arXiv:2602.06141v1 [math.AG] 5 Feb 2026

$\mathbb{P}^3$曲面上 ACM 曲线的分类

Abel Castorena 和 Monserrat Vite

Abstract. 我们根据弱可容许对，对包含在 $\mathbb{P}^3$ 上次数为 d 的曲面中的 ACM 曲线进行分类。对于非常一般的光滑行列式四次曲面，我们给出这些曲线的几何描述，并计算它们在该曲面上的 Picard 类。最后，我们将这一结果推广到 $\mathbb{P}^n$ 中超曲面上余维为 1 的算术 Cohen–Macaulay 闭子簇。

1. Introduction

算术 Cohen–Macaulay 曲线（简称 ACM 曲线）凭借其丰富的结构和良好的上同调性质，在代数几何中发挥着核心作用。它们被定义为齐次坐标环为 Cohen–Macaulay 环的射影曲线。ACM 曲线推广了完全交的概念，并构成研究连络理论的一类自然对象。例如，Ap´ery 和 Gaeta 证明，光滑曲线 C在 $\mathbb{P}^3$ 中属于完全交的链接类，当且仅当它是一条 ACM 曲线（[Ap´e45], [Gae48]）。

此外，具有固定极小自由分解的 ACM 曲线构成相应希尔伯特概形中的一个开光滑子集，其维数可由该分解的贝蒂数直接计算 [Ell75]。次数和亏格也由这些数确定 [PS74]。此外，希尔伯特–伯奇定理指出，ACM 曲线的理想的一组极小生成元由一个大小为 $(t+1)\times t$ [Har10, 命题 8。7]该定理在本文中发挥着基础性作用。

关于 ACM 曲线的分类，光滑二次曲面上一个众所周知的结果 Q 指出，型为 $(s,\ t)$ 的曲线在 Q 上是 ACM 曲线，当且仅当 $|s-t|\leq 1$ [Har77, III, 例 5。6]。在 [Wat81], 中，给出了光滑三次曲面上 ACM 曲线的完整描述；而在 [Wat15] 中，作者对 $\mathbb{P}^3$中的光滑四次曲面上的初始化 ACM 线丛进行了分类。这些结果的局限在于，光滑性假设起着关键作用。

本文的主要目的是对任意一个次数为 d、位于 $\mathbb{P}^3$ 中的曲面上的所有 ACM 曲线（不一定光滑或不可约）进行分类。思路如下：我们引入弱行列式曲面的概念（见定义 2.4），将 [LLHV24，定义 2] 中给出的行列式曲面定义加以推广。我们证明，不是弱行列式曲面的曲面仅包含完全交型 ACM 曲线。此外，这一定义使我们能够确定包含在弱行列式曲面中的 ACM 曲线所有可能的极小自由分解。

本文的主要定理如下：

定理 1 （$\mathbb{P}^3$ 中次数为 d 的曲面上的算术 Cohen–Macaulay 曲线的分类）. 设 $X = V(F)$ 为 $\mathbb{P}^3$，中次数为 d 的曲面，并设 $C \subseteq X$ 为一条曲线。则 C 是算术 Cohen–Macaulay 的，当且仅当出现下列情形之一：

(1) 曲面 X 不是弱行列式，且 C 是完全交。ˆ (2) 曲面 X 是弱行列式，其型为 $\{(\hat{a}_i, b_i)\}_{i\in I}$，且仅为这些型（见定义 2.4）。在此情形下，$C$ 满足下列条件之一：(i) C 是完全交。(ii) 若 C 不是完全交，且 F 是其理想的极小生成元，该理想属于C，则 C 具有如下极小自由分解：

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(b_j+k)) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(a_i+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d) \to \mathscr{I}_C \to 0,$$

ˆ 其中 $(\hat{a}_j = (a_1, \ldots, a_t)\ b_j = (b_1, \ldots, b_t))$ 对某个 $j \in I$ 以及某个 $k \in \mathbb{Z}$。

(iii) 若 C 不是完全交，且 F 不是 C的理想的极小生成元，则 C 具有如下极小自由分解：

$$0 \to \bigoplus_{i=1, i\neq j_0}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d+b_{j_0}-b_i) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d+b_{j_0}-a_i) \to \mathscr{I}_C \to 0,$$

ˆ 其中 $(\hat{a}_j = (a_1+k, \ldots, a_t+k)\ b_j = (b_1+k, \ldots, b_{j_0-1}+k, d, b_{j_0+1}+k, \ldots, b_t+k))$ 对某个 $j \in I,\ j_0 \in \{1, \ldots, t\}$，以及某个 $k \in \mathbb{Z}$。

作为应用，我们将结果与已知的次数为二和三的光滑曲面情形进行比较。我们还计算了次数 4 的所有可能弱可容许对（见定义 2.3），并确定其中哪些定义光滑弱行列式曲面。特别地，我们证明了以下结果：

推论 （推论4.2）。 若 X 是次数为 4 的光滑弱行列式曲面，则X是行列式型曲面，或属于型 $((0,0,1),(1,2,2))$。

由于非常一般的行列式曲面的皮卡群已为人所知，我们对包含在非常一般的行列式曲面中的 ACM 曲线给出了完整的几何描述。

文章结构： 第 2 节给出弱行列式曲面的定义，并证明定理 1。第3 节研究已知情形。第 4节描述次数 4 的所有可能弱可容许对，并针对光滑非常一般的行列式四次曲面 X，完整描述包含在 X中的 ACM 曲线。最后，第 5 节将主定理推广到高维情形。

致谢：我们感谢 C´esar Lozano Huerta 提供的宝贵反馈，第二作者感谢 Manuel Leal 在本文较为技术性的细节方面给予的支持。第一作者获得墨西哥国立自治大学（UNAM）研究基金 PAPIIT IN101226“Teor´ıa de Brill-Noether y aplicaciones”的资助。第二作者是墨西哥城数学科学中心（墨西哥国立自治大学，UNAM）的 SECIHTI 研究员。

2. ACM curves on a surface of degree d

设 D 是 $\mathbf{P}^3$ 中次数为 d 的曲面 X 上的非零有效除子。那么，由正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d) \to \mathscr{I}_D \to \mathcal{O}_X(-D) \to 0, \tag{1}$$

线丛 $\mathrm{O}_X(D)$ 是 ACM 的，当且仅当 D 是 ACM 曲线，其中 $\mathscr{I}_D$ 表示 $\mathbf{P}^3$ 中 D 的理想层。即使 D 不是 ACM 曲线，我们也可以通过将其与链接曲线联系起来，得到更多信息。

定义 2.1. 设 D_1 和 D_2 是 $\mathbb{P}^3$ 中的两条等维曲线。若它们没有共同分支，且 $D_1 \cup D_2 = S \cap S'$，则称它们由两个曲面 S 和 S' 的完全交直接几何链接（或简称链接）。在这种情况下，我们通常称 D_2 是 D_1的剩余曲线。

我们将 $M_D := \oplus_{n\in\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{I}_D(n))$ 记为 D的 Rao 模（参见 [MDP90, I, 定义 3.1]）。Rao 模与链接曲线之间的一个关系是，Rao 模 M_D在链接下保持不变（相差对偶及分次平移） [MDP90, III, 命题 1。2]。

同一曲面 X in $\mathbf{P}^3$ 上属于同一个 Picard 类的两条曲线之间的关系由以下命题给出。

命题 2.2. 设 D_1 和 D_2 是包含在曲面 X 中，该曲面位于 $\mathbb{P}^3$中。若 D_1 和D_2 在 $\mathrm{Pic}(X)$ 中具有相同的类，则 $M_{D_1} \cong M_{D_2}$。此外，存在一条曲线 B，使得每条 D_i 都与 B 由 X 与一个次数为 n[MDP90, III, 定义 1。。

证明。 由于 $[D_1] = [D_2]$ 在 $\mathrm{Pic}(X)$中，因此有 $\mathcal{O}_X(-D_1) \cong \mathcal{O}_X(-D_2)$。由正合列 (1) 得

$$H^1(\mathbf{P}^3,\ \mathscr{I}_{D_1}(n)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(nH - D_1)) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X(nH - D_2)) \cong H^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{I}_{D_2}(n)\mathbf{)}。$$

因此，

$$M_{D_1} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{I}_{D_1}(n)) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{I}_{D_2}(n)) = M_{D_2}.$$

对于第二个结论，令 H 表示 X 在 $\mathrm{Pic}(X)$ 中的超平面截面类，并设 $A = [D_1] = [D_2]$。对于 $n \gg 0$，类 $nH - A$ 非常充足，因此存在一条曲线$B \in |nH - A|$。由于 D_1，$D_2 \in |A| = |nH - [B]|$，且该类对应于包含 B、次数为n的曲面，结论得证。

□

现在回顾 [LLHV24中的可容许对定义， 1], 但对第三个条件作了略微修改。

ˆ**定义 2.3**。 考虑两个整数序列 $\hat{}a = (a_1, \ldots, a_t)$ 和 $b = (b_1, \ldots, b_t)$，它们属于$\mathbb{Z}^t$，且满足 $t \geq 2$:

(i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_t$; *(ii)* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_t$; *(iii)* 对所有 $1 \leq i \leq t$, $a_i < b_i$。

我们称$(\hat{}a, \hat{}b)$ 为次数为 $d := \sum_{i=1}^{t}(b_i - a_i)$ 且长度为 t的弱可容许对。若存在 $k \in \mathbb{Z}$，使得对于所有 $1 \leq i \leq t$均有 $a'_i = a_i + k$ 和 $b'_i = b_i + k$，则称两个ˆ ˆ弱可容许对 $(\hat{}a, b)$ 和 $(\hat{}a', b')$ 等价。

利用 根据这一定义，我们引入弱行列式曲面的概念。

定义 2.4。 设$(\hat{a},b)$ 是次数为 d 、长度为 t 的弱可容许对。若某曲面$X=V(F)\subset \mathbb{P}^3$满足$(\hat{a},b)$型，则称其为弱行列式曲面，当且仅当对于某个矩阵 $S=(m_{ij})$，有 $F=\det(S)$，其中 m_{ij} 是次数为 b_j-a_i 的齐次多项式。在$a_i\geq b_j$的情况下，我们假设 $m_{ij}=0$。

注 2.5。 注意，若 $a_i<b_j$对所有 $i,\ j\in\{1,\dots,t\}$，则可得到 [LLHV24 中给出的行列式曲面定义，定义 1、定义 2]。特别地，每个行列式曲面都是弱行列式曲面。

以下命题说明了这类曲面与我们研究的相关性。

命题 2.6。 设 $X=V(F)\subseteq\mathbb{P}^3$ 是一个次数为 d 的曲面。若存在一条非完全交的 *ACM* 曲线$C\subseteq X$，则对于某个次数为 d、长度为 t 的弱可容许对$(\hat{a},b)$， X 是$\hat{}$ $\hat{}$ $(\hat{a},b)$ 型弱行列式曲面。

证明。 设 $C\subseteq X$ 是一条不是完全交的算术 Cohen–Macaulay 曲线。可能出现两种情形。

情形 1： F 是 C 的理想的一个极小生成元。

根据希尔伯特–伯奇定理，存在一个大小为 $(t+1)$ 的矩阵 M，使得 F 是 M 的一个 $t\times t$ 子式的行列式。由次数的考虑可得 $t\leq d$。经过坐标变换，我们可以假设 C 的理想的极小自由分解的贝蒂数已排序，使得 $a_0=d$、 $a_1\leq\cdots\leq a_t$ 以及 $b_1\leq\cdots\leq b_t$。令 $t\times t$ 为 M 的 m_{ij} 子矩阵 $m=(m_{ij})$，满足 $\det(m)=F$ 且 $\hat{}\deg(m_{ij})=b_j-a_i$。令 $\hat{}a=(a_1,\ \dots\dots,\ a_t)$ 和 $b=(b_1,\ \dots\dots,\ b_t)$，可知 X 是型为 $(\hat{}a,\ b)$ 的 $\hat{}$ 弱行列式。

情形 2： F 不是 C的理想的极小生成元。

设 $F_1,\dots,F_t$ 是 C的理想的极小生成集。根据希尔伯特–伯奇定理，存在一个大小为 $t\times(t-1)$ 的矩阵 $M=(m_{ij})$，使得每个 F_i 都是 M 的一个 $(t-1)$ 阶 $\times(t-1)$ 子式的行列式。由于 F 属于 C的理想，因此存在齐次多项式 $m_{1t},\dots,m_{tt}\in\mathbb{C}[x,y,z,w]$，使得

$$F=\sum_{i=1}^{t}(-1)^i m_{it}F_i.$$

设 S 为通过添加列 (m_{it}) 完成 M 所得到的矩阵。沿最后一列展开 $\det(S)$，得到 $\det(S)=\pm F$。次数满足 $\deg(m_{ij})=b_j-a_i$，其中 $a_1,\dots,a_t$ 和 $b_1,\dots,b_{t-1}$ 是 C的理想的极小自由分解的贝蒂数，按递增顺序排列。令 $b_t=d$，$\hat{}a=(a_1,\dots,a_t)$，并且

$$\hat{b}=(b_1,\dots,b_{j_0-1},b_t,b_{j_0},\dots,b_{t-1})\quad\text{if } b_{j_0-1}\leq b_t<b_{j_0},$$

$\hat{}$我们得出结论： X 是型为$(\hat{}a,b)$的弱行列式曲面。

最后，我们必须验证：只要 $a_i=d$，就有 $m_{it}=0$ 。否则，存在次数为 d 的 F_i 使得 $m_{it}\neq 0$，从而

$$F_i=\sum_{j\neq i}m'_{jt}F_j+m_{it}^{-1}F.$$

因此，$\{F_1,\dots,F_{i-1},F,F_{i+1},\dots,F_t\}$ 将是C 的理想的极小生成集，这与假设矛盾。

□

注记 2.7. 此证明推广了 [LLHV24，命题 1 中给出的行列式判据。8]。

定理 *1* 的证明。 条目 (1) 是命题 2.6 的直接推论。对于条目 (2)，我们区分以下几种情形。

情形 0： C 是一个完全交。
情形 1： C 不是一个完全交，且 F 是 C的理想的一个极小生成元。由命题 2.6 的证明，存在一个大小为 $t\times t$的矩阵 $m=(m_{ij})$，使得 $\det(m) = F$且对所有 $i,j\in\{1,\dots,t\}$，$\deg(m_{ij}) = b_j - a_i$，其中 $a_0,a_1,\dots,a_t,b_1,\dots,b_t$是 C的理想的极小自由分解的贝蒂数。令 $\hat{a} = \hat{}(a_1,\dots,a_t)$ 且 $b=(b_1,\dots,b_t)$。根据定义， X是型为 $(\hat{a},b)$ 的弱行列式。因此，存在 $j\in I$使得 $(\hat{a},b)$ 与 $(\hat{a}_j,b_j)$ 等价，即存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得 $a_i = a_{ji}+k$，并且对所有 $i\in\{1,\dots,t\}$， $b_i = b_{ji}+k$，此外

$$a_0 = \sum_{i=1}^{t}(b_i - a_i) = d.$$

情形 2： C 不是完全交，并且 F 不是 C的理想的极小生成元。设 $F_1,\dots,F_t$是 C的理想的一组极小生成元。由命题 2.6 的证明，存在一个矩阵 S ，使得按最后一列展开 $\det(S)$ 可得 $\det(S) = \pm F$，其中 $\deg(m_{ij}) = b_j - a_i$，且 $a_1,\dots,a_t$和$b_1,\dots,b_{t-1}$分别是 C的理想的极小自由分解的贝蒂数，按递增顺序排列。令 $b_t = d$， $\hat{a}=(a_1,\dots,a_t)$，并且

$$\hat{b} = (b_1,\dots,b_{j_0-1},b_t,b_{j_0+1},\dots,b_{t-1}) \quad \text{if } b_{j_0-1}\le b_t < b_{j_0+1},$$

$\hat{}$由此我们得出， X是型为 $(\hat{a},\ b)$ 的弱行列式曲面。因此，存在 $\hat{}\hat{}j\in I$，使得 $(\hat{a},\ b)$ 等价于 $(\hat{a}_j,\ b_j)$，也就是说，存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得$a_i = a_{ji}+k$，并且对所有 $i\in\{1,\ \dots,\ t\}$ 都有 $b_i = b_{ji}+k$。特别地，我们有 $d = b_{jj_0}+k$，因此$k = d - b_{jj_0}$。

□

注记 2.8. (1) 在第 (2) 项的情形 (ii) 中，若 $k = d - b_j$对某个 j成立，则 F不再是 C 的理想的极小生成元。

(2) 尽管可容许对在 [LLHV24] 中的定义只给出有限多个可容许对，但在我们的设定中存在无穷多个弱可容许对。

为结束本节，我们为每个可容许对关联一个矩阵。为此，我们定义如下函数：

$$\delta:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{N},\qquad (a,b)\longmapsto\begin{cases} b-a, & \text{if } b-a>0,\\ 0, & \text{if } b-a\le 0.\end{cases}$$

$\hat{}$**定义 2.9.** 设 $(\hat{a},b)$ 是一个弱可容许对。我们将与$\hat{}(\hat{a},b)$ 相关的次数矩阵定义为

$$M_{(\hat{a},\hat{b})} := \begin{pmatrix} \delta(a_1,b_1) & \delta(a_1,b_2) & \cdots & \delta(a_1,b_t)\\ \delta(a_2,b_1) & \delta(a_2,b_2) & \cdots & \delta(a_2,b_t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \delta(a_t,b_1) & \delta(a_t,b_2) & \cdots & \delta(a_t,b_t)\end{pmatrix}.$$

注意，若两个可容许对等价，则它们的次数矩阵相同。另一方面，给定一个可容许对 $(\hat{a}, b)$，可能存在另一个可容许对 $\hat{}(\hat{a}', b')$，使得

$$M_{(\hat{a}', \hat{b}')} = M^{a}_{(\hat{a}, \hat{b})},$$

其中，M^{a} 表示矩阵关于其反对角线的转置。在这种情况下，我们称 $(\hat{a}, b)$ 和 $(\hat{a}', b')$ 互为对偶。

虽然弱可容许对有无穷多个，但其中大多数定义相同的一族弱行列式曲面。为了识别所有这类对，我们需要以下结果。

引理 2.10. 设 $M_{(\hat{a}, \hat{b})} = (m_{ij})$ 是可容许对 $(\hat{a}, b)$ 的次数 d 和长度为 t 的次数矩阵。若 $m_{ij} > 0$，则 $m_{ji} < d$。

证明。设 $0 < m_{ij} = \delta(a_i, b_j) = b_j - a_i$ 且 $m_{ji} \geq d$。那么，对于某个 $n \in \mathbf{N}$，有 $m_{ji} = b_i - a_j = d + n$。另一方面，

$$d = \sum_{k=1}^{t} (b_k - a_k) = \sum_{k \neq i,j} (b_k - a_k) + b_j - a_i + d + n.$$

由于对所有 k 都有 $b_k - a_k > 0$，这意味着 $b_j - a_i < 0$，矛盾。因此，$m_{ji} < d$。

□

定义 2.11。称两个可容许对 $(\hat{a}, b)$ 和 $(\hat{a}', b')$ 为同类，如果它们具有相同的次数和长度，且它们的次数矩阵 $M_{(\hat{a}, \hat{b})} = (m_{ij})$ 和 $M_{(\hat{a}', \hat{b}')} = (m'_{ij})$ 满足 $m_{ij} = m'_{ij}$ 对所有满足 $0 < m_{ij} < d$ 的元素均成立。

注 2.12。(1) 若 X 是型为 $(\hat{a}, b)$ 的弱行列式曲面，则 X 也是型为 $(\hat{a}, b)^{a}$ 的弱行列式曲面，其中 $(\hat{a}, b)^{a}$ 与 $(\hat{a}, b)$ 对偶。

(2) 设 $(\hat{a}, b)$ 和 $(\hat{a}', b')$ 是同类弱可容许对。沿用上述记号，注意若 $m_{ij} = 0$，则 $i > j$。由于这两个对同类，因此要么 $m'_{ij} = 0$，要么 $m'_{ji} = 0$；但由于 $i > j$，可知 $m'_{ij} = 0$。因此，$m_{ij} = 0$ 当且仅当 $m'_{ij} = 0$。这说明弱可容许对的类型决定了次数矩阵中零元的位置。因此，同类只有有限种。此外，若两个弱可容许对同类，则曲面 X 是其中一种型的弱行列式曲面，当且仅当它也是另一种型的弱行列式曲面。

(3) 确定与给定曲面相关的所有可容许对的一种方法 X 是考察由 X 与低次曲面的完全交所得到的曲线，然后通过 X 与包含这些曲线的其他曲面的完全交，将这些曲线链接起来。计算链接曲线的分解可得一个可容许对（这一步依据的是我们已知完全交的极小解消，以及 [MDP90，III Prop.1。4]）；取其对偶以及所有次数矩阵同型的可容许对，并有限次重复这一过程，便可得到所有将 X 定义为弱行列式曲面的可容许对。

问题 2.13. 综上，自然会提出如下问题：给定 $\mathbf{P}^3$，中的 d 曲面，如何确定 X 的所有弱可容许对都已得到完整刻画?

3. The known cases

本节中，我们分析次数为 2 和 3 的曲面的情形。当曲面光滑时，这些情形早已得到完整理解。关于二次情形，请参阅 [Har77, III, Ex. 5.6]。关于三次情形，请参阅 Masayuki Watanabe 的著作 [Wat81, Prop. 4.3]。

3.1. 二次。 可能的弱可容许对为 $((1,1),(2,2))$ 和 $((1,1+n),(2,2+n))$，其中 $n \in \mathbf{N}^*$。众所周知，所有光滑二次曲面都是行列式型的，这意味着所有光滑二次曲面都属于 $((1,1),(2,2))$ 型。另一方面，若某个二次曲面属于 $((1,1+n),(2,2+n))$ 型，其中 $n \in \mathbf{N}^*$，则其次数矩阵具有如下形式

$$M_{((1,1+n),(2,2+n))} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这意味着这种型的弱行列式曲面是可约的，因而特别是奇异的。因此，光滑二次曲面不可能属于 $((1,1+n),(2,2+n))$ 型。

推论 3.1. 设 Q 是光滑二次曲面，$C \subseteq Q$ 是曲线。那么，C 是 *ACM* 曲线，当且仅当满足以下条件之一：

(1) C 是一个完全交，或者 *(2)* C 具有如下极小自由分解：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k))^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

对于 $k \geq 1$。

在这两种情形下，曲线在 $(s,\ t)$ 上的型为 Q，其中 $|s-t| \leq 1$（参见 [Har77，III，例 5。6]）。

另一方面，注意到，对于所有 $n \geq 1$，所有形如 $((1,\ 1+n),\ (2,\ 2+n))$ 的弱可容许对都具有相同的型。因此，我们得到如下结果。

推论 3.2。 设 Q 是一个型为 $((1,2),(2,3))$ 的二次曲面，并设 $C \subseteq Q$ 是一条曲线。那么 C 是算术 *Cohen–Macaulay* 曲线，当且仅当以下条件之一成立：

(1) C 是一个完全交，或者 *(2)* C 具有如下极小自由分解：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(n+1+k)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k+n)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

for $n, k \geq 1$.

3.2. 三次。 在这种情况下，所有弱可容许对的分类更为复杂。因此，我们按型对可容许对进行整理。

$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ the unique weak admissible pair with this matrix is $((1,1),(2,3))$.

$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ the unique weak admissible pair with this matrix is $((1,2),(3,3))$.

$M_3(n) = \begin{pmatrix} 2 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与此矩阵对应的弱可容许对为 $((1,n),(3,n+1))$，其中 $n \geq 4$.

$M_4(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 与此矩阵对应的弱可容许对为 $((1,n),(2,2+n))$，其中 $n \geq 2$

.

$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 具有此次数矩阵的唯一弱可容许对是 $((1,1,1),(2,2,2))$. $M_6(n)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & n \\ 1 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 具有此次数矩阵的弱可容许对是 $((1,1,n),(2,2,n+1))$，其中 $n \geq 2$.

$$M_7(n) = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{the weak admissible pairs with this matrix are} \\ ((1,n,n),(2,n+1,n+1)) \text{ with } n \geq 2.\end{array}$$

$$M_8(m,n) = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & n+1 \\ 0 & 1 & n-m+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c}\text{the weak admissible pairs with this matrix are} \\ ((0,m,n),(1,m+1,n+1)) \\ \text{with } 1 \leq m < n.\end{array}$$

注意，$M_1^a = M_2$, $M_3(n)^a = M_4(n)$，且 $M_6(n)^a = M_7(n)$。如果弱行列式曲面 X 的次数矩阵属于 $M_3(n)$、$M_4(n)$、$M_6(n)$、$M_7(n)$ 或 $M_8(m,n)$ 型，那么 X 必定是可约的。因此，光滑曲面不可能属于这些型中的任何一种。然而，存在次数矩阵为 M_1、M_2 或 M_5 的光滑三次弱行列式曲面，且这些型中的每一种的一般元素都是光滑的。

推论 3.3。设 X 是一张光滑三次曲面，$C \subseteq X$ 是一条曲线。那么，C 是一条 *ACM* 曲线，当且仅当出现以下情形之一：

(1) X 是一张型为 *((1, 1), (2, 3))* 的一般弱行列式曲面，且 C 属于以下情形之一：

(i) C 是一个完全交。*(ii)* C 具有以下某种极小自由分解：*A* 对于 $k \geq 0$，$0 \to O_{\mathbb{P}^3}(-(3+k)) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \to O_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2 \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathscr{I}_C \to 0$. *B* 对于 $k \geq 0$，$0 \to O_{\mathbb{P}^3}(-(3+k))^2 \to O_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \oplus O_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathscr{I}_C \to 0$.

(2) X 是型为 $((1,1,1),(2,2,2))$ 的一般行列式曲面，而 C 是下列之一：*(*

i) C 是完全 l 交集。

(ii) C 具有如下极小自由分解：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k))^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to \mathscr{I}_C \to 0$$

对于 $k \geq 1$。

这些消解与在 [Wat81的命题 4 中得到的那些一致。8]最后，奇异情形中的消解可以类似于推论 3.2所述的二次超曲面情形类比得到。

4. Degree four

在本节中，我们关注包含于次数为四的曲面中的算术 Cohen–Macaulay 曲线这一情形。在计算所有可能的弱可容许对之前，我们先陈述一些由弱可容许对的定义直接得到的有用性质。

Re　　ˆ引理 4.1. 设 $(\hat{}a, b)$ 是一个次数为 d 、长度为 t 的弱可容许对。

(1) $b_j - a_i > 0$ 对所有 $i \le j$ 均成立。**(2)** 若 $b_j - a_i = c$，则 $b_{j-k} - a_{i+l} \le c$ 对所有 $0 \le k \le j-1$ 和 $0 \le l \le t-i$ 均成立。**(3)** 若 $b_j - a_i \ge d$，则 $b_i - a_j \le 0$。**(4)** 求出所有次数为 d 的弱可容许对，可归结为计算迹为 d 的所有可能的次数矩阵。

4.1. 次数为四的弱可容许对。 我们的目标是确定所有次数为四的弱可容许对。我们按长度 t 分情形进行分析。对于每个 t，我们按以下步骤进行：

(i) 施加迹条件 $\sum_{i=1}^{t} m_{ii} = 4$，其中 $m_{ii} > 0$。**(ii)** 假设 $a_1 = 0$ （规范化）。**(iii)** 研究次数矩阵 M 下三角部分中的零模式。

现在我们根据长度 t 分析各个情形。

4.1.1. 情形 $t = 2$. 次数矩阵具有如下形式： $M = (m_{ij})$，其中 $m_{11} + m_{22} = 4,\ m_{12} > 0$且 $m_{21} \ge 0$.

若 $m_{21} > 0$，则该对是 [LLHV24]，意义下的可容许对，已按如下方式分类：

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad ((1,1),(2,4)).$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((1,3),(4,4)).$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((1,2),(3,4)).$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((1,1),(3,3)).$$

因此，我们假设 $m_{21} = 0$，以获得新的弱可容许对 .

- $m_{11} = m_{22} = 2$. 由 $m_{11} = b_1 = 2$ 和不等式 $4 = m_{11} + m_{22} \le m_{12} = b_2$，我们得到对于 $n \in \mathbb{N}$ 有 $b_2 = 4 + n$，因此 $a_2 = 2 + n$。这给出弱可容许对

$$M_5(n) = \begin{pmatrix} 2 & 4+n \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((0,2+n),(2,4+n)),\ n \ge 0.$$

- $m_{11} = 3,\ m_{22} = 1$. 于是 $b_1 = 3$ 且 $4 \le b_2$，所以 $b_2 = 4 + n$ 且 $a_2 = 3 + n$。这给出

$$M_6(n) = \begin{pmatrix} 3 & 4+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((0,3+n),(3,4+n)),\ n \ge 0.$$

- $m_{11} = 1, \quad m_{22} = 3$。此情形由 $M_6(n)$ 反转置得到，从而得到

$$M_7(n) = \begin{pmatrix} 1 & 4+n \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad ((0,1+n),(1,4+n)),\ n \ge 0.$$

4.1.2. 情形 $t = 3$。次数矩阵具有 $M = (m_{ij})$ 的形式，其中 $m_{11} + m_{22} + m_{33} = 4$.若所有 $m_{ij} > 0$ 均满足 $j < i$，则若该对是可容许的：

$$M_8 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((1,2,2),(3,3,3)),$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((1,1,1),(2,2,3)).$$

为了找到新的弱可容许对，我们分析对角线下方含有零元的矩阵。

● 构型 (2，1，1) 假设 $(m_{11}, m_{22}, m_{33}) = (2, 1, 1)$ 满足 $b_1 = 2$.– $m_{31} = m_{32} = 0$, $m_{21} > 0$：求解这些条件可得如下弱可容许对：

$$M_{10}(n) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3+n \\ 1 & 1 & 2+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((0,1,2+n),(2,2,3+n)), n \geq 0.$$

– $m_{31} = m_{21} = 0$, $m_{32} > 0$：此情形得到如下弱可容许对：

$$M_{11}(n) = \begin{pmatrix} 2 & 3+n & 3+n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((0,2+n,2+n),(2,3+n,3+n)), n \geq 0.$$

– $m_{31} = m_{32} = m_{21} = 0$：出现了两族不同的弱可容许对 e:

$$M_{12}(n) = \begin{pmatrix} 2 & 3+n & 4+n \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((0,2+n,3+n),(2,3+n,4+n)), n \geq 0$$

$$M_{13}(m,n) = \begin{pmatrix} 2 & 3+m & 3+n \\ 0 & 1 & 1+n-m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad ((0,2+m,2+n),(2,3+m,3+n)), \ 0 \leq m < n.$$

● 对角线分布 (1,1,2) 通过对前述情形进行反转置得到，从而产生了额外的弱可容许对族：

$$M_{14}(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3+n \\ 1 & 1 & 3+n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((0,0,1+n),(1,1,3+n)), \ n \geq 0.$$

$$M_{15}(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2+n & 3+n \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((0,1+n,1+n),(1,2+n,3+n)), \ n \geq 0.$$

$$M_{16}(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4+n \\ 0 & 1 & 3+n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad ((0,1,2+n),(1,2,4+n)), \ n \geq 0.$$

$$M_{17}(m,n)=\begin{pmatrix}1 & 1+m & 3+n\\ 0 & 1 & 3+n-m\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad ((0,m,1+n),(1,1+m,3+n)),\ 1\le m<n.$$

- 配置 (1,2,1)
  假设 $(m_{11},m_{22},m_{33})=(1,2,1)$ 且满足 $b_1=2$。
  - $m_{31}=0,\ m_{32},m_{21}>0$：求解这些条件可得弱可容许对 :

$$M_{18}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,0,1),(1,2,2)).$$

  - $m_{31}=m_{32}=0, m_{21}>0$：恰有一种零模式会产生弱可容许对：

$$M_{19}(n)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3+n\\ 1 & 2 & 3+n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,0,2+n),(1,2,3+n)),\ n\ge 0.$$

  - $m_{31}=m_{21}=0, m_{32}>0$：此情形由前一种情形经反转置得到，从而产生额外的弱可容许对族：

$$M_{20}(n)=\begin{pmatrix}1 & 3+n & 3+n\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,1+n,2+n),(1,3+n,3+n)),\ n\ge 0.$$

  - $m_{31}=m_{32}=m_{21}=0$：在此情形下，我们得到一族弱可容许对：

$$M_{21}(n)=\begin{pmatrix}1 & 3+m & 4+n\\ 0 & 2 & 3+n-m\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,1+m,3+n),(1,3+m,4+n)),\ n\ge 0.$$

4.1.3. C 类 $t=4$。 </style}次数矩阵的形式为 $M=(m_{ij})$，其中 $\sum_{i=1}^{4} m_{ii}=4$.
由于对所有 i， $m_{ii}>0$ ，迹条件迫使

$$m_{11}=m_{22}=m_{33}=m_{44}=1.$$

这是因为四个正整数的最小和为 4，且仅当它们各自都等于 1 时才能达到。

如果对 $j<i$，所有 $m_{ij}>0$ ，我们便得到唯一的可容许矩阵：

$$M_{22}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad ((1,1,1,1),(2,2,2,2)).$$

为求 弱可容许对，我们考察主对角线下方含有零元的矩阵 l:

- **三个零元**：两种不同的零模式产生弱可容许对：

$$M_{23}(n)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2+n\\ 1 & 1 & 1 & 2+n\\ 1 & 1 & 1 & 2+n\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,0,0,1+n),(1,1,1,2+n)),\ n\ge 0.$$

$$M_{24}(n)=\begin{pmatrix}1 & 2+n & 2+n & 2+n\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,1+n,1+n,1+n),(1,2+n,2+n,2+n)),\ n\geq 0.$$

● **四个零元**：恰好一种零模式产生弱可容许对：

$$M_{25}(n)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2+n & 2+n\\ 1 & 1 & 2+n & 2+n\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,0,1+n,1+n),(1,1,2+n,2+n)),\ n\geq 0.$$

● **五个零元**：出现了两族弱可容许对：

$$M_{26}(m,n)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2+m & 3+n\\ 1 & 1 & 2+m & 3+n\\ 0 & 0 & 1 & 2+n-m\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad ((0,0,1+m,2+n),(1,1,2+m,3+n)),\ 0\leq m\leq n$$

$$M_{27}(m,n)=\begin{pmatrix}1 & 2+m & 3+n & 3+n\\ 0 & 1 & 2+n-m & 2+n-m\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}((0,1+m,2+n,2+n),(1,2+m,3+n,3+n))\\ 0\leq m\leq n\end{matrix}$$

● **六个零元**：最大零模式给出了最一般的弱可容许对族：

$$M_{28}(k,m,n)=\begin{pmatrix}1 & 2+k & 3+m & 4+n\\ 0 & 1 & 2+m-k & 3+n-k\\ 0 & 0 & 1 & 2+n-m\\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix},\ \begin{matrix}((0,1+k,2+m,3+n),(1,2+k,3+m,4+n)),\\ 0\leq k\leq m\leq n\end{matrix}$$

综上，我们得到了 20 个弱可容许对的无限族。这一分类按照弱可容许对的长度及其对应的次数矩阵族，穷尽列出了所有弱可容许对。

注意，对于所有 k、m、$n\in\mathbb{N}^*$且满足 $k<m<n$ 的情形，$M_1^a=M_2$、$M_3^a=M_3$、$M_4^a=M_4$、$M_5^a(n)=M_5(n)$ $M_6^a(n)=M_7(n)$ $M_8^a=M_9$、$M_{10}^a(n)=M_{15}(n)$ $M_{11}^a(n)=M_{14}(n)$ $M_{12}^a(n)=M_{16}(n)$ $M_{13}^a(m,n)=M_{17}(n-m,n)$ $M_{18}^a=M_{18}$、$M_{19}^a(n)=M_{20}(n)$ $M_{21}^a(m,n)=M_{21}(n-m,n)$ $M_{22}^a=M_{22}$、$M_{23}^a(n)=M_{24}(n)$ $M_{25}^a(n)=M_{25}(n)$ $M_{26}^a(m,n)=M_{27}(n-m,n)$，以及 $M_{28}^a(k,m,n)=M_{28}(n-m,n-k,n)$。

ˆ推论 *4.2. (1)* 次数矩阵为 $M_5(n)$ $M_6(n)$ $M_7(n)$ $M_{10}(n)$ $M_{11}(n)$ $M_{12}(n)$ $M_{14}(m,n)$ $M_{14}(n)$,$M_{15}(n)$ $M_{16}(n)$ $M_{17}(m,n)$ $M_{19}(n)$ $M_{20}(n)$ $M_{21}(n)$ $M_{23}(n)$ $M_{24}(n)$ $M_{25}(n)$,$M_{26}(m,n)$ $M_{27}(m,n)$ 或 $M_{28}(k,m,n)$ 的型为 *(ˆa, b)* 的弱行列式曲面 X 是可约的。*(2)* 若 X 是一个次数 *4* 的光滑弱行列式曲面，则 X 是行列式型的，或属于 *((0, 0, 1), (1, 2, 2))* 型。

ˆ证明。设 (ˆa, b) 是一个次数 4、长度为 t 的弱可容许对，并设 $M=M_{(\hat{a},\hat{b})}=(m_{ij})$ ˆ 是其次数矩阵。设 X 是型为 (ˆa, b) 的弱行列式曲面。根据定义，存在一个矩阵 $N=(n_{ij})$，使得每个 n_{ij} 都是次数为 m_{ij} 的齐次多项式；当 $m_{ij}=0$ 时，有 $n_{ij}=0$，且 $X=V(\det(N))$。

条目 (1) 直接由备注 4.1 得出。如果存在 $i \in \{1, \ldots, t\}$ 使得 $m_{(i+1)i} = 0$，那么 $n_{(i+1+k)(i-l)} = 0$ 对所有 $0 \le k \le t-i-1$ 以及 $0 \le l \le i-1$。因此，

$$\det(N) = \det(N_1) \cdot \det(N_2),$$

其中 $N_1 = (n_{jl})_{j,l=1}^{i}$ 且 $N_2 = (n_{pq})_{p,q=i+1}^{t}$，因此 X 是可约的。

对于第 (2) 项，只需证明对任意可容许对以及对如下对 $((0,0,1),(1,2,2))$，存在一个光滑元素。在可容许情形下，这可由[LLHV24，命题 11]。其余情形可直接利用 `Macaulay2`。

□

4.2. **行列式曲面**。由推论4.2，任何不是型 ((0,0,1),(1,2,2)) 的光滑弱行列式曲面都是行列式曲面。也就是说，X 是弱行列式，其型为 $(\hat{a}, b)$ 且满足 $a_i < b_j$ 对所有 i, j。这些曲面给出诺特-勒夫谢茨轨迹的五个不可约分支

$$NL(4) \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|,$$

余维为 1 的全部情形。

定理 4.3 ([LLHV24])。行列式四次曲面族由五个$\hat{}$素除子 $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_5 \subseteq |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$组成，每个都对应一个次数为4的可容许对 $(\hat{a}, b)$，每个除子$\mathcal{F}_i$ 都与一个经典的四次曲面族重合，即包含以下曲线的四次曲面：

$\mathcal{F}_1$：一条次数为6 、亏格为3 且具有如下分解的曲线

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^4;$$

$\mathcal{F}_2$：一条扭曲三次曲线；$\mathcal{F}_3$：两个二次曲面的完全交；$\mathcal{F}_4$：一条直线；$\mathcal{F}_5$：一条圆锥曲线。

所有这些情形都特别有趣，因为对于每个除子中非常一般的光滑元素，其皮卡群的秩为二。更准确地说，设 $X_i \in \mathbf{F}_i$ $(1 \le i \le 5)$ 是一个非常一般的光滑曲面，$C_i \subseteq X_i$ 是上文列出的相应曲线，其次数为 d_i，亏格为 g_i。那么 $Pic(X_i)$ 由超平面截面 H 和类 $[C_i]$ 生成，并且相对于这个基的交数矩阵为

$$A_i = \begin{pmatrix} 4 & d_i \\ d_i & 2g_i - 2 \end{pmatrix}.$$

这些性质促使我们对每个分支的非常一般元素上的算术 Cohen–Macaulay 曲线给出完整描述。

4.2.1. 含直线的四次曲面. 设 $X \in \mathbf{F}_4$ 为非常一般的光滑四次曲面。用 $L = [C_4]$ 表示包含于 X中的直线的类。则 $Pic(X)$ 由 H 与 L生成，且

$$H^2 = 4, \quad H \cdot L = 1, \quad L^2 = -2.$$

命题 4.4. 设 $X = V(F) \in \mathcal{F}_4$ 为非常一般的光滑四次曲面，并设$D \subseteq X$ 为一条曲线，使得 $D / \sim H$。将 $[D] = aH + bL$ 写成 $Pic(X)$。则 D 是 *ACM* 曲线，当且仅当出现下列情形之一：

(i) 若 $|D-H|=\varnothing$:

(a) $[D]=L$，且此类中的唯一曲线是直线 C_4。

(ii) 若 F 是 $\mathscr{I}_D$ 和 $|D-H|\neq\varnothing$的极小生成元:

(a) $[D]=kH+L$，其中 $k\geq 3$。这些曲线的次数为 $4k+1$，亏格为 $2k^2+k$，且极小自由分解为

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k))\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k))\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)\to\mathscr{I}_D\to 0.$$

(b) $[D]=(k+1)H-L$，其中 $k\geq 3$。这些曲线的次数为 $4k+3$，亏格为 $2k^2+3k+1$，且极小自由分解为

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k))^2\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k))\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)\to\mathscr{I}_D\to 0.$$

(iii) 若 D 是平面曲线且 $|D-H|\neq\varnothing$:

(a) $[D]=H-L$，且 D 是平面三次曲线，在包含 C_4的平面与 X 的完全交集中，作为 C_4 的剩余曲线。

(iv) 若 D 包含在二次曲面中，且 $|D-H|\neq\varnothing$:

(a) $[D]=2H$，一条次数为 8、亏格为 9 的曲线；*(b)* $[D]=2H-L$，C_4 的剩余曲线；*(c)* $[D]=H+L$，包含在 X 中的平面三次曲线的剩余曲线。

(v) 若 D 包含在三次曲面中，且 $|D-H|\neq\varnothing$:

(a) $[D]=3H$，一条次数为 12、亏格为 19 的曲线;

(b) $[D]=3H-L$，C_4 的剩余曲线;

(c) $[D]=2H+L$，平面三次曲线的剩余曲线。

(vi) D 是与次数为 $d\geq 4$ 的曲面完全交的 X；在此情形下，$[D]=dH$。

证明。对于 (i)，我们遵循 [Wat15定理 1 中的条件。1]。

● $D^2=-2$ 和 $1\leq D.H\leq 3$。由第二个条件可得 $1\leq 4a+b\leq 3$，因此 $1-4a\leq b\leq 3-4a$。由于$b\in\mathbb{Z}$，我们考虑以下情形:

$b=1-4a$

由第一个方程可得

$$\begin{aligned}-2=D^2&=4a^2+2ab-2b^2\\&=4a^2+2a(1-4a)-2(1-4a)^2\\&=-36a^2+18a-2.\end{aligned}$$

因此，唯一的整数解是 $a=0, b=1$，故 $D=L$。$b=2-4a$

在此情形下,

$$-2=D^2=-36a^2+36a-8,$$

它没有整数解。

$b=3-4a$

我们得到

$$-2=D^2=-36a^2+54a-18,$$

它没有整数解。

● $D^2=0$ 和 $3\leq D.H\leq 4$。由 $3\leq 4a+b\leq 4$ 可得 $3-4a\leq b\leq 4-4a$。

因此:

$b = 3 - 4a$

Then

$$0 = D^2 = -36a^2 + 54a - 18,$$

其唯一的整数解是 $a = 1, b = -1$，即 $D = H - L$。该除子的次数为 3，亏格为 0，因此它是一条扭曲三次曲线。因此 $X \in \mathbb{F}_2$, ，这是不可能的，因为 X 是 $\mathbb{F}_4$的非常一般元素。因此这个类不存在。

$b = 4 - 4a$

在这种情况下

$$0 = D^2 = -36a^2 + 72a - 32,$$

它没有整数解。

- $D^2 = 2$ 和 $D.H = 5$。那么 $4a + b = 5$,

因此 $b = 5 - 4a$，并且

$$2 = D^2 = -36a^2 + 90a - 50,$$

它没有整数解。

- $D^2 = 4, D.H = 6$和 $|D - H| = \varnothing$。那么

$b = 6 - 4a$ 和

$$4 = D^2 = -36a^2 + 108a - 72,$$

它没有整数解。

对于条目 (ii)，曲面 X 是型为 $((1,1),(2,4))$ 的行列式型曲面，其对偶对为$((1,3),(4,4))$。根据定理 1，我们得到 $\mathscr{I}_D$ 的两种可能分解。

情形 1：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

利用贝蒂数，可计算出 D 的次数和亏格：

$$d_D = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^2 - \sum_{i=0}^{2} a_i^2\right), \qquad g_D = 1 + \frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{2} b_i^3 - \sum_{i=0}^{2} a_i^3\right) - 2d_D. \tag{2}$$

因此， $d_D = 4k + 1$ 和 $g_D = 2k^2 + k$。假设 $k \geq 3$，则有

$$4k + 1 = D.H = 4a + b, \qquad 2k + 4k^2 - 2 = D^2 = 4a^2 + 2ab - 2b^2,$$

这意味着 $a = k$ 且 $b = 1$。根据命题 2.2，这些曲线是算术 Cohen–Macaulay。

情形 2：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k))^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

Using (2), we obtain $d_D = 4k + 3$ and $g_D = 2k^2 + 3k + 1$. Assuming $k \geq 3$, we have

$$4k + 3 = D.H = 4a + b, \qquad 6k + 4k^2 = D^2 = 4a^2 + 2ab - 2b^2,$$

这意味着 $a = k + 1$ 且 $b = -1$。再次，命题 2.2 表明这些曲线是算术 Cohen–Macaulay 的。

情形（iii）。设 D 是 X 中类为 $aH + bL$ 的平面曲线。那么 D 的次数为 $4a + b$，亏格为 $\binom{4a+b-1}{2} - \binom{4a+b-3}{2}$；当~~且仅当（$a = 0$ 且 $b = 1$）~~、（$a = 1$ 且 ~~$b = 0$~~）或（$a = 1$ 且 $b = -1$）时，它等于 $\frac{D^2-2}{2}$。在第一种情形中， D 的类为 L，这已在条目 ii) 中讨论过。在第二种情形中，除子为 H，但根据假设，这种情形不可能发生。因此， D 的类为 $H - L$，且此类的次数为三次，亏格为 1。

关于这类曲线在 X 中存在的情形，注意，包含直线 C_4 的平面与 X 的完全交是 C_4 与一条曲线 A 的并。根据 [MDP90，III，命题 1.2], 分别地， A 的次数和亏格为 $d_A = 4(1) - 1 = 3$ 和 $g_A = {}_{(3-1)\ 1+4-4}{}_2 + 0 = 1$。

对于情形 (iv) 和 (v)，我们讨论条目 (ii) 中剩余的情形，以及定理1的条目 (2)、(iii) 所给出的情形:

情形 1：根据条目 (ii) 的情形 1，结合 $k = 0$，可知 D 是直线 L。

情形 2：根据条目 (ii) 的情形 1，结合 $k = 1$，可知 D 是包含在奇异二次曲面中的一条奇异曲线，其次数为 5，亏格为 3，类为 $H + L$。为得到几何描述，设 A 是包含在 X 中的三次平面曲线（由条目 (iii) 可知其存在），并设 Q 是包含 A 且与 X 没有公共分支的二次曲面（注意，该曲面是两个平面的并）。那么 X 与 Q 的完全交是 A 与一条曲线 D 的并。根据 [MDP90，III，命题 1.2], ， D 的次数和亏格分别为 $d_D = 2(4) - 3 = 5$ 和 $g_D = {}_{(5-3)(2+4-4)}{}_2 + 1 = 3$。

情形 3：根据条目 (ii) 的情形 1，取 $k = 2$，可知 D 是次数为 9、亏格为 10 且包含在三次曲面中的曲线，其类为 $2H + L$。下面给出几何描述。设A 是包含在 X 中的一条次数为 3 的平面曲线（根据条目 (iii)，它确实存在），再设 S 是包含 A 且与 X没有公共分支的三次曲面。那么， X 与 S 的完全交是 A 和一条曲线 D的并。根据 [MDP90，III，第 1 号命题， D 的次数和亏格分别为 $d_D = 3(4) - 3 = 9$ 和 $g_D = {}_{(9-3)(3+4-4)}{}_2 + 1 = 10$。

情形 4：应用条目 (ii) 的情形 2，取 $k = 0$，可知 D 是条目 (iii) 中描述的平面三次曲线。

情形 5：根据条目 (ii)，情形 2， $k = 1$, D 是一个次数为 7、亏格为 6、包含于二次曲面中的曲线，其类为 $2H - L$。几何描述如下。设 Q 为一个包含直线 C_4 且与 X没有公共分支的二次曲面。那么， X 与 Q 的完全交是 C_4 与一条曲线 D的并。根据[MDP90，III，命题 1.2]，D 的次数 d_D 和亏格 g_D 分别为 $d_D = 2(4) - 1 = 7$ 和$g_D = {}_{(7-1)(2+4-4)}{}_2 + 0 = 6$。

情形 6：利用条目 (ii)，情形 2， $k = 2$, D 是一个次数为 11、亏格为 15、包含于三次曲面中的曲线，其类为 $3H - L$。为得到几何描述，设 S 为一个包含 C_4 且与 X没有公共分支的三次曲面。那么， X 与 S 的完全交是 C_4 与一条曲线 D的并。根据 [MDP90，III，命题 1.2]，$-1 = 11$ 的次数 $d_D = 3(4)$和亏格 $g_D = {}_{(11-1)(3+4-4)}{}_2 + 0 = 15$。

情形 7：根据定理 1，第 (2) 项 iii)，以及数对 $((1,1),(2,4))$，我们得到以下解消:

–

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^2 \to \mathscr{I}_D \to 0,$$

在这种情况下， D 是直线 C_4。

–

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-6) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

此情形与情形 3重合。

情形8：由定理1，第(2)项iii)以及数对$((1,3),(4,4))$，我们有如下分解：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

与前述情形类似，我们计算次数 $d_D = 3$ 和亏格$g_D = 1$；在这种情形下， D 是条目 (iii) 中描述的平面三次曲线。

最后，为了证明条目 (vi)，注意，包含在次数 4 的曲面 X 中的可能的完全交，要么是 X 与另一任意次数曲面的交集，要么是次数分别为 n 和 m 的两个曲面与 n， $m \in \{1, 2, 3\}$的完全交。

对于第一种型，如果一条曲线是 X 与一个次数为 d的曲面的完全交，那么它的次数为 $4d$，亏格为 $2d^2 + 1$。如果 $D = aH + bL$ 是这条曲线的类，那么

$$D.H = 4a + b = 4d \quad \text{and} \quad D^2 = 4a^2 + 2ab - 2b^2 = 2d^2 + 1.$$

该方程组有唯一解，即 $a = d$ 和 $b = 0$。

现在假设这条曲线属于第二种型。注意，情形 $m = n = 1$ 对应一条直线，情形 $m = 1$ 和 $n = 3$ （因此情形 $m = 3$ 和 $n = 1$）对应一条平面三次曲线，已在条目 (iii) 中讨论。情形 $m = n = 3$ 对应一条次数为 9、亏格为 10 的曲线，已在条目 (v) 中讨论。

注意，情形（n， m） =（1，2），（2，1），（2，2）是不可能的，因为曲面 X是一般的，因此不可能包含圆锥曲线或次数为 4 的椭圆曲线。因此，唯一剩下的可能性是 $m = 2$ 和 $n = 3$ （或者 $m = 3$ 和 $n = 2$）。在这种情形下，完全交是一条包含在二次曲面 Q中的次数为 6、亏格为 4 的曲线。若这样的曲线存在，我们可以考虑 Q 与 X的完全交，因此这条曲线将与一条包含在 X中的次数为 4（2）$-6 = 2$、亏格为 $\frac{(2-6)(4+2-4)}{2} + 4 = 0$的曲线相连，这就产生了矛盾。因此，这样的曲线不可能存在。

□

注4.5。（1）由于方程 $D^2 = -2$ 和 $D.H = 1$ 有唯一的整数解，直线 C_4 在其数值等价类中是刚性的。因此， C_4 是包含在 X中的唯一一条直线。（2）第（iv）项中出现的次数为 5、亏格为 3 的曲线不可能包含在光滑二次曲面中，因为光滑二次曲面上的次数为 5 的算术 Cohen–Macaulay 曲线亏格为 2。此外，这条曲线不满足 Castelnuovo 界，因为它是直线 C_4 与一条平面四次曲线的并。

4.2.2. 包含一条圆锥曲线的四次曲面. 设 $X \in \mathbf{F}_5$ 是一个非常一般的光滑元素。记类 $[C_5]$ 为 C。那么 $Pic(X)$ 由 H 和 C 生成，其中 $H^2 = 4$、 $H \cdot C = 2$ 和 $C^2 = -2$。

命题 4.6. 设 $X = V(F) \in \mathcal{F}_5$ 是 $\mathbb{P}^3$, 中一个非常一般的光滑四次曲面，并设 D 是 X 上一条满足 $D \notin |H|$ 的曲线。设 $aH + bC$ 是 D 在 $Pic(X)$中的类。那么D 是 *ACM* 曲线，当且仅当下列情形之一成立：

(i) $|D - H| = \varnothing$： *(a)* $[D] = C$ 或 $[D] = H - C$，两个类中的曲线都是圆锥曲线。

(ii) F 是 $\mathscr{I}_D$ 和 $|D - H| \neq \varnothing$的一个极小生成元：*(a)* 对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $k \geq 3$，为 $[D] = kH + C$；或者对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $k \geq 3$，为 $[D] = (k + 1)H - C$。两个类中的曲线次数为 $4k + 2$，亏格为 $2k^2 + 2k$，且极小自由

分解

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k)^{\oplus 2}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0$$

(iii) D 是包含在二次曲面中的曲线，且 $|D-H| \neq \varnothing$:

(a) $[D] = 2H$，且 D 是 X 与一个二次曲面的完全交；它是一条次数为8 、亏格为9的曲线。*(b)* $[D] = H + C$或 $[D] = 2H - C$，且 D是一条次数为6、亏格为4的曲线，是 X 与包含 C_5的二次曲面 Q 的完全交中相对于 C_5 的剩余曲线。*(iv)* D 包含在三次曲面中，且 $|D-H| \neq \varnothing$: *(a)* $[D] = 3H$，且 D 是 X 与一个三次曲面的完全交；它是一条次数为12、亏格为19的曲线。*(b)* $[D] = 3H - C$ 或 $[D] = 2H + C$，且 D 是一条次数为10 、亏格为12的曲线，是 X 与包含C_5的三次曲面的完全交中相对于圆锥曲线 C_5 的剩余曲线。

(v) D 是 X 与次数为 d的曲面的完全交，其中 $d \geq 4$。这条曲线的类为 dH。

证明。 对于 (i)，我们遵循 [Wat15，定理 1。1]。

- $D^2 = -2$ 和 $1 \leq D \cdot H \leq 3$。由第二个条件可得 $1 \leq 4a + 2b \leq 3$，因此 $1 - 4a \leq 2b \leq 3 - 4a$。由于$b \in \mathbb{Z}$，我们有 $b = 1 - 2a$。由第一个方程，

$$-2 = D^2 = 4a^2 + 4ab - 2b^2 = 4a^2 + 4a(1-2a) - 2(1-2a)^2,$$

  由此得到 $6a(1-a) = 0$。因此，唯一的整数解为$(a,\ b) = (0,\ 1)$，对应于 $D = C$；以及$(a,\ b) = (1,\ -1)$，对应于 $D = H - C$。
- $D^2 = 0$ 和 $3 \leq D \cdot H \leq 4$。
  由 $3 \leq 4a + 2b \leq 4$，我们得到 $b = 2 - 2a$。代入后，得到

$$0 = D^2 = -12a^2 + 24a - 4,$$

  它没有整数解。
- $D^2 = 2$ 和 $D \cdot H = 5$。于是 $4a + 2b = 5$，它没有整数解。
- $D^2 = 4$、 $D \cdot H = 6$和 $|D-H| = |2H-D| = \varnothing$。由 $4a + 2b = 6$，我们得到 $b = 3 - 2a$。代入 ，

$$4 = D^2 = -12a^2 + 36a - 18,$$

  它没有整数解。

对于 (ii)，曲面 X 是一个型为 $((1,2),(3,4))$ 的行列式四次曲面，并且是自对偶的。根据定理 1， 的分解是

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(4+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

利用公式（2），我们得到 $d_D = 4k + 2$ 和 $g_D = 2k^2 + 2k$。由于 D 包含在次数较低的曲面中的情形已单独处理，我们假设 $k \geq 3$。此外，

$$4k + 2 = D \cdot H = 4a + 2b, \qquad 4k + 4k^2 - 2 = D^2 = 4a^2 + 4ab - 2b^2,$$

这意味着 $a = k$、 $b = 1$ 和 $D = kH + C$，或 $a = k + 1$、 $b = -1$ 和 $D = (k+1)H - C$。

现在验证这两个类中的曲线均为算术 Cohen–Macaulay。设 $|D-H|\neq\varnothing$ 和 $D=(k+4)H+C$，其中 $k\geq -2$。那么 $nH-D=(n-(k+4))H-C$，并且由于 C 是算术 Cohen–Macaulay，

$$H^1(\mathcal{O}_X(nH-D))=H^1(\mathcal{O}_X((n-(k+4))H-C))=0$$

对所有 n，因此 D 是算术 Cohen–Macaulay。

类似地，若 $|D-H|\neq\varnothing$ 和 $D=(k+5)H-C$ 且满足 $k\geq -2$，则 $nH-D=(n-(k+5))H+C$，并且由于 $-C$ 是算术 Cohen–Macaulay，

$$H^1(\mathcal{O}_X(nH-D))=H^1(\mathcal{O}_X((n-(k+5))H+C))=0$$

对所有 n，因此 D 是算术 Cohen–Macaulay。

现在我们验证，除了圆锥曲线或平面四次曲线（超平面截面）之外，不存在其他平面曲线。设 D 是 X 上的一条平面曲线，其类为 $aH+bC$。它的次数为 $4a+2b$，亏格为 $(4a+2b-1)(4a+2b-2)\ 2$ 。当且仅当 $(a,b)=(0,1)$、$(1,0)$ 或 ~~$(1,-1)$ 时，这等于~~ $\frac{D^2-2}{2}$。因此，D ~~的类~~为 C、H 或 $H-C$，结论得证。

对于 (iii) 和 (iv)，我们考虑 (ii) 中剩余的情形，以及由定理 1 的第 (2)(ii) 和 (2)(iii) 项所导出的情形：

情形 1： 由 (ii) 可知，$k=0$，D 是一条圆锥曲线。

情形 2： 由 (ii) 可知，$k=1$，D 是一条次数为 6、亏格为 4 的曲线，包含在一个二次曲面中，其类为 $H+C$ 或 $2H-C$。从几何上看，设 Q 是一个包含 C_5 且与 X 没有公共分支的二次曲面。那么 $X\cap Q=C_5\cup D$，并且根据 [MDP90，III，命题 1，2]，我们有 $d_D=6$ 和 $g_D=4$。

情形 3： 由 (ii) 可知，$k=2$，D 是一条次数为 10、亏格为 12 的曲线，包含在一个三次曲面中，其类为 $2H+C$ 或 $3H-C$。设 S 是一个包含 C_5 且与 X 没有公共分支的三次曲面。那么 $X\cap S=C_5\cup D$，并且根据 [MDP90，III，命题 1，2]，我们有 $d_D=10$ 和 $g_D=12$。

情形 4： 由定理 1(2)(iii) 以及配对 $((1,2),(3,4))$，我们得到如下分解：–

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\to\mathscr{I}_D\to 0,$$

这对应于一条圆锥曲线。

–

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\to\mathscr{I}_D\to 0,$$

这与情形 2 相同。

在所有情形下，这些曲线都是算术 Cohen–Macaulay。事实上，若 $D=mH+C$，则 $nH-D=(n-m)H-C$，且由于 C 是算术 Cohen–Macaulay，$H^1(\mathcal{O}_X(nH-D))=0$ 对所有 n 均成立。同理，若 $D=mH-C$，则 $nH-D=(n-m)H+C$，且由于 $-C$ 是算术 Cohen–Macaulay，$H^1(\mathcal{O}_X(nH-D))=0$ 对所有 n 均成立。

最后，我们证明 (v)。与前一个命题中一样，唯一的可能性是该曲线是 X 与另一张次数为 d 的曲面的完全交，此时 $a=d$ 和 $b=0$。对于其余的可能性，若该曲线是次数分别为 m 和 n 的曲面的完全交，则有：对于 $(m,n)=(1,2)$ 或 $(2,1)$，该曲线是类为 C 的圆锥曲线；对于 $(m,n)=(1,1)$、$(1,3)$、$(3,1)$ 或 $(3,3)$，这些情形均不可能，因为它们会给出一条直线或一条平面三次曲线，而其在完全交下的剩余曲线将是包含于 X 中的一条直线，这是不可能的。其余情形 $(m,n)=(2,3)$ 或 $(3,2)$ 给出一条次数为 6、亏格为 4 的曲线，已在条目 (iii) 中讨论。

□

4.2.3. 包含次数为4且亏格为1的 *ACM* 曲线的四次曲面。设 $X \in \mathrm{F}_3$ 为一个非常一般的光滑元素。我们用 C 表示类 $[C_3]$。那么 $Pic(X)$ 由 H 和 C 生成，其中 $H^2 = 4$、$H \cdot C = 4$ 和 $C^2 = 0$。

命题 4.7. 设 $X = V(F) \in \mathcal{F}_3$ 是 $\mathbb{P}^3$, 中的非常一般的光滑四次曲面，且 D 是 X 上的一条曲线，使得 $D \notin |H|$。设 $aH + bC$ 是 D 在 $Pic(X)$ 中的类。那么，D 是 *ACM* 曲线，当且仅当以下情形之一成立：

(i) $|D - H| = \varnothing$: *(a)* $[D] = C$ 或 $[D] = 2H - C$，且这两类中的曲线都是次数为4 、亏格为1的算术 *Cohen–Macaulay* 曲线。

(ii) F 是 $\mathscr{I}_D$ 的极小生成元，且 $|D - H| \neq \varnothing$:
(a) $[D] = (k+1)H - C$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 满足 $k \geq 3$；或者 $[D] = (k-1)H + C$，其中 $k \in \mathbb{Z}$ 满足$k \geq 3$。两种情形下，曲线的次数为 $4k$，亏格为 $2k^2 - 1$，且其极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k))^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

(iii) D 是包含在二次曲面中的曲线，且 $|D - H| \neq \varnothing$:
(a) $[D] = 2H$，且 D 是 X 与一个二次曲面的完全交；它是一条次数为8、亏格为9的曲线。

(iv) D 是包含在三次曲面中的曲线，且 $|D - H| \neq \varnothing$:
(a) $[D] = 3H$，且 D 是 X 与一个三次曲面的完全交；在这种情形下， D 是一条次数为12 、亏格为19的曲线。
(b) $[D] = H + C$ 或 $[D] = 3H - C$，在这两种情形下， D 都是一条次数为8 、亏格为7的曲线，它是三次曲面与 X 的完全交中相对于曲线 C_3 的剩余曲线；该三次曲面 S 包含 C_3。

(v) D 是 X 与一个次数为 d的曲面的完全交，其中 $d \geq 4$。这条曲线的类为 dH。

证明。 对于 (i)，与之前一样，我们遵循以下条件 [Wat15，定理 1。1]。

- $D^2 = -2$ 和 $1 \leq D \cdot H \leq 3$。由第二个条件可得 $1 \leq 4a + 4b \leq 3$，因此 $1 - 4a \leq 4b \leq 3 - 4a$。由于$b \in \mathbb{Z}$，这个不等式无解。
- $D^2 = 0$ 和 $3 \leq D \cdot H \leq 4$。由 $3 \leq 4a + 4b \leq 4$ 可得 $b = 1 - a$。代入第一个方程，

$$0 = D^2 = 4a^2 + 8ab = 4a^2 + 8a(1-a) = 4a(2-a),$$

它有两个解： $a = 0$、 $b = 1$，对应于 $D = C$；以及 $a = 2$、 $b = -1$，对应于 $D = 2H - C$。

- $D^2 = 2$ 和 $D \cdot H = 5$。于是 $D \cdot H = 4a + 4b = 2(2a + 2b) = 5$，它没有整数解。
- $D^2 = 4$、 $D \cdot H = 6$ 和 $|D - H| = |2H - D| = \varnothing$。由 $4a + 4b = 6$ 可得 $2(a + b) = 3$，它没有整数解。

对于 (ii)，曲面 X 是型为 $((1,1),(3,3))$ 的行列式四次曲面，并且是自对偶的。因此，由定理 1， D 的分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k))^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

利用公式（2），我们计算 $d_D = 4k$ 与 $g_D = 2k^2 - 1$。由于 D 包含于低次曲面的情形已另行处理，我们假设 $k \geq 3$。此外，

$$4k = D \cdot H = 4a + 4b, \qquad 4k^2 - 4 = D^2 = 4a^2 + 8ab,$$

由此可得 $a = k + 1$, $b = -1$ 和 $D = (k+1)H - C$，或者 $a = k - 1$, $b = 1$ 和 $D = (k-1)H + C$。

现在验证这两个类中的曲线都是算术 Cohen–Macaulay。设 $|D - H| \neq \varnothing$ and $D = (k+1)H - C$。那么 $nH - D = (n - (k+1))H - C$，并且由于 C 是算术 Cohen–Macaulay，

$$H^1(\mathcal{O}_X(nH - D)) = H^1(\mathcal{O}_X((n - (k+1))H - C)) = 0$$

对所有 n 均成立，因此 D 是算术 Cohen–Macaulay。

现在设 $D = (k-1)H + C$，其中 $|D - H| \neq \varnothing$。那么 $nH - D = (n - (k+1))H + C$，并且由于 $-C$ 是算术 Cohen–Macaulay，同样的论证表明 D 是算术 Cohen–Macaulay。

现在验证除平面四次曲线（超平面截面）外，不存在其他平面曲线。设 D 是 X 上的一条平面曲线，其类为 $aH + bC$。那么 D 的次数为 $4a + 4b$，其亏格为

$$\frac{(4a + 4b - 1)(4a + 4b - 2)}{2}.$$

这等价于 $\frac{D^2 - 2}{2}$ 当且仅当 $a = 1$ 且 $b = 0$，因此 $D \in |H|$，结论得证。

对于 (iii) 和 (iv)，我们考虑 (ii) 的其余情形以及定理 1 中条目 (2)(ii) 和 (2)(iii) 所给出的情形：

情形 1： 条目 (ii) 中的 $k = 0$。这是不可能的，因为次数为 0

。**情形 2：** 条目 (ii) 中的 $k = 1$。在此情形下，该曲线为 C_3。

情形 3： 条目 (ii) 中的 $k = 2$。于是 D 是一条次数为 8、亏格为 7、包含于三次曲面中的曲线，其类为 $H + C$ 或 $3H - C$。从几何上看，令 S 为包含 C_3 且与 X 没有公共分支的三次曲面。于是 $X \cap S = C_3 \cup D$，根据 [MDP90，III，命题 1，2]，我们得到 $d_D = 8$ 和 $g_D = 7$。

情形 4： 由定理 1(2)(iii) 及配对 $((1, 1), (3, 3))$，我们得到如下分解

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

与前面一样，在所有情形中，这两个类中的曲线都是算术 Cohen–Macaulay。事实上，若 $D = mH + C$，则 $nH - D = (n - m)H - C$；又因为 C 是算术 Cohen–Macaulay，所以对所有 n，$H^1(\mathcal{O}_X(nH - D)) = 0$。类似地，若 $D = mH - C$，则 $nH - D = (n - m)H + C$；又因为 $-C$ 是算术 Cohen–Macaulay，所以对所有 n，$H^1(\mathcal{O}_X(nH - D)) = 0$。

最后，我们证明 (v)。与命题 4.4 中一样，若该曲线是 X 与一个次数为 d 的曲面的完全交，则其类为 dH。现在假设该曲线是次数分别为 m 和 n 的曲面的完全交，其中 $m \leq n$。若 $m = n = 2$，则该曲线是两个二次曲面的完全交，因此它是 C_3。情形 $m = n = 1$ 给出一条直线；$(m, n) = (1, 2)$ 给出一条圆锥曲线；$(m, n) = (2, 3)$ 给出一条与圆锥曲线剩余的曲线；$(m, n) = (1, 3)$ 给出一条与直线剩余的曲线；而 $m = n = 3$ 给出一条与平面三次曲线剩余的曲线。所有这些情形都不可能。

□

4.2.4. 含有扭曲三次曲线的四次曲面。 设 $X \in \mathbf{F}_2$ 为非常一般的光滑元素。记 C 为类 $[C_2]$。则 $Pic(X)$ 由 H 和 C 生成，其交数为

$$H^2 = 4, \quad H \cdot C = 3, \quad C^2 = -2.$$

命题 4.8。 设 $X = V(F) \in \mathcal{F}_2$ 是 $\mathbb{P}^3$，中非常一般的光滑四次曲面，并设 $D \subset X$ 是一条满足 $D \notin |H|$ 的曲线。设 $aH + bC$ 为 D 在 $Pic(X)$ 中的类。则 D 是 ***ACM*** 曲线，当且仅当以下情形之一成立：

(i) D 是一个完全交。***(ii)*** $|D - H| = \varnothing$: ***(a)*** $[D] = C$，此类中的曲线是扭曲三次曲线。***(b)*** $[D] = 2H - C$，且 D 的次数为5，亏格为2，其极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2 \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

(iii) F 是 $\mathscr{I}_D$ 和 $|D - H| \neq \varnothing$的一个极小生成元：

(a) $[D] = (k-1)H + C$，对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $k \geq 3$。此类曲线的次数为 $4k - 1$，亏格为 $2k^2 - k - 1$，其极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+2))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+3)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+1))^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

(b) $[D] = (k+1)H - C$，对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $k \geq 3$。此类曲线的次数为 $4k + 1$，亏格为 $2k^2 + k - 1$，其极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+3))^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+1)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+2))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

(iv) D 包含在一个二次曲面中，且 $|D - H| \neq \varnothing$:

(a) $[D] = 2H$，且 D 是 X 与一个二次曲面的完全交，因此是一条次数为8、亏格为9的曲线。

(b) $[D] = 2H - C$，且 D 是一条次数为5、亏格为2的曲线；它是完全交中相对于扭曲三次曲线 C_2 的剩余曲线，该完全交由 X 与包含C_2的二次曲面 Q 相交得到。

(v) D 包含在一个三次曲面中，且 $|D - H| \neq \varnothing$: ***(a)*** $[D] = 3H$，且 D 是 X 与一个三次曲面的完全交，因此是一条次数为12、亏格为19的曲线。***(b)*** $[D] = H + C$，且 D 是一条次数为7、亏格为5的曲线；它是完全交中相对于一条次数为5、亏格为2 的算术 ***Cohen–Macaulay*** 曲线 $A \subset X$ （见条目 ***(iv)***）的剩余曲线，该完全交由 X 与包含 A的三次曲面 S 相交得到。***(c)*** $[D] = 3H - C$，且 D 是一条次数为9、亏格为9的曲线；它是完全交中相对于扭曲三次曲线 C_2 的剩余曲线，该完全交由 X 与包含 C_2的三次曲面 S 相交得到。

(vi) D 是 X 与次数为 $d \geq 4$的曲面的完全交。在这种情形下， D 的类为 dH。

证明。 对于 (i)，与前面一样，我们遵循 [Wat15] 的定理 **1.1** 的条件。

● $D^2 = -2$ 和 $1 \leq D.H \leq 3$。由第二个条件可得 $1 \leq D.H = 4a + 3b \leq 3$，因此 $\frac{1}{3} - \frac{4a}{3} \leq b \leq 1 - \frac{4a}{3}$。我们考虑三种情形：

$a = 3m$

$$\frac{1}{3} - \frac{4a}{3} = \frac{1 - 12m}{3} \leq b \leq 1 - \frac{4a}{3} = 1 - 4m.$$

因此，唯一可能的选择是 $a = 3m$ 和 $b = 1 - 4m$。由第一个方程可得 $-2 = D^2 = 4a^2 + 6ab - 2b^2$，因此

$$-1 = 2a^2 + 3ab - b^2 = 2(3m)^2 + 3(3m)(1 - 4m) - (1 - 4m)^2 = 18m^2 + 9m - 36m^2 - 1 + 8m - 16m^2$$

因此

$$m(17 - 34m) = 0.$$

由于方程 $17-34m=0$ 没有整数解，唯一的解是$m=0$，因此 $a=0$、 $b=1$ 和 $D=C$。

$a=3m+1$

$$\frac{1}{3}-\frac{4a}{3}=\frac{-12m-3}{3}=-4m-1\le b\le 1-\frac{4a}{3}=\frac{12m-1}{3}.$$

因此，唯一可能的选择是 $a=3m+1$ 和 $b=-1-4m$。由第一个方程可得

$$\begin{aligned}-1&=2a^2+3ab-b^2=2(3m+1)^2+3(3m+1)(-1-4m)-(-1-4m)^2\\&=18m^2+12m+2-36m^2-9m-12m-3-16m^2-12m-1,\end{aligned}$$

因此

$$m(-21-34m)=1,$$

它没有整数解。

$a=3m+2$

$$\frac{1}{3}-\frac{4a}{3}=\frac{-7-12m}{3}\le b\le 1-\frac{4a}{3}=\frac{-12m-5}{3}.$$

因此，唯一可能的选择是 $b=\frac{-12m-6}{3}=-4m-2$。由第一个方程可得

$$\begin{aligned}-1&=2a^2+3ab-b^2=2(3m+2)^2+3(3m+2)(-2-4m)-(-2-4m)^2\\&=18m^2+24m+8-36m^2-18m-24m-12-16m^2-16m-4,\end{aligned}$$

因此

$$34m(-1-m)=7,$$

它没有整数解。

- $D^2=0$ 和 $3\le D.H\le 4$。

  由第二个条件，我们有 $3\le D.H=4a+3b\le 4$，因此 $1-\frac{4a}{3}\le b\le \frac{4}{3}-\frac{4a}{3}$。我们再次考虑三种情形:

  $a=3m$

  $$1-\frac{4a}{3}=1-4m\le b\le \frac{4}{3}-\frac{4a}{3}=\frac{-12m-4}{3}.$$

  因此，唯一可能的选择是 $a=3m$ 和 $b=1-4m$。由第一个方程我们得到

  $0=D^2=4a^2+6ab-2b^2$，因此

$$0=2a^2+3ab-b^2=2(3m)^2+3(3m)(1-4m)-(1-4m)^2=18m^2+9m-36m^2-1+8m-16m^2$$

因此

$$m(17-34m)=1,$$

它没有整数解。

$a=3m+1$

$$1-\frac{4a}{3}=\frac{-12m-1}{3}\le b\le \frac{4}{3}-\frac{4a}{3}=\frac{-12m}{3}=-4m.$$

因此，唯一可能的选择是 $a=3m+1$ 和 $b=-4m$。由第一个方程我们得到

$$\begin{aligned}0&=2a^2+3ab-b^2=2(3m+1)^2+3(3m+1)(-4m)-(-4m)^2\\&=18m^2+12m+2-36m^2-12m-16m^2,\end{aligned}$$

因此

$$-34m^2=-2,$$

它没有整数解。

$a = 3m + 2$

$$1 - \frac{4a}{3} = \frac{-12m-5}{3} \le b \le \frac{4}{3} - \frac{4a}{3} = \frac{-12m-4}{3}.$$

这个不等式没有整数解。

- $D^2 = 2$ 和 $D.H = 5$。

  由第二个方程，我们得到 $a = 3m + 2$ 和 $b = -1 - 4m$。然后

$$\begin{aligned} 1 &= 2a^2 + 3ab - b^2 = 2(3m+2)^2 + 3(3m+2)(-1-4m) - (-1-4m)^2 \\ &= 18m^2 + 12m + 8 - 9m - 36m^2 - 6 - 24m - 1 - 8m - 16m^2 \\ &= -34m^2 - 21m + 1. \end{aligned}$$

  因此，唯一的解是 $m = 0$，从而 $a = 2$、 $b = -1$和 $D = 2H - C$，这是一条次数为5、亏格为2的曲线。

- $D^2 = 4$、 $D.H = 6$ 和 $|D - H| = |2H - D| = \varnothing$。

  由第二个方程，我们有 $D.H = 4a + 3b = 6$，它没有整数解。

对于 (ii)，我们有 X 是型为 ((1,1,1),(2,2,3)) 的行列式型，其对偶对为$((1,2,2),(3,3,3))$。因此，由定理 1，我们得到 D的两个可能的消解：

情形 1：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k))^2 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k))^3 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

与前面一样，利用公式（2），我们计算次数 $d_D = 4k - 1$ 和亏格$g_D = 2k^2 - k - 1$。

由于我们将在另一条目中讨论 D 包含于低次曲面的情形，因此假设 $k \ge 3$。另一方面，

$$4k - 1 = d_D = D.H = 4a + 3b \quad \text{and} \quad -2k + 4k^2 - 2 = 2g_D - 2 = D^2 = 4a^2 + 6ab - 2b^2.$$

由此可得， $a = k - 1$ 和 $b = 1$ 是唯一的解。根据命题 2.2，具有此类的曲线是 ACM 曲线。

情形 2：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(3+k))^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(1+k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(2+k))^2 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

利用贝蒂数和公式（2），我们计算出次数 $d_D = 4k + 1$ 和亏格 $g_D = 2k^2 + k - 1$。

再次假设 $k \ge 3$。另一方面，

$4k + 1 = d_D = D.H = 4a + 3b$ 和 $2k + 4k^2 - 4 = 2g_D - 2 = D^2 = 4a^2 + 6ab - 2b^2$.

由此可得 $a = k + 1$ 且 $b = -1$ 是唯一的解。根据命题 2.2，具有此类的曲线是算术 Cohen–Macaulay 曲线。

我们必须验证，除了平面四次曲线（超平面截面）之外，不存在其他平面曲线。设 D 是 X 中的一条平面曲线，其类为 $aH + bL$。则 D 的次数为 $4a + 3b$，亏格为 $\frac{(4a+3b-1)(4a+3b-2)}{2}$，当且仅当 $a = 1$ 和 ~~$b = 0$时，这等于~~ $\frac{D^2-2}{2}$。因此， $D \in |H|$，~~这~~这些就是全部可能性。

对于第 (iii) 项和第 (iv) 项，我们处理第 (iii) 项的其余情形，以及定理第 (2)、(iii) 项给出的情形1：

情形 1：根据条目 (ii)，情形 1 中的 $k = 0$，交集由三个平面组成，因此它不是一条曲线。

情形 2：根据条目 (ii)，情形 1 中的 $k=1$, D 是一条次数为 3、亏格为 0 的奇异曲线，即扭曲三次曲线 C_2。
情形 3：由条目 (ii)，情形 1 可知，$k=2$、D 是一条次数为 7、亏格为 5 且包含于三次曲面中的曲线，其类为 $H+C$。其几何描述如下。设 A 是一条次数为 5、亏格为 2 且包含于 X 中的曲线（我们将在情形 5 中证明其存在），并设 S 是一个包含 A 且与X没有公共分支的三次曲面。那么，X 与 S 的完全交是 A与一条曲线 D的并。根据 [MDP90, III，命题 1，2]，D 的次数和亏格分别为 $d_D=3(4)-5=7$ 和 $g_D=\frac{(7-5)(3+4-4)}{2}+2=5$。

情形 4：由条目 (ii)，情形 2 可知，取 $k=0$ 时，此情形不可能。
情形 5：由条目 (ii)，情形 2 可知，取 $k=1$, D 时，它是一条次数为 5、亏格为 2 且包含于二次曲面中的曲线，其类为 $2H-C$。其几何描述如下。设 Q 是一个包含扭曲三次曲线 C_2 且与 X 没有公共分支的二次曲面。那么，X 与 Q 的完全交是 C_2 与一条曲线D 的并。根据 [MDP90，III，命题 1，2]，D 的次数和亏格分别为 $d_D=2(4)-3=5$ 和 $g_D=\frac{(5-3)(2+4-4)}{2}+0=2$。

情形 6：根据条目 (ii)、情形 2，带有 $k=2$、D 的是一条次数为 9、亏格为 9 的曲线，包含在一个三次曲面中，其类为 $3H-C$。几何描述如下。设 S 是一个包含 C_2 且与 X 没有公共分支的三次曲面。则 X 与 S 的完全交是 C_2 与一条曲线 D 的并。根据 [MDP90，III，命题 1.2]，D 的次数和亏格分别为 $d_D=3(4)-3=9$ 和 $g_D=\frac{(9-3)(3+4-4)}{2}+0=9$。

情形 7：根据定理 1，条目 (2) iii)，以及数对 $((1,1,1),(2,2,3))$，我们有如下消解：

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^3\to\mathscr{I}_D\to 0.$$

在此情形中，D 是扭曲三次曲线 C_2。

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^3\to\mathscr{I}_D\to 0.$$

此情形与情形 3 相同。
情形8：根据定理 1第 (2) 项 iii)，以及以下数对 $((1,2,2),(3,3,3))$，我们得到如下分解：

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^2\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^2\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\to\mathscr{I}_D\to 0,$$

而此情形与情形 5 相同。

对于最后一项，正如我们在前述命题的证明中所见，次数为 m 和 n 且具有 $m, n\le 3$ 的曲面的完全交曲线并不存在。因此，唯一可能的曲线是 X 与另一次数为 d 的曲面的完全交，此时其类为 dH。

□

4.2.5. 含有次数6、亏格为3的 *ACM* 曲线的四次曲面。 设$X\in \mathbf{F}_1$ 为非常一般的光滑元素。记 C 为 $[C_1]$的类。那么 $Pic(X)$由 H 和 C生成，其交数为

$$H^2=4,\quad H\cdot C=6,\quad C^2=4.$$

命题 4.9。 设 $X = V(F) \in \mathcal{F}_1$ 为$\mathbb{P}^3$, 中的非常一般的光滑四次曲面，并设 $D \subset X$ 为一条满足 $D \notin |H|$ 的曲线。设 $aH + bC$ 为 D 在 $Pic(X)$中的类。那么 D为 ***ACM*** 曲线，当且仅当以下情形之一成立：

(i) $|D - H| = \varnothing$: ***(a)*** $[D] = C$ 或 $[D] = 3H - C$，在这两种情形下，这些类中的曲线都等价于曲线 C_1。

(ii) F 是 $\mathscr{I}_D$ 和 $|D - H| \neq \varnothing$的极小生成元：
(a) $[D] = (k-2)H + C$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$，其中 $k \geq 3$；或 $[D] = (k+1)H - C$ 对于 $k \in \mathbb{Z}$，其中 $k \geq -1$。在这两种情形下，曲线的次数为 $4k - 2$，亏格为 $2k^2 - 2k - 1$，其极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+2))^4 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+1))^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

(iii) D 是包含在二次曲面中的曲线，且 $|D - H| \neq \varnothing$:
(a) $[D] = 2H$，而 D 是 X 与一个二次曲面的完全交，因此是一条次数为 8、亏格为 9的曲线。

(iv) D 是一条包含在三次曲面中的曲线，且 $|D - H| \neq \varnothing$:
(a) $[D] = 3H$，而 D 是 X 与一个三次曲面的完全交，因此是一条次数为12、亏格为19的曲线。

(v) D 是 X 与一个次数为 $d \geq 4$的曲面的完全交。在这种情形下， D 的类为 dH。

*Pr*证明。 对于 (i)，与之前一样，我们遵循 [Wat15] 中定理 1.1 的条件 .

- $D^2 = -2$ 和 $1 \leq D \cdot H \leq 3$。由第二个条件可得 $1 \leq 4a + 6b \leq 3$，因此 $1 - 6b \leq 4a \leq 3 - 6b$。由于 a是一个整数，存在两种可能的情形：

  * $b = 4m + 1$ 和 $a = -1 - 6m$。
    由第一个方程可得

    $$\begin{aligned} -2 = D^2 &= 4a^2 + 12ab + 4b^2 \\ &= 4(-1-6m)^2 + 12(-1-6m)(4m+1) + 4(4m+1)^2 \\ &= 2(-2 - 20m - 76m^2), \end{aligned}$$

    它没有整数解。
  * $b = 4m + 3$ 和 $a = -4 - 6m$。
    由第一个方程可得

    $$\begin{aligned} -2 = D^2 &= 4(-4-6m)^2 + 12(-4-6m)(4m+3) + 4(4m+3)^2 \\ &= 2(-22 - 60m - 40m^2), \end{aligned}$$

    它没有整数解。

- $D^2 = 0$ 和 $3 \leq D \cdot H \leq 4$。
  由第二个条件可得 $3 \leq 4a + 6b \leq 4$，因此 $3 - 6b \leq 4a \leq 4 - 6b$。由于 a 是整数，我们得到 $b = 4m + 2$ 和 $a = -2 - 6m$。由第一个方程可得

  $$\begin{aligned} 0 = D^2 &= 4(-2-6m)^2 + 12(-2-6m)(4m+2) + 4(4m+2)^2 \\ &= 2(-8 - 40m - 40m^2), \end{aligned}$$

  它没有整数解。

● $D^2 = 2$ 和 $D \cdot H = 5$。
由第二个条件可得 $4a + 6b = 5$。由于 a 是整数，我们得到 $a = 3m + 1$ 和 $b = -2m$。由第一个方程可得

$$\begin{aligned} 2 = D^2 &= 4(3m+1)^2 + 12(3m+1)(-2m) + 4(-2m)^2 \\ &= 2(2 - 10m^2), \end{aligned}$$

它没有整数解。

● $D^2 = 4$、$D \cdot H = 6$ 和 $|D - H| = |2H - D| = \varnothing$。
由第二个方程可得 $4a + 6b = 6$，因此 $2a = 3(1 - b)$，这意味着 $a = 3m$ 和 $b = 1 - 2m$。由第一个方程可得

$$\begin{aligned} 4 = D^2 &= 4(3m)^2 + 12(3m)(1-2m) + 4(1-2m)^2 \\ &= 2(2 + 10m - 10m^2), \end{aligned}$$

其整数解为 $m = 0$ 和 $m = 1$。因此 $D = C$ 或 $D = 3H - C$。

对于（ii），X 是一个型为 $((1,1,1,1),(2,2,2,2))$ 的行列式四次曲面，并且是自对偶的。因此，根据定理 1，D 的极小自由分解为

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+2))^4 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-(k+1))^4 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \to \mathscr{I}_D \to 0.$$

利用公式 (2)，我们得到 $d_D = 4k - 2$ 和 $g_D = 2k^2 - 2k - 1$。
由于我们将讨论 D 包含在低次曲面中的情形，因此假设$k \geq 3$。此外，

$$4k - 2 = D \cdot H = 4a + 6b, \qquad 4k^2 - 4k - 4 = D^2 = 4a^2 + 12ab + 4b^2,$$

这意味着 $D = (k-2)H + C$ 或 $D = (k+1)H - C$。

现在验证这两类中的曲线都是算术 Cohen–Macaulay。设 $|D - H| \neq \varnothing$ 和 $D = (k+1)H - C$。那么

$$nH - D = (n - (k+1))H - C,$$

并且由于 C 是算术 Cohen–Macaulay的，对于所有 n，我们有 $H^1(\mathcal{O}_X(nH - D)) = 0$，因此 D 是算术 Cohen–Macaulay的。对于 $D = (k-2)H + C$，同样的论证也成立。

最后，我们验证除超平面截面外不存在其他平面曲线。设 D是 X 中的一条类为 $aH + bL$的平面曲线。那么它的次数为 $4a + 6b$，其亏格为$\frac{(4a+6b-1)(4a+6b-2)}{2}$。当且仅当 $a = 1$ 和 $b = 0$时，这等于 $\binom{D^2-2}{2}$，因此 $D \in |H|$。

对于条目 (iii) 和 (iv)，我们考虑条目 (ii) 的其余情形，以及由定理 1 的条目 (2)(iii) 导出的情形：

情形 1：条目 (ii) 中的 $k = 0$ 不可能，因为次数为 -2。
情形 2：条目 (ii) 中的 $k = 1$ 不可能，因为它对应于四个平面的交。

Cas情形 3：条目 (ii) 中的 $k = 2$ 给出次数为 6、亏格为 3 的算术 Cohen–Macaulay 曲线 C_1.
情形 4：根据定理 1 的条目 (2)(iii)，对于序对 $((1,1,1,1),(2,2,2,2))$，我们得到如下分解：

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^3 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^4 \to \mathscr{I}_D \to 0,$$

这对应于一条次数为 6、亏格为 3 的算术 Cohen–Macaulay 曲线。

对于最后一项，与前面的命题一样，次数为 m，$n \leq 3$ 的曲面完全交是不可能的。因此，剩下的唯一情形是 X 与一个次数为 $d \geq 4$ 的曲面的完全交，此时其类为 dH。

□

5. A generalization

在本节中 n，我们将前述结果推广到高维情形 .

定义 5. ˆ**1.** 设 $(\hat{a}, b)$ 是一个次数为 d 、长度为 t 的可容许对。一个超曲面 e

$$X = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^n$$

ˆ称为型 $(\hat{a}, b)$ 的弱行列式超曲面，如果

$$F = \det(S)$$

对于某个矩阵 $S = (m_{ij})$，其中 m_{ij} 是一个次数为 $b_j - a_i$的齐次多项式。在 $a_i \geq b_j$ 的情形下，我们假设 $m_{ij} = 0$。

命题 5.2。 设 $X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个次数为 d 的超曲面。若存在一个算术 *Cohen–Macaulay* 闭子簇

$$Y \subseteq X$$

其在 X 中的余维为一，且不是完全交，则 X 是一个型为 $(\hat{a}, b)$ 的弱行列式ˆ

ˆ 超曲面，其中对应于某个次数为 d 、长度为 t 的可容许对 $(\hat{a}, b)$。

证明。 由于希尔伯特–伯奇定理对 $\mathbb{P}^n$ 中余维为 2 的子簇有推广（见 [Har10, 命题 8.7]），证明与 $\mathbb{P}^3$ 中的曲面情形完全相同。

□

如前所述，我们得到一个分类定理，分类次数为 d 的超曲面 $\mathbb{P}^n$ 上余维一的算术 Cohen–Macaulay 闭子簇。证明完全沿用曲面情形中的论证。

定理 5.3。 设 $X = V(F)$ 是 $\mathbb{P}^n$ 中次数为 d 的超曲面，且 $Y \subseteq X$ 是 X 中余维为一的闭子簇。那么， Y 是算术 *Cohen–Macaulay* 闭子簇，当且仅当以下情形之一成立：

(1) 超曲面 X 不是弱行列式型。在这种情况下， Y 是一个完全交。ˆ*(2)* 超曲面 X 是弱行列式型，型为 $\{(\hat{a}_i, b_i)\}_{i\in I}$，且仅有这些型。于是 Y 是以下之一：

(i) Y 是一个完全交。*(ii)* 如果 Y 不是一个完全交，且 F 是理想$\mathscr{I}_Y$的一个极小生成元，那么 Y 有极小自由分解

$$0 \to \bigoplus_{j=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(b_j + k)) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-(a_i + k)) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \to \mathscr{I}_Y \to 0,$$

ˆ其中 $\hat{a}_j = (a_1, \ldots, a_t)$ 和 $b_j = (b_1, \ldots, b_t)$ 分别对应某个 $j \in I$和某个 $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) 若 Y 不是完全交，且 F 不是理想$\mathscr{I}_Y$的极小生成元，则 Y 具有极小自由分解

$$0 \to \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i\neq j_0}}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d + b_{j_0} - b_i) \to \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d + b_{j_0} - a_i) \to \mathscr{I}_Y \to 0,$$

with

$$\hat{a}_j = (a_1 + k, \ldots, a_t + k), \quad \hat{b}_j = (b_1 + k, \ldots, b_{j_0-1} + k, d, b_{j_0+1} + k, \ldots, b_t + k),$$

for some $j \in I$, $j_0 \in \{1, \ldots, t\}$, *and some* $k \in \mathbb{Z}$.

References

[Ap´e45] RogerAp´ery, 《论无非正常分支理想的某些数值特征》`´´, 《科学院报告》, 巴黎 220（1945）, 234–236（法文）。[Ell75] Geir Ellingsrud, 《Cohen-Macaulay 锥中余维 2 簇的 Hilbert 概形》´´´于 $P^e$ `, Ann. Sci. ´Éc. Norm. Sup´ér.（4）8（1975）, 423–431, DOI 10.24033/asens.1297（法文）。[Gae48] Federico Gaeta, 《论剩余有限的代数空间曲线》, Ann. Mat. Pura Appl.（4）27（1948）, 177–241, DOI 10.1007/BF02415567（意大利文）。[LLHV24] M. Leal、C. Lozano Huerta 与 M. Vite, $\mathbb{P}^3$ 中由行列式曲面构成的曲面的 Noether-Lefschetz 轨迹, 《数学新闻》297（2024）, 第 12 期, 4671–4688, DOI 10.1002/mana.202400132（英文）。[Har77] Robin Hartshorne, 《代数几何》, 《数学研究生教材》, 第 52 卷, Springer, 尚, 1977（英文）。[Har10] , 《变形理论》, 《数学研究生教材》, 第 257 卷, 柏林: Springer, 2010（英文）。[MDP90] M. Martin-Deschamps 与 D. Perrin, 《论空间曲线的分类》（论空间曲线分类）184-185（1990）（法文）。[PS74] C. Peskine 与 L. Szpiro, 《代数簇的连接》´´´. I, 《数学发明》26（1974）, 271–302, DOI 10.1007/BF01425554（法文）。[Wat15] Kenta Watanabe, $\mathbb{P}^3$中四次超曲面上 ACM 线丛的分类, 《几何专辑》175（2015）, 347–354, DOI 10.1007/s10711-014-9950-x（英文）。[Wat19] , 极化 $K3$ 曲面上的 ACM 线丛, 《几何专辑》203（2019）, 321–335, DOI 10.1007/s10711-019-00436-2（英文）。[Wat81] Masayuki Watanabe, P^3中非奇异三次曲面上空间曲线的射影正规性, 《东京数学杂志》4（1981）, 331–341, DOI 10.3836/tjm/1270215158（英文）。

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia,Michoacán电子邮箱地址：abel@matmor.unam.mx

Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Morelia,Michoacán电子邮箱地址：montserrat@matmor.unam.mx