbb{C}})$的双陪集。[1] 这里的主要区别在于，$\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(X)$上没有首选测度，因为$LG_{\mathbb{C}}$ 不具有任何非平凡的哈尔测度（它不是局部紧的），这使得甚至连谱问题都难以表述：希尔伯特空间该如何定义尚不明确，更不用说在其上作用的Hecke算子了。关于这个主题的更多内容，参见 [Lan，第1-2]节和 [Fre20，第1.6节及 3] 节；特别是，参见 [EFK23，第1节1]，其中讨论了Hecke算子定义中无限维积分的出现。这一问题促使别林森与德林费尔德采用范畴语言来表述几何朗兹对应 [BD]，，例如以特征层取代特征函数。过去数年间，这一计划的实现是数学领域的一项重大成就 [GR25]。

最近，朗兰兹本人提出了一种几何理论的新方法，其理念更接近算术理论 [Lan]，，该方法运用“传统”的泛函分析，并避免使用复杂的代数几何概念。数学物理文献中也提出了相关方法 [Tes18]，，其动机来自量子场论和可积系统（关于近期进展和猜想，见 [GW24, GT25]）。对这一解析朗兰兹对应的系统数学研究始于 [EFK21, EFK23]；在此，希尔伯特空间是平方可积半密度构成的空间，微分算子代数作用于其上，这些微分算子定义在 $\mathrm{Bun}_{G_{\mathbb{C}}}(X)$ 上。由于这些算子是无界的，泛函分析中的精细问题便成为研究重点。研究者投入大量工作来定义 Hecke算子，而相应谱问题的研究则是许多猜想的主题 [EFK21, 第1节5]，；截至本文撰写时，其中大多数仍未解决。与 Beilinson–Drinfeld 方法的主要区别在于，应将范围限制为单值、平方可积的特征截面；据猜想，朗兰兹参数与具有实单值化的 ${}^{L}G_{\mathbb{C}}$-算子在 $X$ 上的集合相对应 [EFK21, 猜想19]。

重要的是，使用半密度（而非函数）构造希尔伯特空间，无须在 $LG_{\mathbb{C}}$ 上使用任何积分理论。本文旨在回到这一问题的根源，并在空间 $\mathcal{A}$ 上构造一族概率测度 $(\nu_\kappa)_{\kappa<-2\check{h}}$，该空间由取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的全纯 (1，0)-形式组成，定义在 $\mathbb{D}$ 上（可将其理解为一个环群轨道）；数值 $\kappa$ 表示 Kac–Moody 代数的某个表示的层级。这些测度由关于 $LG$ 在 $\mathcal{A}$ 上的自然作用的协方差公式刻画，而该公式的无穷小版本则确定了作用于 $L^2(\nu_\kappa)$ 上的 Kac–Moody 代数的沙波瓦洛夫形式。

**1.2. 我们从 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$ 和 Schramm–Loewner 演化中学到什么。** 环群是二维量子场论数学中普遍出现的两类无穷维李群之一，另一类是 $\mathrm{Diff}(\mathbb{S}^1)$——单位圆上保持定向的微分同胚群。后者拥有一种丰富的积分理论，称为*Schramm–Loewner* 演化 (SLE)，我们的主要结果深受其启发。本节回顾这一理论的主要特征，并阐明它与当前问题的类比。

世纪之交，随机若尔当曲线这一主题迎来了大量研究。一方面，Schramm 提出了随机 Loewner 演化（现称 Schramm–Loewner 演化，或 SLE），将其视为统计系统在临界

[1]下文将讨论其他正则性概念；在此处，光滑拓扑并无特殊作用。

温度 [Sch00]。[2] 与此同时，独立地 [AM01], Airault & Malliavin 提出了一种对若尔当曲线上的测度进行公理化描述的方法（称为维拉索罗代数的酉化测度），其基础是共形焊接和 Kirillov 作用 [Kir98], ，但他们未能成功构造出这类测度。受 SLE 的共形限制性质启发 [LSW03，Zha21], Kontsevich & Suhov 提出了一个意义深远的猜想，认为 SLE 与 Airault–Malliavin 测度是相同的 [KS07，第 2.5 节。2]这一猜想的证明见 [BJ24、BJ25、Bav25]，其中有一个令人惊讶的转折，我们将在下文勾勒其梗概。

在 [BJ24，BJ25], 中，人们注意到，SLE$_\kappa$ 环路测度的 $L^2$空间同时承载着维拉索罗代数的两对交换表示：一对是非酉表示（但带有自然的沙波瓦洛夫形式[3]），其中心荷为 $c_{\mathrm{m}} = 1 - 6(\frac{2}{\sqrt{\kappa}} - \frac{\sqrt{\kappa}}{2})^2 \leq 1$；另一对是酉表示，其中心荷为 $c_{\mathrm{L}} = 26 - c_{\mathrm{m}} \geq 25$。这两种表示体现了对作用于若尔当曲线空间的局部对称进行编码的不同方式：一种通过共形限制[LSW03，Zha21] ，另一种通过 Kirillov 作用 [Kir98，AM01]。两个中心荷之间的差异可理解为共形焊接映射的雅可比行列式，它给出了切丛两种描述之间的基变换 [BJ25]。由此可以启发式地将 SLE$_\kappa$ 环路测度理解为费曼路径积分 $e^{-\frac{c}{12\pi}\mathrm{S}(\eta)}D\eta$，其中 $D\eta$ 是若尔当曲线空间上并不存在的 Kirillov 不变测度，而 S 是普遍 Teichmüller 空间上 Weil–Petersson 度量的 Kähler 势，也称为普遍李乌维尔作用量 [TT06]。

本文针对环群而非 Diff($\mathbb{S}^1$) 研究同一问题，即构造一种测度，使路径积分“$\mathrm{d}\nu_\kappa(\gamma) = e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}(\gamma)}D\gamma$”对所有 $\check{\kappa} = -2h - \kappa > 0$都有严格的数学意义，其中 $D\gamma$ 是定义在 $LG$ 上的不存在的哈尔测度，而 $\mathscr{S}$ 是 （的某个子群）上右不变 Kac–Moody 度量的一个凯勒势；我们将其称为**普遍卡克–穆迪作用量**（见第 4.3节）。与 Diff($\mathbb{S}^1$) 情形不同， $\mathscr{S}$ 不具有 $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$不变性，因而 $\nu_\kappa$ 不可逆（这与 SLE 环路测度相反）。事实上，逆律的定义本身并不显然，因为 $\nu_\kappa$ 不会给连续环路空间赋予正测度。关于这一问题的更多讨论，见第 5.4节。

我们的构造涉及两对分别处于以下层级的 Kac–Moody $\check{}$ 代数交换表示 $\kappa$ 和 $-2h - \kappa$，它们分别刻画了该模型局部对称性的两种不同实现。数 $-2\check{}h$ 在 Diff($\mathbb{S}^1$) 的情形中起着与 26 相同的作用，表示实圈与全纯形式之间坐标变换的雅可比行列式（亦称 Birkhoff分解，见第2.3节）。与 [BJ24相比，BJ25], 主要的技术难点在于缺少一个 $\nu_\kappa$的候选测度，而该测度的存在性和唯一性正是本文的主要贡献。

$\check{}\check{}$ 最后，我们注意到，条件 $\kappa < -2h$ 严格排除了临界水平 $\kappa = -h$。由于 Sugawara 算子退化为一个交换族，并且与量子希钦哈密顿量相对应，朗兰兹对应中通常考虑的正是这一层级 [Fre07，第 8]节。非临界 $\kappa$层级有时称为量子数学物理中的解析朗兰兹对应 [GT25]。

---

[2]这里我们只关注$_\kappa$ 对应的 SLE $\kappa \in (0, 4]$, 环路，它是一个无限的、在若尔当曲线上的莫比乌斯不变测度，对每个 $\kappa$ [Zha21], 均支集于豪斯多夫维数为 $1 + \frac{\kappa}{8}$ 的曲线上。[3]作用于希尔伯特空间$L_n$上的 Virasoro 表示（$_{n\in\mathbb{Z}}$）的沙波瓦洛夫形式定义为 $\mathcal{H}$ 上的厄米形式 $\mathcal{Q}$， $\mathcal{H}$ 满足 $L_{-n}$ 是 $\mathcal{Q}$的 $L_n$ 伴随算子，且对所有 $n \in \mathbb{Z}$均成立。若一个表示满足 $\mathcal{Q}$ 与 $\mathcal{H}$上的内积一致，则称其为酉表示。

**1.3. 主要结果**。为避免在引言中塞入过多技术细节，我们只简要概述部分设定，详情请参阅后续各节。

取一个紧致连通李群 $G$，其复化为 $G_{\mathbb{C}}$，相应的李代数为$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$；令 $L^{\omega}_1 G$ 为 $G$ 的环群的子群，如第2.3节所示（尤其参见引理2.2）。令 $D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}}$ 为满足$g(\infty) = 1_{G_{\mathbb{C}}}$的全纯函数 $g : \mathbb{D}^* \to G_{\mathbb{C}}$ 所成的群。令 $\mathcal{A}$（分别为 $\mathcal{A}^{\omega}$）表示 $\mathbb{D}$（分别为 $\mathbb{D}$的一个$^{-}$邻域）中取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的全纯 (1, 0)-形式空间，并赋予 $\mathcal{A}$ 局部一致拓扑（使其成为波兰空间）。

在第4.3节中，我们定义函数 $\mathscr{S} : \mathcal{A}^{\omega} \to \mathbb{R}_+$，它是右不变 Kac–Moody 度量（定义于第2.2节）的一个 K¨ahler 势。在第4.1节中，我们定义$L^{\omega}_1 G$ 在 $\mathcal{A}$上的左作用，记作 $(\chi, \alpha) \mapsto \chi \cdot \alpha$，其中 $\chi \in L^{\omega}_1 G$, $\alpha \in \mathcal{A}$。尽管 $\mathscr{S}$未在整个 $\mathcal{A}$上定义，命题 4.7指出，存在 $\Omega \in C^0(L^{\omega}_1 G \times \mathcal{A})$，将函数 $(\chi, \alpha) \mapsto \mathscr{S}(\chi \cdot \alpha) - \mathscr{S}(\alpha)$ 在 $L^{\omega}_1 G \times \mathcal{A}^{\omega}$上的取值延拓。类似地，我们在第3.2节中定义 $\hat{}D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{A}$上的右作用，记作 $(\alpha, h) \mapsto \alpha \cdot h$，并且存在函数 $\Lambda \in C^0(\mathcal{A} \times \hat{}D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}})$，将 $(\alpha, h) \mapsto \mathscr{S}(\alpha \cdot h) - \mathscr{S}(\alpha)$ 在 $\mathcal{A}^{\omega} \times D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}}$上的取值延拓。

**˘定理 1.1**。固定 $\check{\kappa} = -2h - \kappa > 0$。

*1.* 存在唯一的博雷尔概率测度 $\nu_\kappa$，其定义在 $\mathcal{A}$ 上，使得对于所有 $\chi \in L^{\omega}_1 G$ 以及所有 $F \in C^0_b(\mathcal{A})$，

$$\int_{\mathcal{A}} F(\chi^{-1} \cdot \alpha) \mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} F(\alpha) e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi,\alpha)} \mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha). \tag{1.1}$$

ˆ*2.* 测度 $\nu_\kappa$ 是定义在 $\mathcal{A}$ 上的唯一博雷尔概率测度，使得对于所有 $h \in D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}}$ 以及所有 $F \in C^0_b(\mathcal{A})$，

$$\int_{\mathcal{A}} F(\alpha \cdot h^{-1}) \mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} F(\alpha) e^{\kappa\Lambda(\alpha,h)} \mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha) \tag{1.2}$$

我们称 $\nu_\kappa$ 为 层级为 $\check{\kappa}$ 的 Kac–Moody 代数的酉化测度。

下面说明几点。尽管 Birkhoff分解使我们能够将 $\mathcal{A}^{\omega}$与解析环群的一个轨道相对应，但测度 $\nu_\kappa$ 赋予那些 $\alpha \in \mathcal{A}^{-}$且能够连续延拓到 $\mathbb{D}$的元素组成的集合的测度为 0，因此无法将 $G$ 中的环路与 $\nu_\kappa$的一个样本相对应。特别地，对于 $\nu_\kappa$-几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}$，有 $\mathscr{S}(\alpha) = \infty$。尽管如此，从启发式角度将其理解为

$$\text{“}\mathrm{d}\nu_\kappa(\gamma) = e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}(\gamma)} D\gamma\text{”}, \tag{1.3}$$

其中 $D\gamma$ 是环群上的（并不存在的）哈尔测度：事实上，公式（1.1）规定的变换规则，恰好就是公式（1.3）右端应满足的变换规则。

我们证明中的一个关键方面，是理解环群与全纯形式空间 $\mathcal{A}$（等价地，全纯函数 $g$ 的空间 $D_0 G_{\mathbb{C}}$：$\mathbb{D} \to G_{\mathbb{C}}$ 满足 $g(0) = 1_{G_{\mathbb{C}}}$）之间的坐标变换，这种变换由 Birkhoff分解给出。这为 $\nu_\kappa$ 提供了另一种解释，即

$$\text{“}\mathrm{d}\nu_\kappa(g) = e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}(g) - 2\check{h}\hat{\mathscr{S}}(g)} Dg\text{”} \qquad \text{or} \qquad \text{“}\mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha) = e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}(\alpha) - 2\check{h}\hat{\mathscr{S}}(\alpha)} D\alpha\text{”},$$

其中 $Dg$（分别是 $D\alpha$）定义在 $D_0 G_{\mathbb{C}}$（分别是 $\mathcal{A}$）上的（不存在的）Haar 测度（分别是勒贝格测度），并且对所有 $\gamma \in L^{\omega}_1 G$，我们令 $\hat{}\mathscr{S}(\gamma) := \mathscr{S}(\gamma^{-1})$。换言之，我们可以将 $e^{-2\check{h}\hat{}\mathscr{S}}$视为 Birkhoff分解映射的 ˆ 雅可比行列式。请注意，显然无法将 $\mathscr{S}$ 扩展为一个几乎处处定义的函数，因为它的样本并非连续环路，因此这只是一种纯形式上的解释（其严格含义由引理5.3给出）。

无穷小地，$\nu_\kappa$ 的变换性质与第3节和第4节引入的 Kac–Moody 代数某些表示存在重要的对应关系。具体而言，分别在 $\chi = \mathbf{1}_G$ 和 $h = \mathbf{1}_{G_\mathbb{C}}$ 处对（1.1）和（1.2）求导，可得到它们的沙波瓦洛夫形式表达式。特别是，定理5.7 借鉴 [AM01]的类比，促使我们采用“酉化测度”这一术语。由于该陈述略显技术性，我们将其推迟到第5.4节再述。

注 1。 在 $G = \mathbb{S}^1$ ($\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathbb{C}$)的情形下，Kac–Moody 代数退化为海森堡代数，其酉化测度众所周知是高斯的 [Mal05，第 2] 节。读者可以在这种情形下验证，确实有 $\mathscr{S}(\alpha) = \frac{i}{4\pi}\int_\mathbb{D} \alpha \wedge \bar{\alpha}$，而定理 1.1中的协方差公式就是通常的 Cameron–Martin 平移。随机微分形式更适合表示为 $\alpha = \frac{i}{\sqrt{\kappa}}\partial\varphi$，其中 $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ 是协方差核为$^-$的高斯调和函数 $\mathbb{E}[\varphi(z)\varphi(\zeta)] = \log|1 - z\zeta|$。下文中，我们只关注$\overline{G}$为非阿贝尔的非平凡情形。

## 1.4. 讨论与展望。

1.4.1. 与现有文献的关系。 据我们所知，概率论中关于环群上测度的所有研究都集中于维纳测度；相关文献十分丰富，始于 Malliavins [MM90]。我们参阅 [Dri03]以获取综述及更多参考文献。此外，Pickrell 证明了维纳测度在大温度极限下存在弱极限 [Pic00，Pic06], 这应当也对应于酉化测度的 $\kappa \nearrow -2\check{h}$ （或 $\check{\kappa} \searrow 0$）极限 $\nu_{\kappa\circ}$。另见 [Fre20，第 3 节。2] 其中讨论了环空间上更为奇特的积分理论（动机的、幂级数取值的.....），以及它们在解析朗兰兹对应背景下似乎存在的局限性。

有若干简便方法可以看出，酉化测度 $\nu_\kappa$ 与维纳测度互为奇异。首先，维纳测度的样本几乎必然是连续环路，而 $\nu_\kappa$ 并不对该集合赋予正测度。这正是我们必须在 $\mathbb{D}$中的$\mathfrak{g}_\mathbb{C}$值全纯形式空间上定义 $\nu_\kappa$ 的原因，因为样本在边界上并不收敛。其次，维纳测度的作用泛函是动能

$$\mathscr{E}(\gamma) := \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(\gamma^{-1}\partial_z\gamma, \gamma^{-1}\partial_z\gamma)z\mathrm{d}z \geq 0, \qquad \gamma \in L^\omega G, \tag{1.4}$$

而对于 $\nu_\kappa$，则是第 4.3 节中引入的势 $\mathscr{S}$。从它们在 $\gamma = \mathbf{1}_G$ 附近的展开可以看出，这两个作用截然不同：设 $\gamma_t = e^{tu+\bar{t}u^*}$ 为某个 $u \in D_0^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，且 $u^*(z) = u(1/\bar{z})$，则动能的行为近似为 $|t|^2\oint \mathrm{tr}(\partial_z u, \partial_z u^*)\frac{z\mathrm{d}z}{2i\pi}$，当 $t \to 0$时。另一方面，由于 $\mathscr{S}$ 是 $LG/G$ 上Kac–Moody 度量的一个 K¨ahler 势，我们有 $\mathscr{S}(\gamma_t) \sim \frac{|t|^2}{4i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(u^*\partial u)$，当 $t \to 0$时。因此，动能的行为类似于 $\mathbb{S}^1$ 上的 Sobolev $H^1$-范数，而 $\mathscr{S}$的行为则类似于 $H^{1/2}$-范数。这两个范数在环群的李代数上诱导出彼此奇异的高斯测度：前者是取值于 $\mathfrak{g}$ 的布朗桥，后者则是定义在 $\mathbb{S}^1$ 上、取值于 $\mathfrak{g}$ 的对数相关场。直观而言，可以把 $\nu_\kappa$ 看作“定义在 $\mathbb{S}^1$ 上、取值于 $G$ 的对数相关场”，尽管这并非严格意义上的说法。

1.4.2. 与 $\nu_\kappa$ 的耦合 $G_\mathbb{C}/G$-*WZW* 模型。 设 $\kappa < -2\check{h}$。一方面，可以将$\nu_\kappa$ 解释为黎曼球面上的随机 $G_\mathbb{C}$-丛（在图表 $\mathbb{D}$和 $\mathbb{D}^*$中平凡化）。另一方面，给定黎曼曲面上的一个固定（稳定） $G_\mathbb{C}$-丛， $G_\mathbb{C}/G$-Wess–Zumino–Witten 模型可以解释为该丛中的随机度量 [GK89， Gaw91]。秉承 Liouville 共形场论与 Schramm–Loewner 演化耦合的思路 [She16， AHS23， BJ25],我们计划研究我们的测度与这些 WZW 模型之间的耦合，首先 $\nu_\kappa$

考虑情形 $G = \mathrm{SU}_2$（这是唯一已知如何对路径积分进行数学构造的情形 [GKR25]），且定义在黎曼球面上。

1.4.3. $\mathrm{Bun}_{G_\mathbb{C}}$ 上的测度与朗兰兹对应。给定一个紧黎曼曲面$X$，Kac–Moody一致化将模空间 $\mathrm{Bun}_{G_\mathbb{C}}(X)$ 描述为双商 $G_\mathbb{C}(X \setminus \{p\}) \backslash L^\omega G_\mathbb{C} / D^\omega G_\mathbb{C}$ [FBZ04，第 18.1 章。6]，其中，$p \in X$ 是任意一点，而$G_\mathbb{C}(X \setminus \{p\})$表示 $X$ 上取值于 $G_\mathbb{C}$、且仅允许在 $p$处有极点的亚纯函数空间。该同构通过描述两个局部图上的丛（分别是$p$ 的一个邻域和 $X \setminus \{p\}$）来获得；等价地说，就是描述交叠区域上的转移函数（在 $L^\omega G_\mathbb{C}$中定义一个点）。这提示了一种为 $\mathrm{Bun}_{G_\mathbb{C}}(X)$赋予测度的方法：将我们的测度 $\nu_\kappa$ 沿投影的纤维积分，从而将其推至商空间上。

一个海克修改是通过改变定义该丛的局部数据来实现的，而 Hecke算子则是在这类修改空间上进行的积分变换 [EFK23] 通常看起来像是 $G_\mathbb{C}$上取值于 $X$ 且在 $p$的某个邻域之外定义的函数空间。本文引入的测度或可为这些积分变换提供另一种途径。相关建议见第5.4节。

1.4.4. 杉浦原构造与 *Drinfeld–Sokolov*约化。 杉浦原构造是将维拉索罗代数嵌入 Kac–Moody 代数的一种方法。接下来一个自然的步骤是在泛函分析语言中构造这些算子，使其作为无界算子作用于 $L^2(\nu_\kappa$。同样值得探究的是，这个表示是否会生成一族取值于 $\mathcal{A}$ 的马尔可夫过程，类似于 [BGK+24] 的结果。更一般地，空间$L^2(\nu_\kappa)$ 应承载完整的 $\mathcal{W}$-代数 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的一个表示，这一点可由量子 Drinfeld–Sokolov 约化的结果 [FBZ04第 16 章所启发。7]。

1.5. 符号索引。右侧栏显示其在正文中首次引入的位置。$G, G_\mathbb{C}$：紧致连通李群及其复化。第2.1节 $\check{h}$：对偶Coxeter数。tr：Killing 形式，归一化使得最长根的平方长度为 2。第2.1节 $\mathfrak{B} \subset i\mathfrak{g}$：关于 tr 的 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ （在 $\mathbb{C}$ 上）的标准正交基。第2.1节$L^\omega G$：$G$ 的解析环群。第2.2节$L(2,3)\mathfrak{g}$ $L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}$：解析环代数及其复化。典范生成元 $b_m = b \otimes z^m$，对应于 $b \in \mathfrak{B}, m \in \mathbb{Z}$。零均值环路子空间 $L^\omega_0 \mathfrak{g}_\mathbb{C}$。第2.2节，(2.4)$\mathfrak{g}_\mathbb{C}(z)$：系数取自 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的 Laurent多项式。$\hat{} D_0 G_\mathbb{C}$ （分别为 $D_\infty G_\mathbb{C}$）：全纯函数 $g : \mathbb{D} \to G_\mathbb{C}$ （分别为 $g : \mathbb{D}^* \to G_\mathbb{C}$），满足 $g(0) = 1_G$（分别为 $g(\infty) = 1_G$）。第2.3节 $\hat{} \hat{} D_0 \mathfrak{g}_\mathbb{C}, D_\infty \mathfrak{g}_\mathbb{C}$：$D_0 G_\mathbb{C}, D_\infty G_\mathbb{C}$ 的李代数。第2.3节$\mathcal{A}$：$\mathbb{D}$ 中取值于 $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 的全纯 (1, 0)-形式。第1.3节$\omega_{\mathrm{KM}}$：$L^\omega_0 \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 上的 Kac–Moody 余循环。$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{1,0} \otimes \mathcal{C}^{0,1}$：$\mathcal{A}$ 上的多项式。$\bar{} (\mathcal{J}_u, \mathcal{J}_u)_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}}$：环代数的复表示。定义 3.3，引理 3.4 $(\mathrm{J}_u, \bar{} \mathrm{J}_u)_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}}$：层级为 $\kappa < -2\check{h}$ 的 Kac–Moody修改。(3.6)，命题 3.5$\Psi_{\mathfrak{k},\tilde{\mathfrak{k}}}$：由 $(\mathrm{J}_u, \mathrm{J}_u)_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 生成的最高权表示中的态。(3.8) $(\mathcal{L}_u)_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}}$：环代数的实表示。定义4.1，引理 4.2 $(\mathrm{L}_u)_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}}$：层级为 $\check{\kappa} = -2\check{h} - \kappa > 0$ 的 Kac–Moody修改。(4.3)，命题 4.3

(2.5)
(3.2)

$\mathscr{S}$：右不变 Kac–Moody 度量的 Kähler 势。 命题 4.5
$\Omega$ $\Lambda$：协方差模空间。 Proposition 4.7
$\mathbb{P}(\mathcal{A})$： $\mathcal{A}$上的博雷尔概率测度。 (5.2)

通常，我们将 $L^\omega G$ 的一个元素记为 $\gamma$，将 $D_0 G_{\mathbb{C}}$ 的一个元素记为 $g$，将$L^\omega G_{\mathbb{C}}$ 的一个元素记为 $h$。若 $g \in D_0 G_{\mathbb{C}}$，我们通常记作 $\alpha = g^{-1}\partial g$ 和$= -\partial g g^{-1}$。

在全纯函数（或形式）的空间上标注 $\omega$上标，意为“全纯延拓至定义域闭包的某个邻域”（例如， $\mathcal{A}^\omega$ 是 $\mathbb{D}$邻域内取值于解析$_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$的(1，0)-形式空间）。

通过配对 $\alpha(u) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(u\alpha)$， $\mathcal{A}$ 的对偶空间可自然地与 $\hat{} D^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 认同，其中围道是圆 $e^{-\delta}\mathbb{S}^1$， $\delta > 0$ 可任意小。

$*$ 上标表示由 $z \mapsto 1/\bar{z}$ 拉回，并取决于其作用对象的类型，例如，若 $u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，则为 $u^*(z) = u(1/\bar{z})$；若 $\alpha \in \mathcal{A}$，则为 $\alpha^*(z) = -z^{-2}\alpha(1/\bar{z})$。

1.6. **概要**。 在第 2 节中，我们记录了关于李群、其环群以及 Birkhoff分解的一些基础材料。

在第 3 节中，我们引入两个交换表示（$\mathbf{J}u$，$\mathbf{J}u$）$_{u\in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$，它们是 Kac–Moody $\check{}$ 代数在层级 $\kappa < -2h$ 上的表示，并作为端同态作用于 $\mathcal{A}$ 上适当的多项式空间。这些表示用于构造测度 $\nu_\kappa$ 对应的一族正交多项式，并编码协方差公式（1.2）的无穷小版本。

在第 4 节中，我们引入 Kac–Moody 代数 $\check{}$ 在对偶层级 $\check{}\kappa = -2h - \kappa > 0$ 上的另一对交换表示 $(\mathbf{L}u)_{u\in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$，它编码了协方差公式 (1.1) 的无穷小版本。第4.3 节引入 K¨ahler 势 $\mathscr{S}$，并确立了若干基本性质，其中包括其非负性。该节还引入了协方差模空间 $\Omega$ 和 $\Lambda$。

定理 1.1 的正式证明在第 5 节中给出，其中第 5.2 节讨论存在性，第 5.3 节讨论唯一性，而第 5.1 节展示了定理 1.1 中两个协方差公式之间的联系。最后的第5.4 节对表示 $(\mathbf{J}u)_{u\in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 的沙波瓦洛夫形式作了部分猜想性的描述。

## 2. Preliminaries

2.1. **李群**。 本节汇集李群与李代数理论中的一些标准内容。主要参考文献是 [FBZ04，第 2.4 章。1]。

设 $G$ 是一个紧致连通李群，其复化为 $G_{\mathbb{C}}$，且在 $G_{\mathbb{C}}$ 上有一个反全纯对合 $g \mapsto \bar{g}$，其不动点集为 $G$ （具体例子见 1 ）。我们用$\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ 分别表示它们的李代数，并将 $\mathfrak{g}$ 视为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的子空间。我们有 $u \mapsto \bar{u}$ 上的一个实形式 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，其不动点集为 $\mathfrak{g}$。作为复李代数， $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 具有一个 $\mathbb{C}$-双线性李括号$[\cdot,\cdot]$： $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，它是反对称的，并满足雅可比恒等式

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0, \qquad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

群 $G_{\mathbb{C}}$通过共轭作用在自身上 $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$，其中 $g,h \in G_{\mathbb{C}}$。在$h = 1_G$ 处的微分定义了 $G_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的作用，称为伴随表示，记作 $\mathrm{Ad} : G_{\mathbb{C}} \to$GL($\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$)。有时我们会滥用记号，将 $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$ 写作 $g \in G_{\mathbb{C}}$, $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$（矩阵记号）。再次在 $g = 1_G$ 处求微分，得到 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 在自身上的作用（也称为伴随表示），记作 $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ $x \mapsto [x,\cdot]$。

每个 co 复表示 $\rho : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(V)$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上诱导出一个对称的 $\mathbb{C}$-双线性形式，定义如下：

$$\kappa_\rho(x,y) := \mathrm{tr}_V(\rho(x)\circ\rho(y)).$$

该形式满足不变性

$$\kappa_\rho(\mathrm{Ad}_g(x),\mathrm{Ad}_g(y)) = \kappa_\rho(x,y) \qquad \text{and} \qquad \kappa_\rho(x,[y,z]) = \kappa_\rho([x,y],z), \tag{2.1}$$

对所有 $x$、$y$、$z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 以及所有 $g \in G_{\mathbb{C}}$均成立。特别地， $\kappa_{\mathrm{ad}}$ 称为 Killing 形式。它在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上非退化，并且在 $\mathfrak{g}$ 上限制为负定形式（而在 $i\mathfrak{g}$上为正定）。事实上，满足 (2.1) 右侧条件的 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的双线性形式在相差一个正乘法常数的意义下唯一；标准惯例是采用规范化 $\mathrm{tr} := \frac{2\kappa_{\mathrm{ad}}}{\kappa_{\mathrm{ad}}\theta}(\,,\theta)$，其中 $\theta$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ [的最长根，参见 FBZ04，第 2.4 章。1]。我们固定 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$（在 $\mathbb{C}$上）关于 tr 的一组标准正交基 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，即对所有 $a$、$b \in \mathfrak{B}$，均有 $\mathrm{tr}(a,b) = \delta_{a,b}$。注意，$\mathfrak{B} \subset i\mathfrak{g}$。我们常会滥用记号，将 $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(a,b)$。

给定如上任意 $\rho$，卡西米尔算子为

$$\Omega_\rho := \sum_{b\in\mathfrak{B}} \rho(b)\circ\rho(b) \in \mathrm{End}(V). \tag{2.2}$$

一旦固定 Killing 形式的规范化（此处由上文的 tr 给出），该表达式便与标准正交基的具体选取无关。卡西米尔算子是中心的，即 $[\Omega\rho,\ \rho(x)] = 0$ 对所有 $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。这意味着 $\Omega\rho$ 是单位元的倍数，只要 $\rho$是不可约表示。特别地 [FBZ04，第3.4章。8]，

$$\Omega_{\mathrm{ad}} = 2\check{h}\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}, \tag{2.3}$$

ˇ就本文而言，这可取作对偶Coxeter数 $h \in \mathbb{N}$ 的定义。换言之，对所有 $x \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，有 $\sum_{b\in\mathfrak{B}}[b,[b,x]] = 2\check{h}x$。

例1. 考虑 $G = \mathrm{SU}_N$，其复化为 $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_N(\mathbb{C})$，并带有反全纯对合 $A \mapsto (A^*)^{-1}$ （上标 $*$表示埃尔米特伴随）。$\mathrm{SU}_N$的李代数是 $\mathfrak{su}_N$，即零迹反埃尔米特 $N\times N$ 矩阵的（实）空间。 $\mathfrak{su}_N$的复化是 $\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C})$。规范化的 Killing 形式由 $\mathrm{tr}(A,B) = \mathrm{Tr}(AB)$ 给出，其中 Tr 表示矩阵的通常迹 [FBZ04，第2.4章。1]。在$\mathfrak{su}_N$上，有 $\mathrm{tr}(A,B) = -\mathrm{Tr}(AB^*)$，它是负定的。tr 的标准正交基是 $i\mathfrak{su}_N$的一个子集，即零迹ˇ埃尔米特矩阵的空间。对偶Coxeter数是 $h = N$。

2.2. **环群**。 现在我们来回顾环群的一些性质，尤其是一种众所周知的右不变 K¨ahler 结构。主要参考文献是 [PS86，第8章。9]。另请参阅 [Pre82] 和[Seg85]，其中有简明的介绍。

解析环群 $L^\omega G$ 是由映射 $\gamma : \mathbb{S}^1 \to G$ 构成的空间，这些映射可全纯延拓为在 $\mathbb{S}^1$的某个环形邻域内定义的、取值于 $G_{\mathbb{C}}$的函数。 $L^\omega G$ 的李代数是空间 $L^\omega\mathfrak{g}$，其元素是定义在 $\mathbb{S}^1$上的实解析 $\mathfrak{g}$值函数。我们将零均值函数子空间记为

$$L^\omega_0\mathfrak{g} := \left\{ u \in L^\omega\mathfrak{g} \,\middle|\, \oint_{\mathbb{S}^1} u(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = 0 \right\}. \tag{2.4}$$

$L^\omega_0\mathfrak{g}$的典范生成元由 $\{(ib\otimes(z^m+z^{-m})\ \ b\otimes(z^m-z^{-m}))\ \ b\in\mathfrak{B},\ \ m\geq 1\}$给出；回忆 $\mathfrak{B}\subset i\mathfrak{g}$。换言之，每个 $u \in L^\omega_0\mathfrak{g}$ 在 $\mathbb{S}^1$的邻域内都有傅里叶展开 $u(z) = \sum_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1}(u_{b,\ m}b\otimes z^m - \bar{u}_{b,\ m}b\otimes z^{-m})$，我们也可以将其视为在 $\mathbb{D}$的邻域内定义的全纯函数 $\sum_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1} u_{b,\ m}b\otimes z^m$ 的实部¯。

*Kac–Moody* 余循环是定义在 $L_0^\omega\mathfrak{g}$ 上的反对称双线性形式，给出为

$$\omega_{\mathrm{KM}}(u,v) := \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(u\partial v), \qquad \forall u,v\in L_0^\omega\mathfrak{g}. \tag{2.5}$$

在上述坐标中，我们有 $\omega_{\mathrm{KM}}(u,v) = 2\mathrm{Im}(\sum_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1} m\bar{u}_{b,m}v_{b,m})$。从这个表达式可以看出，$\omega_{\mathrm{KM}}$ 在 $L_0^\omega\mathfrak{g}$上是非退化的。Kac–Moody 余循环是李代数余循环，具体来说

$$\omega_{\mathrm{KM}}(u,[v,w]) + \omega_{\mathrm{KM}}(v,[w,u]) + \omega_{\mathrm{KM}}(w,[u,v]) = 0, \qquad \forall u,v,w\in L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}. \tag{2.6}$$

希尔伯特变换 是定义在 $L_0^\omega\mathfrak{g}$ 上的线性复结构，其定义为

$$Ju(z) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathbb{S}^1} u(\zeta)\frac{z+\zeta}{z-\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}, \qquad \forall u\in L_0^\omega\mathfrak{g}, \tag{2.7}$$

其中积分按柯西主值理解。我们可以将 $L_0^\omega\mathfrak{g}$的复化与空间 $L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 等同起来，该空间由定义在 $\mathbb{S}^1$ 邻域内、取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的全纯函数构成。Kac–Moody 余循环和希尔伯特变换可线性延拓至复化。$J$ 的 $+i$-特征空间（分别为 $-i$-特征空间）可与空间 $D_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ （分别为 $D_\infty^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$）等同起来，该空间由定义在 $\mathbb{D}$ （分别为 $\mathbb{D}^*$）邻域内、取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的全纯函数构成，并且在 0（分别为 $\infty$）处消失。希尔伯特变换是可积复结构，具体来说

$$[u,v] + J([Ju,v]+[u,Jv]) - [Ju,Jv] = 0, \qquad \forall u,v\in L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}. \tag{2.8}$$

结构 $J$和 $\omega_{\mathrm{KM}}$ 相容，其含义是 $\omega_{\mathrm{KM}}(Ju, Jv) = \omega_{\mathrm{KM}}(u, v)$，并且$\mathbb{R}$-双线性形式

$$\langle u,v\rangle_{\mathrm{KM}} := \omega_{\mathrm{KM}}(u,Jv), \qquad \forall u,v\in L_0^\omega\mathfrak{g},$$

是正定的，即它在 $L_0^\omega\mathfrak{g}$上诱导出一个内积。在上面引入的坐标中，我们有 $\langle u, v\rangle_{\mathrm{KM}} = 2\mathrm{Re}(\sum_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1} m\bar{u}_{b,\ m}v_{b,\ m})$。这个内积延拓为 $L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$上的厄米形式。按照约定，我们取第二个变量中的 $\mathbb{C}$-线性部分。$L^\omega\mathfrak{g}$ 的复化是 $L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的解析 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-值函数空间，其邻域为 $\mathbb{S}^1$，生成元为$\{b_m := b\otimes z^m \mid b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1\}$。

我们可以将 $\omega_{\mathrm{KM}}$ 视为 $L^\omega G/G$上的右不变非退化 2-形式。此时，余循环性质（2.6）等价于 $\omega_{\mathrm{KM}}$的闭性，从而使 $L^\omega G/G$成为辛流形。我们也可以将 $J$ 视为 $L^\omega G/G$上的右不变复结构，这两个结构结合起来使 $L^\omega G/G$成为 K¨ahler 流形 [PS86，命题（8.9.8）]。

注 2. 群 $L^\omega G/G$ 具有由内积 $(u,v)\mapsto \frac{i}{2\pi}\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(u(z)v(z))\frac{\mathrm{d}z}{z}$在 $L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$上诱导的双不变黎曼度量，这与 Kac–Moody 度量不同。 —

2.3. **Birkhoff分解**。本节回顾环路的一个分解公式 $\gamma:\ \mathbb{S}^1\to G$它推广了 Birkhoff 分解公式 [PS86，第8章。1]。本节的主要参考文献是 [Pre82]。

设 $DG_{\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{D}$上取值于 $G_{\mathbb{C}}$的全纯函数所构成的群，$D^\omega G_{\mathbb{C}}$ 为可全纯延拓到 $\mathbb{D}$的某个邻域的那些环路所构成的子群。设 $D_0G_{\mathbb{C}}$ （相应地，$D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$）为满足 $g(0) = 1_G$的那些 $g\in D_0G_{\mathbb{C}}$（相应地，$g\in D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$）所构成的子群。注意，$D_0G_{\mathbb{C}}$是拓扑平凡的：对每个 $g\in D_0G_{\mathbb{C}}$，族 $g_t(z) := g(e^{-t}z)$，$t\in[0,\infty]$，定义了从 $g$ 到常数环路$1_G$的一个同伦。我们也以同样的方式定义 $D_\infty G_{\mathbb{C}}$，$D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$，只是将 $\mathbb{D}$ 替换为 $\mathbb{D}^*$，并将0替换为 $\infty$。设 $\mathcal{A}$ 为$\mathbb{D}$中取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的全纯(1, 0)-形式所构成的空间，$\mathcal{A}^\omega$ 为那些可全纯延拓到 $\mathbb{D}$的某个邻域的形式所构成的子空间。

根据 [Pre82，定理 1]（另见 [PS86，第 8] 章以及 [Seg85]），每个环路 $\gamma \in L^\omega G$ 容许一个分解

$$\gamma = g\lambda\hat{g}^{-1}$$

其中有 $g \in D^\omega G_{\mathbb{C}}$、$\hat{} g \in \hat{} D^\omega G_{\mathbb{C}}$，以及 $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1; G)$。此分解在显然的全局对称性下唯一。证明方法是研究动能 (1.4) 的梯度流：集合 $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1; G)$ 对应于 $\mathscr{E}$ 的临界点，并且对于每个起始点 $\gamma \in L^\omega G$，流都会收敛到点 $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1; G)$。如果我们将两个基于环路 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 在其梯度流收敛到同一个 $\lambda$ 时视为等价，那么就可以将 $\mathrm{Hom}(\mathbb{S}^1; G)$ 看作商空间，并用 $L^\omega_\lambda G$ 表示同态 $\lambda$ 的等价类。特别地，$L^\omega_1 G$ 是平凡同态的等价类。下文的引理 2.2 将证明 $L^\omega_1 G$ 是 $L^\omega G$ 的子群。

此外，根据 [Seg85、命题 23] 及其后的讨论，$L^\omega_1 G$ 可以与 $D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$（其中记作 $L^-_0 G_{\mathbb{C}}$）等同识别，或者等价地与 $D^\omega_0 G_{\mathbb{C}}$等同识别。换言之，对于每个 $g \in D^\omega_0 G_{\mathbb{C}}$，存在 $\hat{} g \in \hat{} D^\omega G_{\mathbb{C}}$，使得 $g\hat{} g^{-1}$ 是 $L^\omega G$中的实环路；如果我们施加 $\hat{} g(\infty)$ 这一条件，则该环路是唯一的 $= 1_G$。

因此，我们有一个等同识别 $L^\omega_1 G \simeq D^\omega_0 G_{\mathbb{C}}$，现在考虑映射 $D^\omega_0 G_{\mathbb{C}} \to \mathcal{A}^\omega$，$g \mapsto g^{-1}\partial g$。不难看出，该映射是一个双射。事实上，只需选取一个忠实表示，我们可以假设 $G_{\mathbb{C}}$ 是一个矩阵群。于是，给定 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$，我们在 $\mathbb{D}$ 中考虑复常微分方程 $g'(z) = \alpha(z)g(z)$，其初始条件为 $g(0) = 1_{G_{\mathbb{C}}}$。由系数是全局利普希茨的以及 $\mathbb{D}$是拓扑平凡的这一事实，解的存在性和唯一性显然成立。

我们将这些结果概括为以下命题。

**命题2.1**。对于每个 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$，存在唯一的一对 $(g, \hat{} g) \in D^\omega_0 G_{\mathbb{C}} \times D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$，使得$g\hat{} g^{-1} \in L^\omega_1 G$ 且 $g^{-1}\partial g = \alpha$。

将命题 2.1 改述为一个 $\partial$-问题很有用。任意 $\gamma \in L^\omega_1 G$ 都是可缩的，因此我们可以将其光滑地延拓为一个取值于 $G_{\mathbb{C}}$的函数，定义在 $\mathbb{C}$ 上，使其在 $\mathbb{S}^1$的邻域内全纯，并满足施瓦茨反射 $\gamma(1/\bar{z}) = \gamma(z$。于是，我们有

$$\bar\partial\gamma\gamma^{-1} = \mu + \mu^* \qquad \text{in } \hat{\mathbb{C}},$$

其中 $\mu$ 是一个取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$、紧支撑于 $\mathbb{D}^*$ 的光滑 (0,1)-形式，并且 $\mu^*(z) = -\bar{z}^{-2}\mu(1/\bar{z})$（紧支撑于 $\mathbb{D}$）。另一方面，若将分解写作 $\gamma = g\hat{} g^{-1}$ 并将$g, \hat{} g$ 延拓至整个球面，则单位元恒等式 $\bar\partial\gamma\gamma^{-1} = \bar\partial g g^{-1} - \mathrm{Ad}_g(\hat{} g^{-1}\bar\partial\hat{} g)$ 表明，在 $\hat{}\mathbb{C}$ 中 $\bar\partial g g^{-1} = \mu$ 且 $\hat{} g^{-1}\bar\partial\hat{} g = -\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\mu^*)$（因为 $g, \hat{} g$ 分别在 $\mathbb{D}, \mathbb{D}^*$ 上全纯）。

因此，Birkhoff分解可视为下述一般 $\partial$问题的解；这在丛的模空间的复解析理论中广为人知 [TZ08]：给定一个光滑的$\hat{}$ $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$值 (0，1)-形式，求解 $\mathbb{C}$，使得

$$\bar\partial g g^{-1} = \mu \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \qquad \text{and} \qquad g(0) = 1_{G_{\mathbb{C}}}, \tag{2.9}$$

$\hat{}$ 其中未知量是一个光滑函数 $g : \mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$。在 Birkhoff分解的语境下，我们刚刚看到，两个值得关注的情形是：$\mu$ 关于单位圆具有反射对称性（因此解是一个实解析环路），或者 $\mu$ 在一个圆盘内紧支撑（因此解在补圆盘上全纯）。

(2.9) 的无穷小版本是求解

$$\bar\partial u = \mu \qquad \text{and} \qquad u(0) = 0, \tag{2.10}$$

ˆ，其中未知量现在是一个光滑函数 $u:\ \mathbb{C}\to\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。这个问题的解众所周知，可由柯西变换给出 [Ahl66，第五章，引理 2]

$$u(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\mu(\zeta)\frac{z|\mathrm{d}\zeta|^2}{\zeta(z-\zeta)},\qquad \forall z\in\hat{\mathbb{C}}, \tag{2.11}$$

其中，$|\mathrm{d}\zeta|^2=\frac{i}{2}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\bar{\zeta}$是 $\mathbb{C}$上的勒贝格测度。在本文其余部分，我们主要关注 $\mu$ 在 $\mathbb{D}$ 或 $\mathbb{D}^*$中具有紧支撑的情形。

**引理2.2**。 集合 $L_1^\omega G$ 是 $L^\omega G$的一个子群。此外，它通过左乘作用于每个$L_\lambda^\omega G$。

证明。 显然， $L_1^\omega G$ 包含 $\mathbf{1}_G$ ，且在逆映射下封闭。

设 $\gamma_1\in L_1^\omega G$和 $\gamma_2=g_2\lambda\hat{}g_2^{-1}\in L_\lambda^\omega G$。由于 $\lambda$是一个同态，存在 $x\in i\mathfrak{g}$ 使得 $e^{2i\pi x}=1_G$ 且 $\lambda(z)=z^x$ 对所有 $z\in\mathbb{S}^1$成立。该表达式可解析延拓至所有$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$。

令 $h\in\hat{}D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 满足 $\gamma_1 g_2 h^{-1}\in D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ （这可以像上文一样，作为一个 $\bar{\partial}$-问题的解来给出）。注意，$(\mathrm{Ad}_{\lambda^{-1}}h)(z)=z^{-x}h(z)z^x$ 是有界的，因为 $z\to\infty$，因此根据黎曼可去奇点定理，该函数可解析延拓至 $z=\infty$ 周围。由此可知，$\hat{}g_2\lambda h\lambda^{-1}\in\hat{}D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 是 $\mathbb{D}^*$ 邻域内两个解析函数的乘积。于是，我们可以写成

$$\gamma_1\gamma_2=\gamma_1 g_2 h^{-1}\lambda\lambda^{-1}h\lambda\hat{g}_2^{-1}=(\gamma_1 g_2 h^{-1})\lambda(\hat{g}_2\lambda^{-1}h\lambda)^{-1},$$

这表明 $\gamma_1\gamma_2\in L_\lambda^\omega G$。这意味着 $L_1^\omega G$ 是一个群，并且由 $L_1^\omega G$ 左乘会保持每个 $L_\lambda^\omega G$ 不变。□

## 3. Complex representation of the Kac–Moody algebra

本节中，我们定义 Kac–Moody 代数的两个交换表示，它们作为微分算子作用于 $\mathcal{A}$上的多项式空间。这一表示是通过将 $D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 对自身的作用扩展为复环群 $L^\omega G_{\mathbb{C}}$的作用而构造的。将 $D_0 G_{\mathbb{C}}$ 认作 $\mathcal{A}$，此过程中所考虑的复结构是 $\mathcal{A}$上的典范复结构，这不同于从 Kac–Moody K¨ahler 度量继承的复结构。第4节将采用后面这一观点。

本文中，我们将始终频繁地使用李代数意义下的指数记号。例如，给定 $u\in\hat{}D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$，指数曲线 $(g_t=e^{tu})_{t\in\mathbb{C}}\in\hat{}D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 是下列常微分方程的解（取值于 $\mathcal{A}^\omega$ ，参数化为 $\alpha_t=g_t^{-1}\partial g_t$）

$$\partial_t\alpha_t(z)=\partial u(z)+[\alpha_t(z),u(z)]\qquad\text{with}\qquad\alpha_0=0, \tag{3.1}$$

该方程是一维常微分方程，对邻域 ¯中每个 $z$，其系数均为全局利普希茨函数。为计算基本向量场，我们主要关注 $t\to 0$时的一阶展开。

**3.1. 坐标与多项式**。 每个 $\alpha\in\mathcal{A}$ 都可以在 0 附近展开成如下形式的幂级数

$$\alpha(z)=\sum_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}\alpha_{b,m}b\otimes z^{m-1},$$

我们将这些系数视为 $\mathcal{A}$ 上的坐标。令 $\mathcal{C} := \mathbb{C}[(\alpha_{b,\ m},\ \bar{\alpha}_{b,\ m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1}]$ 为关于系数 $(\alpha_{b,\ m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1}$的多项式空间。我们也记作

$$\mathcal{C}^{1,0} := \mathbb{C}[(\alpha_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}] \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C}^{0,1} := \mathbb{C}[(\bar{\alpha}_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}]. \tag{3.2}$$

注意，$\mathcal{C} = \mathcal{C}^{1,\ 0} \otimes \mathcal{C}^{0,\ 1}$。

现在，我们介绍一种利用整数分拆对 $\mathcal{C}$ 的元素进行编码的便捷方法。令 $\mathcal{T}$ 为由有限个非零项组成的序列 $\mathbf{k} = (k_{b,\ m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathfrak{B}\times\mathbb{N}_{>0}}$ 的集合。分别将 $\mathbf{k}$ 的层级和长度定义为

$$|\mathbf{k}| := \sum_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1} m k_{b,m} \qquad \text{and} \qquad \ell(\mathbf{k}) := \sum_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1} k_{b,m}.$$

令 $\mathcal{T}_N := \{\mathbf{k} \in \mathcal{T} \,|\, |\mathbf{k}| = N\}$。我们将使用简写记法

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} := \prod_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1} \alpha_{b,m}^{k_{b,m}} \in \mathcal{C}^{1,0} \qquad \text{and} \qquad \bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathbf{k}} := \prod_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1} \bar{\alpha}_{b,m}^{k_{b,m}} \in \mathcal{C}^{0,1}, \tag{3.3}$$

对于所有 $\mathbf{k} \in \mathcal{T}$。我们记 $\mathcal{C}^{1,\ 0}_{N} = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}^{\mathbf{k}} \,|\, \mathbf{k} \in \mathcal{T}_N\}$，并类似地定义 $\mathcal{C}^{0,\ 1}_{N}$。我们有一个分级

$$\mathcal{C}^{1,0} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{1,0}_N \qquad \text{and} \qquad \mathcal{C}^{0,1} = \bigoplus_{N\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^{0,1}_N.$$

我们强调，坐标 $(\alpha_{b,\ m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1}$ 相对于 $\mathcal{A}$上的典范复结构是全纯的，但并非相对于诱导的 Kac–Moody 复结构全纯。这一点将在第5节中始终发挥隐蔽（但非常具体）的作用。

**3.2. 在 $\mathcal{A}$上的作用。**作为 $D_0G_{\mathbb{C}}$的子群，群 $D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 通过右乘作用于 $D_0G_{\mathbb{C}}$，从而诱导出 $D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用，其形式为 $(\alpha,\ g) \mapsto g^{-1}\partial g + g^{-1}\alpha g$。本节将把这一作用扩展为复环群 $L_1^\omega G_{\mathbb{C}}$（其包含 $D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 作为子群）在 $\mathcal{A}$ 上的作用，并计算相应的基本向量场。为便于构造这一扩展作用，我们考虑一个 Birkhoff分解 $\gamma = \hat{g}g^{-1} \in L_1^\omega G$，并令$\hat{}\ \ h \in D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$。函数$\hat{}gh \in D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 的 Birkhoff分解是什么？为回答这个问题，我们寻找 $\chi \in L_1^\omega G$，使得 $\chi^{-1}gh$ 在 $\mathbb{D}$中全纯，这样 $\chi^{-1}\gamma = (\chi^{-1}gh)(\hat{}gh)^{-1}$ 便是新的 Birkhoff分解。特别地，若 $h$ 是常数，则 $\chi = h$，且 $h$ 在 $g$ 上的作用由共轭作用给出。

令 $g \in D_0G_{\mathbb{C}}$ 和 $h \in L^\omega G_{\mathbb{C}}$ 为一个可缩的环路。将 $h$ 光滑地延拓为定义在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的一个 $G_{\mathbb{C}}$ 值函数（仍记作 $h$），并定义 $\mu := h^{-1}\bar{\partial}h\mathbf{1}_{\mathbb{D}^*}$。令 $\chi_h : \hat{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ 为下式的解

$$\bar{\partial}\chi_h\chi_h^{-1} = \mathrm{Ad}_{gh}(\mu) + \mathrm{Ad}_{gh}(\mu)^* \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \qquad \text{and} \qquad \chi_h(0) = 1_G.$$

由关于单位圆的对称性，$\chi_h$ 限制为 $L_1^\omega G$的一个元素。此外，经过初等计算可得 $(\chi_h^{-1}gh)^{-1} = h^{-1}\bar{\partial}h - \mathrm{Ad}_{(gh)^{-1}}(\bar{\partial}\chi_h\chi_h^{-1}) = 0$属于 $\mathbb{D}$，因此 $\chi_h^{-1}gh \in D_0G_{\mathbb{C}}$。现在，令 $h_1, h_2$ 为上述两个函数，并定义 $h := h_1h_2$。如上对每个 $\partial$求导可得 $\chi_{h_1}\chi_{h_2} = \chi_h$，这意味着映射 $(g,h) \mapsto \chi_h^{-1}gh$ 是 $L_1^\omega G_{\mathbb{C}}$ 在 $D_0G_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{A}$上的一个作用。注意，若 $h$ 为常数，则 $g\cdot h = h^{-1}gh$，即该作用限制为 $G_{\mathbb{C}}$ 通过共轭作用给出的作用。将其视为在 $\mathcal{A}$上的作用时，我们将此作用记作 $(\alpha, h) \mapsto \alpha\cdot h$。

现在，我们要在单位元处对这个作用求微分，也就是求出基本向量场。根据定义，对每个 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们要寻找一个算子 $Ku : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\omega$，它将每个 $\alpha \in \mathcal{A}$ 与由 $u$ 在 $\alpha$ 处生成的无穷小运动 $K_\alpha u \in T_\alpha\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}$ 关联起来。令 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。

我们可以将 $u$ 延拓为定义在 $\hat{\mathbb{C}}$ 上的光滑 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 值函数。设 $h_t$ 是 $L^{\omega}_1 G_{\mathbb{C}}$ 中定义在 $t=0$ 的某个复邻域内的任意 $C^1$ 族，使得

$$h_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t h_t|_{t=0} = u, \qquad \partial_{\bar{t}} h_t|_{t=0} = 0.$$

定义 $\mu_t := h_t^{-1}\bar{\partial} h_t \mathbf{1}_{\mathbb{D}^*}$。设 $\chi_t \in L^{\omega}_1 G$ 满足 $g_t := \chi_t^{-1} g h_t \in D_0 G_{\mathbb{C}}$。令 $\tilde{u}$ 为下式的解

$$\bar{\partial}\tilde{u} = \mathrm{Ad}_g(\bar{\partial} u) \text{ in } \hat{\mathbb{C}} \qquad \text{and} \qquad \tilde{u}(0) = 0.$$

于是，我们有 $\partial_t \chi_t|_{t=0} = \tilde{u}$和 $\partial_{\bar{t}} \gamma_t|_{t=0} = \tilde{u}^*$，其中回顾记号 $\tilde{u}^*(z) = \tilde{u}(1/\bar{z})$。令 $\alpha_t := \overline{g_t^{-1}\partial g_t}$，我们得到关于 $\mathcal{A}$的一阶展开 $\alpha_t = \alpha + tK_\alpha u + \bar{t}K^*_\alpha u + o(t)$，其中

$$K_\alpha u = \partial u + [\alpha, u] - \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\partial \tilde{u}) \qquad \text{and} \qquad K^*_\alpha u = -\mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\partial \tilde{u}^*).$$

根据构造， $K_\alpha u$ 和 $K^*_\alpha u$都是 $\mathbb{D}$邻域内的全纯形式，即$K_\alpha u, K_\alpha u^* \in \mathcal{A}^{\omega}$。下一个引理给出了 $K_\alpha u$的显式表达式。

**引理 3.1**。 对于所有 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}$ 和 $u \in L^{\omega}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们有

$$K_\alpha u(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint g^{-1}(z)g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta)g(z)\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}, \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

其中，围道是 $\mathbb{D}$ 中任意一条包含在 $u$解析域内，且将 $z$包含在其内部的环路（例如，对于足够大的 $r \in (0,1)$，取 $r\mathbb{S}^1$ ）。

证明。 我们可以将 $u$光滑地延拓为一个 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$值函数，定义在 $\mathbb{C}$上。现在令 $z$ 位于支集之外的 $\partial u$。采用上一段的记号，我们可以利用柯西变换（2.11）和 Stokes公式得到

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} g(\zeta)\partial_{\bar{\zeta}} u(\zeta) g^{-1}(\zeta)\frac{z|\mathrm{d}\zeta|^2}{\zeta(z-\zeta)} = \frac{1}{2i\pi}\oint g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta)\frac{z\mathrm{d}\zeta}{\zeta(z-\zeta)},$$

其中，围道将 $\partial u$的支集包含在其内部，并将 $z$ 置于其外部。我们可以变形此围道，使 $z$ 位于其内部，同时补偿极点$\zeta = z$处的留数。由此得到

$$\tilde{u}(z) = g(z)u(z)g^{-1}(z) + \frac{1}{2i\pi}\oint g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta)\frac{z\mathrm{d}\zeta}{\zeta(z-\zeta)},$$

此时围道如引理陈述中所述。现在，利用初等单位元 $\mathrm{Ad}_{g^{-1}} \circ \partial \circ \mathrm{Ad}_g(u) = \partial u + [g^{-1}\partial g, u]$，对于所有远离 $\bar{\partial} u$支集的 $z \in \mathbb{D}$，我们有：

$$\begin{aligned} K_\alpha u(z) &= \partial u(z) + [g^{-1}\partial g(z), u(z)] - \mathrm{Ad}_{g^{-1}(z)}(\partial \tilde{u}(z)) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\oint g^{-1}(z)g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta)g(z)\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}. \end{aligned}$$

该表达式显然定义了关于 $z \in \mathbb{D}$ 的全纯函数，并提升了初始条件：$z$ 必须位于 $\partial u$的支集之外。□

我们以一个有用的引理结束本节，它是前一个引理的一个初等推论。给定 $u$， $v \in L^{\omega}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，记

$$P^v_u := -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{r\mathbb{S}^1}\oint_{R\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}\left(g^{-1}(\zeta)u(\zeta)g(\zeta), g^{-1}(z)v^*(z)g(z)\right)\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z}{(\zeta - z)^2}, \tag{3.4}$$

其中 $0 < r < R < 1$ 且二者都足够大，使得 $u$, $v$ 在该区域内解析。这些量编码了算子 $K_\alpha$：$L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C} \to \mathcal{A}^\omega$ 的矩阵系数，其含义是

$$K_\alpha(b \otimes z^m) = \sum_{a\in\mathfrak{B},n\geq 1} P^{a,n}_{b,m} a \otimes z^{n-1}.$$

此外，$P^{a,n}_{b,m}$ 是由 $\mathrm{Ad}_g(a)$ 与 $\mathrm{Ad}_g(b)$ 的幂级数展开的泰勒系数得到的；更确切地说，由于 $\zeta > z$，我们可以对 $(z-\zeta)^{-2}$ 作泰勒展开，从而得到

$$P^{a,n}_{b,m} = -\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} k \oint\oint \mathrm{tr}\left(g(\zeta)bg^{-1}(\zeta), g(z)\bar{a}g^{-1}(z)\right)\zeta^{m-k-1}z^{-n+k-1}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z.$$

级数中 $k^{\mathrm{th}}$ 项的贡献由将 $\mathrm{Ad}_g(a)$ 展开至 $(k-m)_+$阶、并将 $\mathrm{Ad}_g(b)$ 展开至 $(n-k)_+$阶给出。[4] 该展开的系数是关于 $\mathcal{C}^{1,0}$ 的多项式，其层级分别为 $(k-m)_+$ 和 $(n-k)_+$。因此，只要它不为零，对 $P^{a,n}_{b,m}$ 的每一项贡献都是层级为 $k-m+n-k = n-m$的多项式，从而 $P^{a,n}_{b,m} \in \mathcal{C}^1_{,0\,(n-m)_+}$。我们将这一观察归纳为一条引理。

**引理 3.2.** 设 $b \in \mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{Z}$。我们有 $K_\alpha(b \otimes z^m) = \sum_{a\in\mathfrak{B},n\geq 1} P^{a,n}_{b,m} a \otimes z^{n-1}$，其中$P^{a,n}_{b,m} \in \mathcal{C}^1_{,0\,(n-m)_+}$ 对所有 $a \in \mathfrak{B}$, $n \geq 1$成立。

**3.3. 微分算子与 Kac–Moody 表示。** 接下来要说明，存在两个交换的 Kac–Moody 代数表示，它们作为 $\mathcal{C}$ 的端同态作用。我们将从复化环代数的一个表示开始，该表示由上一节定义的作用沿各方向的方向导数给出。

**定义 3.3**（沿复作用的可微性）。设 $\alpha \in \mathcal{A}$ 和 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$。函数$F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 在 $\alpha$ 沿方向 $u$ 是可微的，如果存在 $\mathcal{J}_uF(\alpha)$ $\mathcal{J}_uF(\alpha) \in \mathbb{C}$，使得下述条件成立。对于任意在 $t = 0$ 的复邻域内定义的 $C^1$-族 $(h_t) \in L^\omega G_\mathbb{C}$，

$$h_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t h_t|_{t=0} = u, \qquad \partial_{\bar{t}} h_t|_{t=0} = 0, \tag{3.5}$$

我们有如下的一阶展开

$$F(\alpha_t) = F(\alpha) + t\mathcal{J}_uF(\alpha) + \bar{t}\bar{\mathcal{J}}_uF(\alpha) + o(t),$$

其中 $\alpha_t = g_t^{-1}\partial g_t$ 且 $g_t = \chi_t^{-1}gh_t$ 是利用第 3.2 节中的作用定义的。我们称 $F$沿方向 $u$ 可微，如果它在每个 $\alpha \in \mathcal{A}$ 处都沿方向 $u$ 可微。

由引理3.2可知，$\mathcal{J}_u$ 和 $\bar{\mathcal{J}}_u$ 是坐标（$\alpha_{b,m}$，$\bar{\alpha}_{b,m}$）上的多项式系数一阶微分算子。作用于多项式时，只有有限个微分算子会产生作用（因为这类函数只依赖有限个坐标），因此 $\mathcal{J}_u$, $\bar{\mathcal{J}}_u$ 作为 $\mathcal{C}$的端同态是良定义的。

**引理 3.4.** 作为 $\mathcal{C}$ 的端同态，对于所有 $u, v \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}(z)$，有：

$$[\mathcal{J}_u, \mathcal{J}_v] = \mathcal{J}_{[u,v]}, \qquad [\bar{\mathcal{J}}_u, \bar{\mathcal{J}}_v] = \bar{\mathcal{J}}_{[u,v]}, \qquad [\mathcal{J}_u, \bar{\mathcal{J}}_v] = 0.$$

[4] 这里，我们采用以下约定：若 $x \geq 0$，则 $x_+ = x$；若 $x < 0$，则 $x_+ = -\infty$；并且多项式的层级为 $-\infty$ 当且仅当它恒为零。

证明。记 $\mathcal{J}_u^{\mathbb{R}} := \mathcal{J}_u + \bar{\mathcal{J}}_u$。这些算子是复环群 $L^\omega G_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的右作用所对应的李导数。因此，它们表示复环代数，即对于所有 $u,\ v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z)$，有 $[\mathcal{J}_u^{\mathbb{R}}, \mathcal{J}_v^{\mathbb{R}}] = \mathcal{J}_{[u,v]}^{\mathbb{R}}$。算子 $\mathcal{J}_u$，$\bar{\mathcal{J}}_u$ 的结果可通过直接计算得到，例如利用 $\mathcal{J}_u = \frac{1}{2}(\mathcal{J}_u^{\mathbb{R}} - i\mathcal{J}_{iu}^{\mathbb{R}})$，我们得到

$$\begin{aligned}[\mathcal{J}_u, \mathcal{J}_v] = \frac{1}{4}[\mathcal{J}_u^{\mathbb{R}} - i\mathcal{J}_{iu}^{\mathbb{R}}, \mathcal{J}_v^{\mathbb{R}} - i\mathcal{J}_{iv}^{\mathbb{R}}] &= \frac{1}{4}\mathcal{J}_{[u,v]}^{\mathbb{R}} - \frac{1}{4}\mathcal{J}_{[iu,iv]}^{\mathbb{R}} - \frac{i}{4}\mathcal{J}_{[iu,v]}^{\mathbb{R}} - \frac{i}{4}\mathcal{J}_{[u,iv]}^{\mathbb{R}} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{J}_{[u,v]}^{\mathbb{R}} - \frac{i}{2}\mathcal{J}_{i[u,v]}^{\mathbb{R}} = \mathcal{J}_{[u,v]}.\end{aligned}$$

我们用到了交换子在 $\mathrm{End}(\mathcal{C})$ 中的 $\mathbb{C}$-线性、李括号在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z)$ 中的 $\mathbb{C}$-线性，以及映射 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z) \to \mathrm{End}(\mathcal{C})$ $u \mapsto \mathcal{J}_u^{\mathbb{R}}$ 的 $\mathbb{R}$-线性。其他交换子的处理方式相同，故略去。□

回忆一下，我们记作 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}$，并利用留数配对 $\alpha(u) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(u\alpha)$ 将 $\alpha$ 视为 $L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的线性形式。我们对之前的算子作如下修改：对所有 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，令

$$\mathbf{J}_u := \mathcal{J}_u + \kappa\alpha(u)\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \qquad \text{and} \qquad \bar{\mathbf{J}}_u := \bar{\mathcal{J}}_u + \kappa\overline{\alpha(u)}\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}. \tag{3.6}$$

给定 $b \in \mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{Z}$，我们将使用简写 $\mathbf{J}_{b,\ m} = \mathbf{J}_{b\otimes z^m}$。

**命题 3.5**。对所有 $u,\ v \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，有

$$\mathcal{J}_u\alpha(v) - \mathcal{J}_v\alpha(u) - \alpha([u,v]) = i\omega_{\mathrm{KM}}(u,v) \qquad and \qquad \bar{\mathcal{J}}_u\alpha(v) - \mathcal{J}_v\overline{\alpha(u)} = 0.$$

因此，作为 $\mathcal{C}$ 上的端同态，对于所有 $u, v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z)$，我们有

$$[\mathbf{J}_u, \mathbf{J}_v] = \mathbf{J}_{[u,v]} + i\kappa\omega_{\mathrm{KM}}(u,v)\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad [\bar{\mathbf{J}}_u, \bar{\mathbf{J}}_v] = \bar{\mathbf{J}}_{[u,v]} - i\kappa\overline{\omega_{\mathrm{KM}}(u,v)}\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \qquad [\mathbf{J}_u, \bar{\mathbf{J}}_v] = 0.$$

将其特化到生成元 $(\mathbf{J}_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\in\mathbb{Z}}$ 并利用 $\omega_{\mathrm{KM}}(a\otimes z^n, b\otimes z^m) = -in\delta_{a,\ b}\delta_{n,\ -m}$ 的定义，可得

$$[\mathbf{J}_{a,n}, \mathbf{J}_{b,m}] = \mathbf{J}_{[a,b],n+m} + \kappa n\delta_{a,b}\delta_{n,-m}\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}.$$

这些关系与 [DFMS97, (15.45)]，一致，因此我们得到 Kac–Moody 代数在层级 $\kappa$ 上的两个交换表示。

证明。利用引理3.1，我们有

$$\mathcal{J}_u\alpha(v) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(v, K_\alpha u) = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{r\mathbb{S}^1}\oint_{R\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(g(z)v(z)g^{-1}(z), g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta))\frac{\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}z}{(\zeta - z)^2},$$

对任意 $0 < r < R < 1$ 均成立。由被积函数的对称性，差值 $\mathcal{J}_u\alpha(v) - \mathcal{J}_v\alpha(v)$ 只需通过交换两个围道即可得到。初等的围道变形表明，这恰好由奇点 $\zeta = z$ 处的留数给出，即

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_u\alpha(v) - \mathcal{J}_v\alpha(u) &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{r\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}\left(g(z)v(z)g^{-1}(z), \operatorname*{Res}_{\zeta=z} g(\zeta)u(\zeta)g^{-1}(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi}\oint_{r\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}\left(g(z)v(z)g^{-1}(z), \partial_z\left(g(z)u(z)g^{-1}(z)\right)\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2i\pi}\mathrm{tr}\left(v, \partial u + [g^{-1}\partial g, u]\right) = i\omega_{\mathrm{KM}}(u,v) + \alpha([u,v]).\end{aligned}$$

最后一行中，我们用到了迹的不变性以及初等恒等式 $\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\circ\partial\circ\mathrm{Ad}_g(u) = \partial u + [g^{-1}\partial g, u]$。至此，第一个恒等式的证明完成。

– ˆ对于第二个恒等式，首先注意到，除非 $u, v \in D^{\omega}_{\mathfrak{g}}\mathbb{C}$ 均满足条件，否则 $\mathcal{J}_u\alpha(v)$ 为零。于是，¯这一陈述可改述为：ˆ$D^{\omega}_{\infty}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的半双线性形式 $(u,v) \mapsto \mathcal{J}_u\alpha(v)$ 是共轭对称的。根据定义，我们有 $\bar{\mathcal{J}}_u\alpha(v) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(vK^*_\alpha u)$。利用 Killing 形式（2.1）的不变性并进行分部积分，可知这与 $\oint_{\mathbb{S}^1}\mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_g(u)^*\partial\mathrm{Ad}_g(v))$ 成正比，显然该式是共轭对称的。

由此，交换关系可由莱布尼茨法则和初等代数推得。 □

**3.4. 最高权表示。** 最后，我们定义¯表示对偶组 $(\mathbf{J}_u,\mathbf{J}_u)_{u\in L^{\omega}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$的一个最高权表示，它将为多项式空间 $\mathbb{C}[(\alpha_{b,m},\bar{\alpha}_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}]$提供一个自然的基。

在 $\mathfrak{B}$ 上任取一个全序，并考虑 $\mathfrak{B}\times\mathbb{N}_{>0}$ 上的字典序，其中 $(b,m) \leq (b',m')$ 当且仅当 $m < m'$ 或 $m = m'$ 且 $b \leq b'$。回忆第3.1节中引入的整数分拆集合 $\mathcal{T}$的定义。给定这样一个分拆 $\mathbf{k} = (k_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}$，我们定义 $\mathcal{C}$ 的以下端同态

$$\mathbf{J}^{\circ\mathbf{k}} := \bigcirc_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}\mathbf{J}^{k_{b,m}}_{b,-m} \qquad \text{and} \qquad \bar{\mathbf{J}}^{\circ\mathbf{k}} := \bigcirc_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}\bar{\mathbf{J}}^{k_{b,m}}_{b,-m}, \tag{3.7}$$

其中，算子的复合从左到右按字典逆序排列。现在，定义

$$\mathcal{W} := \mathrm{span}\left\{\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}} := \mathbf{J}^{\circ\mathbf{k}}\bar{\mathbf{J}}^{\circ\tilde{\mathbf{k}}}\mathbf{1} \,|\, \mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}} \in \mathcal{T}\right\} \subset \mathcal{C}, \tag{3.8}$$

其中线性张成取代数意义，$\mathbf{1}$表示 $\mathcal{A}$ 上的常值函数。从˜引理 3.2 可知，$\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}}$ 是一个层级为 $(|\mathbf{k}|,|\mathbf{k}|)$ 的多项式。我们还引入 $\mathcal{C}^{1,0}$ 的如下子空间：

$$\mathcal{V} := \mathrm{span}\left\{\Psi_{\mathbf{k},\emptyset} \,|\, \mathbf{k} \in \mathcal{T}\right\} \subset \mathcal{C}^{1,0}.$$

标准表示论告诉我们，$\mathcal{V}$ 是 Verma 模对一个子模取商所得。根据 Kac–Kazhdan 分类 [KK79]（另见 [MFF86，定理1.1]），该权对应的 Verma 模是不可约的，因此 $\mathcal{V}$ 是一个 Verma 模。特别地，所有状态 $(\Psi_{\mathbf{k},\emptyset})_{\mathbf{k}\in\mathcal{T}}$ 都线性无关。此外，由于 $\Psi_{\mathbf{k},\emptyset} \in \oplus_{n=0}^{|\mathbf{k}|}\mathcal{C}^{1,0}_n$，通过维数计数可知，状态 $(\Psi_{\mathbf{k},\emptyset})_{|\mathbf{k}|\leq N}$ 实际上张成了整个 $\oplus_{n=0}^{N}\mathcal{C}^{1,0}_n$，因此 $\mathcal{V}$ 与 $\mathcal{C}^{1,0}$ 线性同构，且 $\mathcal{C}$ 具有基 $\{\Psi_{\mathbf{k},\emptyset} | \mathbf{k} \in \mathcal{T}\}$。最后，$\mathcal{W}$ 是两个˜独立副本的张量积，因此状态 $\{\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}} | \mathbf{k}$（$\mathbf{k} \in \mathcal{T}\}$）线性无关，并构成 $\mathcal{C} = \mathbb{C}[(\alpha_{b,m},\bar{\alpha}_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}]$ 的一组基。

## 4. Real representation of the Kac–Moody algebra

本节的目标有两个。首先，我们构造一个 Kac–Moody 代数的表示，该表示对应于 $L^{\omega}_1 G$ 在 $\mathcal{A}$ 上的作用，即左乘（将 $\mathcal{A}^{\omega}$ 视为一个环群轨道），见第 4.1 节。其次，该 Kac–Moody 表示给出了 Kac–Moody K¨ahler 形式的 $\partial$-原函数，我们进一步对其积分，得到定义在 $\mathcal{A}^{\omega}$上的 K¨ahler 势 $\mathscr{S}$（第 4.3 节）。该势将在路径积分中发挥作用的角色。值得注意的是，命题 4.3 中的表示最终将证明在 $L^2(\nu_\kappa)$ 上是酉的，见定理5.7。

4.1. **对 $L^{\omega}_1 G$ 在 $\mathcal{A}$上的左作用。** 设 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}$。设 $\chi \in L^{\omega}_1 G$ 并将其光滑延拓为一个取值于 ˆ$G_{\mathbb{C}}$的函数，该函数定义在 $\mathbb{C}$ 上（仍记作 $\chi$）。按照第 3.2节的构造，存在一个光滑函数 $h$：ˆ $\mathbb{C} \to G_{\mathbb{C}}$，它在 $\mathbb{D}^*$ 的一个邻域内全纯，并满足 $\chi g h^{-1} \in D_0 G_{\mathbb{C}}$。此外，映射 $(\chi,\ g) \mapsto \chi g\overline{h^{-1}}$ 定义了 $L^{\omega}_1 G$ 在 $\mathcal{A}$上的左作用。如果将此作用限制

到 $\mathcal{A}^\omega$ 并利用第 $g$ 作为 $L_1^\omega G$ 中的一个元素来看待 $g$，使用第 2.3节的 Birkhoff分解，刚才描述的作用就对应于 $L_1^\omega G$ 通过左乘在其自身上的作用。

现在我们将写出与此作用相关的基本向量场。令 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\hat{}$，并将其光滑地延拓为 $\mathbb{C}$ 上取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的光滑函数（仍记为 $u$）。设 $(\chi_t)$ 是 $L_1^\omega G$ 中的一个 $C^1$ 族，定义在 $t=0$ 的复邻域内，使得

$$\chi_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t \chi_t|_{t=0} = u, \qquad \partial_{\bar{t}} \chi_t|_{t=0} = u^*,$$

这里回忆一下，$u^*(z) = \overline{u(1/\bar{z})}$。根据定义，满足 $g_t := \chi_t g h_t^{-1} \in D_0^\omega G_{\mathbb{C}}$ 的函数 $h_t$ 满足

$$h_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t h_t|_{t=0} = 0, \qquad \partial_{\bar{t}} h_t|_{t=0} = \tilde{u},$$

其中 $\tilde{u}$ 是 $\partial \tilde{u} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\partial u^*)$ 在 $\mathbb{C}$中的唯一解，且 $\tilde{u}(0) = 0$。因此，记 $\dot{g}_t = -\partial g_t g_t^{-1}$，可得如下展开式（回忆引理 $Ku$ 中 3.1 的定义）

$$\dot{g}_t = \quad + tK\ u + \bar{t}K\ u^* + o(t) \qquad \text{in } \mathcal{A}. \tag{4.1}$$

这计算了左作用的基本向量场。现在我们将按照第 3.3 节中的做法，将作用方向上的李导数定义为微分算子。

**定义4.1**。函数 $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ 在 $\alpha \in \mathcal{A}$ 处沿方向 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 左可微，如果存在 $\mathcal{L}_u F(\alpha)$ $\mathcal{L}_{u^*} F(\alpha) \in \mathbb{C}$，使得对于所有在 $t=0$ 的复邻域中定义的 $C^1$-族 $(\chi_t) \in L_1^\omega G$，

$$\chi_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t|_{t=0} \chi_t = u, \qquad \partial_{\bar{t}}|_{t=0} \chi_t = u^*,$$

我们有一阶展开

$$F(\chi_t^{-1} \cdot \alpha) = F(\alpha) + t\mathcal{L}_u F(\alpha) + \bar{t}\mathcal{L}_{u^*} F(\alpha) + o(t).$$

我们称 $F$ 沿方向 $u$ 左可微，如果它在每个 $\alpha \in \mathcal{A}$ 处都沿方向 $u$ 左可微。若 $F$ 沿所有方向 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$左可微，且对所有 $u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 都有 $\mathcal{L}_u F \in C^0(\mathcal{A})$，则称 $F$ 属于 $C^1$ 类。若 $F$ 属于 $C^1$ 类，且对所有 $u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$\mathcal{L}_u F$ 都是光滑的，则称 $F$ 是光滑的（记作 $F \in C^\infty(\mathcal{A})$）。我们用 $C_b^\infty(\mathcal{A}) \subset C^\infty(\mathcal{A})$ 表示有界函数子空间，用 $C_c^\infty(\mathcal{A}) \subset C_b^\infty(\mathcal{A})$ 表示紧支撑函数子空间，也称为测试函数。

由 (4.1) 和引理 3.2 可知，坐标函数在上述意义下是光滑的，这立即意味着 $C^\infty(\mathcal{A})$ 在 $C^0(\mathcal{A})$ 中稠密。该定义引入了空间 $C^\infty(\mathcal{A})$ 以及一族算子 $(\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_{u^*})^{u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$，它们作为 $C^\infty(\mathcal{A})$ 的端同态作用。由于映射 $D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to D_\infty^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, u \mapsto u^*$ 是线性同构，我们得到一族 $(\mathcal{L}_u)^{u \in L_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$。我们前面也提到过，常值环路通过共轭作用；这也为常值 $u \in \mathfrak{g}$ 定义了 $\mathcal{L}_u$，并将其复线性延拓到 $u \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$。按构造，赋值 $u \mapsto \mathcal{L}_u$ 是复线性的，即对所有 $u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，都有 $\mathcal{L}_{iu} = i\mathcal{L}_u$。

**引理 4.2.** 作为 $C^\infty(\mathcal{A})$的端同态，算子 $(\mathcal{L}_u)^{u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 构成了$L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的一个表示：对于所有 $u, v \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z)$，都有

$$[\mathcal{L}_u, \mathcal{L}_v] = \mathcal{L}_{[u,v]}.$$

证明。对于所有满足 $u_+ \in z\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}[z]$ 和 $u_- = u_+^*$ 的 $u = u_+ + u_-$，令 $\mathcal{L}_u^{\mathbb{R}} := \mathcal{L}_{u_+} + \mathcal{L}_{u_-}$。算子 $\mathcal{L}_u^{\mathbb{R}}$ 是本节开头定义的作用所对应的实 李导数，因此它们表示实 环代数，即对于所有 $u, v \in L^\omega \mathfrak{g}$，都有 $[\mathcal{L}_u^{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_v^{\mathbb{R}}] = \mathcal{L}_{[u,v]}^{\mathbb{R}}$。

为了将这些关系推广到复李导数，我们使用显式表达式 $\mathcal{L}_{u_\pm} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_u \mp i\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{Ju})$，其中 $J$ 是第 2.2 节引入的复结构。利用 (2.8)，可得

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_+}] &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[u,v]} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[Ju,Jv]} - \frac{i}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[u,Jv]} - \frac{i}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[Ju,v]} \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[u,v]} - \frac{i}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{J[u,v]} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[Ju,Jv]} + \frac{i}{4}\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{J[Ju,Jv]} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[u,v]_+} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_{[Ju,Jv]_+}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

此外，再次利用（2.8），可得

$$\begin{aligned}[u_+, v_+] &= \frac{1}{4}([u,v] - [Ju,Jv] - i[Ju,v] - i[u,Jv]) \\ &= \frac{1}{4}([u,v] - iJ[u,v] - [Ju,Jv] + iJ[Ju,Jv]) = \frac{1}{2}[u,v]_+ - \frac{1}{2}[Ju,Jv]_+.\end{aligned}$$

将其代入（4.2），确实可得 $[\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_+}] = \mathcal{L}_{[u_+,v_+]}$。交换子 $[\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_-}]$ 的计算方法类似。至于交换子 $[\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_+}]$，一方面有

$$[\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{u_+ + u_-}, \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{v_+ + v_-}] = \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{[u_+ + u_-, v_+ + v_-]} = \mathcal{L}_{[u_+,v_+]} + \mathcal{L}_{[u_+,v_-]} + \mathcal{L}_{[u_-,v_+]} + \mathcal{L}_{[u_-,v_-]},$$

另一方面有

$$[\mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{u_+ + u_-}, \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_{v_+ + v_-}] = [\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_+}] + [\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_-}] + [\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_+}] + [\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_-}],$$

再结合已知的交换子，可得

$$\mathcal{L}_{[u_+,v_-]} + \mathcal{L}_{[u_-,v_+]} = [\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_-}] + [\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_+}].$$

用 $u_+ + u_-$ 替换 $i(u_+ - u_-)$ 进行同样的计算，也可得

$$\mathcal{L}_{[u_+,v_-]} - \mathcal{L}_{[u_-,v_+]} = [\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_-}] - [\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_+}].$$

结合最后这两个显示的方程，得到所需的 $[\mathcal{L}_{u_+}, \mathcal{L}_{v_-}] = \mathcal{L}_{[u_+,v_-]}$ 和 $[\mathcal{L}_{u_-}, \mathcal{L}_{v_+}] = \mathcal{L}_{[u_-,v_+]}$。□

现在，我们将对这些算子作一项修改，使它们以对偶层 $\check{\kappa} = -2h - \kappa$ 表示 Kac–Moody 代数。为此，给定 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们定义：$=-\partial g g^{-1} \in \mathcal{A}^\omega$。我们通过留数配对将其视为 $L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上的线性形式：

$$(u) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(u\ \ ), \qquad \forall u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.$$

现在，我们引入这些算子

$$\mathbf{L}_u := \mathcal{L}_u + \check{\kappa}\ \ (u)\mathrm{Id} \qquad \forall u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}. \tag{4.3}$$

**命题 4.3**。对于所有 $u$、$v \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $\alpha \in \mathcal{A}$，有

$$\mathcal{L}_u\ \ (v) - \mathcal{L}_v\ \ (u) - \ \ ([u,v]) = i\omega_{\mathrm{KM}}(u,v). \tag{4.4}$$

因此，作为 $C^\infty(\mathcal{A})$ 上的端同态，算子 $(\mathbf{L}_u)_{u\in\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(z)}$ 在层级 $\check{\kappa}$ 上构成 *Kac–Moody* 代数的一个表示：

$$[\mathbf{L}_u, \mathbf{L}_v] = \mathbf{L}_{[u,v]} + i\check{\kappa}\omega_{\mathrm{KM}}(u,v)\mathrm{Id}.$$

证明。将 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 视为定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 值函数，并考察由左乘生成的微小运动。它具有如下形式：$g_t = e^{-tu-\bar{t}u^*} g e^{\bar{t}\tilde{u}}$，其中 $\tilde{u}$ 是方程 $\bar{\partial}\tilde{u} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\bar{\partial}u^*)$ 的解。于是我们有 $g_t^{-1} = e^{-\bar{t}\tilde{u}} g^{-1} e^{tu+\bar{t}u^*}$，而在 $\mathcal{A}$ 中的一阶展开为 $_t = \ \ + tK\ \ u + \bar{t}K\ \ u^* + o(t)$。根据定义可知 $\mathcal{L}_u(v) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(vK\ \ u)$，因此，运用与命题 3.5 的证明相同的论证，可得 $\mathcal{L}_{\overline{u}}(v) - \mathcal{L}_v(u) = ([u,v]) + i\omega_{\mathrm{KM}}(u,v)$；将 $u, v$ 换成 $u^*, v^*$ 时，同样成立。□

**4.2. 的右作用 $L_1^\omega G$ 在 $\mathcal{A}$ 上。**在上一节中，我们定义了 $L_1^\omega G$ 在 $\mathcal{A}$ 上的左作用，其在 $\mathcal{A}^\omega$ 上的限制对应于 Birkhoff 分解下 $L_1^\omega G$ 对自身的左乘。当然，我们也可以考虑 $L_1^\omega G$ 对自身的右乘，但由于未必存在唯一分解，这个作用无法扩展到整个 $\mathcal{A}$ 。不过，我们仍然可以定义 $L_1^\omega G$ 在 $\mathcal{A}^\omega$ 上的右作用，并引入相应的李导数。

令 $\chi \in L_1^\omega G$。为了表示 $\chi$ 在 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}^\omega$ 上的作用，我们先令 $\hat{}g$ 为一个在 $\mathbb{D}^*$ 的某个邻域内取 $G_\mathbb{C}$ 值的全纯函数，使得 $g\hat{}g^{-1} \in \overline{L_1^\omega G}$。然后，将第 3.2 节的 $\hat{}^-$ 构造应用于 $\hat{}g$，便有 $h_\chi : \mathbb{C} \to G_\mathbb{C}$，它在 $\mathbb{D}$ 的某个邻域内全纯，并且 $h_\chi^{-1}\hat{}g^{-1}\chi$ 在 $\mathbb{D}^*$ 的某个邻域内全纯。此外，$h_\chi$ 在 $\mathbb{D}$ 上的限制是唯一确定的。于是，$gh_\chi \in D_0^\omega G_\mathbb{C}$ 和 $g\hat{}g^{-1}\chi = (gh_\chi)(h_\chi^{-1}\hat{}g^{-1}\chi)$ 就是我们的新分解。映射 $(g,\chi) \mapsto gh_\chi$ 定义了 $L_1^\omega G$ 在 $D_0^\omega G_\mathbb{C} \simeq \mathcal{A}^\omega$ 上的右作用。

现在，我们对 $\chi = \mathbf{1}_G$ 处的作用求微分，即考虑某个 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 和任意小复数 $t$ 下的 $\chi_t = e^{tu+\bar{t}u^*}$。满足 $h_t^{-1}\hat{}g^{-1}\chi_t$ 在 $\mathbb{D}^*$ 中全纯的函数 $h_t$ 满足

$$h_0 = \mathbf{1}_G, \qquad \partial_t h_t|_{t=0} = \tilde{u}, \qquad \partial_{\bar{t}} h_t = 0,$$

其中 $\tilde{u}$ 是方程 $\bar{\partial}\tilde{u} = \mathrm{Ad}_{\hat{g}^{-1}}(\bar{\partial}u)$ 在 $\hat{}\mathbb{C}$ 中的解，且 $\tilde{u}(0) = 0$。因此，记 $\alpha_t = g_t^{-1}\partial g_t$，我们得到一阶展开

$$\alpha_t = \alpha + tK_\alpha\tilde{u} + o(t) \text{ in } \mathcal{A}.$$

对于所有 $F \in C^\infty(\mathcal{A}^\omega)$，我们都有一阶展开

$$F(\alpha \cdot \chi_t) = F(\alpha) + t\mathcal{R}_u F(\alpha) + \bar{t}\mathcal{R}_{u^*}F(\alpha) + o(t),$$

定义算子 $\mathcal{R}_u \in \mathrm{End}(C^\infty(\mathcal{A}^\omega))$，对所有 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ (按照约定，$\mathcal{R}_u = 0$ 如果 $u$ 为常数)。由于左作用和右作用相互交换，李导数也相互交换，即 $[\mathcal{L}_u, \mathcal{R}_v] = 0$ 对所有 $u,\ v \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$。我们再次强调，算子 $(\mathcal{R}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 不能扩展为整个 $\mathcal{A}$上的微分算子，而只能作用于空间 $\mathcal{A}^\omega$，在该空间中我们可以使用 Birkhoff分解。有关可能扩展方式的讨论，请参见第 5.4节。

至于左作用，我们对这些算子作如下修改：

$$\mathbf{R}_u := \mathcal{R}_u + \check{\kappa}\hat{}(u)\mathrm{Id} \qquad \forall u \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}.$$

与上一节一样，这些算子构成 Kac–Moody 代数在层级 $\check{}\kappa$ 上的一个表示。此外，同样的计算表明，对于所有 $u,\ v \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，$\mathcal{L}_u\hat{}(v) - \mathcal{R}_v(u) = 0$，这意味着这两个表示彼此对易。我们将这些观察总结为一个命题。

**命题 4.4。** 作为 $C^\infty(\mathcal{A}^\omega)$ 上的端同态，族 $(\mathbf{L}_u, \mathbf{R}_u)_{u\in\mathfrak{g}_\mathbb{C}(z)}$ 构成 *Kac–Moody* 代数在层级 $\check{}\kappa$ 上的两个彼此对易的表示：对于所有 $u, v \in \mathfrak{g}_\mathbb{C}(z)$，我们有

$$[\mathbf{L}_u, \mathbf{L}_v] = \mathbf{L}_{[u,v]} + i\check{\kappa}\omega_{\mathrm{KM}}(u,v), \qquad [\mathbf{R}_u, \mathbf{R}_v] = \mathbf{R}_{[u,v]} + i\check{\kappa}\omega_{\mathrm{KM}}(u,v), \qquad [\mathbf{L}_u, \mathbf{R}_v] = 0.$$

**4.3. 关于 $\mathscr{S}$ 的定义与性质。** 上一节引入的算子 $(\mathcal{L}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 描述了 $\mathcal{A}$ 作为配备右不变 Kac–Moody 度量的复流形的可微结构。我们强调，这一复结构与 $\mathcal{A}$上的典范复结构并不相同，即坐标函数 $(\alpha_{b,\ m})_{b\in\mathfrak{B},\ m\geq 1}$ 相对于 Kac–Moody 度量并非全纯。算子 $(\mathcal{L}_u)_{u\in D_0^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 表示德拉姆微分的 (1，0) 部分，而算子 $(\mathcal{L}_u)_{u\in\hat{}D_\infty^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 表示 (0，1) 部分。更确切地说，给定测试函数 $F$，其 (1，0) 微分是函数 $\partial F$：$\mathcal{A} \times D_0^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，由$^-$ $\hat{}\partial F_\alpha(u) = \mathcal{L}_u F(\alpha)$ 定义。类似地，对所有 $\alpha \in \mathcal{A}$ 和 $u \in D_\infty^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，有 $\partial F_\alpha(u) = \mathcal{L}_u F(\alpha)$。

命题 4.3 表明，作为 (0，1) 形式在 $\mathcal{A}^\omega$上，$\quad = -\partial g g^{-1}$ 是 $\bar\partial$闭的（因为 $\omega_{\mathrm{KM}}$ˆˆ ¯ 在 $D^\omega_\infty\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}\times D^\omega_\infty\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上为零）。在有限维复几何中，$\partial$- 庞加莱 ´引理将 ¯ ¯ 立即推出它是局部 $\partial$恰当的（并且事实上是整体 $\partial$恰当的，因为 $\mathcal{A}$ 是拓扑平凡的）。下一个引理/定义在我们的无限维设置中通过¯给出一个函数 $\mathscr{S}$ 使得 $\partial\mathscr{S} = -$ ，使这一点精确化。由命题 4.3，我们于是有

$$i\partial\bar\partial\mathscr{S} = \omega_{\mathrm{KM}},$$

即 $\mathscr{S}$ 是 K¨ahler 势，适用于 Kac–Moody 度量。

**命题 4.5.** 存在唯一函数 $\mathscr{S}\colon \mathcal{A}^\omega \to \mathbb{R}$ 满足

- $\mathscr{S}(\mathbf{1}_G) = 0$。
- 对于所有 $u \in \hat{}D^\omega_\infty\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, $\mathscr{S}$ 在方向 $u$上左可微，并且 $\mathcal{L}_u\mathscr{S}(g) = \frac{1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(u\underline{\partial g g^{-1}})$.

我们称 $\mathscr{S}$ 为普遍卡克–穆迪作用量。

我们将视上下文，把 $\mathscr{S}$视为定义在 $\mathcal{A}^\omega$、 $D^\omega_0G_{\mathbb{C}}$ 或 $L^\omega_1G$ 上的函数。特别地，我们定义

$$\hat{\mathscr{S}}(\gamma) := \mathscr{S}(\gamma^{-1}) \qquad \forall\gamma \in L^\omega_1G. \tag{4.5}$$

证明。 我们将手动证明这一点，只需假设沿方向 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的方向导数存在。

由于我们要求 $\mathscr{S} \in \mathbb{R}$，因此对所有 $u \in D^\omega_0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，还必须有 $\overline{\mathcal{L}_u\mathscr{S}} = -$ (u*)。唯一性显而易见：若 $\mathscr{S}_1$、$\mathscr{S}_2$ 满足所要求的性质，则对所有 $u \in L^\omega_0G_{\mathbb{C}}$，有 $\mathcal{L}_u(\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_2) = 0$。现在，取 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}^\omega$ ，并考虑 $D^\omega_0G_{\mathbb{C}}$ 中的路径 $(g_r)^{r\in[0,1]}$ ，其定义为 $g_r(z) = g(rz)$。我们还有 $\alpha_r(z) = rg_r^{-1}\partial g_r(z) = zr\alpha(rz)$。令 $u_r := \frac{\partial}{\partial\epsilon}_{|\epsilon=0}g_{re^{-\epsilon}}g_r^{-1}$；显然有$u_r(z) = -rz\partial g g^{-1}(rz)$，并注意到 $u. \in C^0([0,1], D^\omega_0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。根据微积分基本定理，有 $\mathscr{S}_1(\alpha) - \mathscr{S}_2(\alpha) = \mathscr{S}_1(0) - \mathscr{S}_2(0) + \int_0^1(\mathcal{L}_{u_r}\mathscr{S}_1(\alpha_r) - \mathcal{L}_{u_r}\mathscr{S}_2(\alpha_r))\mathrm{d}r = 0$。

关于存在性，回忆一下，柯西–庞培公式给出了在带有 $C^1$-边界的复域 $D$ 上计算 (1,0)-形式 $\vartheta$ 的 $\partial$- 原函数的方法：

$$f(z) := \frac{1}{2i\pi}\oint_{\partial D}\frac{\vartheta(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{1}{2i\pi}\int_D\frac{\bar\partial\vartheta(\zeta)}{\zeta - z}.$$

也就是说， $f$ 与 $D$的选择任意性无关，且 $\partial f = \vartheta$。现在，设有一个反全纯嵌入 $q\colon \mathbb{D} \to \mathcal{A}^\omega$ ，它在边界上是 $C^1$ ，并且满足$q(0) = 0$。那么， $q^*$ 是 $\mathbb{D}$上的一个 (1,0)-形式，且 $\partial(q^*) = q^*(\partial) = iq^*\omega_{\mathrm{KM}}$。于是我们可以对 $q^*$ 应用柯西–庞培公式，其中只涉及在 $\bar\partial q \in C^0(\bar{\mathbb{D}};$ $\mathcal{A}^\omega \simeq L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$所指定方向上取值的 和 $\omega_{\mathrm{KM}}$。

¯因此，只要能够找到这样的反全纯嵌入 $q$，我们就可以无歧义地定义$= -\partial g g^{-1} \in \mathcal{A}^\omega$的 $\partial$ 反导数。给定$= -\partial g g^{-1} \in \mathcal{A}^\omega$，我们可以关联一个取值于 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的$\mu$ (0，1)-形式，其在 $\mathbb{D}^*$ 中紧支撑（因此 $\bar\partial g g^{-1} = \mu$）。映射 $\mathbb{D} \ni q \mapsto q\mu$ 由此定义了从 $\mathbb{D}$ 到 $\mathcal{A}^\omega$ 的一个全纯嵌入（其中每个 $q\mu$都代表 $\mathcal{A}^\omega$中的一个唯一点），这¯使我们能够在 $\mathcal{A}^\omega$上无歧义地定义 $\mathscr{S}$，并且 $\partial\mathscr{S} = -$ 。最后，由于 $\omega_{\mathrm{KM}}$ 本身是实的，因此 $\mathscr{S}$ 为实这一事实显而易见。□

注记 3。 $\mathscr{S}$ 的定义在各方面都类似于普遍李乌维尔作用量 [TT06], 的定义，后者是一个 K¨ähler 势，对应于 $\mathrm{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)/\mathrm{PLS}_2(\mathbb{R})$ 上的 Weil–Petersson。一个重要的区别是， $\mathscr{S}$在逆映射（$\mathscr{S} \neq \mathscr{S}$）下并不保持不变，这与普遍李乌维尔作用量相反。从概率角度看，这对应于如下事实： $\nu_\kappa$ 不是可逆的。

事实上，“逆律”在 $\nu_\kappa$ 下的定义本身是非平凡的，因为该测度赋予连续环路的质量为 0。参见第 5.4 节的相关讨论。

注 4. 根据 [MT21，定理 1], 我们预计 $\mathscr{S}$ 可以表示为涉及目标空间为 $G_{\mathbb{C}}/G$ 的 Wess–Zumino–Witten（WZW）作用的表达式。更确切地说，若将 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$ 视为表示一个 $G_{\mathbb{C}}$-丛在 $\mathbb{C}$ 上，并将 $G_{\mathbb{C}}/G$值映射 $\mathbb{C}$ 视为该丛上的厄米度量，那么 $\mathscr{S}$ 应当实现 $G_{\mathbb{C}}/G$-WZW 作用在由 $\alpha$ 表示的该丛所有厄米度量上的下确界。这个恒等式将成为 $\nu_\kappa$ 与 $G_{\mathbb{C}}/G$-WZW 模型之间耦合的起点。

下一个引理表明 $\mathscr{S} \geq 0$，这一事实的证明颇为间接：我们将 $\mathscr{S}$ 沿径向流的微分与动能（1.4）联系起来，而后者本身也值得关注。

**引理 4.6**。对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$，有

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\hat{\mathscr{S}}(e^{-t}\alpha(e^{-t}\cdot)) - \hat{\mathscr{S}}(\alpha)\right) = -\mathscr{E}(\alpha) \leq 0.$$

因此，$\mathscr{S} \geq 0$ 在 $\mathcal{A}^\omega$ 和 $\mathscr{S}(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$。

证明。记 Birkhoff分解为 $\gamma = g\hat{}g^{-1} \in L_1^\omega G$，其中 $\alpha = g^{-1}\partial g$，并令 $\hat{}\alpha := \hat{}g^{-1}\partial\hat{}g$ 以及 $\hat{}: = -\partial\hat{}g\hat{}g^{-1}$。对于任意满足 $\mathrm{Re}(t) > 0$ 的 $t$，令 $h_t(z) := g^{-1}(z)g(e^{-t}z)$，则有

$$\partial_t|_{t=0} h_t(z) = -z\alpha \qquad \text{and} \qquad \partial_{\bar{t}}|_{t=0} h_t = 0.$$

相应的环路 $\gamma$ 运动形式为 $\gamma_t = \gamma\chi_t$，其中 $\chi_t = e^{tu+\bar{t}u^*+o(t)}$，且 $u \in D_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是 $\partial u = -z\mathrm{Ad}_{\hat{g}}(\partial\alpha)$ 的解，并且 $u(0) = 0$（这里我们以任意方式将 $\alpha$ 光滑地扩展 $\hat{}$至 $\mathbb{C}$）。根据 Stokes公式以及 $\hat{} = -\mathrm{Ad}_{\hat{g}}(\hat{}\alpha)$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(u(z)\hat{}(z))\mathrm{d}z &= \int_{\mathbb{D}^*} \mathrm{tr}(\hat{g}(z)\partial_{\bar{z}}\alpha(z)\hat{g}^{-1}(z)\hat{}(z))z|\mathrm{d}z|^2 \\ &= -\int_{\mathbb{D}^*} \mathrm{tr}(\partial_{\bar{z}}\alpha(z)\hat{}(z))z|\mathrm{d}z|^2 = \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(\alpha(z)\hat{\alpha}(z))z\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

另一方面，根据 $\mathscr{S}\hat{}$ 的定义，对于所有 $v \in D_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们有 $\mathcal{R}_v(\hat{}\mathscr{S}) = \frac{-1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(v\hat{})$，因此

$$\hat{\mathscr{S}}(\alpha_t) = \hat{\mathscr{S}}(\alpha) - 2\mathrm{Re}\left(\frac{t}{2i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}\left(\alpha(z)\hat{\alpha}(z)\right) z\mathrm{d}z\right) + o(t). \tag{4.6}$$

接下来要证明，实部中的内容与动能一致。利用$\gamma^{-1}\partial\gamma = \mathrm{Ad}_{\hat{g}}(\alpha + \hat{}\alpha)$ 以及动能的定义（1.4），可得

$$\mathscr{E}(\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1} \left(\mathrm{tr}\left(\alpha(z)\alpha(z)\right) + 2\mathrm{tr}\left(\alpha(z)\hat{\alpha}(z)\right) + \mathrm{tr}\left(\hat{\alpha}(z)\hat{\alpha}(z)\right)\right) z\mathrm{d}z = \frac{1}{i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(\alpha(z)\hat{\alpha}(z))z\mathrm{d}z.$$

最后一个等号仅仅是因为 $\mathrm{tr}(\alpha,\alpha)$ 和 $\mathrm{tr}(\hat{}\alpha,\hat{}\alpha)$ 分别关于 $\mathbb{D}$ 和 $\hat{}\mathbb{D}^*$ 全纯。将其代入（4.6），得到 $\mathscr{S}(\alpha_t) = \mathscr{S}(\alpha) - \mathrm{Re}(t\mathscr{E}(\alpha)) + o(t)$。在实切片 $\mathrm{Im}(t) = 0$ 上对其取值可得，$\mathscr{S}$沿径向流递减。

$\hat{}\hat{}$接下来只需证明，当且仅当 $\alpha = 0$ 时，$\mathscr{S} \geq 0$ 成立。函数 $\mathscr{S}$ 在 $\mathcal{A}^\omega$ 上属于 $C^2$ 类，其在 0 处的微分为零，且在 0 处的海森矩阵正定（它就是 Kac–Moody内积）。因此，存在 $\mathcal{U}$，它是 $\mathcal{A}^\omega$ 中 0 的一个邻域，使得 $\mathscr{S} > 0$ 在 $\mathcal{U}\setminus\{0\}$ 中成立。现在，从任意 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega \setminus \{0\}$ 出发的径向流在 $t \to \infty$ 时收敛到 $0 \in \mathcal{A}^\omega$，因此我们可以取有限的 $t_0 > 0$，使得 $\alpha_{t_0} \in \mathcal{U}$，显然还有 $\alpha_{t_0} \neq 0$。于是我们有 $\hat{}\hat{}\mathscr{S}(\alpha) \geq \mathscr{S}(\alpha_{t_0}) > 0$。□

先验地，势 $\mathscr{S}$ 仅定义在 $\mathcal{A}^\omega$ 上，但下一个命题表明，势之差可以延拓到整个 $\mathcal{A}$。更准确地说，我们证明，定理 1.1 中出现的协方差模空间 $\Omega$ 和 $\Lambda$ 是定义在 $L_1^\omega G \times \mathcal{A}$ 上的良定义连续函数。˄ 回忆第 3.2 节，我们有 $\mathcal{A}$ 上的 $D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 右作用；又由第 4.1 节可知，我们有 $\mathcal{A}$ 上的 $L_1^\omega G$ 左作用。若 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$、$h \in D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 和 $\chi \in L_1^\omega G$，我们分别将这些作用记为 $(\chi, \alpha) \mapsto \chi \cdot \alpha$ 和 $\hat{}\,(\alpha, h) \mapsto \alpha \cdot h$。

˄**命题 4.7.** 设 $\Omega\colon L_1^\omega G \times \mathcal{A}^\omega \to \mathbb{R}$ 和 $\Lambda\colon \mathcal{A}^\omega \times D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\Omega(\chi, \alpha) := \mathscr{S}(\chi \cdot \alpha) - \mathscr{S}(\alpha), \qquad \textit{and} \qquad \Lambda(\alpha, h) := \mathscr{S}(\alpha \cdot h) - \mathscr{S}(\alpha).$$

˄函数 $\Omega$ 和 $\Lambda$ 分别连续延拓为定义在 $L_1^\omega G \times \mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A} \times D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$ 上的函数，仍记作 $\Omega$ 和 $\Lambda$。

证明。 我们只讨论 $\Omega$ 的情形，$\Lambda$ 的情形完全相同。

固定 $\chi \in L_1^\omega G$。设 $(\chi_t)^{t\in[0,1]}$ 是 $L_1^\omega G$ 中的一条 $C^1$-路径，满足 $\chi_0 = \mathbf{1}_G$ 和 $\chi_1 = \chi$。记作 $u_t := \frac{\partial}{\partial \epsilon}_{|\epsilon=0} \chi_{t+\epsilon} \chi_t^{-1}$。根据定义，我们有 $u_\cdot \in C^0([0,1]; L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。因此，对所有 $\alpha \in \mathcal{A}^\omega$，函数 $t \mapsto \mathscr{S}(\chi_t \cdot \alpha)$ 属于 $C^1$ 类，并且有

$$\Omega(\chi, \alpha) = \int_0^1 \partial_t \mathscr{S}(\chi_t \cdot \alpha) \mathrm{d}t = \int_0^1 2\mathrm{Re}(\mathcal{L}_{u_t} \mathscr{S}(\chi_t \cdot \alpha)) \mathrm{d}t. \tag{4.7}$$

记 $\alpha_t := \chi_t \cdot \alpha$，我们有 $\mathcal{L}_{u_t} \mathscr{S}(\alpha_t) = \frac{1}{2i\pi} \oint \mathrm{tr}(u_t \alpha_t)$，其中围道可以选为 $\mathbb{D}$ 中的一个圆，并且与 $\partial\mathbb{D}$ 保持一致的正距离，例如 $r\mathbb{S}^1$，其中 $r \in$ 是某个固定的 $(0, 1)$ 中的元素。因此，对每个 $t \in [0,1]$，映射 $\mathcal{A}^\omega \ni \alpha \mapsto \oint \mathrm{tr}(u_t \alpha)$ 都连续延拓为 $\mathcal{A}$ 上的一个函数。由于这一性质关于 $t \in [0,1]$ 是一致的，(4.7) 表明 $\Omega(\chi, \cdot)$ 连续延拓到 $\mathcal{A}$。最后，(4.7) 显然关于 $\chi$ 连续，因此该延拓属于 $C^0(L_1^\omega G \times \mathcal{A})$。□

## 5. Proof of Theorem 1.1

我们赋予 $\mathcal{A}$ 局部一致拓扑，即由以下半范数族生成的拓扑

$$\left\{ \|\alpha\|_{C^0(K)} := \sup_{z \in K} |z\alpha(z)| \,\middle|\, K \subset \mathbb{D} \text{ compact} \right\},$$

其中，我们对任意 $u \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 定义了 $\overline{|u|} := \sqrt{-\mathrm{tr}(u\bar{u})}$。空间 $\mathcal{A}$ 是可分且完全可度量的，例如可赋予距离 $d_{\mathcal{A}}(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2^{-n} \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{C^0(e^{-1/n}\bar{\mathbb{D}})}}{1 + \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{C^0(e^{-1/n}\bar{\mathbb{D}})}}$。因此，$\mathcal{A}$ 成为一个波兰空间，并以 $\mathcal{A}^\omega$ 作为稠密子空间。根据蒙泰尔定理，对每个 $R > 0$，集合

$$K_R := \left\{ \alpha \in \mathcal{A} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}_{>0},\ \|\alpha\|_{C^0(e^{-1/n}\bar{\mathbb{D}})} \le R n^4 \right\} \tag{5.1}$$

是 $\mathcal{A}$ 的一个紧子集（任意选取指数 4，是为了使某些级数稍后收敛）。我们将记

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) := \{\text{Borel probability measures on } \mathcal{A}\}. \tag{5.2}$$

由于 $\mathcal{A}$ 是波兰空间，每个 $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 都是内正则的。空间 $\mathcal{A}$ 既非紧致也非局部紧，但引理 5.2 先验地表明，每个酉化测度都必须将全质量赋予 $\cup_{R>0} K_R$。因此，就酉化测度而言，空间 $\mathcal{A}$ 看起来像是一个由族 $(K_R)_{R>0}$ 穷尽的局部紧空间。若测度 $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 满足以下两个条件，我们就称其由其矩刻画：首先，$\mathcal{C}^{1,0} \subset L^2(\nu)$；其次，若

$\tilde{\nu} \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 满足 $\mathcal{C}^{1,0}_{\cdot} \subset L^2(\tilde{\nu})$ 且 $\langle P, Q\rangle_{L^2(\tilde{\nu})} = \langle P, Q\rangle_{L^2(\nu)}$ 对所有 $P, Q \in \mathcal{C}^{1,0}_{\cdot}$ 都成立，则 $\tilde{\nu} = \nu$属于 $\mathbb{P}(\mathcal{A})$。

在我们能够将它们合并为同一个对象之前（即第 5.3 节末尾），我们将满足（1.1）的测度称为 $L^\omega_1 G$-协变测度，将满足（1.2）的测度称为 $\hat{} D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$-协变测度。

证明思路如下。在第 5.1 节中，我们证明 $L^\omega_1 G$-协变测度也具有 $\hat{} D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$-协变性。在第 5.2 节中，我们构造一个 $L^\omega_1 G$-协变测度。在第 5.3 节中，我们证明该测度由其矩唯一确定，并且任意 $L^\omega_1 G$-协变测度的矩也已确定，从而完成定理的证明。最后，第 5.4 节讨论算子（$\mathbf{J}_u$，$\bar{\mathbf{J}}_u$，$\mathbf{L}_u$，$\mathbf{R}_u$）$_{u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 在 $L^2$（$\nu_\kappa$）上的闭包，以及相应 Kac–Moody 表示的沙波瓦洛夫形式。层级之间始终满足公式 $\check{\kappa} = -2h - \kappa > 0$。

注记 5. 在整个证明过程中，我们会频繁书写涉及如下形式表达式的积分：$\mathcal{L}_u(\mathscr{S})$ 或 $\mathcal{J}_u(\mathscr{S})$，这里指的是这些表达式从 $\mathcal{A}^\omega$ 到 $\mathcal{A}$的连续延拓。例如，函数 $\mathcal{J}_u\mathscr{S}(\alpha) = \alpha(u)$ 可连续延拓到 $\mathcal{A}$，尽管 $\mathscr{S} = \infty$以满 $\nu_\kappa$-概率成立。这种轻微的记号滥用使计算更易于理解。

$\hat{}$5.1. **$L^\omega_1 G$-协变测度是 $D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$-协变的。** 本节的目标是展示 $L^\omega_1 G$-协变测度与 $D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$-协变测度之间的 $\hat{}$ 联系，这或许是定理 1.1.

$\hat{}$**命题 5.1.** 设 $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 是一个 $L^\omega_1 G$-协变测度。那么，$\nu$ 是 $D^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$-协变的。

我们将证明推迟到本节末尾，先需要以下两个引理。我们首先给出 $L^\omega_1 G$-协变测度支集的先验界。回顾式（5.1）中的 $K_R$ 的定义。

**引理 5.2.** 设 $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 为一个 $L^\omega_1 G$-协变测度。则 $\nu(\cup_{R>0} K_R) = 1$。

证明. 设 $\rho \in C^\infty_c(\mathcal{A})$ 使得 $\rho \equiv 1$ 在 $\cup_{R>0} K_R$ 上。

通过对协方差公式在 $\chi = \mathbf{1}_{G_{\mathbb{C}}}$ 处求两次微分，并利用 $\mathbf{L}_{b,m}(\mathbf{L}_{b,-m}(\mathbf{1})) = \check{\kappa}^2 |\ _{b,m}|^2 - \check{\kappa} m$，我们得到 $\int_{\mathcal{A}} |\ _{b,m}|^2 \rho \mathrm{d}\nu = O(m)$。因此，由马尔可夫不等式和博雷尔–坎泰利引理，对 $\nu$-几乎处处的 $\in \mathrm{supp}(\rho)$，存在 $m_0 \in \mathbb{N}_{>0}$ 使得 $|\ _{b,m}| \le m^{3/2}$ 对所有 $b \in \mathfrak{B}, m \ge m_0$ 成立。现在，对每个 $r \in (0,1)$，由柯西–施瓦茨不等式，我们几乎必然有 $\sup_{z \in r\mathbb{D}} |z(z)| \le (\sum_{b \in \mathfrak{B}, m \ge 1} r^m \sum_{b \in \mathfrak{B}, m \ge 1} |\ _{b,m}|^2 r^m)^{1/2} = O_{r \nearrow 1}((1-r)^{-5/2})$。由此立即推出，对某个 $R > 0$ 有 $\in K_R$。

因此，我们已经证明，对于所有紧集 $K \subset \mathcal{A}$，$\nu(K) = \nu(K \cap (\cup_{R>0} K_R))$。由于 $\nu$ 是波兰空间上的博雷尔测度，且为内正则测度，证明至此完成。□

现在我们将证明命题 5.1 的无穷小版本，即任意 $L^\omega_1 G$-协变测度所满足的分部积分公式。

**引理 5.3.** 设 $\nu \in \mathbb{P}(\mathcal{A})$ 是一个 $L^\omega_1 G$-协变测度。我们有

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_u(F) \mathrm{d}\nu = 0 = \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathbf{J}}_u(F) \mathrm{d}\nu, \qquad \forall F \in C^\infty_c(\mathcal{A}), \forall u \in \hat{D}^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}. \tag{5.3}$$

证明。对所有 $u \in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，应用（1.1）并对 $\chi = e^{tu+\bar{t}u^*}$ 使用控制收敛，然后在 $t=0$ 处求导，对于所有 $F \in C_c^\infty(\mathcal{A})$ 均成立（回忆注记 5）

$$\int_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_u(F)\mathrm{d}\nu = \check{\kappa} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_u(\mathscr{S})F\mathrm{d}\nu. \tag{5.4}$$

根据表示（$\mathbf{L}u$）$_{u\in L^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$的定义，这意味着 $\int_{\mathcal{A}} \mathbf{L}_u(F)\mathrm{d}\nu = 0$ 对所有 $u \in \hat{D}^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$均成立。证明的核心是理解从 $(\mathcal{L}_u)_{u\in L^\omega_0 \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 到 $(\mathcal{J}_u, \mathcal{J}_u)_{u\in \hat{D}^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$的坐标变换，这可以理解为 $LG$与 $D_0G_{\mathbb{C}}$上（不存在的）哈尔测度之间的雅可比行列式，即在通常的参数化$\gamma = g\hat{}g^{-1} \in L^\omega G$下，我们启发式地有“$D\hat{}g = e^{2\check{h}\mathscr{S}(\gamma)}D\gamma$”。

令 $u \in \hat{D}^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$以及 $\alpha = g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}$。以任意方式将 $u$光滑地延拓到 $\hat{\mathbb{C}}$。我们考虑 $g_t = e^{-t\tilde{u}-\bar{t}\tilde{u}^*+o(t)}ge^{tu} \in D_0G_{\mathbb{C}}$中的微小运动，其中 $\tilde{u}$是方程 $\bar{\partial}\tilde{u} = \mathrm{Ad}_g(\bar{\partial}u)$ 和$\tilde{u}(\infty) = 0$的解。具体地，利用柯西变换（2.11）并在 $z=\infty$处展开，我们得到

$$\tilde{u}(z) = \sum_{b\in\mathfrak{B}, m\le -1} \beta^u_{b,m} b \otimes z^m \qquad \text{with} \qquad \beta^u_m = \frac{1}{2i\pi}\oint g(z)u(z)g^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{m+1}}, \tag{5.5}$$

以及 $\beta^u_{b,\,m} = \mathrm{tr}(\beta^u_m,\ b)$。这里，围道可以取为 $\mathbb{D}$ 中任意一个在内部包含 $\partial u$ 的支集$^-$的圆。

根据定义，$\mathcal{J}_u$ 是由 $u$ 生成的无穷小运动沿其作用的微分。另一方面，表达式 $g_t = e^{-t\tilde{u}-\bar{t}\tilde{u}^*}ge^{tu}$ 也是由 $\tilde{u}$ 沿第 4.1 节引入的作用所生成的微小运动。因此，作用于测试函数时，我们有 $\mathcal{J}_u = \mathcal{L}_{\tilde{u}} = \sum_{b\in\mathfrak{B},\ m\le -1} \beta^u_{b,\,m}\mathcal{L}_{b,\,m}$。根据（5.4），对于所有 $F \in C_c^\infty(\mathcal{A})$ 以及所有 $M \ge 1$,

$$\int_{\mathcal{A}} \sum_{b\in\mathfrak{B}, -M\le m\le -1} \beta^u_{b,m}\mathcal{L}_{b,m}(F)\mathrm{d}\nu = \int \sum_{b\in\mathfrak{B}, -M\le m\le -1} \left(\check{\kappa}\beta^u_{b,m}\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{S}) - \mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m})\right) F\mathrm{d}\nu. \tag{5.6}$$

由于 $F$ 是测试函数，我们有收敛关系 $\sum_{b\in\mathfrak{B},\ -M\le m\le -1} \beta^u_{b,\,m}\mathcal{L}_{b,\,m}(F) \to \mathcal{J}_u(F)$ 在$L^1(\nu)$ 中。此外，对于所有 $\alpha \in \mathcal{A}$，我们有（回忆一下基 $b_m = b \otimes z^m$）

$$\sum_{b\in\mathfrak{B}, -M\le m\le -1} \beta^u_{b,m}\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{S}) = -\sum_{b\in\mathfrak{B}, -M\le m\le -1} {}_{b,m}(\beta^u_{b,m}b_m) \underset{M\to\infty}{\to} -\ (\tilde{u}).$$

根据 Stokes公式 以及 $= -\mathrm{Ad}_g(\alpha)$ 这一事实，我们也有

$$(\tilde{u}) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{D}} \mathrm{tr}(\ \wedge \bar{\partial}\tilde{u}) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{D}} \mathrm{tr}(\alpha \wedge \bar{\partial}u) = -\alpha(u).$$

由控制收敛定理，收敛 $\sum_{b\in\mathfrak{B},\ m\le -1} \beta^u_{b,\,m}\mathcal{L}_{b,\,m}(\mathscr{S}) = \alpha(u)$ 在$L^1(\nu)$ 中也成立。因此，(5.6) 可以改写为

$$\int_{\mathcal{A}} (\mathcal{J}_u(F) - \check{\kappa}\alpha(u)F)\,\mathrm{d}\nu + \int_{\mathcal{A}} \sum_{b\in\mathfrak{B}, m\le -1} \mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m})F\mathrm{d}\nu = 0. \tag{5.7}$$

证明以下结论即可得到该结果（回忆 $-\check{}\kappa = 2\check{}h + \kappa$）

$$\sum_{b\in\mathfrak{B}, m\le -1} \mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m}) = -2\check{h}\alpha(u) \text{ in } L^1(\nu). \tag{5.8}$$

$\hat{}$ 为了证明这个单位元，我们先固定任意一个 $v \in D^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，并求出 $\mathcal{L}_v(\beta^u_{b,\,m})$ 的公式。$^-$我们以任意方式将 $v$ 延拓到整个球面，并注意到 $\partial v$ 在 $\mathbb{D}$ 中紧支撑。

$v$ 所诱导的形变具有如下形式： $g_t = e^{-tv-\bar{t}v^*} g e^{t\tilde{v}+o(t)}$，其中 $\tilde{v}$ 满足 $\bar{\partial}\tilde{v} = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\bar{\partial}v)^-$，且 $\tilde{v}(\infty) = 0$。具体而言，对于所有远离 $\partial v$ 支集的 $z$，我们有

$$\tilde{v}(z) = \frac{1}{2i\pi}\oint g^{-1}(\zeta)v(\zeta)g(\zeta)\frac{\zeta \mathrm{d}\zeta}{z(\zeta - z)},$$

其中围道可以取为一个圆，该圆位于 $\mathbb{D}$ 并包含 $\partial u$ 的支集，且 $z$ 位于其外部。对 $t$在 $t = 0$ 的定义式 $\beta^u_m$ (5.5)中取

$$\mathcal{L}_v(\beta^u_m) = \frac{-1}{2i\pi}\oint g(z)[u(z), \tilde{v}(z)]g^{-1}(z)\frac{\mathrm{d}z}{z^{m+1}} + \frac{1}{2i\pi}\oint [g(z)u(z)g^{-1}(z), v(z)]\frac{\mathrm{d}z}{z^{m+1}}.$$

现在，我们将此应用于 $v = b_m = b \otimes z^m$ 以计算$\mathcal{L}_{b,\ m}(\beta^u_{b,\ m}) = \mathrm{tr}(\mathcal{L}_{b,\ m}(\beta^u_m)\ b)$。由 Killing 形式的不变性（2.1），可知前一个等式右边的第二项为零。对于第一项，利用柯西变换表示 $\tilde{u}$ 并结合 Killing 形式的不变性，可得：

$$\mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m}) = \frac{1}{4\pi^2}\oint\oint \mathrm{tr}(u(z), [g(\zeta)bg^{-1}(\zeta), g(z)bg^{-1}(z)])\frac{\zeta^{m+1}\mathrm{d}\zeta \mathrm{d}z}{z^{m+2}(\zeta - z)}.$$

在此公式中，围道可以取为位于 $\mathbb{D}$ 内、包含 $\partial u$ 支集的圆，且 $\zeta$半径严格小于 $z$半径。不过请注意， $z = \zeta$ 处表面上的奇点是可去的（因为我们得到的是 $g(z)bg^{-1}(z)$与其自身的交换子，而它为零），因此，即使改为令 $\zeta$半径严格大于 $z$半径，公式仍保持不变。随后，我们可以对 $m \leq -1$ 求几何级数之和，从而对所有 $b \in \mathfrak{B}$得到：

$$\sum_{m\leq -1}\mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m}) = \frac{-1}{4\pi^2}\oint\oint \mathrm{tr}\left(g(z)u(z)g^{-1}(z), [b, g(z)g^{-1}(\zeta)bg(\zeta)g^{-1}(z)]\right)\frac{\mathrm{d}\zeta \mathrm{d}z}{(\zeta - z)^2}$$

对于固定的 $z$， $\zeta$ 被积函数在单位圆盘内是全纯的，并且在 $z = \zeta$ 处有唯一的二重极点，因此可化为在 $\zeta = z$ 处取值的微分。利用初等计算 $\frac{\partial}{\partial\zeta}_{|\zeta=z} g(z)g^{-1}(\zeta)bg(\zeta)g^{-1}(z) = [b, \partial g g^{-1}(z)],$，前面显示的方程化为

$$\sum_{m\leq -1}\mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m}) = \frac{-1}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}\left(g(z)u(z)g^{-1}(z), \left[b, [b, \partial g g^{-1}(z)]\right]\right)\mathrm{d}z$$

对 $b \in \mathfrak{B}$ 求和，我们认出伴随表示中的卡西米尔元（2.2），因此（2.3）给出

$$\sum_{b\in\mathfrak{B}, m\leq -1}\mathcal{L}_{b,m}(\beta^u_{b,m}) = \frac{-2\check{h}}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(g^{-1}(z)u(z)g(z), \partial g g^{-1}(z))\mathrm{d}z = \frac{-2\check{h}}{2i\pi}\oint \mathrm{tr}(ug^{-1}\partial g).$$

这证明了对于 $\nu$-几乎处处的 $\alpha \in \mathcal{A}$，收敛性（5.8）成立。事实上，将前面的表达式视为几何级数，并利用控制收敛定理，可以很容易地将该收敛提升为在 $L^1(\nu)$ 中的收敛。有了这一点，（5.7）变为 $\int_{\mathcal{A}} \mathrm{J}_u(F)\mathrm{d}\nu = \int_{\mathcal{A}}(\mathcal{J}_u(F) + \kappa\alpha(u)F)\mathrm{d}\nu = 0$。对 $\int_{\mathcal{A}} \bar{\mathrm{J}}_u(F)\mathrm{d}\nu = 0$ 的证明完全相同，从而完成引理的证明。□

证明 命题 5.1. 我们将对引理 5.的无穷小公式进行积分。 3.

设 $h \in \hat{D}^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$ 和 $(h_t)_{t\in[0,1]}$ 是 $\hat{D}^\omega_\infty G_{\mathbb{C}}$ 中的一个 $C^1$-族，且满足 $h_0 = \mathbf{1}_G$ 和 $h_1 = h$。记作 $u_t := \frac{\partial}{\partial\epsilon}_{|\epsilon=0} h_t^{-1}h_{t+\epsilon}$，并注意到 $u_\cdot \in C^0([0,1]; \hat{D}^\omega_\infty \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$。

设 $F \in C_c^\infty(\mathcal{A})$，并定义 $F_{h_t}(\alpha) := F(\alpha \cdot h_t)$，对所有 $t \in [0,1]$ 以及所有 $\alpha \in \mathcal{A}$。根据引理 5.3以及命题 Λ 4.7的定义，我们有

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{\mathcal{A}} F(\alpha \cdot h_t) e^{\kappa\Lambda(\alpha,h_t)} \mathrm{d}\nu(\alpha) &= \int_{\mathcal{A}} \left(\mathcal{J}_{u_t} F_{h_t}(\alpha) + \kappa F_{h_t}(\alpha) \mathcal{J}_{u_t}\mathscr{S}_{h_t}(\alpha)\right) e^{\kappa\Lambda(h_t,\alpha)} \mathrm{d}\nu(\alpha) \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}} \left(\bar{\mathcal{J}}_{u_t} F_{h_t}(\alpha) + \kappa F_{h_t}(\alpha) \bar{\mathcal{J}}_{u_t}\mathscr{S}_{h_t}(\alpha)\right) e^{\kappa\Lambda(h_t,\alpha)} \mathrm{d}\nu(\alpha) \\ &= \int_{\mathcal{A}} \mathcal{J}_{u_t}\left(F_{h_t} e^{\kappa\Lambda(h_t,\cdot)}\right) \mathrm{d}\nu + \kappa \int_{\mathcal{A}} \mathcal{J}_{u_t}(\mathscr{S}) F_{h_t} e^{\kappa\Lambda(\cdot,h_t)} \mathrm{d}\nu \\ &\quad + \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{J}}_{u_t}\left(F_{h_t} e^{\kappa\Lambda(h_t,\cdot)}\right) \mathrm{d}\nu + \kappa \int_{\mathcal{A}} \bar{\mathcal{J}}_{u_t}(\mathscr{S}) F_{h_t} e^{\kappa\Lambda(\cdot,h_t)} \mathrm{d}\nu = 0.\end{aligned}$$

对 $t$ 积分得 $\int_{\mathcal{A}} F(\alpha \cdot h) e^{\kappa\Lambda(\alpha,h)} \mathrm{d}\nu(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} F(\alpha) e^{\kappa\Lambda(\alpha,\mathbf{1}_{G_{\mathbb{C}}})} \mathrm{d}\nu(\alpha) = \int_{\mathcal{A}} F(\alpha) \mathrm{d}\nu(\alpha)$，从而得到对测试函数成立的结果。由引理 5.2，为了将其推广到所有 $F \in C_b^0(\mathcal{A}$，只需考虑支集包含于 $\cup_{R>0} K_R$中的函数。

令 $\rho \in C_c^\infty(\mathcal{A})$ 满足： $\rho$ 的支集包含于 $K_2$，且 $\rho \equiv 1$ 在 $K_1$ 上。再令 $\rho_R(\alpha) := \rho(R^{-1}\alpha)$ 对所有 $\alpha \in \mathcal{A}, R > 0$ 都成立（因此 $\rho_R$ 的支集包含于 $K_{2R}$）。由控制收敛，对所有$\chi \in L_1^\omega G$，当 $R \to \infty$ 时，有 $\int_{\mathcal{A}} \rho_R(\chi^{-1} \cdot \alpha) \mathrm{d}\nu \to 1$。于是，由法图引理和适用于测试函数的协变公式可得 $e^{\kappa\Lambda(\cdot,h)} \in L^1(\nu)$，并且 $\int_{\mathcal{A}} e^{\kappa\Lambda(\alpha,h)} \mathrm{d}\nu = \lim_{R\to\infty} e^{\kappa\Lambda(\cdot,h)} \rho_R \mathrm{d}\nu = \hat{} 1$。由于 $\nu$ 是一个 $D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$-协变测度，这一事实便由 $C_b^\infty(\mathcal{A})$ 在 $C_b^0(\mathcal{A})$ 中的稠密性得出。□

5.2. **酉化测度的存在性**。本节证明存在一个 $L_1^\omega G$-协变测度，具体陈述如下命题。

**命题 5.4**。对每个 $\check{}\kappa > 0$，都存在一个层级为 $\check{}\kappa$ 的 $L_1^\omega G$-协变测度。

我们的策略是将酉化测度构造为一族加权维纳测度的弱极限。之所以选择这种方法（而非例如在 $\mathcal{A}$ 上取高斯测度），是因为维纳测度在变换下具有协变性，因此我们可以将分部积分公式传递到极限。开始证明之前，我们先介绍一些关于这些测度的背景知识。主要参考文献是 [MM90], ，尤其是其中的定理 B。

回忆 ( $\mathscr{E}$ 1.4) 中动能 $\mathscr{E}$ 的定义。给定 $\chi \in L^\omega G$，经过初等计算可得

$$\mathscr{E}(\chi\gamma) = \mathscr{E}(\gamma) + \frac{i}{\pi} \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(\chi^{-1}\partial_z\chi, \partial_z\gamma\gamma^{-1}) z \mathrm{d}z + \mathscr{E}(\chi).$$

现在，假设 $\chi_t = e^{-tu-\bar{t}u^*}$ 对于某个 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 成立。在 $t = 0$ 处求导，前述公式给出

$$\mathcal{L}_u \mathscr{E}(\gamma) = \frac{i}{\pi} \oint_{\mathbb{S}^1} \mathrm{tr}(\partial_z u, \partial_z\gamma\gamma^{-1}) z \mathrm{d}z. \tag{5.9}$$

给定 $\sigma > 0$，我们用 $\mathbb{P}_\sigma$ 表示方差为 $\sigma^{-2}$ 的维纳测度（且 $\mathbb{E}_\sigma$ 为其期望），其定义在环空间 $C_1^0$（$\mathbb{S}^1$； $G$）上：$= \{\gamma \in C^0$（$\mathbb{S}^1$； $G$）$| \gamma$（1） $= 1_G\}$。对我们而言，维纳测度最重要的性质将是如下分部积分公式 [MM90，定理 B]。对所有 $u \in D_0^\omega \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 以及所有 $F \in C_c^\infty$（$\mathcal{A}$），

$$\mathbb{E}_\sigma\left[\mathcal{L}_u(F)\right] = \sigma^2 \mathbb{E}\left[\mathcal{L}_u(\mathscr{E})F\right]. \tag{5.10}$$

我们提醒读者注意公式中的记号滥用，见注5 。

布朗运动具有相应的正则性，因此维纳测度对任意 $p \in (0, 1 2 )$ 的 H¨older 空间 $C^s(\mathbb{S}^1; G)$ 赋予全质量。此外，根据 [CG81 定理 6.2], ，每个 $\gamma \in C^s(\mathbb{S}^1; G)$ 都有一个 Birkhoff 分解 $\gamma = g\hat{\lambda}g^{-1}$ ，其中 $g \in D_0 G_{\mathbb{C}}$ 可连续延拓为 $s$-H¨older 函数至 $\bar{\mathbb{D}}$。[5] 当然，这个分解在整体规范对称性意义下是唯一的，因此我们得到一个定义良好的映射 $C^s(\mathbb{S}^1; G) \to \mathcal{A}$。事实上，这个映射是连续的，因为 [CG81] 的论证基于取极限，而这得益于相关 H¨older 空间上某个算子的有界性。因此，我们得到一个几乎处处（相对于 $\mathbb{P}_\sigma$）定义的可测映射 $C^0(\mathbb{S}^1; G) \to \mathcal{A}$ ，并将其在 $\mathcal{A}$ 上对应的推前测度记为 $\mathbb{P}_\sigma$ 。换言之，若将维纳分布的回路 $\gamma = g\hat{\lambda}g^{-1}$ 按其 Birkhoff分解表示，则 $\mathbb{P}_\sigma$ 是 $g^{-1}\partial g \in \mathcal{A}$ 的边缘分布。我们还将 $\mathbb{P}_\sigma^\epsilon$ 记为当 $\alpha$ 取自 $\mathbb{P}_\sigma$ 时 $e^{-\epsilon}\alpha(e^{-\epsilon}\cdot)$ 的分布。

命题的证明 *5.4*5.4. 按照上述设置，对每个 $\sigma > 0$，我们定义概率测度 e

$$\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma := \frac{1}{\mathcal{Z}_\kappa^\sigma} e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}} \mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_\sigma^\sigma \qquad \text{with} \qquad \mathcal{Z}_\kappa^\sigma := \int_{\mathcal{A}} e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}} \mathrm{d}\tilde{\mathbb{P}}_\sigma^\sigma. \tag{5.11}$$

˜ ˜这是定义良好的，因为 $\mathscr{S}$ 几乎处处有限 $\mathbb{P}_\sigma^\sigma$（回想一下，$\mathbb{P}_\sigma^\sigma$ 可全纯延拓至$e^\sigma\mathbb{D}$），且 $e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}} \le 1$ 根据引理 4.6。我们希望证明，当 $\nu_\kappa^\sigma$ 趋于 $\sigma \to 0$时，弱收敛到一个酉化测度。由维纳测度的准不变性 [MM90定理 B], 矩生成函数 $\mathfrak{F}_{\nu_\kappa^\sigma}$ 对所有 $\sigma > 0$均处处收敛；特别地，所有矩都有限。在证明的其余部分，我们将先说明序列（$\nu_\kappa^\sigma$）$_{\sigma>0}$ 在$\mathbb{P}(\mathcal{A})$ 中是紧的，当 $\sigma \to 0$ （通过二阶矩计算），然后证明任何子列极限都必须是酉化测度。

我们首先计算 $\partial\gamma\gamma^{-1}$ 在维纳测度 $\mathbb{P}_\sigma$下的傅里叶系数的二阶矩。利用(5.9)和(5.10)，我们有 $\mathbb{E}_\sigma\left[|\mathcal{L}_u\mathscr{E}|^2\right] = \sigma^{-2}\mathbb{E}_\sigma\left[\mathcal{L}_{u^*}(\mathcal{L}_u(\mathscr{E}))\right]$。此外，对所有 $u$、$v \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，不难直接算出 $\mathcal{L}_v(\mathcal{L}_u(\mathscr{E})) = \frac{1}{i\pi}\oint_{\mathbb{S}^1}(\mathrm{tr}(\partial_z u, \partial_z v)+\mathrm{tr}(\partial_z\gamma\gamma^{-1}, [\partial_z u, \partial_z v]))z\mathrm{d}z$。将其应用于某些 $b \in \mathfrak{B}$、$m \ge 1$的 $u = v^* = b \otimes z^m$ ，我们最终得到

$$\mathbb{E}_\sigma[|\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E})|^2] = 2\sigma^{-2}m^2. \tag{5.12}$$

我们继续计算系数的二阶矩$_{b、m}$ 在 $\nu_\kappa^\sigma$下。利用$\mathbf{L}_{b、-m}\mathbf{1} = \check{}\kappa$ $_{b、m}$ 以及$\mathcal{L}_{b、m}$（$_{b、m}$）$= m\check{}\kappa$，分部积分公式（5.10）给出

$$\int_{\mathcal{A}} (\check{\kappa}^2|\ _{b,m}|^2 - \check{\kappa}m)\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma = -\sigma^2\int_{\mathcal{A}} \mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E}^{-\sigma})\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma. \tag{5.13}$$

这里，若 $\gamma = g\hat{}g^{-1}$ 满足 $g$ 可全纯延拓至 $e^\sigma\mathbb{D}$ （这在 $\nu_\kappa^\sigma$-几乎处处的情形下成立），我们将 $\mathscr{E}^{-\sigma}(\gamma)$ 定义为由 $e^\sigma g(e^\sigma\cdot)$ 表示的环路的动能。在 $\nu_\kappa^\sigma$ 条件下，系数 $\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E}^{-\sigma})$ 的尾部比 $\mathbb{P}_\sigma$ 下 $\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E})$ 的尾部更轻，因此 $\int_{\mathcal{A}}|\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E}^{-\sigma})|\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma \le (\mathbb{E}_\sigma[|\mathcal{L}_{b,m}(\mathscr{E})|^2])^{1/2} \le \sqrt{2}\sigma^{-1}m^2$。因此，(5.13) 可以改写为

$$\int_{\mathcal{A}} |\ _{b,m}|^2\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma = \frac{m}{\check{\kappa}} + m^2O(\sigma). \tag{5.14}$$

由此估计可直接推出，$(\nu_\kappa^\sigma)_{\sigma>0}$ 在 $\mathcal{A}$ 上的博雷尔概率测度空间中是紧的。事实上，对每个 $r \in (0, 1)$ 及所有$\in \mathcal{A}$，由柯西–施瓦茨不等式可得 $\sup_{z\in r\bar{\mathbb{D}}}|z\alpha(z)|^2 \le \frac{\mathfrak{c}_2}{1-r}\sum_{b\in\mathfrak{B},m\ge1} r^m|\ _{b,m}|^2$，其中 $\mathfrak{c}_2 > 0$ 是与其他所有量无关的某个常数。结合 (5.14)，我们看到，$\nu_\kappa^\sigma$-期望 $\sup_{z\in r\bar{\mathbb{D}}}|z\alpha(z)|$ 在 $r \to 1$ 趋于 $O((1-r)^{-2})$,

[5]空间 $C^s(\mathbb{S}^1;\mathrm{GL}_n)$ 对应于 $G[H_s(\mathbb{S}^1)]_{n,\ n}$ 采用 [CG81，定理 62]。接着，我们将该结果应用于 $G$ 的任意忠实表示。

与.....无关 $\sigma$。由马尔可夫不等式和并集界可得，对所有 $\sigma$， $R>0$以及某个常数 $\mathfrak{c}>0$ （该常数与 $\sigma$ 无关（回顾 5.1 中对 $K_R$ 的定义）

$$\nu_\kappa^\sigma(\mathcal{A}\setminus K_R)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\nu_\kappa^\sigma(\{\|\ \ \|_{C^0(e^{-1/n}\bar{\mathbb{D}})}\geq Rn^4\})\leq\frac{\mathfrak{c}}{R}\sum_{n=1}^{\infty}n^{2-4}=O(R^{-1}).$$

由此证明了当 $\sigma\to 0$ 时，序列 $(\nu_\kappa^\sigma)_{\sigma>0}$ 在 $\mathbb{P}(\mathcal{A})$ 中是紧的。令 $\mathcal{M}$ 为其聚点集（根据普罗霍罗夫定理，$\mathcal{M}\neq\emptyset$ ）。

令 $\nu\in\mathcal{M}$ 并证明 $\nu$ 是 $L_1^\omega G$-协变的。对所有 $\sigma>0$， $u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $F\in C_c^\infty(\mathcal{A})$，由（5.10）可得

$$\int_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_u(F)-\check{\kappa}\mathcal{L}_u(\mathscr{S})F)\,\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma=\sigma^2\int_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_u(\mathscr{E}^{-\sigma})F\mathrm{d}\nu_\kappa^\sigma\to 0.$$

我们已经看到，当 $\sigma\to 0$时，右端趋于 $0$。此外，沿着任意满足 $\nu_\kappa^{\sigma_n}\to\nu$ 弱收敛的子序列 $\sigma_n\searrow 0$，左端趋于 $\int_{\mathcal{A}}\mathbf{L}_u(F)\mathrm{d}\nu$。因此，

$$\int_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}_u(F)-\check{\kappa}\mathcal{L}_u(\mathscr{S})F)\,\mathrm{d}\nu=0,\qquad\forall u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}.\tag{5.15}$$

现在对该关系积分，可得 $\nu$ 对所有测试函数 $F\in C_c^\infty(\mathcal{A})$ 都满足酉化性质（1.1）。令 $\chi\in L_1^\omega G$，并固定一条 $C^1$-路径 $(\chi_t)^{t\in[0,1]}$，使得 $L_1^\omega G$ 满足 $\chi_0=\mathbf{1}_G$ 且 $\chi_1=\chi$。记 $u_t:=\frac{\partial}{\partial\epsilon}_{|\epsilon=0}\chi_t^{-1}\chi_{t+\epsilon}$。令 $F\in C_c^\infty(\mathcal{A})$，并记 $F_{\chi_t}(\alpha):=F(\chi_t\cdot\alpha)$。由（5.15）可得

$$\begin{aligned}\partial_t\int_{\mathcal{A}}F(\chi_t\cdot\alpha)e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi_t,\alpha)}\mathrm{d}\nu(\alpha)&=\int_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{L}_{u_t}F_{\chi_t}(\alpha)-\check{\kappa}F_{\chi_t}(\alpha)\mathcal{L}_{u_t}\mathscr{S}_{\chi_t}(\alpha)\right)e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi_t,\alpha)}\mathrm{d}\nu(\alpha)\\&=\int_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{u_t}\left(F_{\chi_t}e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi_t,\cdot)}\right)\mathrm{d}\nu-\check{\kappa}\int_{\mathcal{A}}\mathcal{L}_{u_t}(\mathscr{S})F_{\chi_t}e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi_t,\cdot)}\mathrm{d}\nu=0.\end{aligned}$$

对 $t$ 积分得到 $\int_{\mathcal{A}}F(\chi\cdot\alpha)e^{-\check{\kappa}\Omega(\chi,\alpha)}\mathrm{d}\nu(\alpha)=\int_{\mathcal{A}}F(\alpha)e^{-\check{\kappa}\Omega(\mathbf{1}_G,\alpha)}\mathrm{d}\nu(\alpha)=\int_{\mathcal{A}}F(\alpha)\mathrm{d}\nu(\alpha)$，由此得到测试函数的情形。我们使用平台函数和稠密性论证，按照命题 5.1证明末尾的做法，得出该结果对所有 $F\in C_b^0(\mathcal{A})$ 均成立。□

5.3. **协变测度的唯一性**。本节分两步完成定理 1.1 的证明。在命题 5.5中，我们证明每个 $D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$-协变测度都有有限阶矩，且这些矩由（1.2）确定；由命题 $L_1^\omega G$-协变测度也具有同样性质，这由命题 5.1得出。在命题 5.6中，我们证明命题 $L_1^\omega G$中构造的 $L_1^\omega G$-协变测度由其矩唯一确定。结合这两点，即完成定理 1.1的证明。

**命题5.5.** 设 $\nu\in\mathbb{P}(\mathcal{A})$ 是一个 ˆ $D_\infty^\omega G_{\mathbb{C}}$-协变测度。那么， $\mathcal{C}^{1,0}\subset L^2(\nu)$，其矩为

$$\int_{\mathcal{A}}\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}}\mathrm{d}\nu=\delta_{\mathbf{k},\emptyset}\delta_{\tilde{\mathbf{k}},\emptyset}\qquad\forall\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}\in\mathcal{T}.\tag{5.16}$$

证明. 仿照引理 5.2中的论证，不难看出 $\nu(\cup_{R>0}K_R)=1$，细节从略。

现在，我们将通过对多项式的层级进行归纳来证明这一性质。对于初始化，我们注意到常值函数 $\mathbf{1}_G$ 可积，因为 $\nu$ 是一个概率测度，特别是 $\int_{\mathcal{A}}\Psi_{\emptyset,\ \emptyset}\mathrm{d}\nu=1$。

假设对于某个 $N \in \mathbb{N}_{>0}$，有 $\mathcal{C}^{1,0}_{N-1} \subset L^2(\nu)$，并注意到这意味着 $\oplus_{0\le m\le 2N-2}\mathcal{C}^{1,0}_{n}\otimes\mathcal{C}^{0,1}_{2N-2-m} \subset L^1(\nu)$。令 $m \in \{1,\dots,N\}$ 和 $P \in \oplus_{0\le m\le 2N-2}\mathcal{C}^{1,0}_{m}\otimes\mathcal{C}^{0,1}_{2N-2-m}$。令 $\rho\colon \mathcal{A}\to[0,1]$ 为一个光滑的平台函数，其支集包含于 $K_2$，且在 $K_1$ 上满足 $\rho\equiv 1$。对于每个 $R>0$，我们接着定义 $\rho_R(\alpha) := \rho(R^{-1}\alpha)$，并注意到 $\rho_R$ 的支集包含于 $K_{2R}$。根据命题 5.1，$\nu$ 是一个 $D^{\omega}_{\infty}G_{\mathbb{C}}$-协变测度；在 $h=\mathbf{1}_{G_{\mathbb{C}}}$ 处对 (1.2) 求导可得，对所有 $b\in\mathfrak{B}$、$m\ge 1$ 和 $P\in\mathcal{C}$，均有：

$$\int_{\mathcal{A}} \mathbf{J}_{b,-m}(P)\rho_R \mathrm{d}\nu = \int_{\mathcal{A}} \mathcal{J}_{b,-m}(\rho_R)P \mathrm{d}\nu. \tag{5.17}$$

将其应用于满足归纳假设的多项式 $P$，右侧的项的绝对值可由 $\|P\|_{L^1(\nu)}\|\mathcal{J}_{b,-m}(\rho_R)\|_{L^\infty(\nu)} \le \mathfrak{c}\nu(\mathcal{A}\setminus K_R)$ 控制，其中常数 $\mathfrak{c}>0$ 与 $R$ 无关。因此，$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{A}}\mathbf{J}_{b,-m}(P)\rho_R\mathrm{d}\nu = 0$。再重复一次这一论证，我们得到

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{A}}\mathbf{J}_{a,-n}(\mathbf{J}_{b,-m}(P))\rho_R\mathrm{d}\nu = 0,$$

对所有 $P\in\oplus_{0\le k\le 2N-2}\mathcal{C}^{1,0}_{k}\otimes\mathcal{C}^{0,1}_{2N-2-k}$ 以及所有 $n,m\ge 1$, $a,b\in\mathfrak{B}$ 都成立。对于多项式 $\bar{\mathbf{J}}_{a,-n}(\mathbf{J}_{b,-m}(P))$ 和 $\bar{\mathbf{J}}_{a,-n}(\bar{\mathbf{J}}_{b,-m}(P))$，也可得到相同结论。由于 $\oplus_{0\le k\le 2N}\mathcal{C}^{1,0}_{k}\otimes\mathcal{C}^{0,1}_{2N-k}$ 由这类多项式张成，因此特别地，对于所有 $P\in\mathcal{C}^{1,0}_{N}$，$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{A}}|P|^2\rho_R\mathrm{d}\nu$ 存在且有限。由法图引理可知，$|P|^2$ 可积，从而完成了对 $\mathcal{C}^{1,0}_{N}\subset L^2(\nu)$ 的证明。这就完成了归纳法，即 $\mathcal{C}^{1,0}\subset L^2(\nu)$。

接下来，我们通过对 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}|$进行归纳法，证明这些矩由（5.16）给出。由于 $\nu$ 是概率测度，该结果对 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}|=0$ 成立。设 $N\ge 1$，使得对于所有满足 $\mathbf{k}$、$\tilde{\mathbf{k}}$ 且 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}|\le N-1$的情形，该结果均成立。设 $1\le m\le N$以及 $\mathbf{k}$、$\tilde{\mathbf{k}}\in\mathcal{T}$，其中 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}| = N-m$。由上面对 $\mathcal{C}^{1,0}\subset L^2(\nu)$ 的证明，我们有

$$\int_{\mathcal{A}}\mathbf{J}_{b,-m}(\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}})\mathrm{d}\nu = 0 = \int_{\mathcal{A}}\bar{\mathbf{J}}_{b,-m}(\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}})\mathrm{d}\nu.$$

由于所有状态 $\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}}$ 满足 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}| = N$ 均通过这一过程得到，因此我们推得 $\int\Psi_{\mathbf{k},\tilde{\mathbf{k}}}\mathrm{d}\nu = 0$ 对于所有 $\mathbf{k}$、$\tilde{\mathbf{k}}\in\mathcal{T}$ 满足 $|\mathbf{k}|+|\tilde{\mathbf{k}}| = N$。这就完成了归纳法，并结束了（5.16）的证明。□

回顾命题 5.4 的证明，$\mathcal{M}\subset\mathbb{P}(\mathcal{A})$ 表示族 $(\nu^{\sigma}_{\kappa})_{\sigma>0}$ 当 $\sigma\to 0$ 时的聚点集合。为了表述下一个命题，我们明确写出对 $\kappa$ 的依赖，并记作 $\mathcal{M}_\kappa = \mathcal{M}$。

**命题 5.6**。对于所有 $\kappa<-2h$，任意 $\nu\in\mathcal{M}_\kappa$ 都由其矩刻画。

证明。在本证明中，我们固定一个 $\kappa<-2h$和一个测度 $\nu_\kappa\in\mathcal{M}_\kappa$，并将证明 $\nu_\kappa$ 由其矩刻画。然而，在证明的某些部分，我们需要将层级视为变量（记作 $\lambda$，而 $\kappa$ 保持固定），因此在适当之处会明确写出对层级的依赖，例如记作 $\mathbf{L}^{\kappa}_u = \mathbf{L}_u = \mathcal{L}_u + \check{\kappa}(u)$。根据前一个命题，$\nu_\kappa$ 具有有限阶矩，我们将 $\mathcal{C}$ 在 $L^1(\nu_\kappa)$中的闭包记作 $\bar{\mathcal{C}}^{\kappa}$。

令 $\mathcal{V}_\kappa$ 为由表示 $(\mathbf{L}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 作用于 $\mathbf{1}$ 所生成的最高权表示：

$$\tilde{\mathcal{V}}_\kappa := \mathrm{span}\{\mathbf{L}^{\circ\mathbf{k}}\mathbf{1}\,|\,\mathbf{k}\in\mathcal{T}\}\subset C^\infty(\mathcal{A}),$$

其中我们使用了第3.4 节和（3.7）中引入的记号。由于$\mathbf{L}_u$ 是关于坐标 $(b,\,m,\,\bar{}b,\,m)_{b\in\mathfrak{B},\,m\ge1}$ 的一阶微分算子，且每个坐标$b,\,m$ 本身都是 $(\alpha_{a,\,n},\,\bar{\alpha}_{a,\,n})_{a\in\mathfrak{B},\,n\ge1}$中的多项式，因此我们有 $\tilde{\mathcal{V}}_\kappa\subset\mathcal{C}$，并将其在 $L^2(\nu_\kappa)$ 中的闭包记作 $\mathcal{H}_\kappa$。

对 $L^\omega_1G$-协方差公式（1.1） $\chi = \mathbf{1}_G$ 求微分（并使用与命题5.5证明中相同的平台函数），我们得到 $\langle \mathrm{L}^\kappa_u F, G\rangle_{\mathcal{H}_\kappa} = -\langle F, \mathrm{L}^\kappa_{u^*} G\rangle_{\mathcal{H}_\kappa}$，对所有 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ 及所有 $F, G \in \mathcal{V}_\kappa$ 均成立。这意味着 $\mathrm{L}^\kappa_u$ 及其伴随算子（$\mathrm{L}^\kappa_u$）$^*$ 在 $\mathcal{H}_\kappa$ 上都在 $\mathcal{H}_\kappa$ 中稠密定义，因此根据 [RS72，定理VIII.1]，它们都可闭，且其闭包满足（$\mathrm{L}^\kappa_u$）$^* = -\mathrm{L}^\kappa_{u^*}$。取典范基 $b\otimes z^m$，得到 $\mathrm{L}^*_{b,m} = \mathrm{L}_{b,-m}$，对所有 $b \in \mathfrak{B}, m \geq 1$ 均成立（回顾 $\mathfrak{B} \subset i\mathfrak{g}$）；这与 [DFMS97，（14.130）] 一致，并说明表示（$\mathrm{L}^\kappa_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\kappa$ 上的酉性，其中这些无界算子定义在共同的稠密子空间 $\mathcal{V}_\kappa$ 上。按照 [GW84，第1.4] 节的术语，$\mathcal{V}_\kappa$（$\mathrm{L}^\kappa_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 是一个标准模，而 [GW84，定理4.4] 指出，对于每个 $u \in \hat{D}^\omega_\infty\mathfrak{g}_\mathbb{C}$，算子 $\mathrm{L}^\kappa_u + \mathrm{L}^\kappa_{u^*}$ 在 $\mathcal{H}_\kappa$ 上生成一个单参数酉算子群。特别地，我们有一个向量 $w^\kappa_u := e^{\mathbf{L}^\kappa_u + \mathrm{L}^\kappa_{u^*}}(\mathbf{1}) \in \mathcal{H}_\kappa$。注意，这意味着 $|w^\kappa_u|^2 \in \bar{\mathcal{C}}^\kappa$。

令 $\lambda \in (\kappa, -2\check{h})$，并固定 $\nu_\lambda \in \mathcal{M}_\lambda$。根据测度 $\nu^\sigma_\kappa$ 的定义以及 $\mathscr{S}$ 的正性，我们有 $\bar{\mathcal{C}}^\lambda \subset \bar{\mathcal{C}}^\kappa$。因此，我们得到一个向量 $|w^\lambda_u|^2 \in \bar{\mathcal{C}}^\kappa$。对于所有 $\lambda \in (\kappa, -2\check{h})$，都可以将坐标中的向量 $w^\lambda_u$ 写成一个常微分方程的解，即

$$w^\lambda_u(\ ) = e^{\lambda\int_0^1 {}_t(u)\mathrm{d}t} \qquad \text{with} \qquad \partial_t\ {}_t = K\ {}_t(u+u^*);\quad {}_0 = \quad . \tag{5.18}$$

事实上，该动力系统由与 $e^{tu+tu^*}$ 的无穷小左乘相关联的基本向量场生成，如式 (4.1) 所示。这个公式特别意味着 $w^\lambda_u$ 与 $\mathcal{M}_\lambda$ 中测度的选取无关。此外，对于所有 $\in \mathcal{A}$，映射 $\lambda \mapsto w^\lambda_u(\ )$ 在带域 $\{\kappa < \mathrm{Re}(\lambda) < -2\check{h}\}$ 内是解析的，并且在该带域内有单位元 $|w^\lambda_u(\ )w^{\bar\lambda}_u(\ )| = |w^{\mathrm{Re}(\lambda)}_u(\ )|^2$。因此，令 $W^\lambda_u := w^\lambda_u w^{\bar\lambda}_u$，便有 $W^\lambda_u \in L^1(\mu_\kappa)$，且映射 $\lambda \mapsto W^\lambda_u$ 是取值于 $L^1(\nu_\kappa)$ 的解析映射。特别地，整个映射由其在区间 $(\kappa, -2\check{h})$ 上的取值决定，而这些取值又由 $\nu_\kappa$ 的矩决定（因为当 $\kappa < \lambda < -2\check{h}$ 时，$W^\lambda_u \in \bar{\mathcal{C}}^\kappa$）。

最后，我们考虑固定的 $W^{\lambda+i\epsilon^{-1}}_{\epsilon u}$ for $\lambda \in (\kappa, -2\check{h})$，并研究 $\epsilon \to 0$ 时的渐近行为。回到 (5.18)，我们有 $w^{\lambda+i\epsilon}_{\epsilon u}(\ ) = e^{i\ (u)+\epsilon\lambda\ (u)+o(\epsilon)}$，因此 $W^{\lambda+i\epsilon^{-1}}_{\epsilon u}(\ ) \to e^{2i\mathrm{Re}(\ (u))}$，且显然在每个 $K_R$，$R > 0$ 上均匀收敛。事实上，由于序列是 $(W^{\lambda+i\epsilon^{-1}}_{\epsilon u})_{\epsilon>0}$，并且在 $L^1(\nu_\kappa)$ 中有界，因此很容易将收敛提升为在 $L^1(\nu_\kappa)$ 中的收敛。现在注意到，族 $(\mapsto e^{2i\mathrm{Re}(\ (u))})_{u\in\hat{D}^\omega_\infty\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 的线性张成构成 $L^1(\nu_\kappa)$ 的稠密子空间，而映射 $u \mapsto \int_{\mathcal{A}} e^{2i\mathrm{Re}(\ (u))}\mathrm{d}\nu(\ )$ 定义了 $\nu_\kappa$ 的傅里叶变换（或特征函数）。因此，对于每个 $\lambda \in (\kappa, -2\check{h})$，族 $(W^{\lambda+i\epsilon^{-1}}_{\epsilon u})_{u\in\hat{D}^\omega_\infty\mathfrak{g}_\mathbb{C},\epsilon>0}$ 的线性张成本身在 $L^1(\nu_\kappa)$ 中稠密。特别地，$\nu_\kappa$ 由数值 $(\int_{\mathcal{A}} W^{\lambda+it}_u\mathrm{d}\nu)_{u\in\hat{D}^\omega_\infty\mathfrak{g}_\mathbb{C},t>0}$ 确定，而这些数值又由上一段中的 $\nu_\kappa$ 的矩确定。至此证明完毕。□

5.4. **沙波瓦洛夫型。** 迄今为止，我们已证明酉化测度 $\nu_\kappa$ 可由以下四个性质之一刻画：$L^\omega_1G$-协方差公式（1.1）；$D^\omega_\infty G_\mathbb{C}$-协方差公式（1.2）；矩计算（5.16）；矩生成函数为 $\mathfrak{F}_\nu(\kappa, h) = 1$，对所有 $h \in \hat{D}^\omega_\infty G_\mathbb{C}$ 均成立。现在，我们将给出（1.1）和（1.2）的无穷小版本（后者部分仍属猜想），并将其改写为代数形式，表达本文所用不同 Kac–Moody 表示的沙波瓦洛夫形式。

5.4.1. *实表示。* 首先，我们来处理一下关于算子（$\mathcal{L}_u$）$_{u\in L^\omega_0\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 的一些遗留问题。接下来的陈述是对命题 5.6证明开头的直接改写。正如那里已经提到的，这意味着该表示是酉的。

**定理 5.7.** 设 $\kappa < -2\check{}h$。对所有 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，算子 $\mathbf{L}_u$ 在 $L^2(\nu_\kappa)$ 上可闭，且其闭包满足 $\mathbf{L}_u^* = -\mathbf{L}_{u^*}$。

证明中使用的向量 $w_u^\kappa = e^{\mathbf{L}_u + \mathbf{L}^{u^*}}(1)$ 具有特殊含义。首先注意，$\Omega(e^u,\alpha) = e^{\check{\kappa}\mathscr{S}} e^{\mathcal{L}_u + \mathcal{L}_u^*} e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}}$，因为算子 $\mathcal{L}_u + \mathcal{L}_{u^*}$ 是由 $e^{tu}$左乘的无穷小生成元。这与 $w_u^\lambda$ 几乎一致，因为对于 $u \in \hat{D}_\infty^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，$\mathbf{L}_u = e^{\check{\kappa}\mathscr{S}}\mathcal{L}_u e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}}$。不过请注意，$\mathbf{L}_{u^*} = \mathcal{L}_{u^*} \neq e^{\check{\kappa}\mathscr{S}}\mathcal{L}_{u^*}e^{-\check{\kappa}\mathscr{S}}$。另一方面，由于表示 $(\mathbf{R}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$与表示 $(\mathbf{L}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$可交换，我们对所有 $v \in D^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$都有 $\mathbf{R}_v(w_u^\kappa) = \mathcal{R}_v(w_u^\kappa) = e^{\mathbf{L}_u + \mathbf{L}^{u^*}}(\mathcal{R}_v 1) = 0\hat{}$。换言之，函数 $w_u^\kappa$ 关于左不变复结构是全纯的。因此，协方差模可分解为 $\Omega(\chi,\alpha) = \mathrm{Re}(\Omega^{\mathrm{hol}}(\chi,\alpha))$，其中对于每个 $\chi \in L_1^\omega G$，$\Omega^{\mathrm{hol}}(\chi,\alpha)$ 是 $\mathcal{A}$ 上的左全纯函数。细心的读者会注意到，我们不能先验地将 $\mathcal{R}_v$ 应用于 $\mathcal{A}$ 上的函数，因为这些算子仅作用于 $\mathcal{A}^\omega$上的函数。不过，我们可以按照命题 4.7 的方式，将 $\Omega^{\mathrm{hol}}(\chi,\cdot)$ 的取值从 $\mathcal{A}^\omega$延拓到 $\mathcal{A}$。因此，自然会在 $L^2(\nu_\kappa)$ 上引入如下积分变换：

$$\mathfrak{H}_F(\chi) := \int_{\mathcal{A}} F(\alpha) e^{-\frac{\check{\kappa}}{2}\Omega^{\mathrm{hol}}(\chi,\alpha)} \mathrm{d}\nu_\kappa(\alpha), \qquad \forall F \in L^2(\nu_\kappa), \forall \chi \in L_1^\omega G, \tag{5.19}$$

以此表示由 $\chi$所作左平移的“全纯部分”。这样，Goodman–Wallach表示的酉性便在 $\nu_\kappa$的协方差性质中得到了很好的解释。研究 $\mathfrak{H}_F$ 是否也允许（关于变量$\chi$的）全纯分解，以及这究竟是否与Hecke算子有关，将会很有意思。

算子$(\mathcal{R}_u)_{u\in L_0^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 的情形更为微妙：由于 $\nu_\kappa$ 并不对连续环路空间赋予质量，甚至尚不清楚如何在 $L^2(\nu_\kappa)$的稠密子空间上定义 $\mathcal{R}_u$，因为其定义涉及逆环路。此外，即便如此，我们形式上也会得到$\hat{\mathcal{R}}_u^* = -\mathcal{R}_{u^*} - \check{\kappa}\mathcal{R}_u(\mathscr{S})$，而这与 $-\mathbf{R}_{u^*}$ 并不一致，因为 $\mathscr{S} \neq \mathscr{S}$。

猜想 *5.8*。从第 *5.2* 节的 $\nu_\kappa^\sigma$ 中抽取 $\gamma = g\hat{}g^{-1}$，并用$\hat{\nu}_\kappa^\sigma$ 表示$\hat{}g^{-1}\partial\hat{}g$的分布。$\hat{}$测度族$\hat{\nu}_\kappa^\sigma$ 随 $\sigma \to 0$ 弱收敛到 $\mathcal{A} := \{\alpha^* | \alpha \in \mathcal{A}\}$上的测度$\hat{\nu}_\kappa$。此外，算子$(R_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ 在 $L^2(\hat{\nu}_\kappa)$上稠定且可闭，并且满足关系$R_u^* = -R_{u^*}$。

5.4.2. 复表示。接下来讨论表示（$\mathbf{J}_u, \bar{\mathbf{J}}_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$的沙波瓦洛夫形式。回答这个问题意味着要在 $L^2$（$\nu_\kappa$）上找到一个厄米形式 $\mathcal{Q}$，使得$\mathcal{Q}$（$\mathbf{J}_u F, G$） $= \mathcal{Q}$（$F$,$\mathbf{J}_{u^*}G$），对所有 $u \in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 以及分别属于$\mathbf{J}_u$和$\mathbf{J}_{u^*}$定义域的所有 $F, G$ 均成立。等价地，我们要在 $L^2$（$\nu_\kappa$）上寻找一个自伴算子 $\Theta$，使得在适当意义下 $\Theta \circ \mathbf{J}_u^* = \mathbf{J}_u \circ \Theta$。

定义 $L^2_{\mathrm{hol}}$（$\nu_\kappa$）为 $\mathcal{V} = \mathbb{C}[(\alpha_{b,m})_{b\in\mathfrak{B},m\geq 1}]$ 在 $L^2$（$\nu_\kappa$）中的闭包；该空间配备了表示（$\mathbf{J}_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$（另一个表示在此空间中平凡作用）。由于（$L^2$（$\nu_\kappa$），（$\mathbf{J}_u, \bar{\mathbf{J}}_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$）是（$L^2_{\mathrm{hol}}$（$\nu_\kappa$），（$\mathbf{J}_u$）$_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$）的两个副本的张量积，因此讨论只需限于 $L^2_{\mathrm{hol}}$（$\nu_\kappa$）。

**猜想 5.9**。假设猜想 *5.8* 成立。存在一个满 $\nu_\kappa$测度 $\mathcal{A}^\omega \subset E \subset \mathcal{A}\hat{}$和一个全纯函数 $\Xi$ 定义在 $E$ 上，使得 $\mathrm{Re}(\Xi) = \mathscr{S} - \mathscr{S}$在 $\mathcal{A}^\omega$上。

仿照命题 5.4 的证明，可以不难看出，序列 $(\hat{\nu}_\kappa^\sigma)_{\epsilon\to 0}$作为 $\epsilon \to 0$ 是紧的，我们将任意一个子列极限记为 $\hat{\nu}_\kappa$（我们猜想它是唯一的）。从启发式角度看，我们可以将其理解为“$\mathrm{d}\hat{\nu}_\kappa(\gamma) = e^{-\check{\kappa}\hat{}\mathscr{S}(\gamma)}D\gamma$”，因此形式上 $\mathrm{d}\frac{\nu_\kappa}{\hat{\nu}_\kappa} = |e^{-\mathrm{d}\cdot\frac{\kappa}{2}\Xi}|^2$。

ˆ利用命题 4.3 以及 $\mathscr{S}$ 的定义，很容易验证函数 $\mathscr{S}-\mathscr{S}$ 在 $\mathcal{A}^\omega$ 上（关于双不变度量，参见备注 2）是 ˆ 调和的，因此 $\mathscr{S}-\mathscr{S}=\mathrm{Re}(\Xi)$ 对某个定义在 $\Xi$ 上的全纯函数 $\mathcal{A}^\omega$ 成立。因此，该猜想中非平凡的部分是将 $\Xi$ 延拓为定义在更大集合上的全纯函数，且该集合的 $\nu_\kappa$-测度为 1。

假设该猜想成立，公式

$$\Theta F(\alpha) := F(\hat{\alpha}^*)e^{-\frac{\kappa}{2}\Xi(\alpha)}$$

定义了 $L^2(\nu_\kappa)$ 上的一个自伴算子。在此定义中，我们还假设随机变量 ˆ$\alpha$ （其分布为 ˆ$\nu_\kappa$ ）关于 $\alpha$ 可测。对表示 $(\mathbf{J}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ 的分部积分公式作一个初等改写可知，厄米形式 $\mathcal{Q}(F,G):=\langle F,\Theta G\rangle_{L^2_{\mathrm{hol}}(\nu_\kappa)}$ 是表示 $(L^2_{\mathrm{hol}}(\nu_\kappa),(\mathbf{J}_u)_{u\in L^\omega\mathfrak{g}_\mathbb{C}})$ 的沙波瓦洛夫形式。

## References


[Ahl66] Lars V. Ahlfors。《拟共形映射讲义》。普林斯顿（新泽西州）—多伦多—纽约—伦敦：D. Van Nostrand Company. Inc. 146页。（1966）。, 1966.[AHS23] Morris Ang、Nina Holden 和 Xin Sun。量子圆盘的共形焊接。*Electron. J. Probab.*，28:50，2023。编号52。[AM01] H´el`ene Airault 和 Paul Malliavin。维拉索罗代数表示的酉化概率测度。*J. Math. Pures Appl. (9)*，80(6):627–667，2001。[Bav25] Guillaume Baverez。关于 Schramm–Loewner 演化、共形限制与酉化测度。作者个人网页可见，2025。[BD] A. Beilinson 和 V. Drinfeld。希钦可积系统的量子化与赫克本征层。芝加哥大学网站可见，PDF直达链接。[BGK+24] Guillaume Baverez、Colin Guillarmou、Antti Kupiainen、R´emi Rhodes 和 Vincent Vargas。刘维尔共形场论的维拉索罗结构与散射矩阵。*Probab. Math. Phys.*，5(2):269–320，2024。[BJ24] Guillaume Baverez 和 Antoine Jego。SLE 环测度的共形场论与 Kontsevich–Suhov 猜想。预印本，arXiv:2407.09080，2024。[BJ25] Guillaume Baverez 和 Antoine Jego。共形焊接与物质-刘维尔-鬼分解。预印本，arXiv:2502.17076，2025。[CG81] K. Clancey 和 I. Gohberg。*Factorization of matrix functions and singular integral operators*，第3卷，*Oper. Theory: Adv. Appl.* Birkh¨auser，沙姆，1981。[DFMS97] Philippe Di Francesco、Pierre Mathieu 和 David S´en´echal。*Conformal field theory*。当代物理研究生教材。纽约，NY：施普林格，1997。[Dri03] Bruce K. Driver。路径群与环群上的维纳测度分析。载于 *Finite and infinite dimensional analysis in honor of Leonard Gross. Proceedings of the AMS special session on analysis on infinite dimensional spaces*，*New Orleans*，*LA*，*USA*，*January 12–13*，2001，第57–85页。普罗维登斯，RI：美国数学会（AMS），2003。[EFK21] Pavel Etingof、Edward Frenkel 和 David Kazhdan。复曲线上朗兰兹对应的解析版本。载于 *Integrability*，*quantization*，*and geometry II. Quantum theories and algebraic geometry. Dedicated to the memory of Boris Dubrovin 1950–2019*，第137–202页。普罗维登斯，RI：美国数学会（AMS），2021。[EFK23] Pavel Etingof、Edward Frenkel 和 David Kazhdan。局部域上曲线的赫克算子与解析朗兰兹对应。*Duke Math. J.*，172(11):2015–2071，2023。[FBZ04] Edward Frenkel 和 David Ben-Zvi。*Vertex algebras and algebraic curves*，第88卷，*Math. Surv.Monogr.*。普罗维登斯，RI：美国数学会（AMS），第2版（修订扩充版），2004。[Fre07] Edward Frenkel。朗兰兹纲领与共形场论讲义。载于 *Frontiers in number theory*，*physics*，*and geometry II. On conformal field theories*，*discrete groups and renormalization. Papers from the meeting*，*Les Houches*，*France*，*March 9–21*，2003，第389–533页。柏林：施普林格，2007。

[Fre20] Edward Frenkel。复代数曲线上的自守函数是否存在解析理论？*SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*，16:论文042，31，2020。[Gaw91] Krzysztof Gawedzki。非紧 WZW 共形场论，1991年10月。[GK89] K. Gawedzki 和 A. Kupiainen。泛函积分的陪集构造。*Nucl. Phys. B*，320:625–668，1989。[GKR25] Colin Guillarmou、Antti Kupiainen 和 R´emi Rhodes。$\mathbb{H}^3$-Wess–Zumino–Witten 共形场论的概率构造及其与李乌维尔理论的对应。预印本，arXiv:2502.16341，2025。[GR25] Dennis Gaitsgory 和 Sam Raskin。几何朗兰兹猜想的证明 I：函子的构造。预印本，arXiv:2405.03599，2025。[GT25] Davide Gaiotto 和 J¨org Teschner。量子解析朗兰兹对应。*SciPost Phys.*，18(4):67，2025。编号144。[GW84] Roe Goodman 和 Nolan R. Wallach。环群及圆周微分同胚群的结构与酉余循环表示。*J. Reine Angew. Math.*，347:69–133，1984。[GW24] Davide Gaiotto 和 Edward Witten。规范理论与几何朗兰兹纲领的解析形式。*Ann. Henri Poincaré*，25(1):557–671，2024。[Kir98] A. A. Kirillov。Vir 酉不可约表示离散级数的几何方法。*J. Math. Pures Appl. (9)*，77(8):735–746，1998。[KK79] V. G. Kac 和 D. A. Kazhdan。无限维李代数最高权表示的结构。*Adv. Math.*，34:97–108，1979。[KS07] M. Kontsevich 和 Y. Suhov。关于 Malliavin 测度、SLE 与共形场论。*Proc. Steklov Inst. Math.*，258:100–146，2007。[Lan] Robert P. Langlands。论自守形式几何理论的解析形式。IAS网站可见，仓储库链接。[LSW03] Gregory Lawler、Oded Schramm 和 Wendelin Werner。共形限制：弦情形。*J.Am. Math. Soc.*，16(4):917–955，2003。[Mal05] Paul Malliavin。单位圆盘单叶函数空间 Berezinian 表示的热测度与酉化测度。载于 *Perspectives in analysis. Essays in honor of Lennart Carleson's 75th birthday. Proceedings of the conference, Stockholm, Sweden, May 26–28*，2003，第253–268页。柏林：施普林格，2005。[MFF86] F. G. Malikov、B. L. Feigin 和 D. B. Fuks。Kac–Moody 代数上 Verma 模中的奇异向量。*Funct. Anal. Appl.*，20:103–113，1986。[MM90] Marie-Paule Malliavin 和 Paul Malliavin。环群上的积分。I：准不变测度。*J.Funct. Anal.*，93(1):207–237，1990。[MT21] Claudio Meneses 和 Leon A. Takhtajan。球面上抛物丛模空间的对数联络、WZNW作用量。*Commun. Math. Phys.*，387(2):649–680，2021。[Pic00] Doug Pickrell。*Invariant measures for unitary groups associated to Kac–Moody Lie algebras*，第693卷，*Mem. Am. Math. Soc.*。普罗维登斯，RI：美国数学会（AMS），2000。[Pic06] Doug Pickrell。单连通紧对称空间环空间上的不变测度。*J. Funct. Anal.*，234(2):321–363，2006。[Pre82] A. N. Pressley。紧李群环空间上的能量流。*J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*，26:557–566，1982。[PS86] Andrew Pressley 和 Graeme Segal。*Loop groups*。牛津数学专著。牛津大学出版社，牛津，1986。[RS72] Michael Reed 和 Barry Simon。《现代数学物理方法》。1：泛函分析。纽约—伦敦：Academic Press, Inc. xvii，325页。$12.50（1972）。, 1972。[Sch00] Oded Schramm。环擦随机游走与均匀生成树的标度极限。*Isr. J. Math.*，118:221–288，2000。[Seg85] G. B. Segal。环群。波恩1984年工作会议，马克斯·普朗克数学研究所，波恩1984，数学讲义1111，155–168（1985）。, 1985。[She16] Scott Sheffield。随机曲面的共形焊接：SLE与量子引力拉链。*Ann.Probab.*，44(5):3474–3545，2016。

[Tes18] J¨org Teschner. 量子 Hitchin 系统的量子化与实几何朗兰兹对应。载于 *Geometry and Physics: Volume I: A Festschrift in honour of Nigel Hitchin*。牛津大学出版社，2018年10月。[TT06] Leon A. Takhtajan 和 Lee-Peng Teo。 *Weil–Petersson metric on the universal Teichmüller space*，第861卷，*Mem. Am. Math. Soc.* 罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2006年。[TZ08] Leon A. Takhtajan 和 Peter Zograf。抛物丛模空间上的第一陈形式。 *Math. Ann.*，341(1)：113–135，2008年。[Zha21] Dapeng Zhan。SLE 环测度。 *Probab. Theory Relat. Fields*，179(1-2)：345–406，2021年。

*Email address*: guillaume.baverez@bicmr.pku.edu.cn
Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University