arXiv:2602.06131v1 [cond-mat.quant-gas] 5 Feb 2026

湍流二维玻色气体的非平衡状态方程

Yi Jiang*、Nikolai Maslov*、Andrey Karailiev、Christoph Eigen、Martin Gazo†和Zoran Hadzibabic卡
文迪许实验室，剑桥大学，*J. J. Thomson Avenue*，剑桥 *CB3 0US*，英国（日期：2026年2月9日）

非平衡状态方程能够为远离平衡的系统提供一种有效的类热力学描述。我们通过实验构建了湍流二维玻色气体中直接能量级联的非平衡状态方程。我们的均匀气体在大尺度上持续受到驱动，并在小尺度上具有匹配的耗散，从而呈现出一种非热但稳态的幂律动量分布。我们的状态方程将级联振幅与其背后的尺度不变能量通量联系起来；对于不同的驱动强度、气体密度和相互作用强度，利用与Gross–Pitaevskii模型一致的标度关系，该方程可改写为普适的幂律形式。

热力学框架为处于或接近平衡的多粒子系统提供了有效描述，用少量宏观状态变量概括复杂的微观行为，这些变量由依赖于系统的状态方程（EOS）相关联 [1–5]。将这些思想推广到甚至可能无法达到局域热力学平衡的远离平衡系统，已引起广泛兴趣并取得进展，其中包括活性物质 [6–8], 玻璃态系统 [9], 和等离子体 [10]。

驱动湍流级联呈现出定态的远离平衡状态，是进行类热力学刻画的天然候选。它们的特征是守恒量的标度不变输运，例如能量 [11–13]或涡量平方积分 [14], ，介于注入尺度k_{I}（其中k为波数）与耗散尺度k_{D}之间。在惯性区间内，介于k_{I}与k_{D}之间，能量或波作用量等依赖于系统的量的谱通常呈现具有普适指数的幂律 [12–18]。于是，系统（在此k区间）的状态由（统计平均的）幂律谱的振幅所确定。该振幅与底层标度不变通量 [12–20] 的关系类似于平衡态热力学中的状态方程 [20], ，但所涉及的是内禀的非平衡状态变量；见图1。

在本文中，我们通过实验建立了均匀二维玻色气体的直接能量级联（从大尺度到小尺度，即，具有 $k_{\mathrm{I}} < k_{\mathrm{D}}$）的非平衡状态方程（EOS）。该气体处于湍流稳态时，会呈现幂律动量分布（波作用谱）n_k，其普适指数为 γ，振幅为 n_0。利用与 Gross–Pitaevskii 模型相符的标度关系，我们表明，对于不同驱动强度、气体密度和粒子间相互作用强度的测量结果，均可重写为普适幂律关系 $n_0 \propto \epsilon^b$，其中 ϵ 为级联能量通量，$b = 0.47(5)$。我们的测量值 ϵ 满足湍流零定律 [22–24]；通过骤降驱动强度，我们验证了稳态n_0 满足相同的状态方程，且与系统的历史无关。

我们从一种准纯均匀的二维凝聚体开始，其中含有处于 $|F = 1, m_F = -1\rangle$ 超精细态的 ^{39}K 原子。原子被频率为$\omega_z = 2\pi \times 1.2$kHz的谐振阱限制在$x$-$y$ 平面，并在该平面内受边长为$L = 30\mu$m 、深度为$U_{\mathrm{D}} = k_{\mathrm{B}} \times 175$nK [25]的方形光学盒阱限制。对于二维气体，相互作用强度由无量纲量 $\tilde{g} = a\sqrt{8\pi m\omega_z/\hbar}$ [26, 27]给出，其中m是原子质量，a是s波散射长度，我们利用33.6G [28]处的Feshbach共振对其进行调节。对于可变原子数，$N = (20-36) \times 10^3$，对应密度$n = N/L^2 = (22-40)\mu\mathrm{m}^{-2}$，以及 $\tilde{g} = (0.02-0.08)$，每个粒子的特征相互作用能为$\zeta = \hbar^2 \tilde{g} n/m$。

我们通过共振驱动能量最低的声子模，持续向气体注入能量。该声子模的波数为 $k_L = \pi/L \approx 0.1\mu\mathrm{m}^{-1}$，角频率为 $\omega_B = \sqrt{\zeta/m}\, k_L$。我们沿盒子的一个轴施加空间均匀的周期性驱动力 [21, 25, 29]；在不同的测量中，我们将力幅值 F_0 调节在 $(0.7-12)\zeta/L$ 范围内。这种注入具有各向异性，但稳态动量分布 n_k 在 $k \gtrsim k_\xi$时呈现出涌现的统计各向同性，其中 $k_\xi = \sqrt{\tilde{g} n} = (0.7-1.8)\,\mu\mathrm{m}^{-1}$为愈合长度的倒数 [21]；从理论角度看 [30–32], k_ξ 是统计各向同性级联的有效注入尺度 k_{I}。连续的能量耗散表现为少量粒子损失，这是原子在 $k_{\mathrm{D}} = \sqrt{2mU_{\mathrm{D}}/\hbar}$ [24, 33]处逃离陷阱所致；对于完整的陷阱深度，$k_{\mathrm{D}} \approx 5.3\mu\mathrm{m}^{-1}$，但请注意，在某些测量中我们也会降低 k_{D}。

在图2(a)中，对于一组系统参数，我们展示稳态湍流云的方位角平均n_k；
我们测量n_k，使用物质波聚焦 [34, 35]，并将其归一化，使得$\int n_k 2\pi k \mathrm{d}k = 1$。对于$k_\xi \lesssim k \lesssim k_{\mathrm{D}}$，我们观测到幂律$n_k \propto n_0 k^{-\gamma}$，且 $\gamma = 2.6$（虚线）。在弱波湍流（WWT）理论中，针对直接的Kolmogorov–Zakharov（KZ）解析解

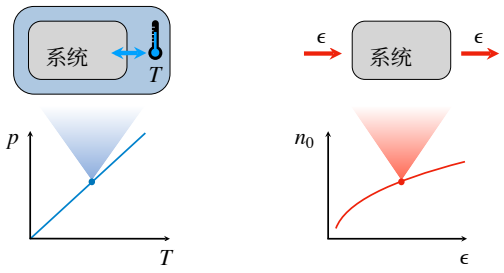

图 1. 平衡系统（左）以及处于稳态、注入率与耗散率 ϵ 相匹配的携通量湍流系统（右）的状态方程（EOS）。对于与储库耦合的平衡系统，压强 p 等状态变量是储库温度 T 的函数。对于携通量湍流系统，涌现的幂律谱的振幅 n_0 是底层通量 ϵ 的函数。

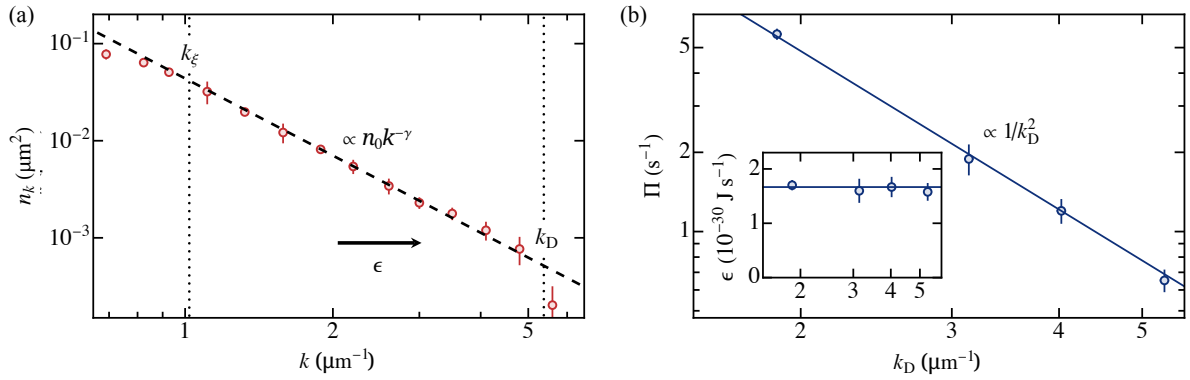

图 2. 湍流稳态及其底层能量通量。(a) 湍流二维气体的稳态动量分布 nk (k) 示例。该气体被置于边长为 L = 30 μm 的方形盒式阱中，并由周期性驱动力在大尺度（∼ L）上驱动。在愈合长度的倒数 kξ 与由阱深决定的耗散尺度 kD 之间，nk 呈现幂律谱， ∝ n0 k$^{-\gamma}$，其中 $\gamma \approx 2.6$（虚线）。这里，气体的密度为 n = 25μm^{-2}，无量纲相互作用强度为 ˜g = 0.04，力幅值为 F$_0$ = 1.6ζ/L，其中 ζ = $\hbar^2$ ˜g n/m。(b) 对应的能量通量 ϵ。通过测量不同 kD 下的原子损失，得到稳态粒子通量 Π。与湍流零定律一致，我们观测到 Π ∝ 1/k^2 D（实线），由此推得与 kD 无关的 ϵ = Π$\hbar^2$k^{2}D/(2m)（插图）。请注意，nk、 Π和 ϵ均按粒子归一化，且 (a) 中的谱是在 (b) 中最大的 kD 值下测得的。

玻色气体中的能量级联预言（对于$k \gtrsim k_\xi$）幂律n_k 且 $\gamma = d$，其中d 为系统维数 [15, 18]。然而，该解对于$d = 2$ 并不成立，因为$n_k \propto k^{-2}$ 与平衡（瑞利–金斯）分布重合，且不携带通量。在处理该问题的各种理论中 [15, 36–38]，n_k 在有限k范围内接近幂律，且 $\gamma > 2$ （另见 [30]）。

在图2(b)中，我们展示了对相应能量通量 ϵ的测量，该通量由尺度不变粒子通量 Π [24]推得；请注意，两种通量均按每个粒子进行了归一化。主图展示了 Π的测量结果，它直接体现在原子于kD处离开势阱的速率中；$\Pi = -\dot{N}/N$。我们针对不同的kD（通过降低势阱深度）测量 Π，并且与湍流第零定律 [22, 23], 一致，观测到 $\Pi \propto 1/k_D^2$ （实线），这对应于与kD无关的 $\epsilon = \Pi\hbar^2 k_D^2/(2m)$ （见插图）。

在图3中，我们总结了针对不同 ˜g、n和 ϵ的测量结果，并构建了普适状态方程。请注意，此处我们始终针对最大的kD测量n_k；并且，在固定 ˜g和n的情况下，我们以F_0 作为实验控制参数来改变 ϵ 。所出现的 ϵ 随F_0, 单调变化，但二者的关系通常较为复杂；为构建普适状态方程，需要将n_0 与测得的 ϵ联系起来，而不是与外部施加的F_0联系起来。

在图3(a)中，我们表明始终观测到 γ 与2.7(1) 一致（另见 [21]），且对 ˜g、n或 ϵ没有任何系统性依赖。此后，我们定义无量纲$n_0 = k_\xi^{2-\gamma}\langle k^\gamma n_k\rangle$ [20]，并固定 $\gamma = 2.7$，且始终对范围$(2-4)\mu\text{m}^{-1}$内的k取平均值 $\langle k^\gamma n_k\rangle$ 。

在图3(b)中，我们展示了不同 ˜g和n下$n_0(\epsilon)$ 的全部测量结果；在图3(c)中，我们表明，当将n_0 相对于无量纲能量通量 $\hbar\epsilon/\zeta^2$ 作图时（采用在Gross–Pitaevskii模型 [20]中自然的 ϵ 归一化），它们全部坍缩到同一条普适曲线上。这一普适状态方程可由幂律拟合很好地描述：$n_0 \propto (\hbar\epsilon/\zeta^2)^b$ （实线），其中$b = 0.47(5)$。

最后，为了使n_0 和 ϵ 与平衡态类似变量，它们之间的关系应独立于系统的历史。为验证这一点，我们进行了一项实验：先制备一个湍流稳态，然后改变 F_0 (从 $2\zeta/L$ 变为 $6\zeta/L$)，结果证实，改变前后的稳态n_0 满足相同的状态方程（EOS）；这两组测量结果收录于图 3中，并在图 3（c）的插图中突出显示。

从理论上讲，二维状态方程（EOS）的函数形式问题仍未得到充分解决。一些具有通量的n_k 理论预测$b = 1/3$ [15, 38], ，而另一些理论则预测$b = 1/2$ [36, 37] （另见 [32]）；这在物理上与玻色气体中（有效）三波相互作用的重要性相关。后一种预测与我们的实验结果一致，但这可能只是偶然。例如，涡旋激发等超出弱波湍流效应的因素也可能发挥作用，这一点在三维玻色气体的数值研究中已有所体现 [31, 39]。

我们的结果为量子气体湍流理论提供了基准 [15, 17, 18] ，并有助于建立非平衡热力学的一般框架 [6–10, 20]。未来，将远离平衡态状态方程的研究拓展至逆级联，以及具有费米统计或长程相互作用的系统，将会很有意义。此外，类比于平衡态热力学中的涨落-耗散关系，探索底层通量与稳态附近n_k 的涨落之间的联系也将颇有意义。

本研究得到欧洲研究委员会 [UniFlat]，EP- SRC [项目资助，资助编号为 EP/Y01510X/1]，；同时得到英国科学技术设施委员会 [资助，资助编号为 ST/T006056/1 和 ST/Y004469/1]。Z. H. 感谢英国皇家学会沃尔夫森奖学金提供的支持。

* 这些作者对本研究的贡献相同。† 电子邮箱：mg816@cam.ac.uk。[1] P. M. Chaikin 和 T. C. Lubensky，《凝聚态物理学原理》（剑桥大学出版社，1995年）。

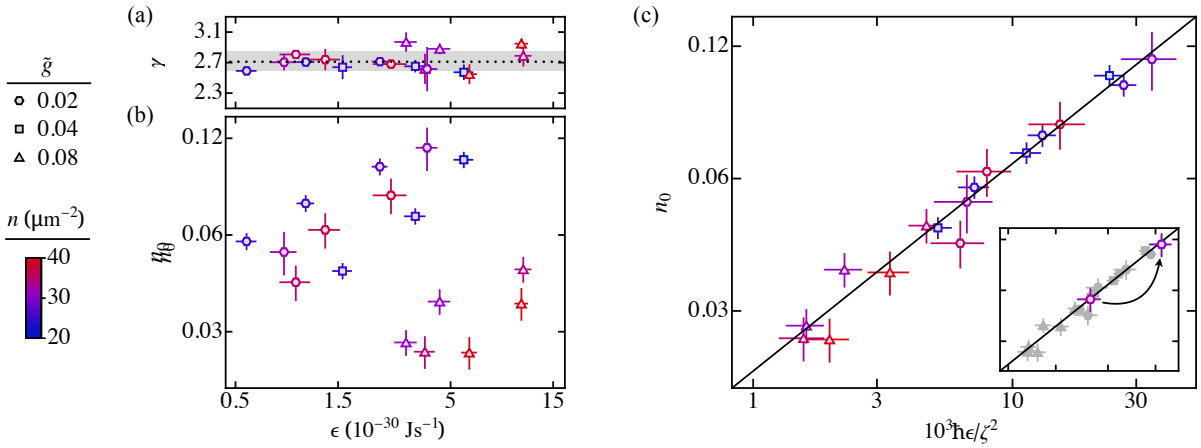

图3. 普适状态方程。这里我们将稳态下nk的测量结果推广到各种 $\tilde{g}$、n和 ϵ。(a) 级联指数 γ。我们的数据没有显示出系统性变化，并且与 $\gamma = 2.7(1)$ 一致（点线和阴影区域）。(b) 级联振幅n_0（在固定 $\gamma = 2.7$的条件下提取）随 ϵ的变化。(c) 将n_0 对无量纲能量通量 $\hbar\epsilon/\zeta^2$ 作图后，所有数据汇聚到一条普适状态方程上。实线表示幂律拟合，指数为$b = 0.47(5)$。插图：我们突出显示了两个数据点，它们对应于驱动力振幅改变前后建立的稳态（见正文）。

[2] S. Borsányi、Z. Fodor、C. Hoelbling、S. D. Katz、S. Krieg 和 K. K. Szabó，《具有 2+1 种味的量子色动力学状态方程的完整结果》，《物理评论B》730，99（2014）。[3] J. M. Lattimer 和 M. Prakash，《高温致密物质与中子星的状态方程》，《物理报告》621，127（2016）。[4] L. Pitaevskii 和 S. Stringari，《玻色–爱因斯坦凝聚与超流性》（牛津大学出版社，牛津，2016）。[5] J. A. Gaffney 等，《惯性约束聚变材料状态方程模型综述》，《高能量密度物理学》28，7（2018）。[6] F. Ginot、I. Theurkauff、D. Levis、C. Ybert、L. Bocquet、L. Berthier 和 C. Cottin-Bizonne，《活性胶体悬浮液中的非平衡状态方程》，《物理评论X》5，011004（2015）。[7] S. C. Takatori 和 J. F. Brady，《迈向活性物质热力学》，《物理评论E》91，032117（2015）。[8] A. P. Solon、J. Stenhammar、R. Wittkowski、M. Kardar、Y. Kafri、M. E. Cates 和 J. Tailleur，《相互作用的活性布朗球中的压强与相平衡》，《物理评论快报》114，198301（2015）。[9] L. F. Cugliandolo、J. Kurchan 和 L. Peliti，《具有慢动力学的系统中的能量流、部分平衡与有效温度》，《物理评论E》55，3898（1997）。[10] P. A. Cassak、M. H. Barbhuiya、H. Liang 和 M. R. Argall，《量化等离子体高阶相空间密度矩中的能量转换》，《物理评论快报》130，085201（2023）。[11] L. F. Richardson，《通过数值过程进行天气预报》（剑桥大学出版社，1922年）。[12] A. N. Kolmogorov，《极大雷诺数下不可压缩黏性流体中湍流的局部结构》，《苏联科学院院刊》30，299（1941年）。[13] A. Obukhov，《湍流能量在频谱中的分布》，《苏联科学院院刊》32，22（1941年）。[14] R. H. Kraichnan，《二维湍流中的惯性区间》，《流体物理学》10，1417（1967年）。[15] S. Nazarenko，《波湍流》（施普林格，柏林，2011年）。[16] A. A. Schekochihin，《磁流体力学湍流：一篇带有偏见的综述》，《等离子体物理学杂志》88，155880501（2022年）。[17] C. F. Barenghi、L. Skrbek 和 K. R. Sreenivasan，《量子湍流》（剑桥大学出版社，2023年）。[18] V. E. Zakharov、V. S. L'vov 和 G. Falkovich，《柯尔莫哥洛夫–扎哈罗夫湍流谱》，第2版（施普林格，瑞士——land，2025年）。[19] K. R. Sreenivasan，论柯尔莫哥洛夫常数的普适性，《流体物理学》7，2778（1995年）。[20] L. H. Dogra、G. Martirosyan、T. A. Hilker、J. A. P. Glidden、J. Etrych、A. Cao、C. Eigen、R. P. Smith 和 Z. Hadzibabic，量子气体中波湍流的普适状态方程，《自然》620，521（2023年）。[21] M. Gałka、P. Christodoulou、M. Gazo、A. Karailiev、N. Dogra、J. Schmitt 和 Z. Hadzibabic，均匀玻色气体中二维波湍流的各向同性与动态标度的出现，《物理评论快报》129，190402（2022年）。[22] U. Frisch，《湍流：A. N. Kolmogorov 的遗产》（剑桥大学出版社，1995年）。[23] J. C. Vassilicos，湍流中的耗散，《流体力学年评》47，95（2015年）。[24] N. Navon、C. Eigen、J. Zhang、R. Lopes、A. L. Gaunt、K. Fujimoto、M. Tsubota、R. P. Smith 和 Z. Hadzibabic，湍流量子气体中的合成耗散与级联通量，《科学》366，382（2019年）。[25] P. Christodoulou、M. Gałka、N. Dogra、R. Lopes、J. Schmitt 和 Z. Hadzibabic，BKT 超流体中第一声与第二声的观测，《自然》594，191（2021年）。[26] D. S. Petrov、M. Holzmann 和 G. V. Shlyapnikov，准二维囚禁气体中的玻色–爱因斯坦凝聚，《物理评论快报》84，2551（2000年）。[27] Z. Hadzibabic 和 J. Dalibard，二维玻色流体：原子物理学视角，《新试验》34，389（2011年）。[28] R. Chapurin、X. Xie、M. J. Van de Graaff、J. S. Popowski、J. P. D'Incao、P. S. Julienne、J. Ye 和 E. A. Cornell，少体物理中普适性极限的精密检验，《物理评论快报》123，233402（2019年）。[29] N. Navon、A. L. Gaunt、R. P. Smith 和 Z. Hadzibabic，量子气体中湍流级联的出现，《自然》539，72（2016年）。[30] Y. Zhu、B. Semisalov、G. Krstulovic 和 S. Nazarenko，湍流玻色–爱因斯坦凝聚体中的正向级联与逆级联，《物理评论快报》130，133001（2023年）。[31] G. Martirosyan、K. Fujimoto 和 N. Navon，Gross–Pitaevskii模型中湍流的状态方程，arXiv:2407.08738（2024年）。[32] Y. Zhu、G. Krstulovic 和 S. Nazarenko，湍流与远离平衡的 Bogoliubov 波状态方程，在

玻色–爱因斯坦凝聚体，arXiv:2408.15163（2024年）。[33] 请注意，我们系统中的粒子数随时间缓慢减少，我们始终报告 n、n0 和 ϵ 的瞬时值。对于我们的全部主要数据（在最大 kD 下取得），系统始终处于准静态湍流态，并可由这些瞬时值很好地表征，因为级联传播到 kD 所需的时间 tD（如我们开始驱动系统后损失起始的延迟所示 [24]）至少比粒子损失的特征时间尺度短 4 倍，Π^{-1}。[34] S. Tung、G. Lamporesi、D. Lobser、L. Xia 和 E. A. Cornell，二维玻色气体中超流前区间的观测，《物理评论快报》105，230408（2010年）。[35] M. Gazo、A. Karailiev、T. Satoor、C. Eigen、M. Gałka 和 Z. Hadzibabic，均匀二维玻色气体中的普适粗化，《科学》389，802（2025年）。[36] V. M. Malkin，光学湍流的柯尔莫哥洛夫谱与非定常谱，《物理评论快报》76，4524（1996年）。[37] G. Falkovich 和 N. Vladimirova，非局域湍流中的级联，《物理评论E》91，041201（2015年）。[38] J. Skipp、V. L’vov 和 S. Nazarenko，自引力玻色气体与非局域非线性光学中的波湍流，《物理评论A辑》102，043318（2020年）。[39] T. Z. Fischer 和 A. S. Bradley，量子流体中稳态湍流的体制，《物理评论A辑》111，023308（2025年）。