arXiv:2602.06147v1 [math.RA] 5 Feb 2026

从三次范数对到 G_2-与 F_4-分次群和李代数

TOM DE MEDTS 和 TORBEN WIEDEMANN

摘要。我们构造了由任意交换基环上的三次范数对导出的李代数。这类李代数具有按 G_2 型根系的分次；当三次范数对是三次约旦矩阵代数时， G_2-分次还可以进一步细化为 F_4-分次。随后，我们利用这些李代数及其分次构造相应的根分次群。在此过程中，我们还得出了许多结果，详细揭示了这些李代数和群的结构。

引言

按根系分次的李代数研究，始于 Stephen Berman 和 Robert V. Moody 的开创性工作 1992 [BM92]。更确切地说，Berman 和 Moody 对基域 k 上按秩为 ≥ 2 的单键有限根系分次的特征零李代数进行了分类，分类结果相差中心等价。在接下来的十年里，这一结果扩展到了 $n \geq 2$、 $r \geq 1$ 的类型 A_1、 B_n、 C_n、 BC_r、 F_4 和 G_2 ； Bruce Allison、Georgia Benkart、Yun Gao、Oleg Smirnov 和 Efim Zel'manov 的合作成果 [BZ96, ABG00, ABG02, BS03] 又将分类加强为相差同构。Erhard Neher [Neh96] 提出了一种不同的统一方法，对三分次根系（这一假设恰好排除了类型 E_8、 F_4 和 G_2）进行分类，避免了逐一分类讨论。

关于 G_2-分次李代数的另一种方法 k现已推广到任意域（包括特征为2 和 3的域），该方法见于 [DMM25], ，其基础是李代数中极端元的理论，以及在该李代数上交叠两种不同的5-分次。

本文的目标如下。
(1) 构造并研究任意交换基环 k上的 G_2-分次和 F_4-分次李代数。(2) 在任意基环 k 上发展三次范数对的理论，这是目标 (1) 所必需的。(3) 构造并研究 G_2-分次和 F_4-分次群。

我们对李代数的描述与 [DMM25] 中的描述类似，即分别对分次的每个“部分”进行坐标化，并明确地用这种坐标化描述李括号。

对于 G_2-分次的李代数，我们会遇到与在 [DMM25], 中发挥关键作用的代数结构相同的一类结构，即 三次范数对，这是一种孪生

更常见的三次范数结构的变体。当 k 是一个域时，这样的三次范数对要么具有平凡范数，要么源自一个真正的三次范数结构；但在基环上，这种二分性并不成立。同时，这种孪生结构的出现并不令人意外，它正是三次范数结构的恰当类比，非常类似于约旦对构成约旦代数的孪生版本。然而，现有文献中关于这些三次范数对的论述并不多，我们唯一能追溯到的资料是 John Faulkner 的论文 [Fau01]以及米歇尔·斯梅特近期的预印本 [Sme25]。我们借此机会阐述三次范数对的基本理论。我们的设置与近期优秀的专著 [GPR24], 类似，该专著发展了任意交换环上三次范数结构的理论。来自 [GPR24] 的结果将在整篇论文中发挥关键作用。

一种纯组合构造依赖于某个蒂茨指标及其相关的根系满射 $F_4 \to G_2 \cup \{0\}$，使得任何 F_4分次李代数都可以视为 a G_2分次李代数。对于由特定类型的三次范数对定义的 G_2分次李代数，即三次约旦矩阵代数，我们可以逆转这一过程：也就是说，我们细化 G_2分次，从而得到一个 F_4 分次李代数。同样，我们能够精确描述分次中的每一个“部分”。事实证明，对于原始 G_2分次的“中间部分”，这相当棘手。

接下来，我们从根分次李代数转向根分次群。这些群配备了一族子群 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$，对应于有限根系 Φ，并满足某些交换子关系 $[U_\alpha, U_\beta] \subseteq U_{]\alpha,\beta[}$，适用于不成比例的$\alpha, \beta \in \Phi$；此外，对所有根都存在所谓的 Weyl 元，其共轭作用会置换这些根群。按根系分次的群这一术语最早出现在 [Shi93], , 其中 Zhiyong Shi 证明了秩至少为 3 的单边型根分次群的坐标化结果。这些结果在精神上类似于根分次李代数的识别定理。关于带有 $n \geq 3$ 的 C_n 型的类似结果，Zezhou Zhang 于 [Zha14a]取得了部分进展。其余类型 B_n, C_n, F_4 的根分次群在 $n \geq 3$ 下的完整坐标化结果由 [Wie24], 证明，并在 [BW25] 中扩展到 H_3 和 H_4 型（采用略有不同的公理体系，以处理这些根系的非晶体性）。我们将沿用 [Wie24] 中为（晶体型）根分次群引入的术语；更多历史细节请参见该文的序言。

还应指出，雅克·蒂茨在 [Tit92],中引入的 RGD 系统这一概念，是根分次群的一个特例。对于这类对象，可以用厚球面 Moufang 建筑来进行几何诠释。具体而言，蒂茨对秩至少为 3 的厚球面 Moufang 建筑的分类[Tit74] 给出了秩至少为 3 的 RGD 系统的分类。雅克·蒂茨和理查德·魏斯 [TW02]将这一分类推广到了秩 2 的情形，即所谓的 Moufang 多边形。

关于 F_4-分次群的主要结构定理见 [Wie24，10.7。8]：每个F_4-分次群都由一种称为 [GPR24] 的 乘法圆锥替代代数 C （定义在交换环上） k参数化，这意味着群的结构在很大程度上由 C 和 k 决定（尽管并非决定到同构意义下）。

乘法圆锥替代代数可视为环上合成代数（如八元数或四元数）的一种适当推广；前述三次约旦矩阵代数恰恰是在这类代数上定义的。我们在根分次群这一背景下的主要目标——事实上，这也是我们最初开展本项目的动机——是证明一个逆向的存在性结果：对于任意交换环 C 上的乘法圆锥替代代数 k，确实存在一个 F_4-分次群，其坐标由 C给出。与此同时，我们还将证明，对每个三次范数结构都存在一个 -分次群（而由三次范数对定义的群可能缺少短根对应的韦伊元）。我们指出， [Zha14b], 中也对类似的存在性问题给出了肯定答案：张泽洲构造了一个 C_3-分次群，其坐标由带核对合的任意替代环给出。

我们将所需的 G_2-分次群构造为我们 G_2-分次李代数自同构群的一个子群。从原理上说，这相当于对李代数中相应的伴随映射进行“指数化”；但由于我们处理的是任意交换基环（其中2 和3不一定可逆），这绝非易事。仅仅定义指数映射并完成所需的验证，就会占用我们相当一段时间。这可与域上的指数映射定义相比较，该定义由 [DMM25中的定理 A], 引入，但我们无法将同上文献中的思路直接推广到交换基环。我们使用的一种新技术工具，是对我们称为“高阶莱布尼茨法则”的内容作显式表述。

该 F_4-分次群中的指数映射，可通过将 G_2-分次中的指数映射特殊化来定义，但仅适用于那些在满射 $F_4 \to G_2 \cup \{0\}$下“不映为零”的根。这样定义的指数映射使我们能够定义李代数的自同构，之后将证明它们是韦伊元；而 F_4中“有问题”的根所对应的指数映射，则可通过适当选取这些自同构，将其他指数映射共轭而得。 G_2-分次中的韦伊元可以更直接地定义为李代数中的某些反射，其显式公式的构造受到 [DMM25]的启发。

一旦我们有了指数映射，就可以将根群定义为$U_\alpha := \exp_\alpha(L_\alpha)$。接下来只需证明这些根群满足所需的交换子关系，并证明我们选取的 Weyl 元会置换根群；这是一项直接但冗长的计算。特别是对于 F_4-分次，我们必须证明每个 Weyl 元都以所需方式置换 48 个根群，为此我们借助计算机辅助完成。

论文提纲。第1节首先回顾根分次李代数和根分次群所需的背景知识。第2节中，我们采用与 [GPR24]类似的方法，发展三次范数对理论。在此过程中，我们整理出许多稍后会用到的恒等式。

我们在第 $G_2$3节开始从三次范数对构造分次的李代数：首先构造三次范数对的“经典”蒂茨–坎托–科彻李代数。第4节中，我们将这个 TKK 李代数扩展为一个更大的、G_2分次的李代数。这涉及一个重要的细节：我们首先必须

修改 TKK 构造的 0 分次部分。明确写出李括号并验证其满足雅可比恒等式需要一些计算工作，但这是值得的，因为之后我们还必须改进这一构造，以得到一个 F_4 分次的李代数。

我们在第 5 和 6节插入一段间奏。首先，在第5节中，我们证明三次范数对之间的满射同伦会导出相应李代数之间的满同态，并引入李代数的反射 $\varphi_\leftrightarrow$， φ ， φ 和 $\varphi_\updownarrow$ 。随后，在第 6节中，我们考察李代数的理想结构。到目前为止的主要结果可概括如下：

定理 ***A (4.30, 5.15, 6.25).*** 设 (J, J') 是交换环 k 上的三次范数对。则存在一个 G_2-分次的李代数 $L = L(J, J')$，其关于 $\alpha \in G_2$ 的根空间L_α 同构于 k、 J 或 J'。此外， L 的构造关于 (J, J') 具有函子性（相对于满射同伦），并且 L 是单的，当且仅当 k 是域且 (J, J') 的迹非退化。

接下来，我们可以从李代数转向群。在第 7 节中，我们引入 α-参数化和 α-指数自同构的概念（其中 α 是一个根）。随后，我们明确地为由任意三次范数对所产生的 G_2-分次李代数定义这类映射。精确验证这些映射确实定义了李代数的自同构，涉及相当繁复的计算，因此我们决定将这部分内容从本节抽出，另列于附录 A。此外，涉及韦伊元的一些验证也移至第二个附录 B。作为第7节的最终结果，我们得到：

定理 B (7.24)**.** 设 J 是交换环 k上的一个三次范数结构，且设 $L := L(J, J)$ 如定理 A所述。那么 $\mathrm{Aut}(L)$ 包含一个 G_2-分次群$G(J)$，其根群为 $U_\alpha \cong L_\alpha$，对所有 $\alpha \in G_2$均成立。

接下来我们转向 F_4-分次。我们首先在第 F_4 节阐述蒂茨指标的组合结构，该指标联系了 G_2-分次与第8 节中的 9-分次。在简短的第 9 节中，我们依据 [GPR 24], ，收集三次 Jordan 矩阵代数所需的背景知识，并将其置于我们的三次范数对（而非三次范数结构）框架下。接着，在第 10 节中，我们证明，对于这一特定类的三次范数对， G_2-分次可以细化为 F_4-分次；为此，我们引入三个新的 5-分次，再将它们取交。最后，在第11 节中，我们证明李代数的自同构群中的 G_2-分次也可以细化为 F_4-分次，从而得到最终结果。

定理 ***C (10.23, 11.15).*** 设 C 是交换环 k 上的乘法圆锥替代代数（例如合成代数），设 $\Gamma = \mathit{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathit{Mat}_3(k)$ 可逆，并设 $J = \mathit{Her}(C, \Gamma)$ 是相应的三次约旦矩阵代数。设 $L := L(J, J)$ 如定理 A 中所述，且 $G := G(J)$ 如定理 B 中所述。

那么 L 是 F_4 分次的，其根空间为：对所有长 $\alpha \in F_4$， 为 $L_\alpha \cong k$ ；对所有短 $\alpha \in F_4$，为 $L_\alpha \cong C$。此外， G 是一个 F_4 分次的群，其根群为：对所有 $\alpha \in F_4$，为 $U_\alpha \cong L_\alpha$。

致谢。我们感谢 Holger Petersson 指出了参考文献 [Fau01] ，也感谢 Bernhard Mühlherr 就蒂茨指标进行的多次富有启发性的讨论。第二作者的研究工作部分得到了

DAAD 博士后研究奖学金以及德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）项目（项目编号：286237555，TRR 195）的资助。

1. Root graded Lie algebras and groups

约定 1.1. 本文中，我们将采用 [Hum72]关于根系的术语。换言之，所有根系都是有限、约化且晶体的。此外，对于任意根系 Φ，我们记 $\Phi^0 := \Phi \cup \{0\}$。

1.1. 根分次。

我们首先介绍本文拟构造的核心对象：李代数和群的根分次。

定义 1.2. 设 k 是一个交换环，且 L 是其上的李代数。对于阿贝尔群 $(A, +)$，L 的一个 A-分次是指由 k-子模组成的族 $(L_a)_{a\in A}$，其中这些子模属于 L，满足

$$L = \bigoplus_{a\in A} L_a$$

且对所有 $a, b \in A$均成立。对于 $n \in \mathbb{N}$，$(2n+1)$-分次 L 是一个族 $(L_i)_{-n\le i\le n}$，满足 $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathbb{Z}$-分次的 L，其中 $L_i := 0$ 对 $|i| > n$成立。对于根系 Φ，Φ-分次 L 是一个族 $(L_\alpha)_{\alpha\in\Phi^0}$，满足 $(L_\alpha)^{\alpha\in\langle\Phi\rangle_z}$ 是一个$\langle\Phi\rangle_{\mathbb{Z}}$-分次，其中 $L_\alpha := 0$ 对所有 $\alpha \in \langle\Phi\rangle_{\mathbb{Z}} \setminus \Phi^0$均成立。

注记 1.3. 我们所说的根分次李代数比 [BM92] 中的概念更一般。按照我们的定义，Φ-分次李代数 $L = \bigoplus_{\alpha\in\Phi^0} L_\alpha$ 若包含一个 L，即一个 Φ 型分裂李代数的副本，且相对于某个分裂嘉当子代数，L 的根空间 $(L)_{\alpha\in\Phi^0}$ 对所有 $\alpha \in \Phi^0$ 满足 $\bar{L}_\alpha \subseteq L_\alpha$，那么它就是 Φ- 分次的，符合 [BM92, 1.1] 中的定义。（事实上，[BM92] 意义下的根分次李代数通常只在域上讨论，而非在环上讨论；不过，由于分裂切瓦利李代数定义在 $\mathbb{Z}$ 上（见 [Hum72，第 25] 节），这一概念在环上也有意义。）本文构造的李代数通常在这一更强意义下是根分次的，在其他一些情况下也“接近于此”。我们将在注记 10.34 中更详细地讨论这一点。

约定 1.4. 对于任意群 G 中的 x, y，我们将其换位子定义为 $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$。

定义 1.5 ([Wie24, 2.5.2])**.** 设 Φ为一个根系，并设 G 为一个群。一个Φ-分次（即对 G 的分次）是一族$(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$，由 G 的子群组成，并具有下列性质，其中我们记 $U_A := \langle U_\alpha \mid \alpha \in A\rangle$，用以表示任意子集 A（取自 Φ）。

(i) G 由 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ 以及 $U_\alpha \neq 1$（对所有 $\alpha \in \Phi$）生成。(ii) 对所有不成比例的 $\alpha, \beta \in \Phi$，我们有 $[U_\alpha, U_\beta] \subseteq U_{]\alpha,\beta[}$，其中 $]\alpha, \beta[:= \Phi \cap \{i\alpha + j\beta \mid i, j \in \mathbb{Z}_{>0}\}$。(iii) 对所有 $\alpha \in \Phi$，所谓的 α-韦伊元之集

$$M_\alpha := \{w \in U_{-\alpha}U_\alpha U_{-\alpha} \mid U_\beta^w = U_{\beta\sigma(\alpha)} \text{ for all } \beta \in \Phi\}$$

非空。这里，σ_α: $\Phi \to \Phi$ 表示沿着 $\alpha^\perp$的反射，我们令其从右侧作用于 Φ。

(iv) 若 Π 是 Φ中的正根系，则对所有 $\alpha \in \Pi$，$U_{-\alpha} \cap U_\Pi = 1$。

注记1.6. 我们在此所称的 Φ-分次，实际上被称为一种晶体Φ-分次，见 [Wie24]。然而，在 Φ-分次群（由Φ-分次李代数产生）这一语境中，只有晶体 Φ-分次群才是我们所关心的，因此本文将始终省略“晶体”一词。

注 1.7。 这是一个非平凡但初等的观察：在A_2-分次群中的根群必为阿贝尔群（参见 [Wie24，5.4。9]）。由于 G_2 和 F_4 具有每个根都包含在一个 A_2型子系中的性质，因此这些类型的根分次群中的所有根群也都是阿贝尔群。

注记 1.8 ([Wie24，2.2。6])。 设 Φ 是一个根系，设 G是一个带有子群族 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ 的群，并设 α, $\beta \in \Phi$。那么 $M_\alpha = M_\alpha^{-1} = M_{-\alpha}$ 且$M_\alpha^{w_\beta} = M_{\alpha^{\sigma(\beta)}}$ 对所有 $w_\beta \in M_\beta$均成立。由第二个性质可知，若 $M_\delta \neq \emptyset$对于 δ 的一个单根系中的所有 Φ都成立，那么 $M_\alpha \neq \emptyset$ 对于所有 $\alpha \in \Phi$均成立。

1.2. **F_4-分次群**。 现在我们转而讨论 F_4-分次群这一特殊情形。 [Wie24] 的主要结果之一是，每个这样的群都由所谓的乘法圆锥替代代数“坐标化”（定理 1.15）。本文的主要结果之一是，对于每个乘法圆锥替代代数，都存在一个由该代数坐标化的 F_4-分次群（定理 11.15）。下文将介绍必要的术语，以便准确表述这两个结论。为此，我们将直接使用乘法圆锥替代代数的术语，而这些代数要到第9节才会正式引入。目前只需知道，乘法圆锥替代代数是一个定义在某个交换环 C 上的代数 k，并配有一个共轭 $\cdot\colon\ C \to C$、一个范数$n\colon\ C \to k$（其线性化为 $n\colon\ C \times C \to k$）以及一个迹 $t\colon\ C \to k$。不过，愿意这样做的读者也可以直接跳到第 9 节阅读准确的定义。

定义 1.9。 F_4 中的标准简单根系是一个元组 $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$，其中 $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ 是一个单根系，δ_1，δ_2 比 δ_3，δ_4更长，而由 $\{\delta_1, \delta_2\}$、$\{\delta_2, \delta_3\}$、$\{\delta_3, \delta_4\}$ 张成的子系分别属于类型 A_2、B_2、A_2。

定义 1.10 ([Wie24，4.3.2，10.1。17])。 设 C 是交换环 k上的乘法锥交错代数。(k, C)的扭曲群是群$T\colon = \{\pm1\} \times \{\pm1\}$ 并配有在（集合） k 和 C 上的作用，其定义如下：

$$(-1,1).t \coloneqq -t, \quad (1,-1).t \coloneqq t, \quad (-1,1).c \coloneqq -c, \quad (1,-1).c \coloneqq \bar{c}$$

对所有 $t \in k$、$c \in C$。

定义 1.11 ([Wie24, 4.2.4])。 设 Δ 是 F_4 中的单根系，T 是任意阿贝尔群。取值于 T 的 Δ-奇偶映射 是任意映射 $\eta\colon\ F_4 \times \Delta \to T\colon (\alpha, \delta) \mapsto \eta_{\alpha,\,\delta}$。对于任意满足 $\ell \geq 2$ 的序列 δ_1，...，$\delta_\ell \in \Delta$，定义

$$\eta_{\alpha,\delta_1\cdots\delta_\ell} \coloneqq \prod_{i=1}^{\ell} \eta_{\alpha^{\sigma(\delta_1)\cdots\sigma(\delta_{i-1})},\delta_i}.$$

定义 1.12（[Wie24，4.3.4]）。设 C 是交换环 k上的乘法锥形替代代数，设 T 是（k，C）的扭曲群，设 Δ 是 F_4 中的单根系，并设 η 是取值于 T中的 Δ-奇偶映射。此外，设 G 是一个带有 F_4-分次（U_α）$_{\alpha\in F_4}$ 的群，并设 w_δ 是一个关于

所有 $\delta \in \Delta$的 -Weyl元。对所有长 $\alpha \in F_4$，置 $P_\alpha := k$；对所有短 $\alpha \in F_4$，置 $P_\alpha := C$。于是，相对于（w_δ）$_{\delta\in\Delta}$ 以及 η，从（G，（U_α）$_{\alpha\in F_4}$）到（k，C）的一个参数化是一族同构（θ_α：$P_\alpha \to U_\alpha$）$_{\alpha\in F_4}$，满足

$$\theta_\alpha(p)^{w_\delta} = \theta_{\alpha^{\sigma(\delta)}}(\eta_{\alpha,\delta}.p) \quad \text{for all } p \in P_\alpha.$$

注 1.13. 参数化自动满足

$$\theta_\alpha(p)^{w_{\delta_1}\cdots w_{\delta_\ell}} = \theta_{\alpha^{\sigma(\delta_1)\cdots\sigma(\delta_\ell)}}(\eta_{\alpha,\delta}.p) \quad \text{for all } p \in P_\alpha.$$

注记 1.14. 设 Δ 是 F_4中的单根系。并非每个奇偶映射（取值于某个三次范数对（k，C）的扭曲群中）都是合理的，也就是说，并非每个奇偶映射都可能出现在某个 F_4-分次群的参数化中。例如，已知对于 $\alpha \in F_4$、$\delta \in \Delta$的许多可能取值，任意 δ-Weyl元的平方在 U_α 上的作用都必须是取逆映射（见 [Wie24，10.5.5]），因此任何合理的奇偶映射 η 都应满足$\eta_{\alpha,\ \delta\delta} =$（$-1$，1）。$\eta^{\mathrm{c}}$：$F_4 \times \Delta \to \{\pm 1\}^2$ 给出了一个合理奇偶映射的例子，见 [Wie24，图10.4]。这里字母“c”表示这是在 F_4-分次群的坐标化定理 1.15 中使用的奇偶映射。

定理 *1.15 ([Wie24, 10.7.8])*。设 G 是一个带有 F_4-分次 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 的群。选取 F_4 中单根的标准根系 $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$，以及一个 δ-*Weyl*元 w_δ，对所有 $\delta \in \Delta$ 均成立。则存在一个交换环 k、一个在 k 上的乘法圆锥替代代数 C，以及相对于 $(w_\delta)_{\delta\in\Delta}$ 和来自注记 *1.14* 的标准奇偶映射 η^c 的参数化 $(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$，它将 $(G, (U_\alpha)_{\alpha\in F_4})$ 参数化为 (k, C)（我们将该映射的陪域与 (k, C) 的扭曲群 T 认同），使得对所有 $s, t \in k$ 以及所有 $c, d \in C$，下列交换子关系均成立：

$$\begin{aligned}
[\theta_{\delta_1}(s), \theta_{\delta_2}(t)] &= \theta_{\delta_1+\delta_2}(-st),\\
[\theta_{\delta_2}(s), \theta_{\delta_3}(c)] &= \theta_{\delta_2+\delta_3}(-sc)\theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(-sn(c)\big),\\
[\theta_{\delta_2+\delta_3}(c), \theta_{\delta_3}(d)] &= \theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(n(c,d)\big) = \theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(t(c\bar{d})\big),\\
[\theta_{\delta_4}(c), \theta_{\delta_3}(d)] &= \theta_{\delta_3+\delta_4}(cd).
\end{aligned}$$

注记 1.16. 沿用定理 1.15并令

$$X := \{(\delta_1, \delta_2), (\delta_2, \delta_3), (\delta_2+\delta_3, \delta_3), (\delta_2, \delta_2+2\delta_3), (\delta_3, \delta_4)\}.$$

对于所有 $(\alpha, \beta) \in X$，定理 1.15 给出了$[U_\alpha, U_\beta]$的显式交换子公式。现在令 α，$\beta \in F_4$ 为任意不成比例的根。由 Weyl 群的传递性可知，存在 u 属于 F_4的 Weyl 群，使得 $(\alpha^u, \beta^u) \in X$。因此，我们得到了 $[U_{\alpha^u}, U_{\beta^u}]$的交换子公式。将此公式依次用韦伊元 $w_{\delta_{i_\ell}}$、……、$w_{\delta_{i_1}}$ 共轭，其中 $u = \sigma_{\delta_{i_1}}\cdots\sigma_{\delta_{i_\ell}}$，便得到 $[U_\alpha, U_\beta]$ 的交换子公式。例如，由公式 $[\theta_{\delta_3}(c)\ \theta_{\delta_3}(d)] = \theta_{\delta_3+\delta_4}(cd)$ 可推出

$$[\theta_{\delta_4^{\sigma(\delta)}}(\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_4,\delta}.c), \theta_{\delta_3^{\sigma(\delta)}}(\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3,\delta}.d)] = \theta_{\delta_3^{\sigma(\delta)}+\delta_4^{\sigma(\delta)}}(\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3+\delta_4,\delta}.cd)$$

对所有 $\delta \in \Delta$ 以及所有 c，$d \in C$均成立。因此，明确掌握 η^{c} 就能明确掌握所有交换子关系。

注 1.17。我们将定理 $(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 中的这一族称为1.15 一种坐标化，意即这是一种参数化，其中已知显式的交换子公式（涉及 (k, C)的结构映射）。在 [Wie24，10.4.14，10.4.15],

奇偶映射 η^{c} 和 $(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 分别称为“标准奇偶映射”和“具有标准符号的坐标化”。不过，本文避免使用“标准符号”这一术语，因为奇偶映射 η^{c}并无任何规范的选取。例如，我们存在性定理 中 11.15里的分次群，先验地将依据另一种奇偶映射 η^{e}进行坐标化，而该群中的交换子关系（见命题 11.13）只有“在扭曲意义下”，也就是“相差符号和共轭”，才与定理 1.15 中的相同。不过，我们将在注 11.16 中说明如何修改一种类型的坐标化，以得到另一种类型的坐标化，这表明符号选取上的这种差异并无实质意义。

2. 三次范数对

2.1. 定义与恒等式。 令 k 为任意交换环。为了定义三次范数对，我们首先需要明确三次型的概念。

定义 2.1 ([Fau00], [GPR24, 12.43])。令 M、N 为 k-模。一个从 M 到 N （在 k上）的三次映射是由一对映射 (f,g) 组成的

$$f\colon M\to N \quad \text{and} \quad g\colon M\times M\to N$$

并满足以下性质。

(i) $f(\lambda x)=\lambda^3 f(x)$ 对所有 $x\in M$、$\lambda\in k$成立。(ii) g 关于第一个分量是二次的，关于第二个分量是线性的。(iii) $f(x+y)=f(x)+g(x,y)+g(y,x)+f(y)$ 对所有 $x,y\in M$ 成立。(iv) 欧拉微分方程：$g(x,x)=3f(x)$ 对所有 $x\in M$ 成立。

我们还将 (f,g) 记作：$M\to N$。若 $N=k$，我们也称 (f,g) 为 M上的三次型。

在三次映射的定义中加入“ f的 $(2,1)$-线性化 g”，是为了确保以下意义下标量扩张的存在性和唯一性。

引理*2.2*（[*Fau00*，定理 35], [*GPR24*，*12.43*]）。设 M、N 是 k-模，R是一个 k-代数，且 (f,g)：$M\to N$是一个三次映射。那么存在唯一的三次映射 $(f,g)_R=(f_R,g_R)$：$M_R=M\otimes_k R\to N_R=N\otimes R$，称为 (f,g)的 R-三次扩张，使得下列交换图可交换：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle m\mapsto m\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\mapsto n\otimes 1} \\ M_R & \xrightarrow{f_R} & N_R, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M\times M & \xrightarrow{g} & N \\ {\scriptstyle (u,v)\mapsto(u\otimes 1,v\otimes 1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\mapsto n\times 1} \\ M_R\times N_R & \xrightarrow{g_R} & N_R. \end{array}$$

现在我们可以定义三次范数对了。

定义 2.3。 一个三次范数对（在 k上）是一个对 $(J,\ J')$，由 k-模组成，并配备了映射

$$\begin{aligned} &\times\colon J\times J\to J', && \times'\colon\ J'\times J'\to J,\\ &T\colon J\times J'\to k, && T'\colon\ J'\times J\to k,\\ &N\colon\ J\to k, && N'\colon\ J'\to k,\\ &\sharp\colon\ J\to J', && \sharp'\colon\ J'\to J \end{aligned}$$

使得满足以下条件。

(i) $\times$ 和 T 是 k-双线性映射，$\times$ 是对称的，并且对所有$a \in J$、$a' \in J'$，$T'(a', a) = T(a, a')$。(ii) $\sharp$ 是一个二次映射，其线性化为 $\times$。也就是说，对所有 a、$b \in J$ 和 $\lambda \in k$，$(\lambda a)^\sharp = \lambda^2 a^\sharp$ 且 $(a+b)^\sharp = a^\sharp + b^\sharp + a \times b$。(iii) 令 g: $J \times J \to k$: $(a, b) \mapsto T'(a^\sharp, b)$。则 (N, g) 是 M 上的三次型。具体而言，$N(\lambda a) = \lambda^3 N(a)$，$T'(a^\sharp, a) = 3N(a)$，以及梯度恒等式

$$N(a+b) = N(a) + T'(a^\sharp, b) + T'(b^\sharp, a) + N(b)$$

对所有 $a, b \in J$ 和 $\lambda \in k$ 均成立。

(iv) 伴随恒等式 $(a^\sharp)^{\sharp'} = N(a)a$ 严格成立。也就是说，对于所有 k-代数 R 及所有 $a \in J_R$，$(a^\sharp)^{\sharp'} = \tilde{N}_R(a)a$ 均成立。(v) $N'(a^\sharp) = N(a)^2$ 严格成立。也就是说，对于所有 k-代数R 及所有 $a \in J_R$，$N'_R(a^\sharp) = N_R(a)^2$ 均成立，其中 N_R, N'_R 如引理 2.2所述。(vi) $a \times (a^\sharp \times' b') = N(a)b' + T(a, b')a^\sharp$严格成立。也就是说，对于所有 k-代数 R 及所有 $a \in J_R, b' \in J'_R$，$a \times (a^\sharp \times' b') = \tilde{N}_R(a)b' + T(a, b')a^\sharp$ 均成立。(vii) 交换 $(J, \times, T, N, \sharp)$ 与 $(J', \times', T', N', \sharp')$ 的角色后，前述所有条件仍然成立。

我们通常将映射 $\times'$, T', N', $\sharp'$ 简记为 $\times$, T, N, $\sharp$。我们将 T 称为（双线性）迹，将 N 称为范数。

定义 2.4 ([GPR24, 33。4])。一个 三次范数结构 是一个 k-模 J，它配备了映射

$$\times\colon J \times J \to J, \quad T\colon J \times J \to k, \quad N\colon J \to k, \quad \sharp\colon J \to J$$

以及一个称为基点的特定元素 $1_J \in J$，并满足以下条件。

(i) (J, J) 是一个三次范数对，其结构映射为 $\times$, T, N, $\sharp$ 以及 $\times' := \times$,$T' := T$, $N' := N$, $\sharp' := \sharp$。它称为与 J 关联（或由 J 诱导）的三次范数对。(ii) 基点满足 $1_J^\sharp = 1_J$, $N(1_J) = 1_k$，且对所有 $a \in J$，$1_J \times a = T(1_J, a)1_J - a$。

我们有时也将由 J 诱导的三次范数对（J，J）称为三次范数结构。

注 2.5。对于好奇的读者，我们将本文对三次范数对的定义与文献中出现的一些相关定义进行比较，并评论定义 2.3 中公理 （v）和（vi）的必要性。这些事实在后文中不会用到。

(1) 若存在 $a, b \in J$使得 $N(a)$ 可逆且 kb 是自由的，那么公理 (v) 和 (vi) 可由其余公理推出。具体而言，按照与 [GPR24, 33.7], 中类似的论证，存在 b 意味着，对于所有使$N(c)$ 可逆的 $c \in J$，kc 都是自由的；根据这一观察，便可依照[GPR24, (33a.18), (33a.19)]中的方法推出 (v) 和 (vi)。(2) 若存在一个幺模的基点 1_J，则 (1) 中关于存在 a, b 的条件便得到满足；这意味着 $k1_J$ 是 J的一个自由直和项。在 [GPR24, 33.1, 33.4], 中，三次范数结构的定义要求基点具有幺模性，因此其中没有公理 (v) 和 (vi)

来自 同上。若 (1) 中的条件也成立，则 k 是一个域且 $N \neq 0$，而这正是(v) 在 [Fau01, (ADJ3')]中证明的方法。

(3) 公理 (vi) 未出现在 [Fau01], 中，但可由 (v)推出，前提是 k 是一个域。此外， [Fau01，第 4644] 页证明了，(v) 成立，只要 T 在如下意义上非退化： $T(a, J') = 0$蕴含 $a = 0_J$。

(4) 在 [Sme25，2.1.5], 中，引理 2.8(21)中的恒等式被要求作为公理，以取代我们的公理 (v)。特别地，由引理2.8(21) 可知，按我们的定义，三次范数对也是按 [Sme25，2.1.5]定义的三次范数对。

注 2.6 (线性化)。 根据 [GPR24，12.10，12.11], 公理2.3(iv)等价于要求恒等式 $(a^\sharp)^\sharp = N(a)a$ 及其形式线性化成立

$$a^\sharp \times (a \times b) = N(a)b + T(a^\sharp, b)a \quad \text{and} \tag{1}$$

$$a^\sharp \times b^\sharp + (a \times b)^\sharp = T(a^\sharp, b)b + T(a, b^\sharp)a \tag{2}$$

对所有 a， $b \in J$成立。（另见 [GPR24，33。14]。）此外，对 b进行线性化，由（2）可得

$$a^\sharp \times (b \times c) + (a \times b) \times (a \times c) = T(a^\sharp, b)c + T(a^\sharp, c)b + T(a, b \times c)a$$

对所有 a， b， $c \in J$成立，这也是（1）关于 a的线性化。

类似地，公理 2.3(vi) 等价于要求 $a \times (a^\sharp \times b') = N(a)b' + T(a, b')a^\sharp$ 以及形式线性化

$$a \times \big((a \times c) \times b'\big) + c \times (a^\sharp \times b') = T(a^\sharp, c)b + T(a, b')a \times c + T(c, b')a^\sharp$$

对所有 a， $c \in J, b' \in J'$ 成立。

最后，公理2.3(v) 在相应多重次数$(5, 1)$，$(4, 2)$，$(3, 3)$ 下，关于 $(a, b) \in J^2$ 的形式线性化是恒等式

$$T\big((a^\sharp)^\sharp, a \times b\big) = 2T(a^\sharp, b)N(a),$$

$$T\big((a^\sharp)^\sharp, b^\sharp\big) + T\big(a^\sharp, (a \times b)^\sharp\big) = 2N(a)T(a, b^\sharp) + T(a^\sharp, b)^2,$$

$$N(a)T(b, b^\sharp) + T(a^\sharp, b)T(a, b^\sharp) + N(a \times b) = 2N(a)N(b) + 2T(a^\sharp, b)T(a, b^\sharp).$$

这些公式通过对 $D^i(N \circ \sharp)$和 $D^i(N \cdot N)$进行计算，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$使用链式法则和乘积法则，参见 [GPR24，12.17，12。42], ，并令所得表达式相等。前两个恒等式是引理 2.8(7)和 (10)的推论，其证明独立于公理 2.3(v)，而第三个等价于

$$N(a \times b) = T(a^\sharp, b)T(a, b^\sharp) - N(a)N(b) \tag{3}$$

因为 $T(b, b^\sharp) = 3N(b)$。此外，(3) 的多次数$(3, 2, 1)$ 在 $(a, b, c) \in J^3$ 的形式线性化为

$$T\big((a \times b)^\sharp, a \times c\big) = T(a^\sharp, b)T(a, b \times c) - N(a)T(b^\sharp, c) + T(a^\sharp, c)T(a, b^\sharp),$$

这也是引理 2.8(10)的推论。由此可知，我们可以将公理 2.3(v) 替换为如下要求： $N(a^\sharp) = N(a)^2$ 和 (3) 对所有 $a, b \in J$ 均成立。

本节余下部分中，我们假设 (J, J') 是一个三次范数对。

定义 2.7。 U-算子 U_a： $J' \to J$ 定义为

$$U_a(a') := T(a, a')a - a^\sharp \times a',$$

对所有 $a \in J$ 和 $a' \in J'$，其线性化为

$$U_{a,b}(a') = T(a,a')b + T(b,a')a - (a \times b) \times a'$$

对所有 a，$b \in J$ 和 $a' \in J'$。我们也记作

$$D_{a,a'}(b) := \{a, a', b\} := U_{a,b}(a').$$

特别地，对于每个 $a \in J$ 和 $a' \in J'$，这定义了一个自同态 $D_{a,\,a'}$，作用于 J。类似地，我们有自同态 $D_{a',\,a}$，作用于 J'。（记号不会造成混淆，因为 $a \in J$ 和 $a' \in J'$。）我们将在引理 2.9 中看到，U-算子赋予 $(J,\ J')$ Jordan 对的结构。我们有时将$D(a,\ a')$记作 $D_{a,\,a'}$。

下面的引理说明，在 [GPR24，33。8]中证明的关于三次范数结构、且不涉及特定基点的所有恒等式仍然成立。编号沿用同上。

引理 2.8. 以下恒等式对所有 $a, b, c, d \in J,\ b', c', d' \in J'$ 以及所有 $a, b, c, d \in J',\ b', c', d' \in J$均成立：

(7) $T(a \times b, c) = T(a, b \times c)$. (8) $a^\sharp \times (a \times b) = N(a)b + T(a^\sharp, b)a$. (9) $(a \times b) \times (a \times c) + a^\sharp \times (b \times c) = T(a^\sharp, b)c + T(a^\sharp, c)b + T(a \times b, c)a$. (10) $a^\sharp \times b^\sharp + (a \times b)^\sharp = T(a^\sharp, b)b + T(a, b^\sharp)a$. (16) $U_a(a \times b) = T(a^\sharp, b)a - N(a)b$. (17) $\{a, a^\sharp, b\} = 2N(a)b$. (20) $(U_a b')^\sharp = U_{a^\sharp}((b')^\sharp)$. (21) $N(U_a b') = N(a)^2 N(b')$. (25) $(a \times b) \times (c \times d) + (b \times c) \times (a \times d) + (c \times a) \times (b \times d) = T(a \times b, c)d + T(b \times c, d)a + T(c \times d, a)b + T(d \times a, b)c$.(26) $a \times (b' \times (a \times c)) = T(a, b')a \times c + T(a^\sharp, c)b' + T(b', c)a^\sharp - (a^\sharp \times b') \times c = (U_a b') \times c + T(a^\sharp, c)b' + T(b', c)a^\sharp$(27) $a \times (b' \times (c \times d)) + c \times (b' \times (d \times a)) + d \times (b' \times (a \times c)) = T(a, b')c \times d + T(c, b')d \times a + T(d, b')a \times c + T(a \times c, d)b'$.(29) $N(a \times b) = T(a^\sharp, b)T(a, b^\sharp) - N(a)N(b)$. (30) $T(U_a b', c') = T(b', U_a c')$. (31) $T(\{a, b', c\}, d') = T(c, \{b', a, d'\})$.

证明。与 [GPR24，33 中相同的论证和计算8]适用于我们这一更一般的三次范数结构情形。请注意，与 [GPR24，33 中不同的是，8], 我们不能使用 [GPR24，12 中的扎里斯基稠密性论证24]，将注意力限制在具有可逆范数的元素上，因为不能保证集合

$$\mathbf{D}(N)(k) := \{a \in J \mid N(a) \text{ invertible}\}$$

非空。还请注意，我们已经在备注 (8)至 (10)、(26) 以及 (29)中看到了2.6。□

引理 2.9 ([Fau01，命题 1])。定义 U中的算子 2.7 赋予$(J,\ J')$ *Jordan* 对的结构。换言之，恒等式

$$\{a, b', U_a c'\} = U_a(\{b', a, c'\}),$$

$$\{U_a b', b', c\} = \{a, U_{b'} a, c\} \quad and \quad U_{U_a b'} c' = U_a U_{b'} U_a c'$$

对所有 $a, c \in J$, $b', c' \in J'$ 均成立。

证明。这可由 [Fau01 中的计算得到，见命题 1]。或者，我们也可以引用 [Sme25，1.2。9]。第一和第三个恒等式也可由 [GPR24中的计算得到，见 33。9]。证明中所需的所有恒等式均由引理 2.8 得出。□

我们简要概述三次范数对与三次范数结构之间的关系，这自然引出了同伦的概念。

定义 2.10。设 (J_1, J_1') 和 (J_2, J_2') 是两个三次范数对，设 $\varphi\colon J_1 \to J_2$、$\varphi'\colon J_1' \to J_2'$ 是 k-模的两个同态，并设 $t \in k$ 可逆。则对 (φ, φ') 称为三次范数对的 t-同伦，如果

$$N_2\big(\varphi(a)\big) = tN_1(a), \qquad \varphi(a)^{\sharp_2} = t\varphi'(a^{\sharp_1}), \qquad T_2\big(\varphi(a), \varphi'(a')\big) = T_1(a, a'),$$
$$N_2\big(\varphi'(a')\big) = t^{-1}N_1(a'), \quad \varphi'(a')^{\sharp_2} = t^{-1}\varphi\big((a')^{\sharp_1}\big)$$

对所有 $a \in J_1$、$a' \in J_1'$。t-同伦 是某个可逆 $t \in k$ 的同伦，而 同态 是 1-同伦。若 (φ, φ') 的 φ 和 φ' 都分别具有相应性质，则称其为满射、单射或双射。双射同伦也称为等位，双射同态也称为同构。

注 2.11。三次范数对的一个 t-同伦 $(\varphi, \varphi')\colon (J_1, J_1') \to (J_2, J_2')$ 自动满足

$$\begin{aligned}\varphi'(a \times_1 b) &= \varphi'\big((a+b)^\sharp - a^\sharp - b^\sharp\big) = t^{-1}\big((\varphi(a)+\varphi(b))^\sharp - \varphi(a)^\sharp - \varphi(b)^\sharp\big)\\ &= t^{-1}\varphi(a) \times_2 \varphi(a)\end{aligned}$$

类似地，对所有 $a, b \in J_1$、$a', b' \in J_1'$，有 $\varphi(a' \times_1 b') = t\varphi'(a') \times_2 \varphi'(b')$。此外，若 (φ, φ') 是一个双射 t-同伦，则 $(\varphi^{-1}, (\varphi')^{-1})$ 是一个双射 t^{-1}-同伦，而一个 t_1-同伦与一个 t_2-同伦的复合是一个 t_1t_2-同伦。

例 2.12。设 $t, s \in k$ 可逆。则 $(t\,\mathrm{id}_J, t^{-1}\mathrm{id}_{J'})\colon (J, J') \to (J, J')$ 是一个 t^3-各伦。由此可知，对于任意 s-各伦 (ϕ, ϕ')，对 $(t\phi, t^{-1}\phi') = (\phi, \phi') \circ (t\,\mathrm{id}_J, t^{-1}\,\mathrm{id}_{J'})$ 是一个 t^3s-各伦。

注 2.13。任意三次范数对的同伦 $(\varphi, \varphi')\colon (J_1, J_1') \to (J_2, J_2')$ 也是 Jordan 对同态：若 (φ, φ') 是 $t \in k$ 可逆的 t-同伦，则有

$$\begin{aligned}\varphi'\big(U_a(a')\big) &= T(a, a')\varphi(a) - \varphi(a^\sharp \times a') = T\big(\varphi(a), \varphi'(a')\big)\varphi(a) - t\varphi'(a^\sharp) \times \varphi'(a')\\ &= T\big(\varphi(a), \varphi'(a')\big)\varphi(a) - \varphi(a)^\sharp \times \varphi'(a') = U_{\varphi(a)}\big(\varphi'(a')\big)\end{aligned}$$

对于所有 $a \in J_1$、$a' \in J_1'$，同样地，$\varphi(U_{a'}(a)) = U_{\varphi'(a')}\varphi(a)$。由此可得$\varphi(\{a, a', b\}) = \{\varphi(a)\ \varphi'(a')\ \varphi(b)\}$，并且 $\varphi'(\{a', a, b'\}) = \{\varphi'(a')\ \varphi(a)\ \varphi'(b')\}$，对所有$a, b \in J_1$、$a', b' \in J_1'$均成立。我们得出如下蕴含链：“三次范数对同态” $\Longrightarrow$ “三次范数对同伦” $\Longrightarrow$ “约旦对同态”。

注释 2.14. 设 $(\varphi, \varphi') : (J_1, J_1) \to (J_2, J_2')$ 是三次范数对的 t-同伦（其中某个可逆 $t \in k$），而 (J_1, J_1) 是由三次范数结构 J_1 诱导的三次范数对。那么 $(\varphi', \varphi)\colon (J_1, J_1) \to (J_2', J_2)$ 是一个 t^{-1}-同伦。

定义 2.15. 设 $t \in k$ 可逆。三次范数对 (J, J') 的 t-对合 是三次范数对的一个 t-各伦 $(\varphi, \varphi')\colon (J, J') \to (J', J)$，满足 $\varphi' = \varphi^{-1}$。一个对合 是 1-对合。

注记 2.16。 任何由三次范数结构诱导的三次范数对都具有对合。然而，带有对合的三次范数对不一定由三次范数结构诱导，因为它未必具有定义2.4意义下的基点。

注记 2.17。假设存在 $p \in J$ 使得 $N(p)$可逆，并令 $p' := N(p)^{-1}p^\sharp$。那么根据 [Sme25, 1.1.10] ，或通过与[GPR24, 33.10]中相同的计算， p 在约旦对的意义下是可逆的，其逆为 p' （即 $U_p\colon\ J' \to J$ 是可逆的，且逆为 $U_{p'}$）。此外，我们可以在 k-模 $J^{(p)} := J$ 上以 p 为基点定义一个三次范数结构，其公式见[Sme25, 1.1.10] 或 [GPR24, 33.11]。它称为（J,J'）的 p-同位体，其结构映射由下式给出

$$\begin{aligned}
N^{(p)}\colon J \to k\colon a &\mapsto N(p')N(a) = N(p')^{-1}N(U_{p'}a),\\
\sharp^{(p)}\colon J \to J\colon a &\mapsto N(p')^{-1}U_{p'}(a)^\sharp = N(p')U_{p'}^{-1}(a^\sharp),\\
T^{(p)}\colon J \times J \to k\colon (a,b) &\mapsto T\big(U_{p'}a, b\big) = T\big(a, U_{p'}b\big),\\
\times^{(p)}\colon J \times J \to k\colon (a,b) &\mapsto N(p')U_{p'}^{-1}(a \times b) = N(p')^{-1}\big(U_{p'}(a) \times U_{p'}(b)\big).
\end{aligned}$$

在这一设定下，经过直接计算可知，这一对

$$(\mathrm{id}_J, U_p^{-1}) = (\mathrm{id}_J, U_{p'})\colon (J^{(p)}, J^{(p)}) \to (J, J')$$

是一个 $N(p)$-各伦。根据注 2.14，这意味着

$$(U_p^{-1}, \mathrm{id}_J) = (U_{p'}, \mathrm{id}_J)\colon (J^{(p)}, J^{(p)}) \to (J', J)$$

是一个 $N(p)^{-1}$-各伦。特别地，复合映射

$$(U_p^{-1}, U_p) = (U_p^{-1}, \mathrm{id}_J) \circ (\mathrm{id}_J, U_p^{-1})^{-1}\colon (J, J') \to (J', J)$$

是一个 $N(p)^{-2}$-对合，因此

$$(N(p)U_p^{-1}, N(p)^{-1}U_p)\colon (J, J') \to (J', J)$$

是一个 $N(p)$-对合。

我们得出结论：三次范数对 (J, J') 各伦于由三次范数结构诱导的三次范数对，当且仅当存在 $p \in J$，使得 $N(p)$ 可逆。此外，对于第二个三次范数对 (J_2, J_2') 以及一对 (φ, φ')：$(J_2, J_2') \to (J, J')$ 的 k-线性映射，经过另一次直接计算可知，(φ, φ') 是一个 $N(p)$- 同态，当且仅当复合映射 $(\mathrm{id}_J, U_p) \circ (\varphi, \varphi')$ 是三次范数对的同态（从 (J_2, J_2') 到 $(J^{(p)}, J^{(p)})$）。因此，“对某个可逆 $t \in k \cap \mathrm{im}(N)$，与 (J, J') t-同伦”这一概念等同于“到 (J, J') 的某个各伦体的同态”这一概念。第二个概念正是约旦代数理论中同伦的定义（见 [GPR24, 31.17]）。

我们以一些稍后将用到的恒等式作为本节的结尾。

引理 2.18. 对于所有 a、b、$c \in J$，以下恒等式成立。

(i) $D_{a,\ a^\sharp} = 2N(a)$ 标识$_J$。

(ii) $D_{a^\sharp,\ a} = 2N(a)$ 标识$_{J'}$。

(iii) $D_{a,b^\sharp}+D_{b,a\times b}=2T(a,b^\sharp)$ 标识$_{J\circ}$ (iv) $D_{a^\sharp}$,
$_b+D_{a\times b,a}=2T(a^\sharp,b)$ 标识$_{J'\circ}$ (v) $D_{a,b\times c}+D_b$,
$_{c\times a}+D_{c,a\times b}=2T(a,b\times c)$ 标识$_{J\circ}$ (vi) $D_{a\times b,c}+D_{b\times c}$,
$_a+D_{c\times a,b}=2T(a\times b,c)$ 标识$_{J'\circ}$
若交换id_J和$\mathrm{id}_{J'}$的角色，则对所有 $a,b,c\in J'$，同样的恒等式仍成立。

证明。令 $a,b,c,d\in J$。由定义 2.3(iii) 和引理 2.8(8)，可得

$$D_{a,a^\sharp}(c)=T(a,a^\sharp)c+T(c,a^\sharp)a-(a\times c)\times a^\sharp=2N(a)c,$$

证明 (i)。接下来，由引理2.8(7) 和 (9)，可得

$$\begin{aligned}D_{a,b^\sharp}(c)+D_{b,a\times b}(c)&=T(a,b^\sharp)c+T(c,b^\sharp)a-(a\times c)\times b^\sharp\\&\quad+T(b,a\times b)c+T(c,a\times b)b-(b\times a)\times(b\times c)\\&=2T(a,b^\sharp)c,\end{aligned}$$

证明(iii)。现在，由 (iii) 通过对 b线性化，立即可得 (v) 。

(ii)、 (iv) 和 (vi) 的证明完全类似。 □

引理 2.19。对于所有 a、$b\in J$ 和 $c'\in J'$，以下恒等式成立。

(i) $U_a(a^\sharp)=N(a)a$。(ii) $T(U_a(c')\ a^\sharp)=N(a)T(a,$
$c')$。(iii) $U_a(c')\times a=T(a,c')a^\sharp-N(a)c'$。(iv) $T\big($(
$a\times b)\times c',a^\sharp\big)=N(a)T(b,c')+T(b,a^\sharp)T(a,c')$。(v) $T\big($
$(a\times b)^\sharp,a^\sharp\big)=N(a)T(a,b^\sharp)+T(b,a^\sharp)^2$。(vi) $(a\times b)$
$^\sharp\times a=T(a,b^\sharp)a^\sharp+T(b,a^\sharp)a\times b-N(a)b^\sharp$。

证明。设 $a,b\in J$ 和 $c'\in J'$。

(i) 根据定义 2.3(iii) 和 (iv)，我们有 $U_a(a^\sharp)=T(a,a^\sharp)a-a^\sharp\times a^\sharp=3N(a)$
$a-2(a^\sharp)^\sharp=N(a)a$。(ii) 再次根据定义 2.3(iii) 和 (iv)，可得

$$\begin{aligned}T(U_a(c'),a^\sharp)&=T(a,c')T(a,a^\sharp)-T(a^\sharp\times c',a^\sharp)\\&=3N(a)T(a,c')-T(a^\sharp\times a^\sharp,c')=N(a)T(a,c').\end{aligned}$$

(iii) 根据定义 2.3(vi)，我们有 $U_a(c')\times a=T(a,c')a\times a-(a^\sharp\times c')\times a=T(a,c')a^\sharp-N(a)c'$。

(iv) 使用引理 2.8(8)，可得 $T\big((a\times b)\times c',a^\sharp\big)=T\big((a\times b)\times a^\sharp,c'\big)=N(a)T$
$(b,c')+T(b,a^\sharp)T(a,c')$。

（v）根据定义 2.3(iii) 和 （iv）以及引理 2.8(10)，可得

$$\begin{aligned}T\big((a\times b)^\sharp,a^\sharp\big)&=T(b,a^\sharp)T(b,a^\sharp)+T(a,b^\sharp)T(a,a^\sharp)-T(a^\sharp\times b^\sharp,a^\sharp)\\&=T(b,a^\sharp)^2+3N(a)T(a,b^\sharp)-T(a^\sharp\times a^\sharp,b^\sharp)\\&=N(a)T(a,b^\sharp)+T(b,a^\sharp)^2.\end{aligned}$$

(vi) 使用定义 2.3(vi) 和引理 2.8(10)，我们得到

$$\begin{aligned}(a\times b)^\sharp\times a&=T(b,a^\sharp)b\times a+T(a,b^\sharp)a\times a-(a^\sharp\times b^\sharp)\times a\\&=T(b,a^\sharp)a\times b+2T(a,b^\sharp)a^\sharp-N(a)b^\sharp-T(a,b^\sharp)a^\sharp\end{aligned}$$

$$= T(a, b^\sharp)a^\sharp + T(b, a^\sharp)a \times b - N(a)b^\sharp. \qquad \square$$

2.2. 线性三次范数对。我们的主要目标之一将在第 4 节实现，即从任意三次范数对 (J, J') 构造一个 G_2 分次李代数 $L = L(J, J')$。由于李代数是一个“线性对象”，因此 L 仅取决于环 k、模 J、 J' 以及双线性映射 $\times$和 T，这并不令人意外。换言之，高次映射 N 和 $\sharp$ 既不会出现在模 L 的定义中，也不会出现在它的乘法表（表 1）中。乍看之下，这一观察或许只是个小小的趣闻，但在第6节（具体而言，在注 6.17）中将会明确用到。本节旨在通过引入线性三次范数对的概念，使上述观察更加明确；线性三次范数对刻画了三次范数对的线性结构（因而是其推广）。第 3 节至第6节只需要这一线性结构。相较之下，第 7 节中李代数 L 上指数映射的定义涉及映射 $\sharp$ 和 N。因此，我们构造 G_2 分次群的方法只适用于三次范数对，而不适用于任意线性三次范数对。

热切期待了解我们主要结果的读者，或许想稍后再读这一略显技术性的章节。

定义 2.20。 线性三次范数对（基于 k）是由映射赋予结构的一对 (J, J') k-模

$$\begin{aligned} &\times\colon J \times J \to J', && \times'\colon J' \times J' \to J, \\ &T\colon J \times J' \to k, && T'\colon J' \times J \to k \end{aligned}$$

使得下列条件成立。

(i) $\times$ and T are k-bilinear maps, $\times$ is symmetric, and $T'(a', a) = T(a, a')$ for all $a \in J$, $a' \in J'$.

(ii) The identities in Lemma 2.8(7), (25), (27) and (31) hold:

$$T'(a \times b, c) = T(a, b \times c),$$

$$\begin{aligned} a \times (b' \times' (a \times c)) &= T(a, b')a \times c + T'(a^\sharp, c)b' + T'(b', c)a^\sharp - (a^\sharp \times' b') \times c \\ &= (U_a b') \times c + T'(a^\sharp, c)b' + T'(b', c)a^\sharp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a \times (b' \times' (c \times d)) + c \times (b' \times' (d \times a)) + d \times (b' \times' (a \times c)) \\ &\quad = T(a, b')c \times d + T(c, b')d \times a + T(d, b')a \times c + T'(a \times c, d)b', \end{aligned}$$

$$T(\{a, b', c\}, d') = T(c, \{b', a, d'\})$$

for all $a, b, c \in J$ and $b', d' \in J'$.

(iii) All the previous conditions are still satisfied if we interchange the roles of $(J, \times, T)$ and $(J', \times', T')$.

我们通常将映射 $\times'$、 T'、 N'、 $\sharp'$ 简记为 $\times$、 T、 N、 $\sharp$。为强调其与线性三次范数对的区别，我们有时将三次范数对称为真 三次范数对。

例 2.21. 任意真三次范数对 (J, J') 及其映射 $\times$, $\times'$, T, T', N,N', $\sharp$, $\sharp'$都会诱导出一个线性三次范数对 (J, J') 及其映射 $\times$, $\times'$, T, T'。某些三次范数对的商（我们将在注 6.17 中遇到）提供了线性三次范数对的例子，但尚未（被证明）是真三次范数对。

在本节余下部分，(J, J') 表示 k 上的一个线性三次范数对。

定义 2.22。对于所有 $a,\ b \in J$，我们定义一个 U-算子 $U_{a,\ b}\colon\ J' \to J$，定义如下

$$U_{a,b}(a') \coloneqq T(a,a')b + T(b,a')a - (a \times b) \times a'$$

对于所有 $a' \in J'$。我们也记作

$$D_{a,a'}(b) \coloneqq \{a, a', b\} \coloneqq U_{a,b}(a').$$

注 2.23。定义 2.20 中的公理集合足以满足我们的目的，但可能不足以构建令人满意的线性三次范数对理论（而我们对此并无兴趣）。例如，我们并未声称 U-算子赋予 $(J,\ J')$ 线性约旦对的结构，而且证明这一点似乎很繁琐（即使它确实成立）。

定义 2.24。设 $(J_1,\ J_1')$、$(J_2,\ J_2')$ 是两个线性三次范数对，设 $\varphi\colon\ J_1 \to J_2$、$\varphi'\colon\ J_1' \to J_2'$ 是两个 k-模同态，并设 $t \in k$ 可逆。则称对 $(\varphi,\ \varphi')$ 为线性三次范数对的 t-同伦，如果

$$T_2\big(\varphi(a), \varphi'(a')\big) = T_1(a,a'),$$
$$\varphi'(a \times_1 b) = t^{-1}\varphi(a) \times_2 \varphi(a), \quad \varphi(a' \times_1 b') = t\varphi'(a') \times_2 \varphi'(b')$$

对于所有 $a,\ b \in J_1$、$a',\ b' \in J_1'$。同伦 是某个可逆 $t \in k$ 对应的 t-同伦，而同态 是 1-同伦。若 $(\varphi,\ \varphi')$ 中的 φ 和 φ' 都分别具有满射、单射或双射的性质，则称 $(\varphi,\ \varphi')$ 为满射、单射或双射。双射同伦也称为等位，双射同态也称为同构。

注 2.25. 线性三次范数对的任意同伦都满足

$$\varphi(\{a,a',b\}) = \{\varphi(a), \varphi'(a'), \varphi(b)\} \quad \text{and} \quad \varphi'(\{a',a,b'\}) = \{\varphi'(a'), \varphi(a), \varphi'(b')\}$$

对于所有 $a,\ b \in J_1$、$a',\ b' \in J_1'$。

注 2.26. 恒等式

$$D_{a,b\times c} + D_{b,c\times a} + D_{c,a\times b} = 2T(a, b\times c)\,\mathrm{id}_J,$$
$$D_{a\times b,c} + D_{b\times c,a} + D_{c\times a,b} = 2T(a\times b, c)\,\mathrm{id}_{J'}$$

引理 2.18中的结论对线性三次范数对仍然成立，因为只需利用引理 2.8(7)、(25) 和 (27)即可证明。

3. 三次范数对的蒂茨–坎托–科彻李代数

本节中，我们始终假设 (J, J') 是交换环 k 上的三次范数对（或更一般地，线性三次范数对）。我们首先介绍导子和内导子。（在此之前，我们尚未在文献中见过这一概念。）

定义 3.1. (i) (J, J') 的导子 是由两个 k-线性映射 $\delta = (\delta_+, \delta_-)$ 构成的一对，其中 $\delta_+\colon\ J \to J$ 且 $\delta_-\colon\ J' \to J'$，满足存在一个常数 $\lambda \in k$，使得

$$\delta_-(a\times b) = \delta_+(a)\times b \quad + a \times \delta_+(b) \quad - \lambda(a\times b), \tag{4}$$
$$\delta_+(a'\times b') = \delta_-(a')\times b' \quad + a' \times \delta_-(b') \quad + \lambda(a'\times b'), \tag{5}$$
$$0 = T(\delta_+(a), a') + T(a, \delta_-(a')), \tag{6}$$

对于所有 $a,\ b \in J$ 和 $a',\ b' \in J'$。

(ii) $(J,\ J')$ 的所有导子构成一个李代数，我们将其记作 $\mathrm{Der}(J,\ J')$。(iii) 设 $a \in J$ 和 $a' \in J'$。则这一对

$$\delta_{a,a'} := (D_{a,a'}, -D_{a',a})$$

定义了一个三次范数对的内导子。我们将在引理3.3

下文将证明，$\delta_{a,\ a'}$ 确实是$(J,\ J')$的一个导子，其中 $\lambda = 2T(a,\ a')$。

(iv) 我们定义分次导子

$$\gamma := (\mathrm{id}_J, -\mathrm{id}_{J'}).$$

这确实是$(J,\ J')$的一个导子，其中 $\lambda = 3$。

注 3.2。若 $\delta = (\delta_+,\ \delta_-)$是一个导子，则

$$\delta_+\big((a \times b) \times a'\big) = \big(\delta_+(a) \times b\big) \times a' + \big(a \times \delta_+(b)\big) \times a' + (a \times b) \times \delta_-(a')$$

对所有 $a,\ b \in J$ 和 $a' \in J'$。结合（6），可得

$$\delta_+\{a, a', b\} = \{\delta_+(a), a', b\} + \{a, \delta_-(a'), b\} + \{a, a', \delta_+(b)\}$$

对所有 $a,\ b \in J$ 和 $a' \in J'$。用约旦对的语言来说，这恰好表明$\delta = (\delta_+,\ \delta_-)$是约旦对 $(J,\ J')$ 的导子。参见例如 [LN19，§6。8]。

引理 3.3。对 $\delta_{a,\ a'} :=\ (D_{a,\ a'},\ -D_{a',\ a})$ 是 $(J,\ J')$ 的导子。更确切地说，它满足 (4) 至 (6)，其中 $\lambda = 2T(a,\ a')$。

证明。根据引理2.8(27)（或定义 2.20），

$$\big((a \times b) \times a'\big) \times c + \big((b \times c) \times a'\big) \times a + \big((c \times a) \times a'\big) \times b$$
$$= T(a, b \times c)a' + T(a, b')b \times c + T(b, b')c \times a + T(c, b')a \times b$$

对所有 $a,\ b,\ c \in J$和 $a' \in J'$。利用这个恒等式，很容易验证

$$D_{a',a}(b \times c) + D_{a,a'}(b) \times c + b \times D_{a,a'}(c) = 2T(a, a')b \times c, \tag{7}$$

证明（4），其中 $\lambda = 2T(a,\ a')$。对（5）的证明类似，而（6）由引理2.8(31)（或定义 2.20）□

现在，我们可以定义三次范数对 (J, J') 的蒂茨–坎托–科彻李代数 $\mathrm{TKK}(J,\ J')$。首先，令

$$I := \mathrm{TKK}_0(J, J') := \langle \delta_{a,a'} \mid a \in J, a' \in J' \rangle + k\gamma \le \mathrm{Der}(J, J').$$

然后我们定义*TKK*李代数

$$\mathrm{TKK}(J, J') := J' \oplus I \oplus J,$$

它配备从 $\mathrm{Der}(J,\ J')$ 继承到 I 上的通常李括号，并按以下规则扩展

$$[J, J] = 0, \quad [J', J'] = 0, \quad [\delta, a] = \delta_+(a), \quad [\delta, a'] = \delta_-(a'), \quad [a', a] = \delta_{a\ a'} \tag{8}$$

对所有 $a \in J$、$a' \in J'$ 和 $\delta \in I$ 均成立。

为了证明这确实定义了一个3-分次李代数，我们可以绕道通过约旦对（见 [Neh94]），但我们认为，直接证明这一事实（简短而简单）很有意义。

命题 3.4. 上文定义的代数$\mathrm{TKK}(J, J') = J' \oplus I \oplus J$是一个3-分次李代数，其中 J' 的次数为 -1， I 的次数为0 ，而 J 的次数为1。

证明。 我们首先注意到， I 事实上是 $\mathrm{Der}(J, J')$的一个理想。确实，设 $\delta = (\delta_+, \delta_-) \in \mathrm{Der}(J, J')$，并设 $a \in J$ 和 $a' \in J'$。于是利用（ 6 ）和注 3.2，我们计算得

$$[\delta, \delta_{a,a'}] = \delta_{\delta_+(a),a'} + \delta_{a,\delta_-(a')}. \tag{9}$$

此外， γ 是 $\mathrm{Der}(J, J')$ 中心的，因此 $I = \langle \delta_{a,\ a'} \mid a \in J,\ a' \in J' \rangle + k\gamma$ 确实是 $\mathrm{Der}(J, J')$ 的一个理想。特别地， I 本身是一个李代数。

接下来，我们声称恒等式（8）使 J 成为李代数 I 的一个模（ J' 也同理）。事实上，如果在这些恒等式中允许 $\delta \in$ 属于 $\mathrm{Der}(J, J')$（而非 $\delta \in I$），那么 J 就成为完整李代数 $\mathrm{Der}(J, J')$ 的一个模。确实，设 $\delta = (\delta_+, \delta_-)$ 和 $\epsilon = (\epsilon_+, \epsilon_-)$ 是 $\mathrm{Der}(J, J')$ 和 $a \in J$ 中的两个元素，那么我们必须验证 $[[\delta, \epsilon], a] = [\delta, [\epsilon, a]] - [\epsilon, [\delta, a]]$；但由于 $[\delta, \epsilon] = (\delta_+\epsilon_+ - \epsilon_+\delta_+, \delta_-\epsilon_- - \epsilon_-\delta_-)$，这显然由恒等式（8）得出。

最后，我们必须检验雅可比恒等式是否成立。还剩下两种非平凡情形需要考虑。我们先考虑形如 $(a, b, a') \in J \times J \times J'$ 的三元组。于是 $[a, b] = 0$ 和

$$[[a', a], b] = [\delta_{a,a'}, b] = D_{a,a'}(b)$$
$$[[a', b], a] = [\delta_{b,a'}, a] = D_{b,a'}(a),$$

根据定义，这两个表达式都等于 $U_{a,b}(a')$。$J' \times J' \times J$ 中的三元组情形当然完全类似。

接下来，我们考虑形如 $(a, a', \delta) \in J \times J' \times \mathrm{Der}(J, J')$。由（9），可得

$$[\delta, [a', a]] = [\delta, \delta_{a,a'}] = \delta_{\delta_+(a),a'} + \delta_{a,\delta_-(a')}.$$

另一方面，我们有

$$[[\delta, a'], a] = [\delta_-(a'), a] = \delta_{a,\delta_-(a')} \quad \text{and}$$
$$[[\delta, a], a'] = [\delta_+(a), a'] = -\delta_{\delta_+(a),a'},$$

并且我们看到，在这种情形下雅可比恒等式也确实成立。 □

注记 3.5。 事实上，我们已经证明，较大的代数

$$\widetilde{\mathrm{TKK}}(J, J') := J' \oplus \mathrm{Der}(J, J') \oplus J$$

是一个3-分次李代数，不过我们并不需要这一点。

4. Constructing the Lie algebra

4.1. 构造括号。我们继续假设 (J, J') 是环 k 上的三次范数对（或者更一般地说，线性三次范数对），其中 k 是交换环。我们的目标是将 $L_0 := \mathrm{TKK}(J, J')$ 扩展为一个更大的5-分次李代数

$$L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus \widetilde{L}_0 \oplus L_1 \oplus L_2$$

with

$$L_{-2} \cong L_2 \cong k \quad \text{and} \quad L_{-1} \cong L_1 \cong k \oplus J \oplus J' \oplus k,$$

具有如图 $5 \times 5$1 所示的更细 -分次。该李代数记作 L，或（在后面的章节中）记作 $L(J,\ J')$，以强调它对 $(J,\ J')$ 的依赖性。

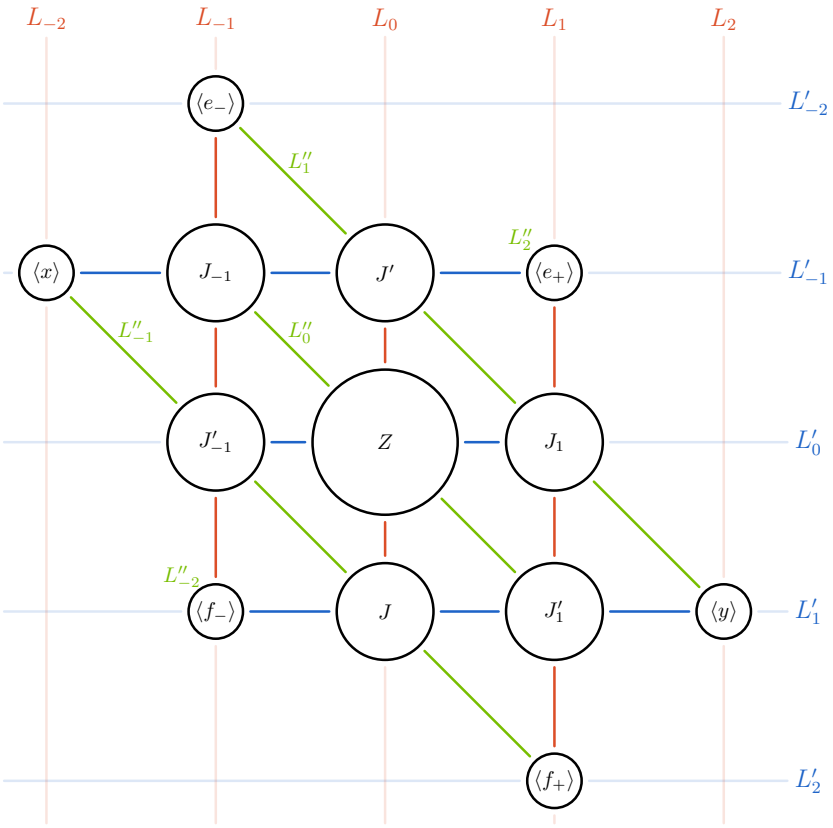


图1. 5×5-分次李代数的构造

这涉及一个重要的细节，现解释如下；尤其是，我们只有在修改 L_0 之后，才能构造这样的李代数（这也是为什么图 1 中间部分称为 Z 而非 I）。

首先，我们需要确保存在与这一新分次相对应的分次导子 ξ。原则上，我们可以通过定义 $L_0 := \mathrm{TKK}(J, J') \oplus k\xi$来实现；这是由一个由新元素 ξ 张成的自由 k-模对$\mathrm{TKK}(J, J')$作出的中心扩张，该新元素的次数为0。然而，在我们将要构造的李代数中，元素ξ 不一定与$\mathrm{TKK}(J, J')$线性无关，因此我们将用李代数 L_0 取代 L_0，该李代数由作用于$\bigoplus_{i\neq 0} L_i$上的相应内导子组成。这遵循了一个典型思路，该思路已在 [BDMS19，构造4.12]中得到详细阐述。此外，这也能解决我们试图直接定义$\mathrm{TKK}(J, J')$在 L_i上的作用时可能遇到的任何问题。（另见下文注4.18。）

我们先为 $i \neq 0$ 的 k-模 L_i 设定记号。

定义 4.1. (i) 我们定义四个 k-模

$$L_{-2} := kx,$$

$$\begin{aligned} L_{-1} &:= \{(\lambda, b, b', \mu)_- \mid \lambda, \mu \in k, b \in J, b' \in J'\},\\ L_1 &:= \{(\lambda, b, b', \mu)_+ \mid \lambda, \mu \in k, b \in J, b' \in J'\},\\ L_2 &:= ky. \end{aligned}$$

(ii) 我们将进一步分解

$$\begin{aligned} L_{-1} &= L_{-1,-2} \oplus L_{-1,-1} \oplus L_{-1,0} \oplus L_{-1,1},\\ L_1 &= L_{1,-1} \oplus L_{1,0} \oplus L_{1,1} \oplus L_{1,2}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L_{-1,-2} &:= \{(\lambda, 0, 0, 0)_- \mid \lambda \in k\}, & L_{1,-1} &:= \{(\lambda, 0, 0, 0)_+ \mid \lambda \in k\},\\ L_{-1,-1} &:= \{(0, b, 0, 0)_- \mid b \in J\}, & L_{1,0} &:= \{(0, b, 0, 0)_+ \mid b \in J\},\\ L_{-1,0} &:= \{(0, 0, b', 0)_- \mid b' \in J'\}, & L_{1,1} &:= \{(0, 0, b', 0)_+ \mid b' \in J'\},\\ L_{-1,1} &:= \{(0, 0, 0, \mu)_- \mid \mu \in k\}, & L_{1,2} &:= \{(0, 0, 0, \mu)_+ \mid \mu \in k\}. \end{aligned}$$

我们也记作 $L_{-2,\,-1} := L_{-2}$ 和 $L_{2,\,1} := L_2$。我们称 $L_{i,\,j}$中的元素（只要 $L_{i,\,j}$ 有定义）为齐次的 ξ-次数 i 和 ζ-次数 j。

(iii) 我们定义李代数 $M := \bigoplus_{i\neq 0} \mathfrak{gl}(L_i)$。在定义 4.9中，我们将能够把李代数 L_0 定义为 M的子代数，这一想法也见于 [BDMS19，构造 4.1。2]。显然，每个 L_i 都是李代数 M的一个模。

(iv) 我们通过如下方式定义 M 中的两个特定元素 ζ 和 ξ：

$$\xi(l) = il \quad \text{and} \quad \zeta(l) = jl \quad \text{whenever } l \in L_{i,j}.$$

明确地说，

$$\begin{aligned} \zeta(x) &:= -x,\\ \zeta\big((\lambda, b, b', \mu)_-\big) &:= (-2\lambda, -b, 0, \mu)_-,\\ \zeta\big((\lambda, b, b', \mu)_+\big) &:= (-\lambda, 0, b', 2\mu)_+,\\ \zeta(y) &:= y,\\ \xi(l_i) &:= il_i \quad \text{for all } l_i \in L_i, i \neq 0. \end{aligned}$$

(v) 令 $\varphi = (\varphi_i)_{i\neq 0} \in M$。我们称 φ 具有 ζ-次数 j，如果每个 φ_i 都将 ζ-次数 i 的所有元素映射到 ζ-次数 $i + j$的元素。（直观地说，这意味着 φ将图 1 中的各部分向下移动 j。）特别地，ζ 和 ξ 具有ζ-次数0。

(vi) 由于我们的目标是构造一个满足$L_0 \leq M$的李代数 $L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$，我们将预先用李括号表示 M 中元素对每个 L_i 的作用，即对所有 $\varphi \in M$ 和 $l_i \in L_i, i \neq 0$，我们写作[1] $[\varphi, l_i] := \varphi(l_i)$。

注 4.2。每当我们定义某些元素之间的李括号时，都默认其为斜对称。换句话说，一旦我们定义了元素 $[l, m]$，就默认也定义了 $[m, l] := -[l, m]$。

注 4.3. 对 L 中在定义4.1里所定义的子空间的图示见图 1（其中 Z 是 M 的某个子空间，将在

[1]原则上，每个 $\varphi \in M$ 都是一个$\mathbf{4}$-元组 $\varphi = (\varphi_i)_{i\neq 0}$，因此 $[\varphi, l_i] := \varphi_i(l_i)$，但我们将省略下标 i，而只写成 $\varphi(l_i)$，不致引起混淆。

定义 4.9）。我们的目标是在 L 上定义一个李括号，使得这些子空间构成 L上的一个 5×5-分次，即对所有i、 j、 p、 $q\in\mathbb{Z}$ 有$[L_{ij},L_{pq}]\subseteq L_{i+p}$、$_{j+q}$，其中对所有先前未曾定义过此类空间 L_{st}的 s、 $t\in\mathbb{Z}$，有 $L_{st}:=0$。特别地，可从图 1 中读出的“垂直线”$(L_i)_{-2\le i\le 2}$、“水平线”$(L_i')_{-2\le i\le 2}$ 和“对角线”$(L_i'')_{-2\le i\le 2}$ 各自构成 L的一个 5-分次。当 k 是一个域时，这些 5-分次分别对应于 L中所谓的“双曲对”(x,y)、(e_-,f_+)和$(-f_-,e_+)$；参见[DMM25，§4，第 28]页。注意，对所有 i、 $j\in\{-2,\dots,2\}$有$L_{i,\ j}=L_i\cap L_j'$。此外，我们有由下式定义的 L的一个 7-分次$(L_i)_{-3\le i\le 3}$

$$L_i:=\sum_{p\in\mathbb{Z}}L_{p,i-p}$$

对所有 $i\in\{-3,\dots,3\}$。（然而，这种分次并不对应于双曲对。）

注 4.4. 设 $\{\gamma,\delta\}$ 是根系 G_2的一组单根，其中γ 为长根， δ 为短根。那么存在唯一的群同态 ω，从 $\mathbb{Z}G_2$到 $\mathbb{Z}^2$，将 γ映射为 $(-2,-1)$，并将 δ映射为 $(1,0)$。现在，直接计算可知， $\omega(G_2)$恰好是我们在定义 4.1 中定义模 $L_{i,j}$ 的指标 $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ 的集合。因此， $\omega(G_2^0)$恰好是在图 1 中描绘了 L 的非平凡子模的指标集合。由此可得，图 1 所示形式的任意5×5-分次，也可以等价地视为 G_2-分次。基于此，我们有时将 G_2^0 与集合 $\omega(G_2^0)\subseteq\mathbb{Z}^2$等同，从而得到一个分解

$$L=\bigoplus_{\alpha\in G_2^0}L_\alpha.$$

（这意味着，在此类情形中，我们隐式地选取 G_2 中的一个单根系 $\{\gamma,\delta\}$。）

注 4.5. 设 W 为 G_2 的Weyl群中由对应于长根的反射所生成的子群。则 G_2在 W作用下有三条轨道：一条轨道由全部六个长根组成，另外两条轨道各自包含三个短根。第一条对应于由 k 参数化的 L的根空间，而另外两条分别对应于由J 或 J'典范参数化的根空间。（要使最后这一陈述成立，即使 $J=J'$，我们也必须把 J 与J'视为不同的参数化空间；我们用“典范参数化”这一说法来强调这一点。）

注 4.6. 元素 $2\zeta-\xi$ 将在多处出现。它是满足下述关系的唯一元素 $\varphi\in L_0$

$$\varphi(L_{\pm 2})=0\quad\text{and}\quad\varphi\big((\lambda,b,b',\mu)_\pm\big)=(-3\lambda,-b,b',3\mu)_\pm$$

对所有$(\lambda,b,b',\mu)_\pm\in L_{\pm 1}$成立。

直观地说，我们接下来的目标是使四个部分 L_{-2}、 L_{-1}、 L_1 和 L_2 各自成为李代数 TKK(J,J') 的模。这并非完全可行，因此我们先使它们成为阿贝尔李代数 J' 和 J 的模。

定义 4.7. (i) 我们将 L_{-2} 和 L_2 定义为平凡的 J-模和 J'-模，即对所有 $a\in J$、$a'\in J'$，令 $[a,x]=[a,y]=0$ 和 $[a',x]=[a',y]=0$。

(ii) 为了定义 J 和 J' 在 L_{-1} 和 L_1 上的作用，我们令

$$\big[a,(\lambda,b,b',\mu)_\pm\big] := \big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_\pm\ ,$$
$$\big[a',(\lambda,b,b',\mu)_\pm\big] := -\big(T(b,a'),\ a'\times b',\ \mu a',\ 0\big)_\pm\ ,$$

对所有 $a,\ b\in J, a',\ b'\in J'$ 和 $\lambda,\ \mu\in k$。

(iii) 综上，这为每个 $a\in J$ 以及每个 $a'\in J'$ 对应一个 M中的元素，分别记作 ad_a 和 $\mathsf{ad}_{a'}$。由于映射$J\to M$: $a\mapsto \mathsf{ad}_a$ 显然是单射，我们可以放心地将 a 与 ad_a 等同起来（ J'也同理）。注意，当 $a'\in J'$ 时，元素 $\mathsf{ad}_{a'}$ 的次数为 ζ度；当 $a\in J$ 时，元素 ad_a 的次数为 ζ度 1。

命题 4.8。 定义 4.7 使每个 $L_i\ (i\neq 0)$成为阿贝尔李代数 J 和 J'的模。

证明。 对于平凡模 L_{-2} 和 L_2，这是显然的。现在我们验证L_1 是一个 J-模；其余三种情形完全类似。设 $a,\ c\in J$和 $z=(\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_+\in L_1$。我们计算

$$\begin{aligned}[a,[c,z]] &= \big[a,\big(0,\ \lambda c,\ c\times b,\ T(c,b')\big)_+\big]\\ &= \big(0,\ 0,\ \lambda a\times c,\ T(a,c\times b)\big)_+,\end{aligned}$$

且由于 $T(a,c\times b)\ = T(c,a\times b)$ 根据引理 2.8(7)，得到 $[a,[c,z]]=[c,[a,z]]$，如所需。□

我们可以将命题 4.8 改述为以下事实：映射 $J\to M$: $a\mapsto \mathrm{ad}_a$ 和$J'\to M$: $a'\mapsto \mathrm{ad}_{a'}$ 是李代数同态。（如定义 4.7(iii)中所述，这意味着我们现在可以将 J 和 J' 视为 M的李子代数。）有趣的是，这并不能扩展为李代数同态 $\mathrm{TKK}(J,J')\to M$。我们转而采用以下做法。

定义 4.9。 对于每个 $a\in J$ 和 $a'\in J'$，我们定义

$$\mathbf{d}(a,a') := \mathbf{d}_{a,a'} := [\mathrm{ad}_{a'},\mathrm{ad}_a]\in M.$$

我们还定义

$$Z := L_{0,0} := \langle \mathbf{d}_{a,a'}\mid a\in J, a'\in J'\rangle + k\zeta + k\xi \leq M$$

最后还定义

$$L_0 := J'\oplus Z\oplus J\leq M.$$

此外，我们用 $L_{0,-1}$，$L_{0,0}$ 和 $L_{0,1}$ 分别表示 L_0 中的子空间 J'、 Z 和 J 。

注释 4.10. 请注意，定义 L_0 中的和确实是直和。事实上，正如我们在定义 4.7(iii)中所观察到的， J' 中的元素具有 ζ-次数 -1，而 J 中的元素具有 ζ-次数 1。另一方面， Z 中的元素的 ζ- 次数均为 0。然而，和

$$\langle \mathbf{d}_{a,a'}\mid a\in J, a'\in J'\rangle + k\zeta + k\xi$$

绝不是直和（参见引理 4.19）。

注 4.11. 注意到 ξ 与 M 对易，且 ζ 与 Z对易。此外，由于 J 中的元素的 ζ次数为 1，因此对所有 $a\in J$，都有 $[\zeta,\mathsf{ad}_a]=\mathsf{ad}_a$。同理，对所有 $a'\in J'$，都有$[\zeta,\mathsf{ad}_{a'}]=-\mathsf{ad}_{a'}$。

我们先显式计算 $\mathbf{d}_{a,a'}$ 对每个 L_i的作用。

命题 4.12。设 $a \in J$ 和 $a' \in J'$。则 $\mathbf{d}_{a,a'}(L_{\pm 2}) = 0$ 且

$$\begin{aligned}&\big[\mathbf{d}_{a,a'}, (\lambda, b, b', \mu)_\pm\big]\\ &\quad = \big(-\lambda T(a,a'),\ D_{a,a'}(b) - T(a,a')b,\ -D_{a',a}(b') + T(a,a')b',\ \mu T(a,a')\big)_\pm\end{aligned}$$

对所有 $\lambda, \mu \in k$, $b \in J$, $b' \in J'$。

证明。设 $z = (\lambda, b, b', \mu)_\pm$。由于 $\mathbf{d}_{a,a'} = \mathrm{ad}_{a'}\mathrm{ad}_a - \mathrm{ad}_a\mathrm{ad}_{a'}$，我们可以利用定义 4.7 得到

$$\begin{aligned}[\mathbf{d}_{a,a'}, z] &= [a', [a, z]] - [a, [a', z]]\\ &= -\big(\lambda T(a,a'),\ a' \times (a \times b),\ T(a,b')a',\ 0\big)_\pm\\ &\qquad + \big(0,\ T(b,a')a,\ a \times (a' \times b'),\ \mu T(a,a')\big)_\pm,\end{aligned}$$

并利用 $D_{a,a'}$ 和$D_{a',a}$的定义，得到所需公式。 □

推论 4.13。设 $a, b \in J$和 $a', b' \in J'$。则

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}] = \mathbf{d}_{D_{a,a'}(b),b'} - \mathbf{d}_{b,D_{a',a}(b')}. \tag{10}$$

特别地，Z 是 M的李子代数。

证明。首先注意，由（9），我们有

$$[\delta_{a,a'}, \delta_{b,b'}] = \delta_{D_{a,a'}(b),b'} - \delta_{b,D_{a',a}(b')},$$

因此，特别地，

$$[D_{a,a'}, D_{b,b'}] = D_{D_{a,a'}(b),b'} - D_{b,D_{a',a}(b')}.$$

另一方面，根据命题4.12，我们有

$$\big[[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}], (\lambda, c, c', \mu)_\pm\big] = \big(0,\ [D_{a,a'}, D_{b,b'}](c),\ -[D_{a',a}, D_{b',b}](c'),\ 0\big)_\pm.$$

由于

$$T(D_{a,a'}(b), b') - T(b, D_{a',a}(b')) = 0 \tag{11}$$

由（6），我们得出（10）两边在 $L_{\pm 1}$上的作用相同。由于它们在 $L_{\pm 2}$上都作用平凡，因此它们在每个 L_i $(i \neq 0)$ 上的作用相同，故它们表示 M中的同一元素。这证明了（10），并特别说明 $\langle \mathbf{d}_{a,\ a'} \mid a \in J,\ a' \in J' \rangle$ 是 M的李子代数。结合注记 4.11，可知 Z 确实是 M的李子代数。□

命题 4.14. 设 $a,\ c \in J$和 $a',\ c' \in J'$。则

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathrm{ad}_c] = \mathrm{ad}_{D_{a,a'}(c)} \quad \textit{and} \quad [\mathbf{d}_{a,a'}, \mathrm{ad}_{c'}] = -\mathrm{ad}_{D_{a',a}(c')}.$$

证明。我们计算 $[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathrm{ad}_c]$ 对任意元素 $(\lambda, b, b', \mu)_\pm \in L_{\pm 1}$ 的作用：

$$\begin{aligned}&\big[\mathbf{d}_{a,a'}, [c, (\lambda, b, b', \mu)_\pm]\big]\\ &= \big[\mathbf{d}_{a,a'}, \big(0, \lambda c, c \times b, T(c,b')\big)_\pm\big]\\ &= \big(0, \lambda\big(D_{a,a'}(c) - T(a,a')c\big), -D_{a',a}(c \times b) + T(a,a')(c \times b), T(c,b')T(a,a')\big)_\pm,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\big[c, [\mathbf{d}_{a,a'}, (\lambda, b, b', \mu)_\pm]\big]\\ &= \big[c, \big(-\lambda T(a,a'), D_{a,a'}(b) - T(a,a')b, -D_{a',a}(b') + T(a,a')b', \mu T(a,a')\big)_\pm\big]\end{aligned}$$

$$= \big(0, -\lambda T(a,a')c, c \times \big(D_{a,a'}(b) - T(a,a')b\big), T\big(c, -D_{a',a}(b') + T(a,a')b'\big)\big)_{\pm}.$$

利用（7）和（11），我们得到

$$\begin{aligned}\big[[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathrm{ad}_c],\ (\lambda, b, b', \mu)_{\pm}\big] &= \big(0,\ \lambda D_{a,a'}(c),\ D_{a,a'}(c) \times b,\ T(D_{a,a'}(c), b')\big) \\ &= \big[D_{a,a'}(c), (\lambda, b, b', \mu)_{\pm}\big].\end{aligned}$$

这表明 $[\mathbf{d}_{a,\ a'},\ \mathrm{ad}_c]$ 和 $\mathrm{ad}^{D_{a,\ a'}(c)}$ 在 L_1 和 L_{-1} 上具有相同的作用。由于这两个元素在 L_2 和 L_{-2} 上的作用也都是平凡的，因此它们表示 M 中的同一个元素，也就是说，它们相等。第二个断言的证明完全类似。□

命题 4.15。 L_0 是 M 的李子代数。

证明。 根据推论 4.13，我们已经知道 Z 是 M 的李子代数。此外，根据注记 4.11，$[J, k\zeta + k\xi] \subseteq L_0$ 和 $[J', k\zeta + k\xi] \subseteq L_0$。最后，根据命题 4.14，对所有 $a \in J$、$a' \in J'$，$[\mathbf{d}_{a,\ a',}\ J] \subseteq L_0$ 和 $[\mathbf{d}_{a,\ a',}\ J'] \subseteq L_0$。□

注 4.16. 注意，由于每个 L_i 都是一个 M-模，既然我们现在知道 L_0 是 M的李子代数，它自然也同时是一个 L_0-模。

我们将在下面命题4.27的证明中用到以下引理。同时，它也可以作为一个很好的例子，说明我们刚刚定义的 $\delta_{a,a'} \in \mathrm{TKK}(J, J')$ 与 $\mathbf{d}_{a,a'} \in M$ 之间的细微差别。

引理 4.17. 设 $a, b, c \in J$和 $a', b', c' \in J'$。则有以下结论。

(i) $\mathbf{d}_{a,a^\sharp} = N(a) \cdot (2\zeta - \xi)$. (ii) $\mathbf{d}_{(a')^\sharp,a} = N(a') \cdot (2\zeta - \xi)$. (iii) $\mathbf{d}_{a,b^\sharp} + \mathbf{d}_{b,a\times b} = T(a, b^\sharp) \cdot (2\zeta - \xi)$. (iv) $\mathbf{d}_{(a')^\sharp,b} + \mathbf{d}_{a'\times b',\ a'} = T((a')^\sharp, b) \cdot (2\zeta - \xi)$ (v) $\mathbf{d}_{a,b\times c} + \mathbf{d}_{b,c\times a} + \mathbf{d}_{c,a\times b} = T(c, a \times b) \cdot (2\zeta - \xi)$. (vi) $\mathbf{d}_{a'\times b',c'} + \mathbf{d}_{b'\times c',a'} + \mathbf{d}_{c'\times a',b'} = T(c', a' \times b') \cdot (2\zeta - \xi)$.

证明。 注意，这些是 L_0中的恒等式，并且由构造可知，两个这样的元素重合，当且仅当它们对所有 $i \neq 0$在 L_i 上具有相同的作用。由于每个$\mathbf{d}_{a,\ a'}$ 在 L_2 和 L_{-2} 上的作用是平凡的，且分次导子 $2\zeta - \xi \in M$ 同时零化L_2 和 L_{-2}，因此只需对 $i = \pm 1$验证这一点。

由引理2.18(i) 可知

$$D_{a,a^\sharp}(d) = 2N(a)d.$$

结合命题4.12，并利用 $T(a, a^\sharp) = 3N(a)$，由此可得

$$[\mathbf{d}_{a,a^\sharp},\ (\lambda, d, d', \mu)_+] = \big(-3\lambda N(a),\ -N(a)d,\ N(a)d',\ 3\mu N(a)\big)_+.$$

利用注记4.6，我们得出(i) 的两边在 L_1上具有相同的作用。对 L_{-1} 的验证类似，因此(i)成立。

其余恒等式的证明以完全类似的方式由引理2.18中的其他恒等式得出。□

注4.18. 相比之下，请注意，在 $\mathrm{TKK}(J, J')$ 中，我们有

$$\delta_{a,a^\sharp} = 2N(a) \cdot \gamma,$$

根据引理2.18(i) 和(ii)。（参见定义 3.1(iv) 和引理 3.3。）将此与引理 4.17 进行比较，尤其可以看出，定义4.7中引入的作用并不能扩展为 $\mathrm{TKK}(J,J')$ 在 L_i上的作用，正如我们在定义4.9之前所提到的。不过，请参见下文的推论 4.20 。

引理 $2\zeta-\xi$ 中的一个倍数的出现4.17 并非巧合。在下面的引理及其证明中，所有求和均理解为遍历 $a\in J$和 $a'\in J'$。

引理 4.19。 设 $f\in L_{0,0}$ 为任意元素，并记作

$$f=\sum\lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'}+\lambda_\zeta\zeta+\lambda_\xi\xi \tag{12}$$

对于某些标量 $\lambda_{a,a'},\lambda_\zeta,\lambda_\xi\in k$。那么，当且仅当满足以下断言时，$f=0$ 成立。

(i) $\lambda_\zeta+2\lambda_\xi=0$.
(ii) $\sum\lambda_{a,a'}T(a,a')=3\lambda_\xi$.
(iii) $\sum\lambda_{a,a'}D_{a,a'}=2\lambda_\xi\,\mathrm{id}_J$ *and* $\sum\lambda_{a,a'}D_{a',a}=2\lambda_\xi\,\mathrm{id}_{J'}$.

在这种情况下，我们有

$$\sum\lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'}=\lambda_\xi\cdot(2\zeta-\xi)\quad\textit{and}\quad\sum\lambda_{a,a'}\delta_{a,a'}=\lambda_\xi\cdot 2\gamma.$$

证明。 令 $t:=\sum\lambda_{a,a'}T(a,a')$。于是

$$\begin{aligned}
[f,(1,0,0,0)_+]&=(-t+\lambda_\xi-\lambda_\zeta,0,0,0)_+,\\
[f,(1,0,0,0)_-]&=(-t-\lambda_\xi-2\lambda_\zeta),\\
[f,(0,b,0,0)_+]&=(0,\textstyle\sum\lambda_{a,a'}D_{a,a'}(b)+(-t+\lambda_\xi)b,0,0)_+,\\
[f,(0,b,0,0)_-]&=(0,\textstyle\sum\lambda_{a,a'}D_{a,a'}(b)+(-t-\lambda_\xi-\lambda_\zeta)b)_-,\\
[f,(0,0,b',0)_+]&=(-\textstyle\sum\lambda_{a,a'}D_{a',a}(b')+(t+\lambda_\xi+\lambda_\zeta)b',0)_+,\\
[f,(0,0,b',0)_-]&=(-\textstyle\sum\lambda_{a,a'}D_{a',a}(b')+(t-\lambda_\xi)b',0)_-,\\
[f,(0,0,0,1)_+]&=(0,0,0,t+\lambda_\xi+2\lambda_\zeta),\\
[f,(0,0,0,1)_-]&=(0,0,0,t-\lambda_\xi+\lambda_\zeta),\\
[f,x]&=(-2\lambda_\xi-\lambda_\zeta)x,\\
[f,y]&=(2\lambda_\xi+\lambda_\zeta)y.
\end{aligned}$$

由于 $f=0$ 当且仅当这些表达式全都为零，断言中的等价关系便得证。其余等式随即直接成立，只需利用 $\gamma=(\mathrm{id}_J,\ -\mathrm{id}_{J'})$ 和 $\delta_{a,\,a'}=(D_{a,\,a'},\ -D_{a',\,a})$。□

推论 4.20. 线性映射

$$\pi\colon Z\to\mathrm{TKK}_0(J,J')\colon\ \sum\lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'}+\lambda_\zeta\zeta+\lambda_\xi\xi\mapsto\sum\lambda_{a,a'}\delta_{a,a'}+\lambda_\zeta\gamma$$

是良定义的。它是李代数之间的满同态，并可扩展为满同态 $L_0\to\mathrm{TKK}(J,J')$。特别地，L_0 是 $\mathrm{TKK}(J,J')$ 的中心扩张。

证明. 若 $\sum\lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'}+\lambda_\zeta\zeta+\lambda_\xi\xi=0$，则由引理 4.19 可得 $\sum\lambda_{a,a'}\delta_{a,a'}+\lambda_\zeta\gamma=0$，因此 π 是良定义的。此外，由于 ξ,ζ 在 Z 中是中心的，且 γ 在 $\mathrm{TKK}_0(J,J')$ 中是中心的，根据式 (9) 与推论 4.13 的比较可知，π 是李代数同态。显然，π 是满射。由于 $L_0=J\oplus Z\oplus J'$

并且 $\mathrm{TKK}(J,J') = J \oplus \mathrm{TKK}_0(J,J') \oplus J'$，我们可以以自然的方式将 π 扩张为一个 k-模的满同态$L_0 \to \mathrm{TKK}(J,J')$。这定义了一个李代数满同态，因为对任意 $a,b \in J$, $a',b' \in J'$，由命题 4.14 可知，在 L_0 中有 $[\mathbf{d}_{a,a'},b] = D_{a,a'}(b)$ 和 $[\mathbf{d}_{a,a'},b'] = -D_{a',a}(b')$；并且由式 (8) 可知，在 $\mathrm{TKK}(J,J')$ 中有 $[\delta_{a,a'},b] = (\delta_{a,a'})_+(b) = D_{a,a'}(b)$ 和 $[\delta_{a,a'},b'] = (\delta_{a,a'})_-(b') = -D_{a',a}(b')$。

还需证明 π 的核是中心的。令

$$f = \sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} + \lambda_\xi \xi + \lambda_\zeta \zeta$$

表示核中的任意元素，并令 $c \in J$、 $c' \in J'$ 为任意元素。于是

$$\begin{aligned}[f,\mathbf{d}_{c,c'}] &= \Big[\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'},\mathbf{d}_{c,c'}\Big] = \sum \lambda_{a,a'}\big(\mathbf{d}(D_{a,a'}(c),c') - \mathbf{d}(c,D_{a',a}(c'))\big)\\ &= \mathbf{d}\big(\sum \lambda_{a,a'}D_{a,a'}(c),c'\big) - \mathbf{d}\big(c,\sum \lambda_{a,a'}D_{a',a}(c')\big).\end{aligned}$$

由于 f 属于 π的核，我们有 $\sum \lambda_{a,\ a'}\delta_{a,\ a'} + \lambda_\zeta\gamma = 0$ 或者换句话说，

$$\sum \lambda_{a,a'}D_{a,a'} = -\lambda_\zeta \,\mathrm{id}_J \quad \text{and} \quad \sum \lambda_{a,a'}D_{a',a} = -\lambda_\zeta \,\mathrm{id}_{J'}\,.$$

因此

$$[f,\mathbf{d}_{c,c'}] = \mathbf{d}(-\lambda_\zeta c,c') - \mathbf{d}(c,-\lambda_\zeta c') = 0.$$

此外， $[f,\xi] = 0 = [f,\zeta]$。因此， π的核确实是中心的。 □

现在我们可以将 k-模

$$L := L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 \tag{13}$$

构造成李代数。接下来只需描述 L_i与 L_j 中元素之间的李括号（当 i 时），$j \neq 0$然后再进行一番较长的验证，以确认这确实定义了一个李代数。在继续之前，我们还要确定 L 上的第二重分次，它早已显示在图 1 中。

定义 4.21。对于每个 $j \in \mathbb{Z}$，我们定义

$$L'_j := \bigoplus_i L_{i,j},$$

其中，$L_{i,\ j}$ 与定义 4.1 和 4.9中的相同；若 $L_{i,\ j} = 0$尚未定义，则采用这一约定。特别地， L 现在有两种分解：

$$\begin{aligned}L &= L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 \quad \text{and}\\ L &= L'_{-2} \oplus L'_{-1} \oplus L'_0 \oplus L'_1 \oplus L'_2.\end{aligned}$$

（注意，当 $|i| > 2$ 时， $L_i = 0$ 和 $L'_i = 0$ 均成立。）

注意，对于所有 $l \in L_i$， $[\xi,l] = il$；对于所有 $l \in L'_j$， $[\zeta,l] = jl$。然而，一般而言，我们不能利用这些恒等式来定义 L_i 和 L'_j，因为我们的基环 k是任意的（例如，我们可能在 k 中有 $2 = 0$）。

定义 4.22。令

$$\begin{aligned}[x,(\lambda,b,b',\mu)_+] &:= -(\lambda,b,b',\mu)_-\,,\\ [y,(\lambda,b,b',\mu)_-] &:= (\lambda,b,b',\mu)_+\,,\\ [x,y] &:= \xi,\\ \big[(\lambda,b,b',\mu)_-,\ (\nu,c,c',\rho)_-\big] &:= \big(T(b,c') - T(c,b') + \mu\nu - \lambda\rho\big)x,\end{aligned}$$

$$\big[(\lambda,b,b',\mu)_+,\ (\nu,c,c',\rho)_+\big] := \big(T(b,c') - T(c,b') + \mu\nu - \lambda\rho\big)y,$$

对所有 λ、μ、ν、$\rho \in k$、a、$b \in J$ 和 a'、$b' \in J'$。当然，当 $|i+j| > 2$ 时，我们将 $[L_i, L_j] :=$ 定义为 0。剩下的只需定义 $[L_{-1}, L_1]$，这是最复杂的情形：

$$\begin{aligned}\big[(\lambda,b,b',\mu)_-,\ (\nu,c,c',\rho)_+\big] &:= \big(-\lambda c' + b\times c - \nu b'\big)\\ &\quad + \big((\lambda\rho - T(b,c'))\cdot\zeta + (T(c,b') - \mu\nu)\cdot(\xi-\zeta) + \mathbf{d}_{b,c'} + \mathbf{d}_{c,b'}\big)\\ &\quad + \big(-\rho b + b'\times c' - \mu c\big). \qquad (14)\end{aligned}$$

我们首先注意到，所有这些定义都同时尊重两种分次。

引理 4.23. 设 $l \in L_i \cap L'_{i'}$ 和 $m \in L_j \cap L'_{j'}$。则 $[l,m] \in L_{i+j} \cap L'_{i'+j'}$。

证明. 这是直接的验证，逐一考察不同情形，并使用定义4.7、4.9和 4.22。 □

我们已在表 $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ 中汇总了 1上李括号的完整定义。

4.2. **雅可比恒等式的验证**。为验证 L上的雅可比恒等式，我们采用一个小技巧来简化一些计算。下面的辅助定义是一种实用的简写。

定义 4.24. 设 $a,b,c \in L$，其中 L 是配备了 k-双线性反对称运算 $[\cdot,\cdot]$ 的 k-模。若雅可比恒等式对三元组 (a,b,c) 成立，我们记 $\mathrm{Jac}(a,b,c)$，即

$$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0.$$

注意，由斜对称性，$\mathrm{Jac}(a,b,c)$ 蕴含对 (a,b,c) 的任意置换 (x,y,z) 都有 $\mathrm{Jac}(x,y,z)$。类似地，若 A、B 与 C 是 L 的子集（通常为子空间），则当对所有 $a \in A$、$b \in B$ 与 $c \in C$ 都有 $\mathrm{Jac}(a,b,c)$ 时，我们记 $\mathrm{Jac}(A,B,C)$。我们还例如将 $\mathrm{Jac}(a,B,C)$ 作为 $\mathrm{Jac}(\{a\},B,C)$ 的简写，当 $a \in L$ 与 B 以及 C 是 L 的子集时。

引理 4.25. 设 L 是具有 $\mathbb{Z}$-分次 $L = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} L_i$的 k-代数，将 L 中的乘法记为 $[\cdot,\cdot]$，并假设它是斜对称的。固定 i、$j \in \mathbb{Z}$ 以及l、$m \in L_0$。假设 $\mathrm{Jac}(l, L_i, L_j)$、$\mathrm{Jac}(m, L_i, L_j)$ 以及 $\mathrm{Jac}(l, m, L_i \cup L_j \cup L_{i+j})$。

则亦有 $\mathrm{Jac}([l,m], L_i, L_j)$。

证明. 这是一个直接的验证，利用了如下事实：当 $z \in L_i$时，由于分次，亦有 $[l,z]$，$[m,z] \in L_i$。 □

注 4.26. 由定义 4.21，我们有

$$[\xi,\ell] = i\ell \quad\text{and}\quad [\zeta,\ell] = j\ell \quad \text{whenever } \ell \in L_i \cap L'_j.$$

因此，对于涉及 ξ 或 ζ的三元组，雅可比恒等式将自动成立。更确切地说，若 $\ell \in L_i \cap L'_j$ 且 $\ell' \in L_{i'} \cap L'_{j'}$，则由引理 4.23，我们有 $[\ell,\ell'] \in L_{i+i'} \cap L'_{j+j'}$，从而我们有

$$[[\zeta,\ell],\ell'] + [[\ell,\ell'],\zeta] + [[\ell',\zeta],\ell] = [j\ell,\ell'] - [\zeta,[\ell,\ell']] + [\ell, j'\ell']$$

$$= j[\ell,\ell'] - (j+j')[\ell,\ell'] + j'[\ell,\ell'] = 0,$$

对 ξ也同理。

命题 4.27. 代数 $L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2$ 配备定义 *4.7*、*4.9* 和*4.22* 中的李括号后，是一个（*5*-分次）李代数。

证明。 我们需要检验 L中所有三元组的雅可比恒等式。由线性性可知，不妨假设这些元素都是齐次的，即各自属于某个 L_i。根据定义，很显然，L_i、 $L_{i'}$、 $L_{i''}$ 中三元组的证明可以作相应调整后转化为 L_{-i}、 $L_{-i'}$、$L_{-i''}$中三元组的证明。此外，当 $|i+i'+i''| > 2$时，雅可比恒等式显然成立；根据注 4.16，我们已经知道，当三个指标中至少有两个为 0时，该恒等式也成立。还要回顾注 4.2：李括号是斜对称的。于是只剩下以下九种 $(i,\ i',\ i'')$情形：

$$\begin{array}{llll}(0,1,1), & (0,1,-1), & (0,1,-2), & (0,2,-2),\\ (1,1,-1), & (1,1,-2), & (1,2,-1), & (1,2,-2),\\ (2,2,-2). & & & \end{array}$$

不可避免地，我们必须逐一处理这些不同的情形。在每种情形下，我们假设 $\ell \in L_i$, $\ell' \in L_{i'}$ 和 $\ell'' \in L_{i''}$，目标是证明三元组 $(\ell,\ \ell',\ \ell'')$ 满足雅可比恒等式。

在逐一分析各个情形之前，我们指出，每当需要检验所有满足 $(\ell,\ \ell',\ \ell'')$ 且 $\ell \in L_0$的三元组是否满足雅可比恒等式时，只需考虑 $\ell \in J \cup J'$。事实上，情形 $\ell = \mathbf{d}_{a,\ a'}$ 由引理 4.25即可推出，而情形 $\ell = \zeta$ 和 $\ell = \xi$ 则由注 4.26自动满足。此外，由于每种情形下，情形 $\ell \in J$ 和 $\ell \in J'$ 完全类似，我们总是假设 $\ell = a \in J$ 当 $i = 0$时。

C情形 (0，1，1)： 设 $\ell = a$, $\ell' = (\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_+$ 以及 $\ell'' = (\nu,\ c,\ c',\ \rho)_+$。注意到 $[\ell',\ell''] \in L_2$，因此 $[a,[\ell',\ell'']] = 0$。我们需要证明 $[[a,\ell'],\ell''] = [[a,\ell''],\ell']$。计算得

$$\begin{aligned}[[a,\ell'],\ell''] &= \big[[a,(\lambda,b,b',\mu)_+],(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &= \big[\big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_+,(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &= \big(\lambda T(a,c') - T(c,a\times b) + \nu T(a,b')\big)\cdot y,\end{aligned}$$

并且由于 $T(c,\ a\times b) = T(b,\ a\times c)$，这确实关于 ℓ'和 ℓ''对称。

情形 (0，1，−1)： 这是最有意思的情形。设 $\ell = a$, $\ell' = (\nu,\ c,\ c',\ \rho)_+$以及 $\ell'' = (\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_-$。计算得

$$\begin{aligned}&[[a,\ell''],\ell'] = \big[[a,(\lambda,b,b',\mu)_-],(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &= \big[\big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_-,(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &= (\lambda a\times c - \nu a\times b)\\ &\qquad + \big(-\lambda T(a,c')\cdot\zeta + (T(c,a\times b) - \nu T(a,b'))\cdot(\xi-\zeta) + \lambda\mathbf{d}_{a,c'} + \mathbf{d}_{c,a\times b}\big)\\ &\qquad + \big(-\lambda\rho a + (a\times b)\times c' - T(a,b')c\big);\end{aligned}$$

$$[[\ell',a],\ell''] = [\ell'',[a,\ell']] = \big[(\lambda,b,b',\mu)_-,[a,(\nu,c,c',\rho)_+]\big]$$

$$= \big[(\lambda, b, b', \mu)_-, \big(0,\ \nu a,\ a\times c,\ T(a,c')\big)_+\big]$$

$$\begin{aligned}= {} & (-\lambda a\times c + \nu a\times b)\\ & + \big((\lambda T(a,c') - T(b, a\times c))\cdot\zeta + \nu T(a,b')\cdot(\xi-\zeta) + \mathbf{d}_{b,a\times c} + \nu\mathbf{d}_{a,b'}\big)\\ & + \big(-T(a,c')b + (a\times c)\times b' - \mu\nu a\big);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[[\ell'', \ell'], a] = {} & \Big[\big(-\lambda c' + b\times c - \nu b'\big)\\ & \quad + \big((\lambda\rho - T(b,c'))\cdot\zeta + (T(c,b') - \mu\nu)\cdot(\xi-\zeta) + \mathbf{d}_{b,c'} + \mathbf{d}_{c,b'}\big)\\ & \quad + \big(-\rho b + b'\times c' - \mu c\big),\ a\Big]\\ = {} & (-\lambda\mathbf{d}_{a,c'} + \mathbf{d}_{a,b\times c} - \nu\mathbf{d}_{a,b'})\\ & + \big((\lambda\rho + \mu\nu - T(b,c') - T(c,b'))a + D_{b,c'}(a) + D_{c,b'}(a)\big)\\ = {} & (-\lambda\mathbf{d}_{a,\ c'} + \mathbf{d}_{a,\ b\times c} - \nu\mathbf{d}_{a,\ b'})\\ & + \big((\lambda\rho + \mu\nu)a + T(a,c')b + T(a,b')c - (a\times b)\times c' - (a\times c)\times b'\big).\end{aligned}$$

雅可比恒等式 $[[a,\ell''],\ell'] + [[\ell', a],\ell''] + [[\ell'',\ell'], a] = 0$现在可由引理4.17得出。

情形$(0,\ 1, -2)$： 设 $\ell = a$, $\ell' = (\lambda, b, b', \mu)_+$。不失一般性，$\ell'' = x$。注意到 $[a, x] = 0$，并且我们很快验证得

$$\begin{aligned}& [a, [x, (\lambda, b, b', \mu)_+]] - [x, [a, (\lambda, b, b', \mu)_+]]\\ & = -[a, (\lambda, b, b', \mu)_-] - [x, \big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_+]\\ & = -\big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_- + \big(0,\ \lambda a,\ a\times b,\ T(a,b')\big)_- = 0.\end{aligned}$$

情形 $(0,\ 2,\ -2)$： 设 $\ell = a$。不失一般性，$\ell' = y$和 $\ell'' = x$。我们有 $[a, x] = 0$ 和 $[a, y] = 0$。此外，$[[x, y], a] = [\xi, a] = 0$。

情形 $(1,\ 1,\ -1)$： 这是计算量最大的一种情形，但并无意外。设 $\ell = (\nu_1,\ c_1,\ c_1',\ \rho_1)_+$, $\ell' = (\nu_2,\ c_2,\ c_2',\ \rho_2)_+$和 $\ell'' = (\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_-$。首先，我们有

$$\begin{aligned}[\ell'', [\ell, \ell']] &= \big[(\lambda, b, b', \mu)_-, \big(T(c_1, c_2') - T(c_2, c_1') + \rho_1\nu_2 - \nu_1\rho_2\big)\cdot y\big]\\ &= \big(-T(c_1, c_2') + T(c_2, c_1') - \rho_1\nu_2 + \nu_1\rho_2\big)\cdot(\lambda, b, b', \mu)_+.\end{aligned}$$

为计算 $[[\ell'', \ell], \ell']$，我们使用（14）和定义 4.7，并求出所有不同项后，得到

$$\begin{aligned}& [[\ell'', \ell], \ell']\\ & = \Big(\lambda T(c_2, c_1') - \lambda T(c_2, b\times c_1) + \nu_1 T(c_2, b') - \lambda\rho_1\nu_2 + \nu_2 T(c_1, b') - 2\mu\nu_1\nu_2,\\ & \quad \lambda c_1'\times c_2' - (b\times c_1)\times c_2' + \nu_1 b'\times c_2' - \nu_2\rho_1 b + \nu_2 b'\times c_1' - \nu_2\mu c_1 + T(c_1, b')c_2\\ & \qquad - \mu\nu_1 c_2 - c_1'\times(b\times c_2) + T(c_2, c_1')b - (c_1\times c_2)\times b' + T(c_2, b')c_1,\\ & \quad \lambda\rho_2 c_1' - \rho_2 b\times c_1 + \nu_1\rho_2 b' - \rho_1 b\times c_2 + (b'\times c_1')\times c_2 - \mu c_1\times c_2 + \lambda\rho_1 c_2'\\ & \qquad - T(b, c_1')c_2' - T(b, c_2')c_1' + b\times(c_1'\times c_2') - T(c_1, c_2')b' + c_1\times(b'\times c_2'),\\ & \quad - \rho_1 T(b, c_2') + T(b'\times c_1', c_2') - \mu T(c_1, c_2') + 2\rho_1\rho_2 - T(b, c_1')\rho_2 + \mu\nu_1\rho_2\Big)_+.\end{aligned}$$

$[[\ell'',\ell'],\ell]$ 的表达式当然完全相同，只需将所有下标 1 和 2 互换即可。令人欣喜的是，当我们计算差值 $[[\ell'',\ell],\ell']-[[\ell'',\ell'],\ell]$ 时，许多项相互抵消，剩下的恰好就是我们上面求得的 $[\ell'',[\ell,\ell']]$ 的表达式。

情形 (1，1，−2)： 记 $\ell=(\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_+$ 和 $\ell'=(\nu,\ c,\ c',\ \rho)_+$，并且不失一般性地假设 $\ell''=x$。我们有

$$\begin{aligned}[[x,\ell],\ell'] &= \big[[x,(\lambda,b,b',\mu)_+],(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &= -\big[(\lambda,b,b',\mu)_-,(\nu,c,c',\rho)_+\big],\end{aligned}$$

因此，由（14）可推得

$$\begin{aligned}&[[x,\ell],\ell']-[[x,\ell'],\ell]\\ &=\big[(\nu,c,c',\rho)_-,(\lambda,b,b',\mu)_+\big]-\big[(\lambda,b,b',\mu)_-,(\nu,c,c',\rho)_+\big]\\ &=\big(T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu-\lambda\rho\big)\cdot\xi.\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}[x,[\ell,\ell']] &= \big[x,\big(T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu-\lambda\rho\big)y\big]\\ &= \big(T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu-\lambda\rho\big)\cdot[x,y],\end{aligned}$$

由此我们得出结论，确实有 $[x,[\ell,\ell']]=[[x,\ell],\ell']-[[x,\ell'],\ell]$。

情形 (1，2，−1)： 记 $\ell=(\nu,\ c,\ c',\ \rho)_+$ 和 $\ell''=(\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_-$，并且不失一般性地假设 $\ell'=y$。注意，$[\ell,y]=0$。由于 $[y,J]=[y,J']=[y,[J',J]]=0$，我们有

$$\begin{aligned}[y,[\ell'',\ell]] &= \big[y,(\lambda\rho-T(b,c'))\cdot\zeta+(T(c,b')-\mu\nu)\cdot(\xi-\zeta)\big]\\ &= \big(-\lambda\rho+T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu\big)\cdot y.\end{aligned}$$

另一方面，我们还有

$$[[y,\ell''],\ell]=\big[(\lambda,b,b',\mu)_+,(\nu,c,c',\rho)_+\big]=\big(T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu-\lambda\rho\big)y.$$

情形 (1，2，−2)： 记作 $\ell=(\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_+$，不失一般性，假设$\ell'=y$ 且 $\ell''=x$。注意到 $[\ell,y]=0$，且 $[x,y]=\xi$。由 $[\xi,\ell]=\ell$ 和 $[y,[x,\ell]]=-\ell$ 可得结论。

情形 (2，2，−2)： 不失一般性，$\ell=\ell'=y$ 且 $\ell''=x$，因此雅可比恒等式显然成立。□

命题 4.28。该分解

$$L=\bigoplus_{\alpha\in G_2^0}L_\alpha$$

备注 4.4 中的分解是一个 G_2-分次李代数 L。

证明。从表 1 可读出 $[L_\alpha,L_\beta]\le L_{\alpha+\beta}$ 对所有 $\alpha,\ \beta\in G_2^0$。 □

注 4.29. 在 $J=0=J'$ 的情形下，L 中仅有六个非平凡根空间，它们构成 L 的一个 A_2- 分次。

定理 *4.30.* 设 (J, J') 是交换环 k 上的三次范数对。则存在一个 G_2-分次的李代数 L，使得对所有长根 $\alpha \in G_2$ 有 $L_\alpha \cong (k, +)$，对位于注 *4.5* 中 G_2 的三个轨道之同一轨道内的三个短根 $\beta \in G_2$ 有 $L_\beta \cong (J, +)$，并且对其余三个短根 γ 有 $L_\gamma \cong (J', +)$。

证明。 作为一个模，L 是在定义 4.1 和4.9 以及（13）中构造的，其根空间具有所需的同构类型。李括号是在定义 4.1、4.7 和4.22中构造的，并总结于表 1中。我们在命题4.27 和4.28 中证明了 L 是一个 G_2-分次李代数。□

注 4.31。 在 [Fau71], 中，John Faulkner 从任意交换基环上的“三元代数”构造李代数。三次范数结构提供了这类代数的实例，而由此得到的李代数很可能与我们构造的李代数同构（但我们尚未明确完成这一验证）。

无论如何，要得到 G_2-分次（而且我们希望稍后将其进一步细化为 F_4-分次），我们需要采用更“精细”的描述。事实上，对于三次范数结构，我们的方法更为直接，因为 Faulkner 使用了三重乘积——见[Fau71，第 399] 页上的（1.6）式——而三重乘积本身已经相当复杂。另一方面，我们可以直接在定义4.22的公式中认出他的双线性形式（1.5）。

5. 函子性与反射

在上一节中，我们为每个三次范数对（J, J'）（事实上，为每个线性三次范数对）构造了一个李代数 $L = L(J, J')$。本节致力于构造若干定义在 $L(J, J')$ 上的有趣李代数同态。我们首先证明，$L(J, J')$ 关于（J, J'）具有函子性：对于任意三次范数对之间的满同态（$\iota, $）：（$J, J'$） $\to$ （J_2, J_2'），我们构造一个李代数之间的满同态 $L(\iota,): L(J, J') \to L(J_2, J_2')$，且它是双射当且仅当（$\iota, $）是双射（引理 5.15）。这里要求（$\iota, $）为满同态是一个微妙的条件，它确保 $L(\iota,)$ 良定义（见注 5.3 ）；而在构造 Jordan 对的 Tits-Kantor-Koecher 代数上的（函子性同态）时，也有这一要求（见 LN19，第7.1]节）。我们甚至可以将构造表述得稍微一般一些：三次范数对之间的每个满 t-同伦（$\iota, $）都会诱导一个李代数满同态 $L(\iota, , t)$。由这一观察可得，$L(J, J')$ 的同构类型仅取决于（J, J'）的各伦类型。$L(J, J')$ 函子性的另一项应用将在第6节给出（尤其是注 6.17）；届时我们将研究由“（k, J, J'）的理想”所诱导的 $L(J, J')$ 的商。

我们还定义了自同构 $\varphi_\leftrightarrow, \varphi_\updownarrow, \varphi$ of L，称之为“反射”，因为它们以根系 G_2 中某个反射所规定的方式置换 $L(J, J')$ 的根空间。这些自同构分别对应于注 4.3 中所述的 $L(J, J')$ 的某个 5-分次，其意义在于它们反转该分次：它将 i-分次部分映射到 $(-i)$-分次部分。我们也可以定义第四个反射 φ，它反转 $L(J, J')$ 的 7-分次，但前提是给定一个同构（或更一般地，一个 t-各伦）$(\iota,): (J, J') \to (J', J)$。这个前提确有必要，因为一个反转 7-分次的反射

必然将由 J 参数化的根空间同构地映射到由 J' 参数化的根空间，反之亦然。在一般情形下，我们只能构造一个同构 $\psi\colon L(J,J') \to L(J',J)$，而 φ 只是 ψ 与 $L(\iota,,t)$ 的复合。

在第 7 节中，我们将构造 Aut(L) 中的根群 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$。若采用直接的方法，这将涉及大量冗长的计算。利用上一段所述的反射，我们可以借助 L 的对称性，大幅减少计算量。详情请参见命题 B.14。此外，我们将在命题 B.15 和 B.24 中证明，相对于 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$，$\varphi_\leftrightarrow$ 和 φ 是韦伊元（在涉及 φ 的情形下，需满足适当的假设）。这是证明 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$ 是 Aut(L) 的某个子群的 G_2-分次时的重要一步。

记号 5.1. 对于任意线性三次范数对 (J,J')，我们用 $L(J,J')$ 表示命题 4.27中构造的相应李代数。若未指定线性三次范数对，我们假定 (J,J') 是一个固定的线性三次范数对，并且$L := L(J,J')$ 是相应的李代数。此外，我们有时采用备注 4.4 中的约定，将 G_2^0 视为 $\mathbb{Z}^2$ 的子集。

约定 5.2. 我们始终令 L的自同构从左侧作用于 L。

注 5.3. 我们将通过描述所有分量上的作用来定义 L上的所有同态。由于一般而言，这个和

$$\langle \mathbf{d}_{a,a'} \mid a \in J, a' \in J' \rangle + k\zeta + k\xi$$

是直和，因此这些映射在 $L_{0,0}$ 上是否良定义，先验地并不清楚。这将在引理 5.14 中得到验证。

我们先讨论 $L(J,J')$关于满射同伦的函子性。

定义 5.4. 设 (J_1,J_1') 和 (J_2,J_2') 是两个线性三次范数对（定义在同一个环 k 上），设 $t\in k$ 可逆，并设 $(\iota,)\colon (J_1,J_1') \to (J_2,J_2')$ 是线性三次范数对之间的一个满射t-同伦。于是我们定义一个映射

$$L(\iota,\ ,t)\colon L(J_1,J_1') \to L(J_2,J_2'),$$

在以下方程组中记作 ψ，令

$$\begin{aligned}
\psi(x) &:= t^{-1}x,\\
\psi((\nu,c,c',\rho)_-) &:= (t^{-1}\nu, t^{-1}c^\iota, (c')^{\ }, \rho)_-,\\
\psi(c') &:= (c')^{\ },\\
\psi(\mathbf{d}_{c,c'}) &:= \mathbf{d}_{c^\iota,(c')^{\ }}, \quad \psi(\xi) := \xi, \quad \psi(\zeta) := \zeta,\\
\psi(c) &:= c^\iota,\\
\psi((\nu,c,c',\rho)_+) &:= (\nu, c^\iota, t(c')^{\ }, t\rho)_+\\
\psi(y) &:= ty
\end{aligned}$$

对所有 ν、$\rho\in k$, $c\in J$, $c'\in J'$。如果 $(\iota,)$ 是同态（即，如果 $t=1$），我们就简记为 $L(\iota,) := L(\iota,,1)$。

注 5.5. 若 $(\iota,)\colon (J,J') \to (J',J)$ 对某个可逆的 $t\in k$ 是一个 t-对合，则 $L(\iota,,t)^{-1} = L(\ \iota,t^{-1})$。

注 5.6. $L(\iota,,t)$ 的定义并非典范：我们做了一个选择，“把 t 和 t^{-1}放在何处”。我们的选择对应于注 4.3 中的 5-分次 $(L_i'')_{-2\le i\le 2}$，其意义在于：恰好位于 L_0'' 中的类型为 J，J' 的块，以及位于 $L_{-1}''+L_1''$ 中的类型为 k 的块，被乘以 t 或 t^{-1}。以类似的方式，我们例如可以定义一个映射 $\psi := L'(\iota,,t)\colon L(J_1,J_1')\to L(J_2,J_2')$，它对应于 5-分次 $(L_i)_{-2\le i\le 2}$，通过

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= x,\\ \psi((\nu,c,c',\rho)_\pm) &:= (t\nu,c^\iota,(c')^{\ },t^{-1}\rho)_\pm,\\ \psi(c') &:= t(c')^{\ },\\ \psi(\mathbf{d}_{c,c'}) &:= \mathbf{d}_{c^\iota,(c')^{\ }},\quad \psi(\xi):=\xi,\quad \psi(\zeta):=\zeta,\\ \psi(c) &:= t^{-1}c^\iota,\\ \psi(y) &:= y\end{aligned}$$

对所有 ν、$\rho\in k$、$c\in J$、$c'\in J'$。注意，若 $t=1$，即若$(\iota,)$是一个同态，则 $L(\iota,,t)=L'(\iota,,t)$。此外，这两个映射对任意 t在L_0,0上一致。后一事实表明，引理 5.14 中关于良定义性的证明对$L'(\iota,,t)$同样成立。

在定义自同构 $\varphi_\leftrightarrow$、$\varphi_\updownarrow$、φ、φ 之前，我们先明确所谓“反射”的含义。

定义 5.7. 设 Φ 为一个根系，设 $\alpha\in\Phi$ 并且设

$$\bar L=\bigoplus_{\beta\in\Phi^0}\bar L_\beta\quad\text{and}\quad \bar L'=\bigoplus_{\beta\in\Phi^0}\bar L'_\beta$$

$\bar{\ }$ $\bar{\ }$为两个 Φ-分次李代数。一个 α-反射，从 L 到 L' 是一个同构$\varphi\colon \bar L\to\bar L'$，使得对所有 $\beta\in\Phi^0$，$\varphi(\bar L_\beta)=\bar L'_{\beta^{\sigma(\alpha)}}$，其中 $\sigma_\alpha\colon \Phi^0\to\Phi^0$是沿 $\alpha^\perp$的反射。根 α 有时也称为类型，即 φ。若$_-$ $_-$ $\perp L'=L$，我们将直接称 φ 为一个 α-反射，在 L上。

以下反射在 L 上的定义公式，是通过将 [DMM25引理 2 中的公式8]应用于相对于应被反转的分次的“极端元”而得到的。

定义 5.8. 我们定义 k-模 L的自同态 $\varphi_\leftrightarrow$ 和 φ，满足

$$\begin{aligned}\varphi_\leftrightarrow(x) &:= y,\\ \varphi_\leftrightarrow((\nu,c,c',\rho)_-) &:= (\nu,c,c',\rho)_+,\\ \varphi_\leftrightarrow(c') &:= c',\\ \varphi_\leftrightarrow(\mathbf{d}_{c,c'}) &:= \mathbf{d}_{c,c'},\quad \varphi_\leftrightarrow(\xi):=-\xi,\quad \varphi_\leftrightarrow(\zeta):=\zeta-\xi,\\ \varphi_\leftrightarrow(c) &:= c,\\ \varphi_\leftrightarrow((\nu,c,c',\rho)_+) &:= -(\nu,c,c',\rho)_-,\\ \varphi_\leftrightarrow(y) &:= x,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi\ (x) &:= (1,0,0,0)_-,\\ \varphi\ ((\nu,c,c',\rho)_-) &:= -\nu x+(0,c,0,0)_-+c'-(\rho,0,0,0)_+,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi\ (c') &\coloneqq -(0,0,c',0)_-,\\
\varphi\ (\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} + T(c,c')(\xi-\zeta),\quad \varphi\ (\xi)\coloneqq\zeta,\quad \varphi\ (\zeta)\coloneqq\xi,\\
\varphi\ (c) &\coloneqq -(0,c,0,0)_+,\\
\varphi\ ((\nu,c,c',\rho)_+) &\coloneqq -(0,0,0,\nu)_- + c + (0,0,c',0)_+ - \rho y,\\
\varphi\ (y) &\coloneqq (0,0,0,1)_+.
\end{aligned}$$

对所有 $\nu,\rho\in k$、 $c\in J$ 和 $c'\in J'$均成立。

注 5.9. 以类似的方式，我们可以定义第三个映射$\varphi_\updownarrow$，即

$$\begin{aligned}
\varphi_\updownarrow(x) &\coloneqq (0,0,0,1)_-,\\
\varphi_\updownarrow((\nu,c,c',\rho)_-) &\coloneqq -\rho x + (0,0,c',0)_- + c + (0,0,0,\nu)_+,\\
\varphi_\updownarrow(c') &\coloneqq (0,0,c',0)_+,\\
\varphi_\updownarrow(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} - T(c,c')\zeta,\quad \varphi_\updownarrow(\xi)\coloneqq\xi-\zeta,\quad \varphi_\updownarrow(\zeta)\coloneqq-\zeta,\\
\varphi_\updownarrow(c) &\coloneqq -(0,c,0,0)_-,\\
\varphi_\updownarrow((\nu,c,c',\rho)_+) &\coloneqq (0,0,0,\rho)_- - c' + (0,c,0,0)_+ + \nu y,\\
\varphi_\updownarrow(y) &\coloneqq (-1,0,0,0)_+.
\end{aligned}$$

我们在此引入它仅为完整性起见，但绝不会在论证中以有实质意义的方式使用它。因此，我们不会详细验证它确实与李括号相容，正如我们对 $\varphi_\leftrightarrow$ 和φ 在引理5.15中所做的那样。

我们还将需要如下从 $L(J,J')$ 到 $L(J',J)$ 的反射，见定义5.18 与引理B.13。

定义 5.10. 我们定义映射 $\psi\coloneqq\psi^{(J,J')}\colon\ L(J,J')\to L(J',J)$，其设定为

$$\begin{aligned}
\psi\ (x) &\coloneqq (0,0,0,1)_+,\\
\psi\ ((\nu,c,c',\rho)_-) &\coloneqq -\nu y + (0,0,-c,0)_+ + c' + (0,0,0,\rho)_-,\\
\psi\ (c') &\coloneqq \big(0,-c',0,0\big)_+,\\
\psi\ (\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq -\mathbf{d}_{c',c} + T(c,c')(\zeta-\xi),\quad \psi\ (\xi)\coloneqq-\zeta,\quad \psi\ (\zeta)\coloneqq-\xi,\\
\psi\ (c) &\coloneqq (0,0,-c,0)_-,\\
(\nu,c,c',\rho)_+ &\coloneqq (\nu,0,0,0)_+ + c + \big(0,-c',0,0\big)_- - \rho x,\\
\psi\ (y) &\coloneqq (1,0,0,0)_-
\end{aligned}$$

对所有 $\nu,\rho\in k$, $c\in J$, $c'\in J'$。

注 5.11。 由定义 5.8和 5.10 以及注5.9 可立即得出

$$\varphi_\leftrightarrow(L_\alpha)=L_{\alpha^{\sigma((2,1))}},\quad \varphi_\updownarrow(L_\alpha)=L_{\alpha^{\sigma((1,2))}},\quad \varphi\ (L_\alpha)=L_{\alpha^{\sigma((-1,1))}},$$
$$\psi^{(J,J')}\big(L(J,J')_\alpha\big)=L(J',J)_{\alpha^{\sigma((1,1))}}$$

对所有 $\alpha\in G_2^0$ 均成立。因此，要证明这些映射是反射，只需证明它们是李代数同构。

注 5.12。 由注 5.11 可知

$$\varphi_\leftrightarrow(L_i)=L_{-i},\qquad \varphi_\updownarrow(L_i')=L_{-i}',\qquad \varphi\ (L_i'')=L_{-i}''$$

对于所有 $i \in \{-2, \dots, 2\}$。这意味着反射 $\varphi_{\leftrightarrow}$、$\varphi_{\updownarrow}$ 和 φ 分别对应于注 4.3 中定义的 5-分次 $(L_i)_{-2\le i\le 2}$、$(L_i')_{-2\le i\le 2}$ 和 $(L_i'')_{-2\le i\le 2}$。类似地，对于注 4.3 中的 $L(J,J')$ 的 7-分次 $(L(J,J')_i)_{-3\le i\le 3}$ 和 $L(J',J)$ 的 7-分次 $(L(J',J)_i)_{-3\le i\le 3}$，我们有

$$\psi^{(J,J')}\big(L(J,J')_i\big) = L(J',J)_{-i}$$

对所有 $i \in \{-3, \dots, 3\}$。

注5.13。对于所有 $\varphi \in \{\varphi_{\leftrightarrow}, \varphi_{\updownarrow}, \varphi, \psi\}$，映射 φ^2 是与 φ 对应的分次的奇偶自同构。特别地，$\varphi_{\leftrightarrow}$，$\varphi_{\updownarrow}$，$\varphi$ 在 $2 \neq 0$ 属于 k 时阶为 4，在 $2 = 0$ 属于 k 时阶为 2。

现在我们可以证明，上述所有映射都是良定义的李代数同态。

引理 *5.14*。*(i)* 对任意线性三次范数对 (J, J')，反射 $\varphi_{\leftrightarrow}, \varphi, \varphi_{\updownarrow}$ 在 $L(J, J')$ 上，以及映射 $\psi\colon L(J, J') \to L(J', J)$，都是良定义的。*(ii)* 对任意可逆的 $t \in k$ 以及任意满射 t-同伦 $(\iota,): (J, J') \to (J_2, J_2')$，其中两者均为线性三次范数对，映射 $L(\iota, , t)\colon L(J, J') \to L(J_2, J_2')$ 是良定义的。

证明。在此证明中，所有求和均视为对 $a \in J$ 和 $a' \in J'$进行。假设

$$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} + \lambda_\zeta\zeta + \lambda_\xi\xi = 0$$

对于某些有限个标量 $\lambda_{a,a'}, \lambda_\zeta, \lambda_\xi \in k$。我们需要证明，在定义 5.4, 5.8 和 5.10以及注 5.9中的相应赋值下，这个和的值为零。由引理 4.19 可知

$$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} = \lambda_\xi \cdot (2\zeta - \xi), \tag{15}$$

$$\sum \lambda_{a,a'}T(a,a') = 3\lambda_\xi, \tag{16}$$

$$\sum \lambda_{a,a'}D_{a,a'} = 2\lambda_\xi \operatorname{id}_J, \qquad \sum \lambda_{a,a'}D_{a',a} = 2\lambda_\xi \operatorname{id}_{J'}. \tag{17}$$

(15) 两边在定义 $\varphi_{\leftrightarrow}$的赋值下保持不变，因此 $\varphi_{\leftrightarrow}$ 是良定义的。在定义 φ 的赋值下，它们的值为

$$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} + \sum \lambda_{a,a'}T(a,a')(\xi - \zeta) \quad \text{and}$$
$$\lambda_\xi \cdot (2\xi - \zeta) = \lambda_\xi(2\zeta - \xi) + 3\lambda_\xi(\xi - \zeta).$$

由 (16)，我们推知 φ 是良定义的。同样，(15) 两边映射为

$$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} - \sum \lambda_{a,a'}T(a,a')\zeta = \sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a,a'} - 3\lambda_\xi\zeta \quad \text{and}$$
$$\lambda_\xi \cdot (-2\zeta - \xi + \zeta) = \lambda_\xi \cdot (2\zeta - \xi) - 3\lambda_\xi\zeta$$

在分别定义 $\varphi_{\updownarrow}$ 的赋值下。我们推知，$\varphi_{\updownarrow}$ 也是良定义的。

为了证明 ψ 是良定义的，我们必须区分元素ξ，ζ，$\mathbf{d}_{a,\,a'}$属于 $L(J,\ J')$ 的元素，以及元素 ξ'，ζ'，$\mathbf{d}_{a',\,a}$属于 $L(J',\ J)$。（15）的两边

映射为

$$-\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a',a}+\sum \lambda_{a,a'}T(a,a')(\zeta'-\xi')=-\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a',a}+3\lambda_\xi(\zeta'-\xi'),$$
$$\lambda_\xi\cdot(-2\xi'+\zeta')=-\lambda_\xi\cdot(2\zeta'-\xi')+3\lambda_\xi(\zeta'-\xi')$$

在定义 ψ 的赋值下。由命题 4.12、（16）和（17），可得

$$\sum \lambda_{a,a'}[\mathbf{d}_{a',a},(\lambda,b',b,\mu)_\pm]=\lambda_\xi(-3\lambda,-b',b,3\mu)_\pm$$

对所有的（λ, b', b, μ）$_\pm \in L$（J', J）$_{\pm1}$以及$\mathbf{d}_{a',\,a}$（L（J', J）$_{\pm2}$）$=0$，因此由注记4.6 可知$\sum \lambda_{a,\,a'}\mathbf{d}_{a',\,a}=\lambda_\xi$（$2\zeta'-\xi'$）。我们推断出 ψ 是良定义的。

现在假设（ι, ）：（J, J'）$\to$（J_2, J_2'）是某个可逆 $t\in k$的满射 t-同伦线性三次范数对。与上一段类似，我们必须区分 L（J, J'）中的元素 ξ、ζ、$\mathbf{d}_{a,\,a'}$，以及 L（J_2, J_2'）中的元素ξ_2、ζ_2、$\mathbf{d}_{a^\iota}$、（a'）。现在，（15）的两边映射为

$$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a^\iota,(a')}\quad\text{and}\quad\lambda_\xi(2\zeta_2-\xi_2)$$

在定义 $L(\iota,,t)$的赋值下。由（17）及注 2.13 可知

$$\Big(\sum \lambda_{a,a'}D_{a^\iota,(a')}\Big)(b^\iota)=\Big(\sum \lambda_{a,a'}D_{a,a'}(b)\Big)^\iota=2\lambda_\xi b^\iota$$

对所有 $b\in J$。由于 ι 是满射，我们推得$\sum \lambda_{a,a'}D_{a^\iota,(a')}=2\lambda_\xi\,\mathrm{id}_{J_2}$。由类似的计算，$\sum \lambda_{a,a'}D_{(a')\ a^\iota}=2\lambda_\xi\,\mathrm{id}_{J_2'}$。此外，(16)蕴含$\sum \lambda_{a,a'}T(a^\iota,(a'))=3\lambda_\xi$。因此，由与上一段类似的论证，根据命题 4.12 与注 4.6 可得$\sum \lambda_{a,a'}\mathbf{d}_{a^\iota,(a')}=\lambda_\xi($ $2\zeta_2-\xi_2)$。故 $L(\iota,,t)$是良定义的。□

引理 *5.15*。*(i)* 对任意线性三次范数对(J,J')，$L(J,J')$上的映射 $\varphi_\leftrightarrow$，$\varphi_\updownarrow$,φ 以及映射 ψ：$L(J,J')\to L(J',J)$都是李代数同构。特别地，$\varphi_\leftrightarrow$，$\varphi_\updownarrow$ 与 φ 分别是型为$(-2,-1)$、$(-1,-2)$与$(-1,1)$的反射。*(ii)* 对任意可逆的 $t\in k$ 以及线性三次范数对的任意满射 t-同伦$(\iota,):(J,J')\to(J_2,J_2')$，映射 $L(\iota,,t):L(J,J')\to L(J_2,J_2')$是李代数满同态。它为双射当且仅当$(\iota,)$为双射。

证明。设 $\varphi\in\{\varphi_\leftrightarrow,\varphi\ ,\varphi_\updownarrow,\psi\ \}$或 $\varphi=L(\iota,,t)$ 是线性三次范数对 $(J,J')\to(J_2,J_2')$ 的一个满射 t-同伦，且 $t\in k$ 可逆。关于 φ 的满射性或双射性的断言显然成立（另见注 5.11），因此只需证明它也与李括号相容。为此，只需证明对于 L 这个 k-模的生成集中的所有 a,b，都有 $\varphi([a,b])=[\varphi(a)\ \varphi(b)]$。由李括号的反对称性，只需对所有满足 $a<b$ 的情形进行检验，其中 $<$ 是生成集上的任意选定全序。对于“标准”生成集，这些计算的结果分别见表 4 中的 $\varphi=\varphi_\leftrightarrow$、表 5 中的 $\varphi=\varphi$ 和表 6 中的 $\varphi=\psi$。大多数计算都是直接应用表 1 中的公式，但我们还需使用引理 3.3 来证明关系 $\varphi([\mathbf{d}_{a,a'},\mathbf{d}_{e,e'}])=[\varphi(\mathbf{d}_{a,a'})\ \varphi(\mathbf{d}_{e,e'})]$，其中 $\varphi\in\{\varphi\ ,\varphi\ \}$。对于 $\varphi_\updownarrow$，也可以进行类似的计算，但我们省略细节（见注 5.9）。对于 $\varphi=L(\iota,,t)$，直接验证即可确认它与李括号相容。

（i）中的最后一个断言可由注5.12推出。 □

正如前文所述，我们的构造的函子性有如下第一个应用。

命题 5.16. $L(J, J')$ 的同构类型仅取决于(J, J')的各伦类型。

证明. 设 $(\iota,): (J, J') \to (J_2, J_2')$ 是线性三次范数对的一个 t-各伦，其中 $t \in k$ 可逆。根据引理 5.15(ii)，映射 $L(\iota, , t): L(J, J') \to L(J_2, J_2')$ 是李代数的一个同构。□

注记 5.17. 我们列出 $\varphi_\leftrightarrow$ 和 φ 的逆映射的显式公式，以供日后参考：我们有

$$\begin{aligned}
\varphi_\leftrightarrow^{-1}(x) &= y,\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}((\nu, c, c', \rho)_-) &= -(\nu, c, c', \rho)_+,\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}(c') &= c',\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}(\mathbf{d}_{c,c'}) &= \mathbf{d}_{c,c'}, \quad \varphi_\leftrightarrow^{-1}(\xi) = -\xi, \quad \varphi_\leftrightarrow^{-1}(\zeta) = \zeta - \xi,\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}(c) &= c,\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}((\nu, c, c', \rho)_+) &= (\nu, c, c', \rho)_-,\\
\varphi_\leftrightarrow^{-1}(y) &= x,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(x) &= (-1, 0, 0, 0)_-,\\
\varphi^{-1}((\nu, c, c', \rho)_-) &= \nu x + (0, c, 0, 0)_- - c' - (\rho, 0, 0, 0)_+,\\
\varphi^{-1}(c') &= (0, 0, c', 0)_-,\\
\varphi^{-1}(\mathbf{d}_{c,c'}) &= \mathbf{d}_{c,c'} + T(c, c')(\xi - \zeta), \quad \varphi^{-1}(\xi) = \zeta, \quad \varphi^{-1}(\zeta) = \xi,\\
\varphi^{-1}(c) &= (0, c, 0, 0)_+,\\
\varphi^{-1}((\nu, c, c', \rho)_+) &= (0, 0, 0, -\nu)_- - c + (0, 0, c', 0)_+ + \rho y,\\
\varphi^{-1}(y) &= (0, 0, 0, -1)_+.
\end{aligned}$$

对所有 $\nu, \rho \in k$、 $c \in J$ 和 $c' \in J'$。

现在我们定义最后一个反射 φ。由于它是先前定义的映射的复合，因此我们立即看出它是一个反射。

定义 5.18。 设 $t \in k$ 可逆，并假设 $(\iota,): (J, J') \to (J', J)$ 是线性三次范数对的一个 t-各伦。则我们定义第四个反射 $\varphi^{(\iota, , t)} := \psi^{(J', J)} \circ L(\iota, , t)$，它是 $L(J, J')$ 上的一个 $(-1, -1)$-反射。

注 5.19. 设 $t \in k$ 可逆，且 $(\iota,): (J, J') \to (J', J)$ 是线性三次范数对的一个 t-各伦，并令 $\varphi := \varphi^{(\iota, , t)}$。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= (0, 0, 0, t^{-1})_+,\\
\varphi((\nu, c, c', \rho)_-) &= -\nu t^{-1} y + (0, 0, -t^{-1} c^\iota, 0)_+ + (c') + (0, 0, 0, \rho)_-,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi\ (c') &= \big(0, -(c')\ , 0, 0\big)_+, \\
\varphi\ (\mathbf{d}_{c,c'}) &= -\mathbf{d}_{(c')\ ,c^\iota} + T(c,c')(\zeta - \xi), \quad \varphi\ (\xi) = -\zeta, \quad \varphi\ (\zeta) = -\xi, \\
\varphi\ (c) &= (0, 0, -c^\iota, 0)_-, \\
\varphi\ (\nu, c, c', \rho)_+ &= (\nu, 0, 0, 0)_+ + c^\iota + \big(0, -t(c')\ , 0, 0\big)_- - t\rho x, \\
\varphi\ (y) &= (t, 0, 0, 0)_-
\end{aligned}
$$

对所有 $\nu, \rho \in k$, $c \in J$, $c' \in J'$ 均成立。现在进一步假设 $\iota^{-1} = $。那么 φ 的逆为

$$
\begin{aligned}
\varphi^{-1}(x) &= (0, 0, 0, -t^{-1})_+, \\
\varphi^{-1}\big((\nu, c, c', \rho)_-\big) &= t^{-1}\nu y + (0, 0, -t^{-1}c^\iota, 0)_+ - (c')\ + (0, 0, 0, \rho)_-, \\
\varphi^{-1}(c') &= \big(0, (c')\ , 0, 0\big)_+, \\
\varphi^{-1}(\mathbf{d}_{c,c'}) &= -\mathbf{d}_{(c')\ ,c^\iota} + T(c,c')(\zeta - \xi), \quad \varphi^{-1}(\xi) = -\zeta, \quad \varphi^{-1}(\zeta) = -\xi, \\
\varphi^{-1}(c) &= (0, 0, c^\iota, 0)_-, \\
\varphi^{-1}\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) &= (\nu, 0, 0, 0)_+ - c^\iota + \big(0, -t(c')\ , 0, 0\big)_- + t\rho x, \\
\varphi^{-1}(y) &= (-t, 0, 0, 0)_-
\end{aligned}
$$

对所有 ν, $\rho \in k$, $c \in J$, $c' \in J'$。此外, φ^2 是7-分次 L（定义见注记5.12）的奇偶自同构，它与φ^2 的5-分次（L_i''）$_{-2\le i\le 2}$的奇偶自同构重合。

6. L的理想结构

在本节中，(J, J') 表示某个交换环 k 上的任意三次范数对（或更一般地，线性三次范数对），而 $L := L(J, J')$ 表示相应的李代数。我们的目标是对 L 的理想进行分类（命题 6.24 和引理 6.23）。也就是说，我们将证明，除去 L_0,0 后， L的理想与我们称为三元组 (k, J, J') 的理想之间存在双射对应。特别地，我们将看到，当且仅当 k 是域且 T 是非退化的时， L 是单的（定理 6.25）。本节独立于后续各节。

作为第一步，我们证明 L <style id='4}>的每个理想都是分次的（命题 6.12）。

记号 6.1。 在本节中，我们用 π_α: $L \to L_\alpha$ 表示对所有 $\alpha \in G_2^0$的自然投影映射。此外，如果 $\alpha \sim \beta$ 与 α位于 $\beta \in G_2$ 中所描述的三个轨道中的同一个轨道内 G_2 （见备注4.5），我们将记作 $\alpha \sim \beta$。

定义 6.2。 如果理想 I of L 满足分次的 条件，即 $I = \bigoplus_{\alpha\in G_2^0}(I \cap L_\alpha)$，或者等价地，对于所有 $\alpha \in G_2^0$，都有 $\pi_\alpha(I) \subseteq I$，则称其为分次理想。

约定 6.3。 在本节中，即使 k、 J 和 J'在某些特殊情形下可能相同，我们也始终将它们区分开来。按照这一约定，当且仅当 L_α 和 L_β 由 k、 J、 J'这三个结构中的同一个结构（典范地）参数化时，对于 α， $\beta \in G_2$，有 $a \sim \beta$。

命题的证明中至关重要的要素6.12 将是引理6.7，它指出，李括号在根空间 L 之间诱导出“自然的”同构。我们首先需要明确这一概念。

定义 6.4。设 $\omega\colon\ G_2^0 \to \mathbb{Z}^2$ 如备注4.4所述。那么对所有的 $(i,j) \in \omega(G_2)$，我们定义 $P_{(i,j)} = P_{ij} \in \{k, J, J'\}$ 为与 $L_{i,j}$ （如定义 4.1和 4.9中所定义）自然同构的加法群（可从图 1中看出）。此外，相对于 (i,j) 的根同态是“典范”同构$\vartheta_{i,j}\colon\ P_{i,j} \to L_{i,j}$。例如，

$$\vartheta_{-2,-1}(t) = tx, \quad \vartheta_{-1,-2}(t) = (t,0,0,0)_-, \quad \vartheta_{1,2}(t) = (0,0,0,t)_+, \quad \vartheta_{2,1}(t) = ty,$$
$$\vartheta_{0,-1}(b') = b', \quad \vartheta_{-1,-1}(b) = (0,b,0,0)_-, \quad \vartheta_{1,1}(b') = (0,0,b',0)_+, \quad \vartheta_{0,1}(b) = b$$

对所有 $t \in k$、$b \in J$ 和 $b' \in J'$ 均成立。本节中，我们也将 $k \to k\rho\colon\ \lambda \to \lambda\rho$ 对于 $\rho \in \{\xi, \zeta\}$ 的同构称为“典范的”。

定义 6.5。设 $\alpha,\ \beta \in G_2$ 使得 $\alpha \sim \beta$。同构 $\varphi\colon\ L_\alpha \to L_\beta$的 k-模称为自然的，若它与定义 ϑ_α和 ϑ_β 中的根同态相容 6.4，即交换图

$$\begin{array}{ccc} L_\alpha & \xrightarrow{\ \varphi\ } & L_\beta \\ & {\scriptstyle\vartheta_\alpha}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle\vartheta_\beta} & \\ & P_\alpha = P_\beta & \end{array}$$

可交换。类似地，L_γ 对于 $\gamma \in G_2$ 的长同构与 $k\rho$ 对于$\rho \in \{\xi, \zeta\}$ 之间的同构称为自然的，若它与 ϑ_γ 以及“典范的”映射$k \to k\rho\colon\ \lambda \mapsto \lambda\rho$ 相容；而 $k\xi$ 与 $k\zeta$ 之间的同构称为自然的，若它交换 ξ 和 ζ。

注释 6.6. 注意，从 L_α 到L_β恰好存在一个自然同构，即 $\vartheta_\beta \circ \vartheta_\alpha^{-1}$；当 $\alpha = \beta$时，它是恒等映射。不过，我们将关注 k-模 L的自同态，它们在某些根子空间上的限制是自然同构；而将两个根空间之间的自然同构扩展为这样的自同态，可能有多种方式。

下文中，我们将采用注释 4.4 中的约定，将 G_2^0视为 $\mathbb{Z}^2$的一个子集，从而得到根子空间$(L_\alpha)^{\alpha\in G_2^0}$ 以及相应的参数化空间 $(P_\alpha)^{\alpha\in G_2^0}$。

引理 6.7. 设 α、$\beta \in G_2$ 满足 $\alpha \sim \beta$。那么存在 γ_1、……、$\gamma_n \in G_2$ 以及$a_1 \in L_{\gamma_1}$、……、$a_n \in L_{\gamma_n}$，使得$\mathrm{ad}(a_1)\circ\cdots\circ\mathrm{ad}(a_n)$ 诱导出从 L_α 到 L_β的自然同构。此外，若 α 是长的且 $\rho \in \{\xi, \zeta\}$，则存在 b_1、……、$b_m \in L$以及 c_1、……、$c_p \in L$，使得

$$\mathrm{ad}(b_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(b_m) \quad \textit{and} \quad \mathrm{ad}(c_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(c_p)$$

分别诱导从 L_α 到 $k\rho$ 以及从 $k\rho$到 L_α的自然同构。

证明。在下文中，由元素 $a \in L$ 标记的箭头表示 k-线性同态 $\mathrm{ad}_a\colon\ L \to L\colon$ $b \mapsto [a,b]$。在（典范地）由 J参数化的根空间上，我们有一条同构链

$$L_{-1,-1} \xrightarrow{(0,0,0,1)_+} L_{0,1} \xrightarrow{(-1,0,0,0)_+} L_{1,0} \xrightarrow{\ -x\ } L_{-1,-1}$$

与根同态相容。在由 J'（典范地）参数化的根空间上，我们有类似的链

$$L_{-1,0} \xrightarrow{(1,0,0,0)_+} L_{0,-1} \xrightarrow{(1,0,0,0)_+} L_{1,1} \xrightarrow{\ -x\ } L_{-1,0}.$$

在长根空间上，这些同构

$$L_{-2,-1} \xrightarrow{(1,0,0,0)_+} L_{-1,-2} \xrightarrow{\ y\ } L_{1,-1} \xrightarrow{(0,0,0,1)_+} L_{2,-1}$$
$$(-1,0,0,0)_- \nwarrow \qquad \swarrow (0,0,0,-1)_-$$
$$L_{-1,1} \xleftarrow[-x]{} L_{1,2}$$

与根同态相容。最后，这些同构

$$L_{-2,-1} \xrightarrow{\ -y\ } k\xi \xrightarrow{(-1,0,0,0)_+} L_{1,-1},$$
$$L_{-1,-2} \xrightarrow{(0,0,0,-1)_+} k\zeta \xrightarrow{\ -y\ } L_{2,1}$$

与根同态以及“典范”同构 $\lambda \mapsto \lambda\xi, \lambda \mapsto \lambda\zeta$ 相容。通过复合前述同构中的适当一系列同构，结论即得。□

记号 6.8。对于所有满足 $\alpha \sim \beta$ 的 $\alpha, \beta \in G_2$，我们固定一个 k-模自同态$\varphi_{\alpha\to\beta}$: $L \to L$，它诱导自然同构 $L_\alpha \to L_\beta$，且具有如下形式：$\varphi_{\alpha\to\beta} = \mathrm{ad}(a_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(a_n)$, 其中 $a_1, \ldots, a_n \in L$ 是适当选取的根空间元素。注意， $\varphi_{\alpha\to\beta}$ 保持 L 的所有理想不变，并且对所有 $\gamma \in G_2^0$ 都满足 $\varphi_{\alpha\to\beta}(L_\gamma) \subseteq L_{\gamma+\beta-\alpha}$。我们还以类似方式为 $\alpha \in G_2$ 选取映射 $\varphi_{\alpha\to\rho}, \varphi_{\rho\to\alpha}$，其中 $\rho \in \{\xi, \zeta\}$ 为长的，并选取映射 $\varphi_{\xi\to\zeta}, \varphi_{\zeta\to\xi}$。

注 6.9. 设 $\gamma \in G_2^0$，并设 ψ_γ 是 k-模 L 的自同态，满足 $\psi_\gamma(L_\alpha) \subseteq L_{\alpha+\gamma}$，对所有 $\alpha \in G_2^0$ 均成立。则对所有 和 $\alpha \in G_2^0$, $\pi_\alpha \circ \psi_\gamma = \psi_\gamma \circ \pi_{\alpha-\gamma}$。特别地， $\pi_\alpha \circ \varphi_{\beta\to\alpha} = \varphi_{\beta\to\alpha} \circ \pi_\beta$，因此对所有 α, $\beta \in G_2^0$, $\varphi_{\alpha\to\beta} \circ \pi_\alpha \circ \varphi_{\beta\to\alpha} = \varphi_{\alpha\to\beta} \circ \varphi_{\beta\to\alpha} \pi_\beta = \pi_\beta$。

命题 6.10. 设 α 是 G_2 中的一个长根。则存在 $a_1, \ldots, a_n \in L$，使得 $\mathrm{ad}(a_1) \circ \cdots \circ \mathrm{ad}(a_n) = \pi_\alpha$。

证明. 由于 $\gamma - 2\alpha \notin G_2^0$ 对所有 $\gamma \in G_2^0 \setminus \{\alpha\}$ （如图 1所示）， $\varphi_{\alpha\to-\alpha}$将除 L_α 之外的所有根空间映射为零。因此， $\varphi_{-\alpha\to\alpha} \circ \varphi_{\alpha\to-\alpha}$ 将除 L_α 之外的所有根空间映射为零，并且它在 L_α 上是恒等映射（根据注 6.6）。因此 $\varphi_{-\alpha\to\alpha} \circ \varphi_{\alpha\to-\alpha} = \pi_\alpha$。 □

无法像命题 6.10那样实现到短根空间的投影：我们只能得到以下结果，因为无法用这种方式消去(0,0)-部分 L。

引理 6.11. 设 I 是 L 的理想，且 $b \in I$ 满足 $\pi_{(0,0)}(b) = 0$。那么，对于所有短根 $\alpha \in G_2$，都有 $\pi_\alpha(b) \in I$。

证明。 对于所有长根 $\delta \in G_2$，由命题 $\pi_\delta(b) \in I$ 6.10, 我们有 ，因此可以假设 $\pi_\delta(b) = 0$。令 $\alpha \in G_2$ 为短根，并令 β、$\gamma \in G_2$ 为满足以下条件的两个短根： $\alpha \sim \beta \sim \gamma$ 且 α、β、γ两两不同。于是

$$\varphi := \varphi_{\gamma\to\alpha} \circ \varphi_{\beta\to\gamma} \circ \varphi_{\alpha\to\beta}$$

是作用于 L_α 上的恒等映射，并且由于每个因子都会改变分次，因此除（可能的）$L_{0,0}$ 和某些长根空间外，它将所有其他根空间映射为零。因此，$\pi_\alpha(b)$是 b 上唯一的非零分量，且 φ 在其上非零，所以

$$\varphi(b) = \varphi\big(\pi_\alpha(b)\big) = \pi_\alpha(b).$$

由于按 φ的构造， $\varphi(b) \in I$ ，故断言成立。 □

命题 6.12. L的每个理想都是分次的。

证明. 设 I 是 L 的一个理想，且设 $a \in I$。我们需要证明，对于所有 $\alpha \in G_2^0$， $\pi_\alpha(a)$ $\in I$。对于所有长 $\alpha \in G_2$，由命题 6.10 可知此结论成立，因此我们可以假设，对于这样的 α， $\pi_\alpha(a) = 0$。令 $a_0 := \pi_{(0,0)}(a) \in L_0$，并写作 $a_0 = a_0' + \lambda\xi + \mu\zeta$，其中 λ、 $\mu \in k$ 和 $a_0' \in \langle [b,b'] \mid b \in J, b' \in J' \rangle$。（注意，这个表达式通常并不唯一。）由于根 $(2,1)$ 是长根，且 $\operatorname{ad}_x(a) \in I$，因此我们有 $\pi_{(2,1)}(\operatorname{ad}_x(a)) \in I$。这里，根据注 6.9，

$$\pi_{(2,1)}\big(\operatorname{ad}_x(a)\big) = \operatorname{ad}_x\big(\pi_{(0,0)}(a)\big) = \operatorname{ad}_x(a_0' + \lambda\xi + \mu\zeta) = (2\lambda + \mu)x.$$

因此 $(2\lambda + \mu)x \in I$，从而根据引理 6.7， $(2\lambda + \mu)\zeta \in I$。从 a中减去这个元素，我们不妨设 $\mu = -2\lambda$，于是$a_0 = a_0' + \lambda(\xi - 2\zeta)$。因此 $\operatorname{ad}_y(a_0) = 0$。由备注 6.9可知，

$$\pi_{(0,0)}\big(\operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y(a)\big) = \operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y\big(\pi_{(0,0)}(a)\big) = \operatorname{ad}_{-x}\big(\operatorname{ad}_y(a_0)\big) = 0.$$

因此 $b := \operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y(a)$ 满足引理 6.11的要求。因此对所有短 $\alpha \in G_2$，都有

$$\operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y\big(\pi_\alpha(a)\big) = \pi_\alpha\big(\operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y(a)\big) = \pi_\alpha(b) \in I.$$

由于 $\operatorname{ad}_{-x} \circ \operatorname{ad}_y$ 是 L_1上的恒等映射，我们推得，对于 $\alpha \in \{(1,0), (1,1)\}$， $\pi_\alpha(a)$ $\in I$。换言之，我们已经证明，对于 $\alpha \in \{(1,0), (1,1)\}$， $\pi_\alpha(I) \subseteq I$。

现在令 $\beta \in G_2$ 为任意短根。那么 $\beta \sim \alpha$ 对于某个 $\alpha \in \{(1,0), (1,1)\}$ 因此，根据备注 6.9，

$$\pi_\beta(I) = \varphi_{\alpha\to\beta} \circ \pi_\alpha \circ \varphi_{\beta\to\alpha}(I) \subseteq I.$$

综上，我们已证明，对所有 $\gamma \in G_2$， $\pi_\gamma(I) \subseteq I$。由于

$$\pi_{(0,0)} = \mathrm{id}_L - \sum_{\gamma \in G_2} \pi_\gamma,$$

由此可得， $\pi_{(0,0)}(I) \subseteq I$ 也成立。因此， I 是分次的。 □

命题 6.12得证后，我们现在可以开始将 L 的理想与$k(k, J, J')$的子结构联系起来。理想的闭包条件以及表 1促使我们给出以下定义。

定义 6.13。 (k, J, J') 的一个理想是一个三元组 (ℓ, U, U')，满足以下性质。

(i) ℓ是环 k的理想，且 U、 U'分别是 J、 J'的 k-子模。(ii) $\ell J \subseteq U$ 且 $\ell J' \subseteq U'$。
(iii) 对所有 $u \in U$、 $b' \in J'$， $T(u, b') \in \ell$；对所有 $u' \in U'$、 $b \in J$， $T(b, u') \in \ell$。
(iv) 对所有 $u \in U$、 $b \in J$， $u \times b \in U'$；对所有 $u' \in U'$、 $b' \in J'$， $u' \times b' \in U$。

例 6.14. 设 ℓ 是 k 的一个理想。那么 $(\ell, \ell J, \ell J')$ 是 (k, J, J') 的一个理想。特别地，$(0, 0, 0)$ 和 (k, J, J') 是 (k, J, J') 的理想，称为平凡理想。

例 6.15. 设

$$R := \{u \in J \mid T(u, a') = 0 \text{ for all } a' \in J'\} \quad \text{and}$$
$$R' := \{u' \in J' \mid T(a, u') = 0 \text{ for all } a \in J\}$$

分别表示 T 的左根和 T 的右根。那么，对于 (k, J, J') 的任意理想 (ℓ, U, U')，由引理 2.8(7) 可知，$(\ell, U + R, U' + R')$ 也是一个理想。特别地，$(\{0\}, R, R')$ 是 (k, J, J') 的一个理想。此外，若 $T = 0$，则对于 k 的所有理想 ℓ，(ℓ, J, J') 都是 (k, J, J') 的一个理想，因为此时 $R = J$ 且 $R' = J'$。

注 6.16。设 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J')的一个理想。于是根据定义 2.7，

$$D_{b,b'}(u), D_{u,b'}(b), D_{b,u'}(c) \in U \quad \text{and} \quad D_{b',b}(u'), D_{u',b}(b'), D_{b',u}(c') \in U$$

对所有 $b, c \in J$, $b', c' \in J'$, $u \in U$和 $u' \in U'$。

注 6.17。设 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J') 的一个理想。于是 $(J/U, J'/U')$ 是环 k/ℓ 上的线性三次范数对，带有诱导的自然映射 $\bar{T}$ 和 $\bar{\times}$。[2] 因此，我们得到相应的李代数 $L(J/U, J'/U')$，其定义在 k/ℓ 上。注意，$L(J/U, J'/U')$ 也可视为 k 上的李代数，而 $(J/U, J'/U')$ 则不能视为 k 上的线性三次范数对：通常无法将迹 $T\colon J/U \times J'/U' \to \ell$ 提升¯为一个像落在 k 中的映射，使其满足线性三次范数对的定义恒等式。此外，这个三元组

$$(\pi_k, \pi_J, \pi_{J'})\colon (k, J, J') \to (k/\ell, J/U, J'/U')$$

是一个带基环 即的线性三次范数对同态

$$\bar{T}\big(\pi_J(a), \pi_{J'}(a')\big) = \pi_k\big(T(a, a')\big)$$

对所有 $a \in J$、$a' \in J'$ 和 π_J，$\pi_{J'}$ 都与 $\times$相容，$\bar{\times}$（如定义2.24中关于 $t = 1$的情形）。该三元组诱导一个同态

$$L(\pi_k, \pi_J, \pi_{J'})\colon L(J, J') \to L(J/U, J'/U')$$

定义在 k 上的李代数同态，其定义方式与定义 5.4 完全相同（其中 $(\iota, , t)$ =$(\pi_J$, $\pi_{J'}$, 1)），但 $(\nu, 0, 0, \rho)_\pm$ 映射为 $(\pi_k(\nu)\ c, c', \pi_k(\rho))$，其中 ν、$\rho \in k$、$c \in J$、$c' \in J'$。根据构造，该李代数同态是满射的。下文中，当理想 (ℓ, U, U') 已由上下文明确时，我们将 $L(\pi_k, \pi_J, \pi_{J'})$ 以及满同态 $\pi_k\colon k \to k/\ell$、$\pi_J\colon J \to J/U$ 和 $\pi_{J'}\colon J' \to J'/U'$ 记作 $a \mapsto \bar{a}$。

我们希望将 (ℓ, U, U') 的每个理想与 (k, J, J') 的理想 $L(\ell, U, U')$ 关联起来。虽然 (ℓ, U, U') 明确规定了 $L(\ell, U, U')$ 对于 $\alpha \in G_2$ 应该是什么，但对于 $\alpha = (0, 0)$ 则并不明确。事实上，我们将定义分别对应于 (ℓ, U, U') 的最小理想和最大理想，并证明 L 的每个理想都被夹在这两个理想之间。

下面的定义由引理4.19所启发。

定义 6.18。设 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J') 的一个理想。(ℓ, U, U') 的根是 $L_{0,\ 0}$的 k-子模 Rad(ℓ, U, U')，由所有形如以下形式的元素组成

$$\sum \lambda_{a,a'} \mathbf{d}_{a,a'} + \lambda_\xi \xi + \lambda_\zeta \zeta$$

其中求和遍历有限多个 $a \in J$、$a' \in J'$ 和 $\lambda_{a,\ a'}$，$\lambda \in k$，使得以下性质成立。

---

[2]注意，即使 (J, J') 是一个真三次范数对，$(J/U, J'/U')$ 也未必具有真三次范数对的结构，因为 (k, J, J') 的理想定义完全没有涉及 N 和 $\sharp$。因此，将 (ℓ, U, U') 称为 (k, J, J') 的线性理想或许更为恰当，但我们不会这样称呼它。

(i) $\lambda_\zeta + 2\lambda_\xi \in \ell_\circ$ (ii) $\sum \lambda_{a,\ a'} T(a,\ a') \equiv 3\lambda_\xi$ 模 $\ell_\circ$ (iii) $\sum \lambda_{a,\ a'} D_{a,\ a'} \equiv 2\lambda_\xi \mathrm{id}_J$ 模 $U_\circ$ 也就是说，$\sum \lambda_{a,\ a'} D_{a,\ a'} - 2\lambda_\xi \mathrm{id}_J$ 的像包含于 U 中。(iv) $\sum \lambda_{a,\ a'} D_{a',\ a} \equiv 2\lambda_\xi \mathrm{id}_{J'}$ 模 $U'_\circ$ 也就是说，$\sum \lambda_{a,\ a'} D_{a',\ a} - 2\lambda_\xi \mathrm{id}_{J'}$ 的像包含于 U' 中。

定义 6.19。设 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J') 的一个理想。则我们定义 L 的以下子集：

$$\begin{aligned} L(\ell,U,U')_{\min} &:= \bigoplus_{\alpha\in G_2 \text{ long}} \vartheta_\alpha(\ell) \oplus \bigoplus_{\alpha\sim(1,0)} \vartheta_\alpha(U) \oplus \bigoplus_{\alpha\sim(1,1)} \vartheta_\alpha(U') \\ &\quad \oplus \big(\ell\xi + \ell\zeta + \langle \mathbf{d}_{a,a'} \mid a\in U, a'\in J' \text{ or } a\in J, a'\in U'\rangle\big), \\ L(\ell,U,U')_{\max} &:= \bigoplus_{\alpha\in G_2 \text{ long}} \vartheta_\alpha(\ell) \oplus \bigoplus_{\alpha\sim(1,0)} \vartheta_\alpha(U) \oplus \bigoplus_{\alpha\sim(1,1)} \vartheta_\alpha(U') \\ &\quad \oplus \mathrm{Rad}(\ell,U,U'). \end{aligned}$$

此外，对所有 $i \in \{-2,\dots,2\}$ 以及 $\sigma \in \{\min, \max\}$，我们令 $L_i(\ell,U,U')_\sigma := L(\ell,U,U')_\sigma \cap L_i$。

注 6.20。容易验证，$L(\ell,U,U')_{\min}$ 包含于 $L(\ell,U,U')_{\max}$。

在讨论 L 的理想分类之前，我们需要给出根的两种替代刻画。

引理 *6.21*。设 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J') 的一个理想。那么，注 *6.17* 中满同态 $\pi\colon L(J,J') \to L(J/U, J'/U')$ 的核恰为 $L(\ell,U,U')_{\max}$。特别地，$L(\ell,U,U')_{\max}$ 是 L 的一个理想，并且 $L(\{0\},\{0\},\{0\})_{\max} = 0$。

证明。令 K 表示 π的核。由命题 6.12，$K = \bigoplus_{\alpha\in G_2^0} \pi_\alpha(K)$。根据 π的定义，对于所有 $\alpha \in G_2$，有 $\pi_\alpha(K) = \pi_\alpha(L(\ell,U,U')_{\max})$。现在任取$f \in L_{0,0}$，并写作

$$f = \sum \lambda_{a,a'} \mathbf{d}_{a,a'} + \lambda_\xi \xi + \lambda_\zeta \zeta$$

其中求和遍历有限多个 $a \in J$、$a' \in J'$ 以及$\lambda_{a,a'}, \lambda \in k$。于是

$$\bar{f} = \sum \overline{\lambda_{a,a'}} \mathbf{d}_{\bar{a},\bar{a'}} + \overline{\lambda_\xi}\bar{\xi} + \overline{\lambda_\zeta}\bar{\zeta} \in L(J/U, J'/U').$$

根据引理 4.19，有 $f = 0$ 当且仅当 $f \in \mathrm{Rad}(\ell,U,U')$。断言得证。□

引理 6.22。设(ℓ, U, U') 是(k, J, J') 的一个理想，并设 $\sigma \in \{$最小、最大$\}$。则

$$\begin{aligned} \mathrm{Rad}(\ell,U,U') &= \{f \in L_{0,0} \mid [f,L] \subseteq L(\ell,U,U')_\sigma\} \\ &= \{f \in L_{0,0} \mid [f,L_i] \subseteq L_i(\ell,U,U')_\sigma \text{ for } i \in \{-2,-1,1,1\}\}. \end{aligned}$$

证明。设

$$f = \sum \lambda_{a,a'} \mathbf{d}_{a,a'} + \lambda_\xi \xi + \lambda_\zeta \zeta$$

表示 $L_{0,\,0}$ 的任意一个元素。我们有直接的蕴含关系

$$\begin{array}{ccc} [f,L]\subseteq L(\ell,U,U')_{\min} & \Longrightarrow & [f,L_i]\subseteq L_i(\ell,U,U')_{\min} \text{ for } i\in\{-2,-1,1,1\} \\ \Downarrow & & \Updownarrow \\ [f,L]\subseteq L(\ell,U,U')_{\max} & \Longrightarrow & [f,L_i]\subseteq L_i(\ell,U,U')_{\max} \text{ for } i\in\{-2,-1,1,1\} \end{array}$$

此外，由引理 6.21，我们有 $f\in\mathrm{Rad}(\ell,\ U,\ U')$ 当且仅当 $f=0$。根据李代数的 0-部分的定义，这等价于以下条件 $[f,L_i(J/U,\ J'/U')]=0$ 对所有 $i\in\{-2,-1,1,2\}$。这里

$$[\bar{f},L_i(J/U,J'/U')]=[\bar{f},\overline{L_i}]=\overline{[f,L_i]}.$$

因此，$f\in\mathrm{Rad}(\ell,\ U,\ U')$ 当且仅当 $[f,L_i]\subseteq\ker(\pi)=L(\ell,\ U,\ U')_{\max}$ 对所有 $i\in\{-2,-1,1,2\}$成立。因此

$$\mathrm{Rad}(\ell,U,U')=\{f\in L_{0,0}\mid [f,L_i]\subseteq L_i(\ell,U,U')_{\max} \text{ for } i\in\{-2,-1,1,1\}\}.$$

现在假设 $f\in\mathrm{Rad}(\ell,U,U')$。我们必须证明 $[f,L]\subseteq L(\ell,U,U')_{\min}$。由于对所有 $\alpha\in G_2$，$L(\ell,U,U')_{\min}\cap L_\alpha=L(\ell,U,U')_{\max}\cap L_\alpha$，因此只需证明 $[f,L_{0,0}]\subseteq L(\ell,U,U')_{\min}$。任取 $c\in J,\ c'\in J'$。那么，通过与推论 4.13 中相同的计算，

$$[f,\mathbf{d}_{c,c'}]=\mathbf{d}\big(\sum\lambda_{a,a'}D_{a,a'}(c),c'\big)-\mathbf{d}\big(c,\sum\lambda_{a,a'}D_{a',a}(c')\big).$$

这里，根据根的定义，

$$\sum\lambda_{a,a'}D_{a,a'}(c)\in 2c+U\quad\text{and}\quad\sum\lambda_{a,a'}D_{a',a}(c')\in 2c'+U'.$$

因此 $[f,\mathbf{d}_{c,\ c'}]\in\mathbf{d}(U,\ c')+\mathbf{d}(c,\ U')\subseteq L(\ell,\ U,\ U')_{\min}$。又由于 $[f,\xi]=0=[f,\zeta]$，我们推得 $[f,L_{0,0}]\subseteq L(\ell,\ U,\ U')_{\min}$。□

引理 6.23。设 (ℓ,U,U') 是 (k,J,J') 的一个理想，并设 V 是$\mathrm{Rad}(\ell,U,U')$的一个 k-子模。那么 $L(\ell,U,U')_{\min}+V$是 L 的一个理想。

证明。根据引理6.22，只需证明 $L(\ell,\ U,\ U')_{\min}$是 L的一个理想。这可通过检查表 1，并利用定义6.13中理想的性质以及注6.16而得。□

命题 6.24。设 I是 L的一个理想。那么存在唯一的理想 (ℓ,U,U')属于 (k,J,J')，使得

$$L(\ell,U,U')_{\min}\subseteq I\subseteq L(\ell,U,U')_{\max}.$$

此外，存在唯一的 k-子模 V 属于 $L_{0,\,0}$，满足

$$\big(\ell\xi+\ell\zeta+\langle\mathbf{d}_{a,a'}\mid a\in U,a'\in J'\ or\ a\in J,a'\in U'\rangle\big)\subseteq V\subseteq\mathrm{Rad}(\ell,U,U')$$

使得 $I=L(\ell,U,U')_{\min}+V$。

证明。取一个长根 $\alpha\in G_2$和短根 $\beta,\gamma\in G_2$，使得 $\beta\sim(1,0)$ 且 $\gamma\sim(1,1)$。我们根据以下性质，分别定义 $k,\ J,\ J'$的子群 $\ell,\ U,\ U'$：

$$\vartheta_\alpha(\ell)=\pi_\alpha(I),\quad \vartheta_\beta(U)=\pi_\beta(U),\quad \vartheta_\gamma(U')=\pi_\gamma(U'). \tag{18}$$

根据引理 6.7，且因为 I是一个理想，(ℓ,U,U') 不依赖于所作的选择 e α、β、γ。因此

$$I\cap L_\alpha=L(\ell,U,U')_{\min}\cap L_\alpha=L(\ell,U,U')_{\max}\cap L_\alpha$$

对所有的 $\alpha \in G_2$ 均成立。此外，$\ell\xi = \varphi_{\alpha\to\xi}(\pi_\alpha(I)) \subseteq I$ 且 $\ell\zeta = \varphi_{\alpha\to\zeta}(\pi_\alpha(I)) \subseteq I$。现在令 $a \in U$ 和 $a' \in J'$。则 $\mathbf{d}_{a,\,a'} = [a', a] \in [L, I] \subseteq I$。类似地，若 $a \in J$ 和$a' \in U'$，则同样有 $\mathbf{d}_{a,\,a'} \in I$。我们得出 $L(\ell,\ U,\ U')_{\min} \subseteq I$。由于

$$[V, L_i] \subseteq [I \cap L_0, L_i] \subseteq I \cap L_i = L_i(\ell, U, U')$$

对所有 $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$，由引理 6.22 可知 $V \subseteq L(\ell,\ U,\ U')_{\max}$，因此

$$L(\ell, U, U')_{\min} \subseteq I \subseteq L(\ell, U, U')_{\max}.$$

注意，(ℓ, U, U') 由此性质唯一确定，因为它必须满足 (18)。此外，由于 $L(\ell, U, U')_{\min}$与 $L(\ell, U, U')_{\max}$仅在 (0, 0) 分量上不同，因此存在断言中所述的 V，使得 $I = L(\ell, U, U')_{\min} + V$，并且它由 $V = \pi_{(0,0)}(I)$ 唯一确定。□

命题6.24 有一些直接推论。

定理 6.25。 设 (J, J') 是交换环 k上的三次范数对（或更一般地，线性三次范数对）。那么以下断言等价。

(i) $(k,\ J,\ J')$ 是单的，即它只有平凡理想 $(0,\ 0,\ 0)$ 和$(k,\ J,\ J')$。(ii) L 是单的，即它只有平凡理想 $\{0\}$和 L。(iii) k 是单的（因此是一个域），且 T 是非退化的（也就是说，例*6.15* 中定义的左右根基均为零）。

证明。首先注意，根据引理 6.21，$L(0,0,0)_{\max} = 0$，且 $L(k, J, J')_{\min} = L$。因此，由命题 6.24 可知，若 (k, J, J') 是单的，则 L 是单的。反过来，若 (k, J, J') 有一个非平凡理想 (ℓ, U, U')，则 $L(\ell, U, U')_{\min}$ 和 $L(\ell, U, U')_{\max}$ 是 L 的非平凡理想。这证明了前两个陈述等价。

假设 k 是单的（因而由于交换性，它是一个域），且 T 是非退化的，并令 (ℓ, U, U') 是 (k, J, J') 的一个理想。如果 $\ell = 0$，那么对于所有 $u \in U$、$b' \in J'$，$T(u, b') = 0$，所以 $U = 0$，因为 T 是非退化的。同样，在这种情况下，$U' = 0$。然而，如果 $\ell = k$，那么 $U = J$ 且 $U' = J'$，因为 $\ell J \subseteq U$ 和 $\ell J' \subseteq U'$。

现在假设 (k, J, J') 是单的。由于 k 的任意理想 ℓ 根据例 6.14 诱导出 (k, J, J') 的一个理想 $(\ell, \ell J, \ell J')$，k 必须是单的。此外，由于 T 的根 R、R' 根据例 6.15 诱导出 (k, J, J') 的一个理想 $(0, R, R')$，T 必须是非退化的。□

注 6.26。 在第 9 节中，我们将看到，域上的合成代数上的三次约旦矩阵代数提供了满足定理 $(k,\ J,\ J')$ 中性质的对6.25 的例子。详见注 9.9 。此外，我们指出，三次约旦矩阵代数的理想（但相应三元组的理想并非如此$(k,\ J,\ J)$）已在 [GPR24，第 37 节中26]进行了分类。

引理 6.27。 L 的中心是平凡的。

证明。 由于中心 $Z(L)$ 是一个理想，因此存在 (k, J, J') 的一个理想 (ℓ, U, U')，使得

$$L(\ell, U, U')_{\min} \subseteq Z(L) \subseteq L(\ell, U, U')_{\max}.$$

然而，由引理 6.7 可得，对于所有 $\alpha \in G_2$， $Z(L) \cap L_\alpha = 0$。因此 $(\ell, U, U') = (0, 0, 0)$。由于根据引理 6.21， $L(0, 0, 0)_{\max} = 0$，可知 $Z(L) = 0$。□

7. G_2-分次的指数映射

现在，我们准备通过对李代数中适当的伴随映射进行“指数化”，从根分次李代数转向根分次群。然而，由于 2 和 3 在基环 k 中未必可逆，我们无法用通常的公式 $\exp(a) := \sum_{i=0}^{4} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_a^i$ 来定义指数映射（从分次可以很容易看出，对于所有 $i \geq 5$， $\mathrm{ad}_a^i = 0$）。相反，我们将用适当的李代数自同态 $\theta_a^{[i]}$ 替代每一项 $\frac{1}{i!} \mathrm{ad}_a^i$；如果 2 和 3 在 k 中恰好可逆，则该自同态与 $\frac{1}{i!} \mathrm{ad}_a^i$ 一致。 $\theta_a^{[i]}$ 的定义涉及高次映射 N 和 $\sharp$，因此从现在起直到本文结束，我们必须假设 (J, J') 是严格意义上的三次范数对，而不仅仅是线性三次范数对。

由于每个根 $\alpha \in G_2$ 对应的指数映射都由不同的显式公式定义，因此我们必须“手动”证明许多基本性质；而在 2 和 3 可逆的基环上，这些性质可由表达式 $\exp(a) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathrm{ad}_a^i$ 推出。最重要的是，指数自同构确实与李括号相容这一性质；我们在 A 节中利用所谓的“高阶莱布尼茨法则”证明了这一点。不过，有些性质可以用更抽象的方式建立，借助的是我们在 7.1 节中引入并研究的 α-参数化框架。在 7.2 节中，我们构造了我们感兴趣的 $L(J, J')$ 中的具体 α-参数化，并在 7.3 节中验证它们满足某些交换子公式。此外，我们在 B 节中通过冗长但直接的计算证明，若 J 含有一个范数可逆的元素，则第 5 节中的反射 $\varphi_{\leftrightarrow}$ 和 φ 是 Weyl元，因此得出结论：对于每个三次范数结构 J，我们在 $\mathrm{Aut}(L(J, J'))$ 中都有一个 G_2-分次群。

7.1. 指数映射的一般性质。 在本小节中，我们用 Φ 表示任意一个（有限、约化、结晶的）根系，并用 $L = \bigoplus_{\beta \in \Phi^0} L_\beta$ 表示某个交换基环 k 上的 Φ-分次李代数。

定义 7.1。 设 $\alpha \in \Phi$。一个 α-参数化 是一个映射

$$\exp_\alpha \colon \bar{L}_\alpha \to \mathrm{Aut}(\bar{L}) \colon a \mapsto e_a$$

形式为

$$e_a = \sum_{i \geq 0} \theta_a^{[i]},$$

其中每个 $\theta_a^{[i]}$ 都是 $\bar{L}$ 的 k-模自同态，并满足：

(a) $\theta_a^{[i]}(\bar{L}_\beta) \leq \bar{L}_{\beta + i\alpha}$ 对所有 $\beta \in \Phi^0$,
(b) $\theta_a^{[0]} = \mathrm{id}$ 与 $\theta_a^{[1]} = \mathrm{ad}_a$, (c)
$\theta_{\lambda a}^{[i]} = \lambda^i \theta_a^{[i]}$, (d) $e_\alpha(a + b) = e_\alpha(a)$
$e_\alpha(b)$,

对所有 a，$b \in L_\alpha$ 以及所有 $\lambda \in k$。映射 e_α 的像中的自同构称为α-指数自同构。由(d)，像 $e_\alpha(L_\alpha)$构成一个阿贝尔群，我们称之为根群（对应于根 α）。

注记 7.2. (i) 与我们的记号可能暗示的相反，一个 α-参数化通常并不唯一，即使当 k 例如是特征为 0 的域时也是如此。另见 [DMM25，定理 3.13(v)]。(ii) 若 $\exp_\alpha\colon L_\alpha \to$ 自同构群$(L)\colon a \mapsto e_a$ 是一个 α-参数化，则 $\bar{L}$ 的、对所有 $a \in \bar{L}_\alpha$ 满足 $e_a = \sum_{i\geq 0} \theta_a^{[i]}$的 k-线性自同态 $\theta_a^{[i]}$由 $\exp_\alpha$唯一确定。(iii) 设 $\exp_\alpha$ 为一个 α-参数化，设 $1 \neq t \in k$ 可逆，并设$\mu_t\colon L_\alpha \to L_\alpha\colon a \mapsto ta$。则 $\exp_\alpha \circ \mu_t$ 满足一个 α-参数化的全部公理，除了 $\theta_a^{[1]} = \mathrm{ad}_a$。

我们首先证明，参数化在反射作用下具有良好的性质。

引理 7.3. 设 $L' = \bigoplus_{\beta\in\Phi'} L'_\beta$ 是另一个 Φ'分次李代数，设 $\alpha, \beta \in \Phi$，设 $\varphi\colon L \to L'$ 是一个 β反射（定义 5.7意义下），并设 $\exp'_\alpha\colon L'_\alpha \to$ 自同构群(L') 是一个 α参数化（在 L'中）。则映射

$$\exp_{\alpha^{\sigma(\beta)}}\colon \bar{L}_{\alpha^{\sigma(\beta)}} \to \mathrm{Aut}(\bar{L})\colon a \mapsto \varphi^{-1} \circ \exp'_\alpha\big(\varphi(a)\big) \circ \varphi$$

是一个 $\alpha^{\sigma(\beta)}$-参数化（在 $\bar{L}$ 中）。

证明。 定义 7.1中的公理可利用 σ_β 对于(a)的线性性直接验证。 □

接下来，我们证明对应于相邻根的参数化彼此交换，这使我们可以在命题 7.23中省略换位子关系计算的几个情形。

定义 7.4。 设 Φ 是一个根系。若一对根 α、$\beta \in \Phi$ 满足以下条件，则称其 相邻：它们不成比例，且根据定义 $]\alpha$、$\beta[$ 中的根区间 1.5(ii) 为空。

引理 7.5。 设 Φ 是一个根系，且 α、$\beta \in \Phi$ 相邻。则对于所有$\gamma \in \Phi$ 以及所有 i、$j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$，都有 $\gamma + i\alpha + j\beta \notin \Phi$。

证明。 我们将根系 Φ 在欧几里得空间中归一化，使短根的欧几里得长度为 1。反设 i、$j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ 满足$i\alpha + j\beta$是两个根 γ、$\delta \in \Phi$之和，因此有 $i\alpha + j\beta = \gamma + \delta$。

我们首先注意到，相邻根 α 与 β 之间的角至多为 $90°$。事实上，α 与 β 包含在一个秩 2 的公共根子系中，因此只需考察可能性 $A_1 \times A_1$、A_2、$B_2 = C_2$ 和 G_2，即可看出，夹角位于区间 $]90°, 180°[$ 内的一对根不可能相邻。由此可知，欧几里得长度 $\|i\alpha + j\beta\|$ 在 $i = j = 2$处取得最小值。换言之，只需证明

$$2\|\alpha + \beta\| > \|\gamma + \delta\| \quad \text{for all } \gamma, \delta \in \Phi. \tag{19}$$

当 $\Phi = G_2$ 相邻根只有 3 种可能的构型（在对称意义下），即要么 α 和 β 都是长根，且夹角为 $60°$；要么其中一个

是短根，另一个是长根，夹角为 $30°$ 或 $90°$。无论哪种情况，我们都有 $\|\alpha+\beta\|>2$。由于根的长度至多为 $\sqrt{3}$，因此 $\|\gamma+\delta\|\leq 2\sqrt{3}$，并且（19）成立。

现在假设 $\Phi\neq G_2$，因此所有根的长度都不超过 $\sqrt{2}$。特别地，

$$\|\gamma+\delta\|\leq 2\sqrt{2}. \tag{20}$$

另一方面，由于 α 和 β 的夹角至多为 $90°$，我们有

$$2\|\alpha+\beta\|\geq 2\sqrt{\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2}. \tag{21}$$

现在假设 (19) 不成立。那么 $\sqrt{\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2}\leq\sqrt{2}$，由此可得$\|\alpha\|=\|\beta\|=1$，即 α 和 β 都是短根；此外，不等式 (20) 和 (21) 都取等号。这意味着一方面，$\gamma=\delta$ 是长根；另一方面，α 和 β 的夹角为 $90°$。式 (19) 取等号而非不等式，这一事实还意味着 $i=j=2$，因此 $2\alpha+2\beta=\gamma+\delta$。然而，由于 $\gamma=\delta$，我们现在看到 $\alpha+\beta=\gamma$，这与 α和β 相邻这一事实矛盾。□

引理 7.6. 设 $\alpha,\beta\in\Phi$ 相邻，且

$$\exp_\alpha\colon \bar{L}_\alpha\to \mathrm{Aut}(\bar{L})\colon a\mapsto\sum_{i\geq 0}\theta_a^{[i,\alpha]}\quad \textit{and}\quad \exp_\beta\colon \bar{L}_\beta\to \mathrm{Aut}(\bar{L})\colon b\mapsto\sum_{i\geq 0}\theta_b^{[i,\beta]}$$

分别是一个 α-参数化和一个 β-参数化。则对所有 $x_\alpha\in L_\alpha$ 和 $x_\beta\in L_\beta$，自同构$\exp_\alpha(x_\alpha)$ 与$\exp_\beta(x_\beta)$ 可交换。

证明。设 $x_\alpha\in L_\alpha$ 和 $x_\beta\in L_\beta$。对每个 $i\in\mathbb{N}$ 和 $\zeta\in\{\alpha,\beta\}$ 以及 $y:=x_\zeta$，令$\delta_\zeta^i:=\theta_y^{[i,\zeta]}$。由于

$$\exp_\alpha(x_\alpha)\circ\exp_\beta(x_\beta)=\left(\sum_{i\geq 0}\delta_\alpha^i\right)\circ\left(\sum_{j\geq 0}\delta_\beta^j\right)=\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\delta_\alpha^i\circ\delta_\beta^j,$$

只需证明对所有 $i,j\geq 0$，δ_α^i 与 δ_β^j 可交换。若 $i,j\geq 2$，则由引理 7.5 可知，对所有 $\gamma\in\Phi$，$\delta_\alpha^i\circ\delta_\beta^j$ 和 $\delta_\beta^j\circ\delta_\alpha^i$ 在 L_γ 上均为零。若$i=0$ 或 $j=0$，则 δ_α^i 或 δ_β^j 是恒等映射。剩下的情况是 $i=1$ 或 $j=1$，不妨设为 $i=1$。于是 $\delta_\alpha^i=\mathrm{ad}x_\alpha$。由引理 A.2，自同态 $\delta_\beta^0,\delta_\beta^1,\ldots$ 满足高阶莱布尼茨法则 $(*)_\ell$。因此，对所有 $\gamma\in\Phi$、$j\geq 0$ 和 $x_\gamma\in L_\gamma$，我们有

$$\delta_\beta^j\circ\delta_\alpha^i(x_\gamma)=\delta_\beta^j([x_\alpha,x_\gamma])=\sum_{\ell=0}^{j}[\delta_\beta^\ell(x_\alpha),\delta_\beta^{j-\ell}(x_\gamma)].$$

由于对于所有 $\ell\geq 0$ 和 α，$\delta_\beta^\ell(x_\alpha)\in L_{\alpha+\ell\beta}$，$\beta$ 彼此相邻，因此除 $\ell=0$ 外，所有加项均为零。因此 $\delta_\beta^j\circ\delta_\alpha^i(x_\gamma)=[x_\alpha,\delta_\beta^j(x_\gamma)]=\delta_\alpha^i\circ\delta_\beta^j(x_\gamma)$。我们得出结论，$\delta_\alpha^i$ 和 δ_β^j 在所有情况下都可交换，因此 $\exp_\alpha(x_\alpha)$ 与 $\exp_\beta(x_\beta)$ 可交换。□

在第B节中，我们将证明，定义 $\varphi_\leftrightarrow$ 和 φ 5.8和 5.18 中的反射是 Weyl 元。为此，我们必须验证它们的共轭作用会相应地置换根群。根据注 $\varphi_\leftrightarrow^2$ 和 φ^2 5.13 和 5.19，它们是某些分次的奇偶自同构，以下结果

使我们能够从 $U_\alpha^\varphi = U_{\sigma(\alpha)}$ 推出 $U_{\sigma(\alpha)}^\varphi = U_\alpha^{\varphi^2} = U_\alpha$，其中 $\alpha \in G_2$，$\varphi \in \{\varphi_\leftrightarrow, \varphi_\nwarrow\}$ 以及 $\sigma\colon G_2 \to G_2$ 由 φ 诱导的反射。这使所需的计算量减少了一半。具体而言，参见引理 B.4、B.10、B.18 至 B.20、B.22 和 B.23。

引理 7.7. 设 $p \in \mathbb{N}$，并假设 Φ 具有一个 $(2p+1)$-分次，即存在一个分解 $\Phi = \bigsqcup_{i=-p}^{p} \Phi_i$，使得对于所有 i、$j \in \mathbb{Z}$，$(\Phi_i + \Phi_j) \cap \Phi \subseteq \Phi_{i+j}$（其中，当 $|i| > p$ 时，$\Phi_i := \emptyset$），且对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，$\Phi_{-i} = -\Phi_i$。令 $L_i := \bigoplus_{\alpha\in\Phi_i} L_\alpha$，对所有 $i \in \mathbb{Z}$、均成立，从而 $(L_i)_{-p\le i\le p}$ 是 L 的一个 $(2p+1)$-分次。设 $\exp_\alpha\colon L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)$ 是某个 $\alpha \in \Phi$ 的 α-参数化，并令 $\varphi\colon L \to L$ 表示 L 相对于 $(2p+1)$-分次的奇偶自同构，使得对于所有 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $x_i \in L_i$，$\varphi(x_i) = (-1)^i x_i$。那么对于所有 $a \in L_\alpha$，有

$$\varphi^{-1} \circ \exp_\alpha(a) \circ \varphi = \exp_\alpha\big(\varphi(a)\big).$$

证明。对于所有 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\beta \in \Phi_i$，令 $\epsilon_\beta := (-1)^i$，并令 $\epsilon_0 := 1$。那么对于所有满足 $\beta + \gamma \in \Phi$ 的 $\beta, \gamma \in \Phi$，都有 $\epsilon_{\beta+\gamma} = \epsilon_\beta \epsilon_\gamma$。由于 Φ 中的根串没有断裂，因此对于所有满足 $\beta + i\gamma \in \Phi^0$ 的 $\beta, \gamma \in \Phi^0$ 和 $i \in \mathbb{Z}$，都有 $\epsilon_{\beta+i\gamma} = \epsilon_\beta \epsilon_\gamma^i$。现在任取 $\beta \in \Phi^0$ 和 $b \in \bar{L}_\beta$。那么

$$\varphi^{-1} \circ \exp_\alpha(a) \circ \varphi(b) = \epsilon_\beta \sum_{i\ge 0} \epsilon_{\beta+i\alpha} \theta_a^{[i]}(b) \quad \text{and}$$

$$\exp_\alpha\big(\varphi(a)\big)(b) = \exp_\alpha(\epsilon_\alpha a)(b) = \sum_{i\ge 0} \theta_{\epsilon_\alpha a}^{[i]}(b) = \sum_{i\ge 0} \epsilon_\alpha^i \theta_a^{[i]}(b).$$

由于对于所有 $i \in \mathbb{Z}$ 都有 $\epsilon_\beta \epsilon_{\beta+i\alpha} = \epsilon_\beta^2 \epsilon_\alpha^i = \epsilon_\alpha^i$，结论成立。 □

下面的一般性结果将使我们能够为 1.5(iv) 公理 Φ<style id='8}-分次群同时确立 $\Phi = G_2$ 和 $\Phi = F_4$<style id='14}。其论证与 Chevalley群的情形相同（例如参见 [Ste16] 中的引理18推论3）

命题 7.8. 对每个 $\alpha \in \Phi$，令 $\exp_\alpha\colon L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)$ 为一个 α-参数化，并令 U_α 表示相应的根群。此外，令 Π 为 Φ 中的任意根的正系统，并用 U_+ 和 U_- 分别表示由 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ 和 $(U_\alpha)_{\alpha\in-\Pi}$ 生成的群。则 $U_+ \cap U_- = 1$。特别地，根群 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ 满足公理 1.5(iv)。

证明. 用 ht: $\Phi \to \mathbb{Z}$ 表示关于 Π 的高度函数，并将其扩展为 $\Phi^0 := \Phi \cup \{0\}$ 上的函数，规定 $\mathrm{ht}(0) := 0$。令 $\ell := |\Phi^0|$，并对 Φ^0 中的元素选取一个排序 $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$，使得对所有 $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$，若 $\mathrm{ht}(\alpha_i) < \mathrm{ht}(\alpha_j)$，则 $i < j$。对于所有 $\alpha \in \Pi$ 和所有 $\phi \in U_\alpha$，由于 $\exp_\alpha$ 是一个 α-参数化且 $\mathrm{ht}(\alpha) > 0$，以下性质成立：存在一个 k-线性映射 $\phi'\colon L \to L$，使得 $\phi = \mathrm{id}_{\bar{L}} + \phi'$，且对所有 $m \in \{1, \dots, \ell\}$，$\phi'(L_{\alpha_m}) \subseteq \sum_{m<j\le\ell} L_{\alpha_j}$。由于这对所有 $\alpha \in \Pi$ 均成立，我们推知所有 $\phi \in U_+$ 都具有相同的性质。类似地，所有 $\phi \in U_-$ 都可写为 $\phi = \mathrm{id}_{\bar{L}} + \phi'$，其中 $\phi' \in \mathrm{End}(L)$，且对所有 $m \in \{1, \dots, \ell\}$，$\phi'(L_{\alpha_m}) \subseteq \sum_{1\le j<m} L_{\alpha_j}$。由于和 $\bigoplus_{j=1}^{\ell} \bar{L}_{\alpha_j}$ 是直和，可得 $U_+ \cap U_- = \{\mathrm{id}_{\bar{L}}\}$。□

注记 7.9. 设 $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$ 如命题 7.8 的证明中所述。那么，$\mathrm{Aut}(L)$ 中的任意元素相对于直和分解 $L = \bigoplus_{j=1}^{\ell} L_{\alpha_j}$ 都有一个“矩阵”。上述证明中的论证恰好说明，这个矩阵是

对 U_+ 中的所有元素而言是下三角幺幂矩阵，对 U_-中的所有元素而言是上三角幺幂矩阵。

7.2. L中的指数映射定义。本节余下部分中，我们假设(J, J')是 k上的三次范数对，并令 $L = L(J, J')$表示第 4 节中的 G_2-分次李代数。我们的下一个目标是构造一个 α-参数化 $L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)$：对每个根 $\alpha \in G_2$， $a \mapsto e_a$ 属于 L 。我们通过给出涉及映射 N 和 $\sharp$的显式公式来实现这一点，因此我们的构造不适用于第2.2节中引入的更一般的线性三次范数对。至于第 5 节中定义的反射，这些映射的良定义性并非显而易见，将在引理 7.17 中验证（另见注 5.3）。

注 7.10. 在本注的讨论范围内，我们按照注 4.4，将G_2^0 视为 $\mathbb{Z}^2$ 的子集。令 $\alpha \in G_2$ ，并固定一个 k-模的同构 ϑ： $P_\alpha \cong L_\alpha$ （不一定是定义 6.4 中的同构）。若$\exp_\alpha \circ \vartheta^{-1}$ 是一个 α-参数化，则映射$\exp_\alpha$： $P_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)$可称为相对于 ϑ 的 α-参数化。注意，定义 7.1 中的性质 (a)、(c) 和 (d) 不依赖于ϑ的选取，但 (b) 则依赖。在研究 L的 G_2-分次时，我们总是（隐含地）选取定义 6.4 中“自然的”同构，因此，作为映射定义在 P_α 上的参数化与作为映射定义在 L_α 上的参数化之间的区别几乎不可见。然而，当我们将 G_2-分次细化为 F_4-分次时，选取 L_β （对于 $\beta \in F_4$）与相应参数化结构 P_β之间的非平凡同构会更加自然，此时 L_β 与 P_β之间的区别就至关重要。详情见第10.3节。

定义 7.11. 设 $\lambda \in k$。我们定义 k-模 L的自同态 $e_{\lambda x}$ 和 $e_{\lambda y}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
e_{\lambda x}(x) &\coloneqq x,\\
e_{\lambda x}\big((\nu, c, c', \rho)_-\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_-,\\
e_{\lambda x}(c') &\coloneqq c',\\
e_{\lambda x}(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'}, \quad e_{\lambda x}(\xi) \coloneqq \xi + 2\lambda x, \quad e_{\lambda x}(\zeta) \coloneqq \zeta + \lambda x,\\
e_{\lambda x}(c) &\coloneqq c,\\
e_{\lambda x}\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_+ - \lambda(\nu, c, c', \rho)_-,\\
e_{\lambda x}(y) &\coloneqq y + \lambda\xi + \lambda^2 x
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
e_{\lambda y}(x) &\coloneqq x - \lambda\xi + \lambda^2 y,\\
e_{\lambda y}\big((\nu, c, c', \rho)_-\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_- + \lambda(\nu, c, c', \rho)_+,\\
e_{\lambda y}(c') &\coloneqq c',\\
e_{\lambda y}(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'}, \quad e_{\lambda y}(\xi) \coloneqq \xi - 2\lambda y, \quad e_{\lambda y}(\zeta) \coloneqq \zeta - \lambda y,\\
e_{\lambda y}(c) &\coloneqq c,\\
e_{\lambda y}\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_+,\\
e_{\lambda y}(y) &\coloneqq y
\end{aligned}
$$

对所有 $\nu, \rho \in k$, $c \in J$, $c' \in J'$。

定义 7.12. 设 $\lambda,\mu \in k$, $b \in J$, $b' \in J'$, 令 $a \coloneqq (\lambda, b, b', \mu)_+ \in L_1$, 并假设元素 λ, b, b', μ 中至多一个非零。我们定义 k-模 L的一个自同态 e_a 如下:

$$
\begin{aligned}
e_a(x) &\coloneqq x + (\lambda, b, b', \mu)_- - b^\sharp - (b')^\sharp + \big(-N(b), 0, 0, N(b')\big)_+,\\
e_a\big((\nu, c, c', \rho)_-\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_-\\
&\quad + \lambda c' - c \times b + \nu b'\\
&\quad - \mathbf{d}_{b,c'} - \mathbf{d}_{c,b'}\\
&\quad + \big(\rho\lambda - T(b, c')\big)(\xi - \zeta) + \big(T(c, b') - \nu\mu\big)\zeta\\
&\quad + \rho b - c' \times b' + \mu c\\
&\quad + \big(-\rho\lambda^2 - T(b^\sharp, c), U_b(c') + \nu(b')^\sharp,\\
&\qquad\qquad - \rho b^\sharp - U_{b'}(c), T(c', (b')^\sharp) + \nu\mu^2\big)_+\\
&\quad + \big(-\rho N(b) - \nu N(b')\big)y,\\
e_a(c') &\coloneqq c' + \big(T(b, c'), c' \times b', \mu c', 0\big)_+ - T((b')^\sharp, c')y,\\
e_a(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} + \big(\lambda T(c, c'), -D_{c,c'}(b) + T(c, c')b,\\
&\qquad\qquad D_{c',c}(b') - T(c, c')b', -\mu T(c, c')\big)_+,\\
e_a(\xi) &\coloneqq \xi - a,\\
e_a(\zeta) &\coloneqq \zeta + (\lambda, 0, -b', -2\mu)_+,\\
e_a(c) &\coloneqq c - \big(0, \lambda c, c \times b, T(c, b')\big)_+ - T(c, b^\sharp)y,\\
e_a\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_+ + \big(T(b, c') - T(c, b') + \mu\nu - \lambda\rho\big)y,\\
e_a(y) &\coloneqq y
\end{aligned}
$$

对所有 $\nu, \rho \in k$, $c \in J$, $c' \in J'$。

定义 7.13。令 $\lambda,\ \mu \in k$、$b \in J$、$b' \in J'$, 置 $a \coloneqq (\lambda,\ b,\ b',\ \mu)_- \in L_{-1}$, 并假设元素 λ、b、b'、μ 中至多有一个非零。我们通过令其满足以下条件来定义 k-模 L的一个自同态 e_a

$$
\begin{aligned}
e_a(x) &\coloneqq x,\\
e_a\big((\nu, c, c', \rho)_-\big) &\coloneqq (\nu, c, c', \rho)_- + \big(T(b, c') - T(c, b') + \mu\nu - \lambda\rho\big)x,\\
e_a(c') &\coloneqq c' + \big(T(b, c'), c' \times b', \mu c', 0\big)_- - T((b')^\sharp, c')x,\\
e_a(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} + \big(\lambda T(c, c'), -D_{c,c'}(b) + T(c, c')b,\\
&\qquad\qquad D_{c',c}(b') - T(c, c')b', -\mu T(c, c')\big)_-,\\
e_a(\xi) &\coloneqq \xi + (\lambda, b, b', \mu)_-,\\
e_a(\zeta) &\coloneqq \zeta + (2\lambda, b, 0, -\mu)_-,\\
e_a(c) &\coloneqq c - \big(0, \lambda c, c \times b, T(c, b')\big)_- - T(c, b^\sharp)x,\\
e_a\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) &= (\nu, c, c', \rho)_+\\
&\quad - \lambda c' + b \times c - \nu b'\\
&\quad + \mathbf{d}_{b,c'} + \mathbf{d}_{c,b'}\\
&\quad + \big(\lambda\rho - T(b, c')\big) \cdot \zeta + \big(T(c, b') - \mu\nu\big) \cdot (\xi - \zeta)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \rho b + b' \times c' - \mu c \\
&+ \big(\rho\lambda^2 + T(c, b^\sharp), -U_b(c') - \nu (b')^\sharp, \\
&\qquad\qquad \rho b^\sharp + U_{b'}(c), -T((b')^\sharp, c') - \mu^2 \nu\big)_- \\
&+ \big(\rho N(b) + \nu N(b')\big) x, \\
e_a(y) \coloneqq\ & y - (\lambda, b, b', \mu)_+ - b^\sharp - (b')^\sharp + \big(-N(b), 0, 0, N(b')\big)_-
\end{aligned}
$$

对所有 $\nu,\ \rho \in k$、 $c \in J$、 $c' \in J'$。

定义 7.14. 设 $b \in J \subseteq L_0$, $b' \in J' \subseteq L_0$。我们定义 k-模 L上的自同态 e_b 和$e_{b'}$ 如下:

$$
\begin{aligned}
e_b(y) &\coloneqq y, \\
e_b\big((\nu, c, c', \rho)_\pm\big) &\coloneqq \big(\nu, c + \nu b, c' + b \times c + \nu b^\sharp, \rho + T(b, c') + T(c, b^\sharp) + \nu N(b)\big)_\pm, \\
e_b(c') &\coloneqq c' - \mathbf{d}_{b,c'} + U_b(c'), \\
e_b(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} - D_{c,c'}(b), \quad e_b(\xi) \coloneqq \xi, \quad e_b(\zeta) \coloneqq \zeta - b, \\
e_b(c) &\coloneqq c, \\
e_b(x) &\coloneqq x,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
e_{b'}(y) &\coloneqq y, \\
e_{b'}\big((\nu, c, c', \rho)_\pm\big) &\coloneqq \big(\nu - T(c, b') + T((b')^\sharp, c') - \rho N(b'), \\
&\qquad\qquad c - b' \times c' + \rho (b')^\sharp, c' - \rho b', \rho\big)_\pm, \\
e_{b'}(c') &\coloneqq c', \\
e_{b'}(\mathbf{d}_{c,c'}) &\coloneqq \mathbf{d}_{c,c'} + D_{c',c}(b'), \quad e_{b'}(\xi) \coloneqq \xi, \quad e_{b'}(\zeta) \coloneqq \zeta + b', \\
e_{b'}(c) &\coloneqq c + \mathbf{d}_{c,b'} + U_{b'}(c), \\
e_{b'}(x) &\coloneqq x,
\end{aligned}
$$

对所有 $\nu, \rho \in k$、 $c \in J$ 和 $c' \in J'$,

注 7.15. 定义 7.11 至7.14中的公式是通过应用指数映射的通常定义，并

$$e_a = \mathrm{id} + \mathrm{ad}_a + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ad}_a^2 + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{ad}_a^3 + \tfrac{1}{24}\,\mathrm{ad}_a^4,$$

再利用以下事实化简结果而得到的：对所有 $b \in J$、 $b' \in J'$， $b \times b = 2b^\sharp$、 $D_{b,\ b'}(b) = 2U_b(b')$，且 $T(b, b \times b) = 6N(b)$，并将所得公式视为整数上的公式。特别是，从这一过程显然可知，定义 7.1 中的性质 (a) 至 (c) 均得到满足。要证明映射 $a \mapsto e_a$ 是参数化，还需证明性质 (d) 得到满足（这意味着 e_a 可逆，且其逆为 e_{-a}）；最重要的是，还需证明所有形如 e_a 的映射都属于 End(L)（即与李括号相容）。

注 7.16. 如有必要，我们将写作 $e^{(J,J')}_a$ (（其中 $a \in L(J, J')^{ij}$， 对某个 $(i, j) \neq (0, 0)$)， 以明确我们考虑的是定义在李代数$L(J, J')$上的映射 e_a 。对于第 5 节中定义的反射，我们也将使用类似的记法。注意，如果 $(\iota,)$: $(J_1, J_1') \to (J_2, J_2')$ 是三次范数对的满同态，那么

$$L(\iota, \ ) \circ e_{a_1}^{(J_1, J_1')} = e_{a_2}^{(J_2, J_2')} \circ L(\iota, \ )$$

对所有 $a_1 \in L(J_1, J_1')^{ij}$，其中 $(i, j) \neq (0, 0)$，且 $a_2 := L(\iota,)(a_1)$。特别是，

$$e_{a_1}^{(J_1,J_1)} = L(\iota,)^{-1} \circ e_{a_2}^{(J_2,J_2')} \circ L(\iota,)$$

当且仅当（ι, ）是双射。

引理 7.17. 映射 $e_{(\lambda,b,b',\mu)+}$、$e_{\lambda x}$、$e_{\lambda y}$、e_b 和 $e_{b'}$ 对所有满足至多有一个 λ、b、b'、μ 非零的 λ、$\mu \in k$、$b \in J$、$b' \in J'$，分别都是良定义的。

证明. 在此证明中，所有求和均在 $a \in J$ 和 $a' \in J'$上进行。我们按照引理 5.14的证明进行。我们需要证明，若

$$\sum \lambda_{a,a'} \mathbf{d}_{a,a'} = \lambda_\xi \cdot (2\zeta - \xi)$$

对于某些有限个标量 $\lambda_{a,\ a'}$，λ_ζ，$\lambda_\xi \in k$，则在定义 $e_{(\lambda,b,b',\mu)+}$ 和 $e_{\rho x}$ 的赋值下，该等式两边都化为相同的项。根据定义 $e_{\rho x}$ 的赋值，两边均保持不变，因此 $e_{\rho x}$ 是良定义的。在定义 $e_{(\lambda,b,b',\mu)+}$ 的赋值下，它们化为

$$\sum \lambda_{a,a'} \mathbf{d}_{a,a'} + \sum \lambda_{a,a'} t_{a,a'} \quad \text{and}$$
$$\lambda_\xi \cdot (2\zeta - \xi) + \lambda_\xi (3\lambda, b, -b', -3\mu)_+,$$

分别，其中

$$t_{a,a'} := \big(\lambda T(a,a'), -D_{a,a'}(b) + T(a,a')b, D_{a,a'}(b') - T(a,a')b', -\mu T(a,a')\big).$$

根据引理 4.19，我们有

$$\sum \lambda_{a,a'} t_{a,a'} = \big(3\lambda\lambda_\xi, -2\lambda_\xi b + 3\lambda_\xi b, 2\lambda_\xi b' - 3\lambda_\xi b', -3\lambda_\xi \mu\big).$$

我们还可得$e_{(\lambda,b,b',\mu)+}$ 是良定义的。其余映射的良定义性可用类似的方法验证。□

注记 7.18。事实上，在引理 7.17 的证明中，我们略去的映射无需显式验证其良定义性：我们将在命题 B.14 中看到，所有其余映射都与一些映射共轭，而这些映射的良定义性已在引理 7.17的证明中得到验证，因此它们自身也是良定义的。

注 7.19。由于 $[x, L_1] = L_{-1}$, $[y, L_{-1}] = L_1$, $[L_i, L_i] = L_{2i}$ 对于 $i \in \{1, -1\}$和 $[L_1, L_{-1}] = L_0$，集合 $\{x\} \cup L_1$ 和 $\{y\} \cup L_{-1}$ 是李代数 L的生成集。对于所有 f, $g \in \mathrm{End}(L)$，可知 $f = g$ 当且仅当 f 和 g 在这些集合之一上的取值相同。

命题 7.20。恒等式 G_2 与 $\mathbb{Z}^2$（如注记 4.4中所述）的一个子集，使得 L_α 对所有 $\alpha \in G_2$都有定义。则对所有 $\alpha \in G_2$，映射 $\exp_\alpha$： $L_\alpha \to$ 自同构群(L): $a \mapsto e_a$（其中 e_a 由定义 7.11 至 7.14给出）是 α-参数化映射，在 L中良定义。

证明。根据注 7.15，我们只需证明对于所有 $\alpha \in G_2$，映射 $\exp_\alpha$ 是可加的，且其像包含于 $\mathrm{Aut}(L)$。在 A 节中，我们证明了对于 $\rho \in k$，映射 $e_{\rho x}$，以及对于 $b \in J$，映射 $e_{(0,b,0,0)+}$，都是李代数 L 的自同态。接下来证明对于 $\alpha \in \{(-2, -1), (1, 0)\}$，$\exp_\alpha$ 是可加的。对于所有 s、$t \in k$，我们有 $e_{(s+t)x} = e_{sx} \circ e_{tx}$，因为两边在李代数 L 的生成集 $\{y\} \cup L_{-1}$ 上的作用相同。特别地，对于所有 $s \in k$，e_{st} 都是可逆的，因此其像

$\exp^{(-2,-1)}$ 属于 Aut(L)。由此得出，映射 $L_{-2,\,-1} \to$ Aut(L) 是一个（-2，-1）-参数化。

类似地，恒等式$e_{(0,b+c,0,0)_+} = e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(0,c,0,0)_+}$ 对于 b，$c \in J$ 由这些计算得出

$$\begin{aligned}(e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(0,c,0,0)_+})(x) &= e_{(0,b,0,0)_+}\big(x + (0,c,0,0)_- - c^\sharp + (-N(c),0,0,0)_+\big)\\ &= x + (0,b,0,0)_- - b^\sharp + \big(-N(b),0,0,0\big)_+\\ &\quad + (0,c,0,0)_- - b\times c + \big(-T(b^\sharp,c),0,0,0\big)_+\\ &\quad - c^\sharp + \big(-T(b,c^\sharp),0,0,0\big)_+ + \big(-N(c),0,0,0\big)_+\\ &= x + (0,b+c,0,0)_- - (b^\sharp + c^\sharp + b\times c)\\ &\quad + \big(-N(b) - N(c) - T(b^\sharp,c) - T(b,c^\sharp),0,0,0\big)_+\\ &= x + (0,b+c,0,0)_- - (b+c)^\sharp\\ &\quad + \big(-N(b+c),0,0,0\big)_+\end{aligned}$$

and

$$(e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(0,c,0,0)_+})\big((\lambda,a,a',\mu)_+\big) = (\lambda,a,a',\mu) + T(c,a')y + T(b,a')y$$

对于$(\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_+ \in L_{1}$。因此映射$L_{1,\,0} \to$ 自同构群(L) 是一个$(1,\ 0)$-参数化。对于任意 $\alpha \in G_2$，我们现在可由命题B.14 推出expα 是可加的，且其像在自同构群(L)中，正如所求。□

定义 7.21. 对所有 $\alpha \in G_2$，我们在下文中始终用

$$\exp_\alpha \colon L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L) \colon a \mapsto e_a$$

该 α-参数化，它来自命题7.20 ，并用 U_α ：=exp$\alpha(L_\alpha)$ 表示相应的根群。

7.3. **构造 G_2-分次群**。我们现在证明，先前定义的参数化满足若干交换子关系。首先，我们引入一种类似于 [TW02，(16.8)]中所用的记号。

记号 7.22. 将 G_2 视为 $\mathbb{Z}^2$ 的一个子集，如备注 4.4中所述，我们考虑以下各根：

$$\begin{aligned}&\alpha_1 := \delta = (1,0), && \alpha_6 := \gamma = (-2,-1), && \alpha_2 := (1,-1) = \gamma + 3\delta,\\ &\alpha_3 := (0,-1) = \gamma + 2\delta, && \alpha_4 := (-1,-2) = 2\gamma + 3\delta, && \alpha_5 := (-1,-1) = \gamma + \delta.\end{aligned}$$

注意，$\{\alpha_1,\alpha_6\}$ 是一个单根系，其对应的正根系为 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_6\}$。对于所有 $i \in \{1,\dots,6\}$，我们定义一个映射

$$x_i \colon P_{\alpha_i} \to \mathrm{Aut}(L) \colon a \mapsto \exp_{\alpha_i}\big(\vartheta_{\alpha_i}(a)\big)$$

其中 $P_\alpha \in \{J, J', k\}$ 是参数化 L_α 的空间，且 ϑ_α: $P_\alpha \to L_\alpha$ 是定义 6.4 中的“自然的”同构6.4。

命题 7.23。对于所有的 $\lambda,\mu \in k$, $b,d \in J$和 $b' \in J'$，正根群 U_α 之间满足以下交换子关系。

$$[x_1(b), x_3(b')] = x_2(T(b,b')), \tag{22}$$

$$[x_3(b'), x_5(b)] = x_4(-T(b,b')), \tag{23}$$

$$[x_2(\lambda), x_6(\mu)] = x_4(\lambda\mu), \tag{24}$$

$$[x_1(b), x_5(d)] = x_2(T(d, b^\sharp)) \circ x_3(-b \times d) \circ x_4(T(b, d^\sharp)), \tag{25}$$

$$[x_1(b), x_6(\lambda)] = x_2(-\lambda N(b)) \circ x_3(\lambda b^\sharp) \circ x_4(\lambda^2 N(b)) \circ x_5(\lambda b). \tag{26}$$

所有其他交换子关系都是平凡的。

证明。 首先注意，平凡的交换子关系均已由引理 7.6 处理。对于其余五种情形，我们将利用注 7.19 证明等式。

为证明（22），我们必须证明

$$e_{(0,-b,0,0)_+} \circ e_{-b'} \circ e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{b'} = e_{(T(b,b'),0,0,0)_+}.$$

将等式两边作用于 x，得到相同的结果 $x + \big(T(b, b')\ 0,\ 0,\ 0\big)_-$。根据注 7.19，只需证明两边作用于元素 $(\nu, c, c', \rho)_+ \in L_1$ 时得到相同的结果。经过简短计算可知，两边均得到结果 $(\nu, c, c', \rho)_+ - \rho T(b, b')y$。

为证明（23），我们必须证明

$$e_{-b'} \circ e_{(0,-b,0,0)_-} \circ e_{b'} \circ e_{(0,b,0,0)_-} = e_{(-T(b,b'),0,0,0)_-}.$$

将等式两边作用于 y，得到相同的结果 $y + \big(T(b, b')\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$。根据注 7.19，只需证明两边作用于元素 $(\nu, c, c', \rho)_- \in L_{-1}$ 时得到相同的结果。经过简短计算可知，两边均得到结果 $(\nu, c, c', \rho)_- + \rho T(b, b')x$。

要证明（24），我们必须证明

$$e_{(-\lambda,0,0,0)_+} \circ e_{-\mu x} \circ e_{(\lambda,0,0,0)_+} \circ e_{\mu x} = e_{(\lambda\mu,0,0,0)_-}.$$

将两边作用于 y，得到相同的结果 $y - (\lambda\mu,\ 0,\ 0,\ 0)_+$；将两边作用于 $(\nu,\ c,\ c',\ \rho)_- \in L_{-1}$，得到相同的结果 $(\nu,\ c,\ c',\ \rho)_- - \lambda\mu\rho x$。

剩下的两个换位子关系要困难得多，但方法类似。要证明（25），我们必须证明

$$e_{(0,-b,0,0)_+} \circ e_{(0,-d,0,0)_-} \circ e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(0,d,0,0)_-} = e_{(T(d,b^\sharp),0,0,0)_+} \circ e_{-b\times d} \circ e_{(T(b,d^\sharp),0,0,0)_-}.$$

将这个等式两边作用于 y，得到相同的结果 $y - \big(T(b,\ d^\sharp)\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$。同样，根据备注7.19，还需要证明两边作用于元素 $(\nu,\ c,\ c',\ \rho)_- \in L_{-1}$时给出相同的结果。直接计算左侧现在看来颇具挑战，因此我们改为验证

$$e_{(0,-d,0,0)_-} \circ e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(0,d,0,0)_-}(\nu, c, c', \rho)_- = e_{(0,b,0,0)_+} \circ e_{(T(d,b^\sharp),0,0,0)_+} \circ e_{-b\times d} \circ e_{(T(b,d^\sharp),0,0,0)_-}(\nu, c, c', \rho)_-.$$

该方程的左端等于

$$e_{(0,b,0,0)_+}(\nu, c, c', \rho)_- - \rho T(b, d^\sharp)x$$

$$
\begin{aligned}
&+\big(T(d,c\times b)+T(U_b(c'),d^\sharp)-\rho N(b)N(d)+T(d,c')T(d,b^\sharp),\\
&\qquad -D_{b,c'}(d)+T(b,c')d+T(d,c')b+\rho U_d(b^\sharp),\ \rho b\times d,\ 0\big)_-\\
&+\big(-d\times U_b(c')+\rho N(b)d^\sharp-T(d,c')b^\sharp\big)+\rho\mathbf{d}_{d,b^\sharp}-\rho T(d,b^\sharp)\zeta\\
&+\big(-T(d,c')N(b),\ -\rho N(b)d,\ 0,\ 0\big)_+
\end{aligned}
$$

而右端等于

$$
\begin{aligned}
&e_{(0,b,0,0)_+}(\nu,c,c',\rho)_- -\rho T(b,d^\sharp)x\\
&+\big(-\rho T(b,d^\sharp)T(d,b^\sharp)+T(c,b\times d)+T((b\times d)^\sharp,c')+\rho N(b\times d),\\
&\qquad -\rho T(b,d^\sharp)b+(b\times d)\times c'+\rho(b\times d)^\sharp,\ \rho b\times d,\ 0\big)_-\\
&+\big(T(d,b^\sharp)(c'+\rho b\times d)+\rho T(b,d^\sharp)b^\sharp-b\times(c'\times(b\times d))-\rho(b\times d)^\sharp\times b\big)\\
&\qquad +\rho T(d,b^\sharp)(\xi-\zeta)-\rho\mathbf{d}_{b,b\times d}-\rho T(b,b\times d)(\xi-\zeta)\\
&+\big(T(d,b^\sharp)T(b,c'+\rho b\times d)-\rho T(d,b^\sharp)^2+\rho T(b,d^\sharp)N(b)\\
&\qquad -T((b\times d)\times c'+\rho(b\times d)^\sharp,b^\sharp),\ -\rho T(d,b^\sharp)b+\rho U_b(b\times d),\ 0,\ 0\big)_+.
\end{aligned}
$$

这两个表达式相等现由定义2.7、恒等式(7)、(10)、(16)、(26) 以及(29) （引理2.8）、引理4.17(iii) 以及(iv) 至(vi) （引理2.19）即可推出。

最后，为证明（26），我们必须证明

$$
\begin{aligned}
&e_{(0,-b,0,0)_+}\circ e_{-\lambda x}\circ e_{(0,b,0,0)_+}\circ e_{\lambda x}\\
&\qquad = e_{(-\lambda N(b),0,0,0)_+}\circ e_{\lambda b^\sharp}\circ e_{(\lambda^2N(b),0,0,0)_-}\circ e_{(0,\lambda b,0,0)_-}.
\end{aligned}
$$

将该等式两端作用于 y时，得到相同的结果

$$
y+\big(2\lambda^2N(b),-\lambda b,0,0\big)_+-\lambda^2b^\sharp+\big(-\lambda^3N(b),0,0,0\big)_-,
$$

其中使用了 $T(b、\ b^\sharp)=3N(b)$、 $N(\lambda b)=\lambda^3N(b)$ 以及$(\lambda b)^\sharp=\lambda^2b^\sharp$。再次根据备注7.19，还需证明将两端作用于元素$(\nu、\ c、\ c'、\ \rho)_-\in L_{-1}$时也得到相同的结果。对于左端，这给出

$$
\begin{aligned}
&(\nu,c,c',\rho)_-+\big(\lambda T(b,c')-\rho\lambda^2N(b)\big)x\\
&\quad+\big(-\lambda T(c,b^\sharp),\ -\lambda T(b,c')b+\rho\lambda^2N(b)b+\lambda U_b(c'),\ -\rho\lambda b^\sharp,\ 0\big)_-\\
&\quad+\big(-\lambda T(b,c')b^\sharp+\rho\lambda^2N(b)b^\sharp+\lambda U_b(c')\times b\big)\\
&\qquad -\rho\lambda\mathbf{d}_{b,b^\sharp}+\rho\lambda N(b)\xi-\rho\lambda T(b,b^\sharp)(\xi-\zeta)\\
&\quad+\big(\lambda T(b,c')N(b)-\rho\lambda^2N(b)^2-\lambda T(U_b(c'),b^\sharp),\ \rho\lambda N(b)b-\rho\lambda U_b(b^\sharp),\ 0,\ 0\big)_+
\end{aligned}
$$

而右侧则得到

$$
\begin{aligned}
&(\nu,c,c',\rho)_-+\big(\lambda T(b,c')-\rho\lambda^2N(b)\big)x\\
&\qquad+\big(-\lambda T(c,b^\sharp),\ -\lambda b^\sharp\times c'+\rho\lambda^2N(b)b,\ -\rho\lambda b^\sharp,\ 0\big)_-\\
&\qquad+\big(-\lambda N(b)c'+\rho\lambda^2N(b)b^\sharp\big)-\rho\lambda N(b)(\xi-\zeta)\\
&\qquad+\big(-\rho\lambda^2N(b)^2,\ 0,\ 0,\ 0\big)_+.
\end{aligned}
$$

这两个表达式相等现在可由定义 2.7、引理 4.17(i)以及引理 (i) 至 (iii) 中的 2.19得到。□



图2。蒂茨指标（F_4，{id}，$\{3,4\}$），我们称之为“$F_4 \to G_2$”。

定理 *7.24*。设 *(J, J')* 是交换环 k 上的三次范数对。那么，定义 *7.21* 中的族 *$(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$* 满足公理*1.5(ii)*和*(iv)*。如果存在 $p \in J$ 使得 *$N(p)$* 可逆（例如，当 *(J, J')* 是三次范数结构时），那么它是其所生成的 *$Aut(L(J, J'))$* 子群的 G_2-分次。

证明。 这由命题 B.25、7.8 和 7.23得出。 □

8. 蒂茨指标 $F_4 \to G_2$

本节将介绍如何从同一对象的 F_4-分次得到群和李代数的 G_2-分次（命题 8.10 和 8.13）。这一纯组合构造类似于扭曲的Chevalley群的构造（见 [Car72, 第 13] 章），也类似于 [BW25 第 4] 节中为 $\ell \in \{2,3,4\}$ 构造 H_ℓ-分次群的构造。该构造依赖于某个满射 $F_4^0 \to G_2^0$（引理 8.4），它与蒂茨指标密切相关；这个指标将 G_2 的 Weyl群实现为 F_4 的 Weyl群的一个子群。在 [MPW15, 20.1], 的形式化框架中，这个蒂茨指标是元组（F_4，{id}，$\{3,4\}$），图2也以图示方式呈现了该指标（遵循 [Tit66], 的约定；另见 [MPW15, 34.2]）。我们将非正式地称（F_4，{id}，$\{3,4\}$）为“$F_4 \to G_2$”。尽管这个蒂茨指标及其对应的 Weyl群嵌入已为人所知，但我们没有发现任何文献描述相应的根系映射 $F_4^0 \to G_2^0$。

在第10 节和11节中，我们将逆转本节中的构造，方法是证明某些（当然并非全部） G_2-分次可以细化以得到 F_4-分次。

记号8.1. 在本节中，我们用 $\Delta_F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ 表示 F_4 中的一个标准简单根系（在定义1.9的意义下），并用$\Delta_G = (g_1, g_2)$ 表示 G_2 中的一个单根系，使得 g_1 为短根，且 g_2 为长根。此外，我们用 Π_F, Π_G 表示相应的正根系。

注 8.2. 对我们的某些论证而言，手头有一份将 F_4 中的根表示为 Δ_F 中向量的线性组合的列表会有所帮助。这样一份列表可以从表3（第90页）的第一列中读出。此外，

$$G_2 = \{\pm(ag_1 + bg_2) \mid (a,b) \in \{(0,1),(1,0),(1,1),(2,1),(3,1),(3,2)\}\}.$$

注记 8.3. 如果将 G_2 和 F_4 的根归一化，使短根的长度为 $\sqrt{2}$，则内积如下：

$$f_1 \cdot f_2 = -2 = f_2 \cdot f_3, \quad f_3 \cdot f_4 = -1, \quad f_1 \cdot f_1 = 4 = f_2 \cdot f_2, \quad f_3 \cdot f_3 = 2 = f_4 \cdot f_4,$$
$$g_1 \cdot g_2 = -3, \qquad g_1 \cdot g_1 = 2, \qquad g_2 \cdot g_2 = 6.$$

我们首先刻画映射 $\pi\colon F_4^0 \to G_2^0$，它取决于 Δ_F 和 Δ_G的选择。

引理 8.4. (i) 存在唯一的映射 $\pi\colon F_4^0 \to G_2^0$，使得

$$\pi(f_1) = g_2, \quad \pi(f_2) = g_1, \quad \pi(f_3) = 0 = \pi(f_4)$$

并且 π 由围绕F_4 和 G_2的向量空间之间的线性映射诱导。特别地，对于所有满足 $\alpha + \beta \in F_4$的 α、$\beta \in F_4$，我们有$\pi(\alpha) + \pi(\beta) = \pi(\alpha + \beta)$（因此 $\pi(\alpha) + \pi(\beta) \in G_2^0$）。

(ii) 映射 π 是满射，并将 Π_F 映到 $\Pi_G \cup \{0\}$上。

证明。 π 的唯一性源于它由线性映射诱导这一假设。为证明其存在性，考虑围绕 F_4 的 4 维欧几里得空间 V及其子空间

$$V_1 := \langle f_1, 3f_2 + 4f_3 + 2f_4\rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{and} \quad V_2 := \langle f_3, f_4\rangle_{\mathbb{R}}.$$

于是 $V = V_1 \oplus V_2$ 并且，根据注8.3，此分解是正交的。记$\tilde{\pi}\colon \ V \to V_1$为到 V_1 上的正交投影，并设 $\bar{g}_1 := \tilde{\pi}(f_2) = f_2 + \frac{4}{3}f_3 + \frac{2}{3}f_4$，$\bar{g}_2 := \tilde{\pi}(f_1) = f_1$。利用注8.2，-可知 -

$$\tilde{\pi}(F_4) = \{0_V\} \cup \{\pm(a\bar{g}_1 + b\bar{g}_2) \mid (a, b) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}\}.$$

进一步，根据备注8.3，

$$\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_1 = \frac{4}{3}, \qquad \bar{g}_2 \cdot \bar{g}_2 = 4, \qquad \bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2 = -3.$$

我们得出，$\tilde{\pi}(F_4) \setminus \{0_V\}$ 是一个 G_2型根系。因此，通过将$(\bar{g}_1,\ \bar{g}_2)$与$(g_1,\ g_2)$认同，我们得到所需的映射 $\pi\colon F_4^0 \to G_2^0$。从我们的构造还可看出，$\pi$ 是满射，且 $\pi(\Pi_F) = \Pi_G \cup \{0\}$。□

上文提到的蒂茨指标 $F_4 \to G_2$ 给出了一个嵌入 $u\colon \mathrm{Weyl}(G_2) \to \mathrm{Weyl}(F_4)$。下面的引理8.6 刻画了这个嵌入，并描述了它与 π的联系。

备注 8.5。 对于 $\{1, 2, 3, 4\}$的任意子集 I，我们将由 $\{\sigma(f_i) \mid i \in I\}$张成的Coxeter系统中的最长元素记为 w_I。那么

$$w_{\{1\}} = \sigma_{f_1}, \qquad w_{\{3,4\}} = \sigma_{f_3}\sigma_{f_4}\sigma_{f_3}, \qquad w_{\{1,3,4\}} = w_{\{1\}}w_{\{3,4\}},$$
$$w_{\{2,3,4\}} = \sigma_{f_2}(\sigma_{f_3}\sigma_{f_2}\sigma_{f_3})(\sigma_{f_4}\sigma_{f_3}\sigma_{f_2}\sigma_{f_3}\sigma_{f_4}).$$

最后一个断言可以通过例如调用以下内容来验证

```
julia> W = weyl_group(:C, 3); f2,f3,f4 = W[3],W[2],W[1];
julia> longest_element(W) == f2*(f3*f2*f3)*(f4*f3*f2*f3*f4)
```

在计算机代数系统 OSCAR 中 [OSC25，DEF+25]。注意

$$w_{\{2,3,4\}} = \sigma_{f_2}\sigma_{f_2}^{\sigma(f_3)}\sigma_{f_2}^{\sigma(f_3)\sigma(f_4)} = \sigma_{f_2}\sigma_{f_2+2f_3}\sigma_{f_2+2f_3+2f_4}.$$

引理 8.6。 以下结论成立，其中 $U := \langle\sigma(f_3)\ \sigma(f_4)\rangle \leq \mathrm{Weyl}(F_4)$。

(i) 存在唯一的同态 $u\colon \mathrm{Weyl}(G_2) \to \mathrm{Weyl}(F_4)$ 使得，按照注记*8.5*，

$$u(\sigma_{g_1}) = w_{\{2,3,4\}}w_{\{3,4\}}, \qquad u(\sigma_{g_2}) = w_{\{1\}} = \sigma(f_1).$$

此外，u 是单射，且其像与$w_{\{3,4\}}$交换。

(ii) 对于所有 $w \in \mathrm{Weyl}(G_2)$、所有 $\tilde{w} \in u(w)U$ 以及所有 $\gamma \in F_4$，我们有

$$\pi\left(\gamma^{\tilde{w}}\right) = \pi(\gamma)^w.$$

证明。令 $S := \{w_{\{2,3,4\}}w_{\{3,4\}}, w_{\{1\}}\}$。根据 [MPW15, 20.32], $(\langle S\rangle, S)$ 是一个 Coxeter系统。显然，通过计算可知乘积$w_{\{2,3,4\}}w_{\{3,4\}}w_{\{1\}}$ 的阶为 6，因此该 Coxeter系统属于类型 G_2。此外， $u(\sigma_{g_1})$ 和$u(\sigma_{g_2})$ 根据 [MPW15, 20.11(i)] 与 $w_{\{3,4\}}$ 对易。断言 (i) 得证。

只需证明 (ii) 在以下情形成立： $w \in \{\sigma(g_1)\ \sigma(g_2)\}$ 且 $\gamma \in \Delta_F$。此外，对于所有 $\beta \in F_4$和 $u \in U$，都有 $\beta^u - \beta \in \langle f_3,\ f_4\rangle_{\mathbb{R}}$因此 $\pi(\beta^u) = \pi(\beta)$。因此，我们也可以假设 $\tilde{w} = u(w)$。由此可知，只需考虑八种情形，每种情形都可通过一次简短的计算处理。□

现在我们可以描述 π 的纤维，这对从 F_4-分次构造 G_2-分次至关重要；此外，我们还将用这些纤维来对 u 给出另一种描述。对于 $\beta \in G_2^0$，我们将始终用 $\pi^{-1}(\beta)$ 表示 $\{\alpha \in F_4^0 \mid \pi(\alpha) = \beta\}$。

引理 8.7. 以下结论成立。

(i) 对所有 $\beta \in G_2$ 和 $w \in Weyl(G_2)$，都有 $\pi^{-1}(\beta^w) = \pi^{-1}(\beta)^{u(w)}$。*(ii)* $\pi^{-1}(0) = F_4^0 \cap \langle f_3, f_4\rangle_{\mathbb{Z}} = \{\pm f_3, \pm f_4, \pm(f_3 + f_3)\} \cong A_2^0$。*(iii)* 对每个长根 $\beta \in G_2$，纤维 $\pi^{-1}(\beta)$ 恰含一个元素，且该元素在 F_4 中是长根。*(iv)* 对每个短根 $\beta \in G_2$，纤维 $\pi^{-1}(\beta)$ 在 F_4 中恰含三个长根，在 F_4 中恰含三个短根；由该纤维张成的子系 $\langle\pi^{-1}(\beta)\rangle_{\mathbb{R}} \cap F_4$ 属于 C_3 型。若将这三个长根记为 $2e_1$、$2e_2$、$2e_3$，则 (e_1, e_2, e_3) 是 $\langle\pi^{-1}(\beta)\rangle_{\mathbb{R}}$ 的正交基，而 $\pi^{-1}(\beta)$ 中的三个短根为 $e_1 + e_2$、$e_2 + e_3$、$e_1 + e_3$。

(v) 设 $\beta \in G_2$，并用 $L(\beta)$ 表示 $\pi^{-1}(\beta)$中的长根集合。那么

$$u(\sigma(\beta)) = \begin{cases} \prod_{\alpha\in L(\beta)} \sigma_\alpha & \text{if } \beta \text{ is long,} \\ (\prod_{\alpha\in L(\beta)} \sigma_\alpha)\sigma_{f_3}\sigma_{f_4}\sigma_{f_3} & \text{if } \beta \text{ is short} \end{cases}$$

其中， $L(\beta)$ 上的乘积可以按任意顺序进行。

证明。 断言 (i)和 (ii) 分别由引理8.6(ii) 和引理 8.4(i)得出。利用注8.2，可计算得

$$\pi^{-1}(g_1) = \{f_2 + f_3, f_2 + f_3 + f_4, f_2 + 2f_3 + f_4, f_2, f_2 + 2f_3, f_2 + 2f_3 + 2f_4\},$$
$$\pi^{-1}(g_2) = \{f_1\}.$$

经过简单计算， $\pi^{-1}(g_1)$ 中的长根为 f_2， $f_2 + 2f_3$， $f_2 + 2f_3 + 2f_4$，它们的两两和恰好是 $\pi^{-1}(g_1)$ 中其余根乘以2所得的结果。由此可知，断言 (iii) 和 (iv) 对 $\beta \in \{g_1, g_2\}$成立。根据 (i)，可知它们对所有 $\beta \in G_2$都成立。

断言 (v) 对长根 $\beta = g_2$ 成立，因为 $L(g_2) = \{f_1\}$。由于$L(g_1) = \{f_2, f_2 + 2f_3, f_2 + 2f_3 + 2f_4\}$，由备注 8.5 可得 $w_{\{2,3,4\}} = \prod_{\alpha\in L(g_1)} \sigma_\alpha$ ，因此 (v) 对 $\beta = g_1$ 也成立。由于 G_2 中的所有根都与 g_1 或 g_2 共轭，且由引理 8.6(i) 可知 u 的像中心化 $w_{\{3,4\}} = \sigma_{f_3}\sigma_{f_4}\sigma_{f_3}$ ，故由 (i) 即可推出一般情形下的断言。□

注 8.8. 一个 3-分次 的根系 Φ 是一个分解 $\Phi = \Phi_{-1} \sqcup \Phi_0 \sqcup \Phi_1$ 使得 $(\Phi_i + \Phi_j) \cap \Phi \subseteq \Phi_{i+j}$ 对所有 $i, j \in \{-1, 0, 1\}$，并且满足其他一些性质（详情见 [LN19, 14.1] 。根系 C_3 具有如下3-分次 [LN19, 14.5(c)]:

$$(C_3)_{\pm 1} = \{\pm 2e_i \mid i \in \{1,2,3\}\} \cup \{\pm(e_i + e_j) \mid i \neq j \in \{1,2,3\}\},$$
$$(C_3)_0 = \{e_i - e_j \mid i \neq j \in \{1,2,3\}\}.$$

注意，集合 $\pi^{-1}(\beta)$（引理8.7(iv) ）恰好是集合 $(C_3)_1$，即由1-分次根组成；而 $\pi^{-1}(-\beta) = -\pi^{-1}(\beta)$ 是集合 $(C_3)_{-1}$，即由(-1)-分次根组成。

注 8.9. 由引理 8.7(v) 可得 $\prod_{\alpha \in L(\beta)} \sigma_\alpha \in {}^u(\sigma_\beta)U$ 对所有$\beta \in G_2$ 成立，其中 $U := \langle \sigma_{f_3}, \sigma_{f_4} \rangle$。因此我们总可以选取 $\tilde{w} = \prod_{\alpha \in L(\beta)} \sigma_\alpha$ 用于$w = \sigma_\beta$，见引理 8.6(ii)。

现在我们可以运用我们的观察来构造 G_2-分次。对于李代数，分配律使这一过程相当直接。

命题 8.10. 设 $L = \bigoplus_{\alpha \in F_4^0} L_\alpha$ 是交换环 k 上的 F_4-分次李代数。对所有 $\beta \in G_2^0$，我们定义

$$L'_\beta := \langle L_\alpha \mid \alpha \in \pi^{-1}(\{\beta\}) \rangle_k.$$

则 $(L'_\beta)^{\beta \in G_2^0}$ 是 L 的一个 G_2-分次。

证明。 由于对所有 $\beta \in G_2^0$ 均有 $L'_\beta = \bigoplus_{\alpha \in \pi^{-1}(\beta)} L_\alpha$，故我们有 $L = \bigoplus_{\beta \in G_2^0} L'_\beta$。现设 $\beta, \bar{\beta} \in G_2^0$，并设 $x_\beta \in L'_\beta$， $y_{\bar{\beta}} \in L'_{\bar{\beta}}$。记

$$x_\beta = \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(\beta)} x_\alpha \quad \text{and} \quad y_{\bar{\beta}} = \sum_{\bar{\alpha} \in \pi^{-1}(\bar{\beta})} y_{\bar{\alpha}}$$

其中 $x_\alpha \in L_\alpha$ 与 $y_{\bar{\alpha}} \in L_{\bar{\alpha}}$。从而

$$[x_\beta, y_{\bar{\beta}}] = \sum_{\alpha \in \pi^{-1}(\beta)} \sum_{\bar{\alpha} \in \pi^{-1}(\bar{\beta})} [x_\alpha, y_{\bar{\alpha}}].$$

对所有 $\alpha \in \pi^{-1}(\beta)$、 $\bar{\alpha} \in \pi^{-1}(\bar{\beta})$，有两种可能：

(i) 若 $\alpha + \bar{\alpha} \notin F_4$，则 $[x_\alpha, y_{\bar{\alpha}}] = 0$。 (ii) 若 $\alpha + \bar{\alpha} \in F_4$，则 $\pi(\alpha + \bar{\alpha}) = \pi(\alpha) + \pi(\bar{\alpha}) = \beta + \beta$ 由引理 8.4(i)。因此，在此情形下 $\beta + \bar{\beta} \in G_2^0$ 且 $\alpha + \bar{\alpha} \in \pi^{-1}(\beta + \bar{\beta})$，这意味着$[x_\alpha, y_{\bar{\alpha}}] \in L_{\alpha+\bar{\alpha}} \leq L'_{\beta+\bar{\beta}}$。

我们推得： $[x_\beta, y_{\bar{\beta}}] = 0$若 $\beta + \bar{\beta} \notin G_2^0$，则 $[x_\beta, y_{\bar{\beta}}] \in L'_{\beta+\bar{\beta}}$；否则。由此可知，$(L'_\beta)^{\beta \in G_2^0}$ 是 L的 G_2-分次。□

关于 G_2-交换子关系的证明在 F_4-分次群中更加困难，这是由于群的非线性特性所致。我们可以使用判据 [Wie24, 2.1。29] （这是 [LN19, 39] 的一个应用），但为此我们首先需要证明引理 8.12。

引理 8.11. 设 $\Delta'_G = (g'_1, g'_2)$ 是 G_2 中的单根系，且 g_1为短根；设 Π'_G 是 G_2中对应的正根系。则 F_4中存在一个标准根系 $\Delta'_F = (f'_1, f'_2, f'_3, f'_4)$，其对应的正根系为 Π'_F，满足 $\pi(\Pi'_F) = \Pi'_G \cup \{0\}$，且 $\pi(\Delta'_F) = (g'_2, g'_1, 0, 0)$。

证明. 若 $\Delta'_G = \Delta_G$，则可由引理 $\Delta_F := \Delta'_F$ 选取 8.4。一般情形下，存在 $w \in \mathrm{Weyl}(G_2)$ 使得 $\Delta'_G = \Delta_G^w$。令 $\Delta'_F := \Delta_F^{u(w)}$。于是由引理 8.6(ii) 可得

$$\pi(\Delta'_F) = \pi\big(\Delta_F^{u(w)}\big) = \pi(\Delta_F)^w = (g_2, g_1, 0, 0)^w = (g'_2, g'_1, 0, 0).$$

类似的计算表明，$\pi(\Pi'_F) = \Pi'_G \cup \{0\}$。 □

引理 8.12。对于所有不成比例的 $\alpha, \beta \in G_2$，存在一个正根系Π'_F，它属于 F_4 且包含 $\pi^{-1}(\{\alpha, \beta\})$。

证明。选取 G_2 中的一个单根系 $\Delta'_G = \{g'_1, g'_2\}$，使得 g_1 是短的，并且 α, β 属于与 Δ'_G 对应的正根系 Π_G。令 $\Delta'_F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ 为 F_4 中按照引理 8.11 选取的一个标准简单根系。我们证明相应的正根系 Π'_F 包含 $\pi^{-1}(\{\alpha', \beta'\})$。只需证明 $\pi^{-1}(\{\alpha, \beta\})$ 不包含 $F_4 \setminus \Pi'_F = -\Pi'_F$ 中的根。这是因为 $\pi(-\Pi'_F) = -\Pi'_G \cup \{0\}$，而该集合既不包含 α，也不包含 β。□

命题 8.13. 设 G 是一个带有 F_4-分次的群$(U_\alpha)_{\alpha \in F_4}$。对于所有 $\beta \in G_2^0$，我们定义

$$U'_\beta := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \pi^{-1}(\beta) \rangle.$$

则 $(G, (U'_\beta)_{\beta \in G_2})$ 满足公理 *1.5*(i) 至 (iii)，因此，若满足公理 G_2-分次群的公理 *1.5*(iv)，它便是一个。

证明。对于公理 1.5(i)，我们证明由 $(U_\alpha)_{\alpha \in \pi^{-1}(0)}$ 生成的群包含于由 $(U'_\beta)_{\beta \in G_2}$生成的群中。回顾引理 8.7(ii) 可知

$$\pi^{-1}(0) = \{\pm f_3, \pm f_4, \pm(f_3 + f_3)\}.$$

注意，$f_3 = \delta_1 + \delta_2$ 和 $f_4 = \delta_3 + \delta_4$，其中

$$\delta_1 := f_2 + 2f_3 + f_4, \qquad \delta_2 := -(f_2 + f_3 + f_4),$$
$$\delta_3 := f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \qquad \delta_4 := -(f_1 + f_2 + f_3).$$

这里，$\{\delta_1, \delta_2\}$ 和 $\{\delta_3, \delta_4\}$ 张成类型为 A_2 的子系。根据 [Wie24，5.4.7]，，这在研究 A_2-分次群时是一个基本观察，可得$U_{\varepsilon f_3} = [U_{\varepsilon\delta_1}, U_{\varepsilon\delta_2}]$、$U_{\varepsilon f_4} = [U_{\varepsilon\delta_3}, U_{\varepsilon\delta_4}]$ 以及 $U_{\varepsilon(f_3+f_4)} = [U_{\varepsilon f_3}, U_{\varepsilon f_4}]$，对所有 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$均成立。因此，根群 $(U_\alpha)_{\alpha \in \pi^{-1}(0)}$ 包含于由 $(U_{\delta_i})_{i \in \{1,2,3,4\}}$生成的群中。由于 δ_1，δ_2，δ_3，δ_4 都属于 $\pi^{-1}(G_2)$，我们推知 G 由 $(U'_\beta)_{\beta \in G_2}$生成。

为证明 Weyl元的存在，任取 $\beta \in G_2$，并令 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 表示 $\pi^{-1}(\beta)$ 中两两不同的长根。对每个 $i \in \{1, \dots, m\}$，选取一个 α_i-Weyl元 $w_i = a_{-\alpha_i} b_{\alpha_i} c_{-\alpha_i}$，其中 $a_{-\alpha_i}, c_{-\alpha_i} \in U_{-\alpha_i}$ 和 $b_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i}$。由引理 8.7(iii) 和 (iv)，可得 $]\alpha_i, \alpha_j[= \emptyset =]\alpha_i, -\alpha_j[$，因此对于所有互不相同的 $i, j \in \{1, \dots, m\}$，均有 $[U_{\alpha_i}, U_{\pm\alpha_j}] = 1$。结合注 1.7，这意味着$w_\beta := \prod_{i=1}^m w_i$ 可以写成

$$w_\beta = \prod_{i=1}^m a_{-\alpha_i} \prod_{i=1}^m b_{\alpha_i} \prod_{i=1}^m c_{-\alpha_i} \in U'_{-\beta} U'_\beta U'_{-\beta}.$$

此外，由引理 8.6(ii)、注 8.9 且由于 $\sigma_{\alpha_1},\dots,\sigma_{\alpha_m}$ 两两交换，我们有

$$U_\gamma^{w_\beta} = U_{\gamma^{\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_m)}} \subseteq U'_{\pi(\gamma)^{\sigma(\beta)}} \quad \text{and} \quad U_\gamma^{w_\beta^{-1}} = U_{\gamma^{\sigma(\alpha_m)\cdots\sigma(\alpha_1)}} \subseteq U_{\pi(\gamma)^{\sigma(\beta)}}$$

对所有 $\gamma \in F_4$均成立。这意味着$(U'_\delta)^{w_\beta} \subseteq U'_{\delta^{\sigma(\beta)}} \subseteq (U'_\delta)^{w_\beta}$对所有 $\delta \in G_2$均成立。由此可知， w_β 是一个 β-Weyl元。

关于$(U'_\beta)^{\beta\in G_2}$ 的交换子关系 [Wie24, 2.1.29],由引理8.12可得，该引理满足其假设。（更确切地说，*loc. cit.* 中仅对根系之间的映射 $\pi\colon \Phi \to \Phi'$ 进行了表述，但同样的证明在 π 的像落在 $\Phi' \cup \{0\}$中的情形下仍然成立。）□

9. 三次 Jordan 矩阵代数

从现在起，直到本文结束，我们将转而讨论 F_4-分次。为此，我们将特例化到一种特定类型的三次范数对（事实上是三次范数结构），称为三次约旦矩阵代数。本节将简要介绍这些对象，以及定义它们所依托的所谓乘法圆锥替代代数，并汇集后文所需的全部性质。我们将严格遵循 [GPR24第 36, 37]节的论述。

约定 9.1。 对于交换环 k，所有 k-代数都约定为有单位元，但不一定结合或交换。我们回顾一下，若一个 k-代数A 满足以下条件，则称其为 交错的：$(aa)b = a(ab)$，以及 $(ab)b = a(bb)$，对所有 a、$b \in A$均成立。根据 Artin 定理，这意味着由任意两个元素（以及它们的逆元，若存在）生成的子代数都是结合的（例如参见 [GPR24，14。5]）

9.1. 记号与设置。

记号 9.2。从现在起（以及本文余下部分），我们用 k 表示一个交换环，并用（C, n）表示按 [GPR24，第 16.1、17.1]节意义下的一个乘法锥性交错 k-代数。这意味着， C 是一个交错 k-代数，配备了一个二次型 $n\colon C \to k$，称为 C的范数，并且对所有 a、$b \in C$ 以及

$$a^2 - n(1_C, a)a + n(a)1_C = 0_C$$

对所有 $a \in C$。这里 $n(a, b) := n(a + b) - n(a) - n(b)$ 表示 n 对 a, $b \in C$ 的线性化。此外，我们分别用

$$t\colon C \to k\colon a \mapsto n(1_C, a), \qquad t\colon C \times C \to k\colon (a, b) \mapsto t(ab),$$
$$\bar{\cdot}\colon C \to C\colon a \mapsto \bar{a} := t(a)1_C - a$$

表示 C 的（线性）迹、双线性迹和共轭。仅从排版角度来说，我们指出，表达式 ac 对 a, $c \in C$ 始终表示 (ac)，而不是 ac。我们通常将 C^-称为乘法圆锥替代代数，并在记号中省略 n 。

例 9.3. 环上的合成代数（按 [GPR24, 19.5] 的定义），例如八元数代数或四元数代数，是乘法圆锥替代代数中最重要的例子。此外，根据 [GPR24, 16.4]，任意 k-代数，只要作为 k-模是秩为2 的投射模，就是交换且结合的乘法圆锥代数。这提供了乘法圆锥

替代代数的例子，它们不是合成代数，例如对偶数$k[\epsilon] := k[t]/(t^2)$。合成代数与乘法圆锥替代代数之间的关键区别在于，后者不必是 k-模上的有限生成投射模，其范数也不必满足任何“正则性假设”（例如非退化性）。关于以圆锥替代代数刻画合成代数的详细内容，参见 [GPR24, 19.13]。关于不同“正则性假设”所涉及的细微问题的讨论，这些假设在特征不为2 的域上的有限维向量空间中彼此等价，但在基环上则不然，参见 [GPR24, 11.9,11.11]。

注 9.4. 对于所有 a、b、$c \in C$，以下恒等式成立。

(i) 共轭是一个对合：$a + b = a + b$, $\overline{ab} = b\bar{a}$ 和 $\bar{\bar{a}} = a$。[GPR24, 17.2](ii) 共轭对合是标量的：$aa = \bar{a}a = n(a)1_C$ 和 $a + \bar{a} = t(a)1_C$。[GPR24, (16.5.6)](iii) n 和 t 在共轭下保持不变：$n(\bar{a}) = n(a)$ 和 $t(\bar{a}) = t(a)$。[GPR24, (16.5.7)](iv) Kirmse 恒等式：$a(ab) = n(a)b = (ba)a$，因此，线性化为 $a(cb)+a(cb) = n(a, c)b = (ba)c + (bc)a$。[GPR24, (17.4.1)](v) $t(a^2) = t(a)^2 - 2n(a)$。[GPR24, (16.5.8)](vi) $n(a, b) = t(a)t(\bar{b}) - t(ab)$。[GPR24, (16.5.10)](vii) C 是范数结合的：$n(a, ba) = t(b)n(a)$，$n(a, ab) = t(b)n(a)$，$n(ab, c) = n(a, cb) = n(b, ac)$，$t(a, b) = n(\bar{a}, b)$。[GPR24, 16.12, 17.2](viii) t 是结合线性形式（按 [GPR24, 7.9] 的意义）：$t(ab) = t(ba)$ 且 $t((ab)c) = t(a(bc)) =: t(abc)$。[GPR24, (16.13.1)]

记号 9.5 ([GPR24, 36.1])**.** 我们常说“一个求和取遍所有循环置换 $(i\,j\,l)$ 的 $(1\,2\,3)$”，意思是表达式 $\sum x_{ijl}$ 表示$x_{123} + x_{231} + x_{312}$。

记号 9.6. 我们固定一个（未必可逆的）对角矩阵 $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$，它属于 $\mathrm{Mat}_3(k)$，并用 J 表示三次约旦矩阵代数 $\mathrm{Her}_3(C, \Gamma)$，如[GPR24, 36.4]中所述。为方便读者，我们详细说明其含义。作为k-模，J 同构于 $k^3 \oplus C^3$，并由所有形式表达式组成

$$\sum \big(\xi_i e_{ii} + u_i[jl]\big)$$

其中 $\xi_i \in k$、$u_i \in C$，且该求和取遍 (1 2 3) 的所有循环置换 $(i\,j\,l)$。我们将记

$$e_i := e_{ii} \in J, \quad u[lj] := \bar{u}[jl], \quad 1_J := e_1 + e_2 + e_3,$$
$$J_{ii} := ke_i, \quad J_{jl} := J_{lj} := C[jl]$$

对 (1 2 3) 的任意循环置换 $(i\,j\,l)$ 以及所有 $\xi \in k$、$u \in C$。于是我们有一个分解

$$J = J_{11} \oplus J_{22} \oplus J_{33} \oplus J_{23} \oplus J_{31} \oplus J_{12}.$$

对于任意元素

$$x = \sum \big(\xi_i e_i + u_i[jl]\big) \quad \text{and} \quad y = \sum \big(\eta_i e_i + v_i[jl]\big)$$

属于 J，定义

$$\begin{aligned} x^\sharp &:= \sum\Big(\big(\xi_j\xi_l - \gamma_j\gamma_l n(u_i)\big)e_i + \big(-\xi_i u_i + \gamma_i\overline{(u_j u_l)}\big)[jl]\Big), \\ N(x) &:= \xi_1\xi_2\xi_3 - \sum \gamma_j\gamma_l\xi_i n(u_i) + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t(u_1u_2u_3), \\ x\times y &:= \sum\Big(\big(\xi_j\eta_l + \eta_j\xi_l - \gamma_j\gamma_l n(u_i,v_i)\big)e_i \\ &\qquad + \big(-\xi_i v_i - \eta_i u_i + \gamma_i\overline{(u_j v_l + v_j u_l)}\big)[jl]\Big), \\ T(x,y) &:= \sum\big(\xi_i\eta_i + \gamma_j\gamma_l n(u_i,v_i)\big) \end{aligned}$$

其中所有求和均遍历 $(i\,j\,l)$ 的所有循环置换 $(12\,3)$。这定义了映射 $\sharp$， N， $\times$， T 根据 [GPR24，36。5], 赋予 J 三次范数结构，其基点为 1_J。

记号 9.7。作为一个三次范数结构， J 诱导出一个三次范数对，记作（J， J'）。因此， J' 是 J 的一个同构副本，并令

$$\iota\colon J \to J' \colon a \mapsto a^\iota$$

是 J 与 J'之间的固定同构，其逆映射为

$$^{\iota}\colon J' \to J \colon a \mapsto a^{\iota}\ .$$

因此，$(\iota,\ ^{\iota})\colon (J,\ J') \to (J',\ J)$ 是 $(J,\ J')$ 的一个对合。此外，我们用$e'_{ii} = e'_i$、$1_{J'}$、 J'_{ii} 和 J'_{jl} 表示 J 中相应元素和子空间在 ι下的像。

注释9.8. 假设 γ_1、γ_2、γ_3 均可逆，令 $p := \sum_{i=1}^3 \gamma_i e_i \in J$，并用 $\mathrm{Her}_3(C)$ 表示相对于$\bar{}$对角矩阵 $\Gamma = (1_k, 1_k, 1_k)$ 定义的三次约旦矩阵代数。根据 [GPR24, 37. 23], ， J 的 p-各伦（按照注记 2.17 的含义）与 $\mathrm{Her}_3(C)$ 同构。特别地，如果我们限于 Γ 可逆的情形，那么 (J, J') 的各伦类型（因此，根据命题 5.16，李代数 $L(J, J')$ 的同构类型）不依赖于 Γ 的选择。

注 9.9. 由定义 T 的公式可知， T 是非退化的（即例 6.15 中定义的根为零，也就是说， $T(a, J) = \{0\}$ 蕴含$a = 0$）当且仅当 n 的线性化是非退化的（在类似的意义下）。因此，若 k 是一个域且 n 的线性化是非退化的，则由定理 6.25， $L(J, J')$是单的。特别地，若 k 是域且C 是 [GPR24, 19.5]意义下的合成代数，则这些条件成立。在这些假设下，由 [GPR24, 39.9(d)], J 是弗罗伊登塔尔代数。此外，若 C 是八元数代数，则由 [GPR24, 39.19(a)], J 是阿尔伯特代数。

注 9.10. 根据 [GPR24，37.8，37.9], ， 三元组$(e_1,\ e_2,\ e_3)$ 是 [GPR24，37.5], 意义下的初等框架，且它是连通的当且仅当 Γ是可逆的。在此设定下，我们可以将 [GPR24第 37]节的结果应用于 J（若需要坐标系，则附加假设 Γ 是可逆的）。

9.2. **三次约旦矩阵代数中的恒等式**。我们先汇集一些结果，将记号 9.6 中的长公式化为更简洁的恒等式。对于下一个引理，请回忆定义 (J, J') 2.7 所给出的 Jordan 对结构。

引理 9.11 (多重皮尔斯分解)。 以下断言对所有 $i, j, l, m, p, q \in \{1, 2, 3\}$ 均成立。

(i) $\{J_{ij}, J'_{jl}, J_{lm}\} \subseteq J_{im}$ 和 $U_{J_{ij}}(J'_{ij}) \subseteq J_{ij}$. *(ii)* $\{J_{ij}, J'_{lm}, J_{pq}\} = 0$ 和 $U_{J_{ij}}(J'_{lm}) = 0$，如果指标 i, j, l, m, p, q（分别为 i, j, l, m）无法按上述形式两两重新排列。也就是说，根据 [*GPR24, 32.*14]，，皮尔斯三元组 (ij, lm, pq)（分别为 (ij, lm, ij)）是不连通的。

如果互换 J 和 J' 的角色，则类似的陈述也成立。

证明。 根据 [GPR24, 37。8]，空间 J_{ij} 对于 i， $j \in \{1, 2, 3\}$ 恰好是三次范数结构 J的皮尔斯分量。因此，该断言由约旦代数中的皮尔斯分解得出，参见 [GPR24, 32。15]。 □

引理 9.12. 设 $a \in J$，并写作

$$a = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + c_1[23] + c_2[31] + c_3[12]$$

其中每个 $\xi_i \in k$，每个 $c_i \in C$。设 $(i\,j\,l)$ 是 $(1\,2\,3)$ 的任意一个（不一定是循环的）排列。则以下公式（以及将 T 换成 T' 所得的对应公式）成立。

(i) $T(a, e'_i) = \xi_i$.(ii) $T(a, d_l[ij]^\iota) = T(c_l[ij], d_l[ij]^\iota) = \gamma_i\gamma_j t(c_l d_l)$ 对所有 $d_l \in C$ 都成立。(iii) (J, J') 的皮尔斯分解关于 T 正交，即对所有满足 $\{p, q\} \neq \{r, s\}$ 的 $b_{pq} \in J_{pq}$, $b'_{rs} \in J'_{rs}$，都有 $T(b_{pq}, b'_{rs}) = 0$。

证明。 这些是定义 T和9.6记号中的公式的特殊情形。注意，我们可以假设 $(i\,j\,l)$ 是一个循环置换；一般情形可由此情形推出（因为 $t(c_l d_l) = t(c_l d_l)$，由注记 9.4(iii) 和 (viii)可得）。或者，我们可以引用 [GPR24, (37.13.5)] 来证明 (i) 和 (ii)中的第一个等式；而证明 [GPR24, 37.4(c)] 则用于(iii)。 □

引理 9.13。 设 $a \in J$ 并记

$$a = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + c_1[23] + c_2[31] + c_3[12]$$

其中每个 $\xi_i \in k$ 和每个 $c_i \in C$。令 $c_{ij} := c_l[ij]$，对 $(1\,2\,3)$的所有循环置换$(i\,j\,l)$均成立。设$(i\,j\,l)$ 和$(i'\,j'\,l')$ 是$(1\,2\,3)$ 的置换，且$(i\,j\,l)$ 是循环置换。则以下公式（以及将 $T, \times$分别换为 $T', \times'$ 所得的类似公式）成立。

(i) $a \times e_i = \xi_l e'_j + \xi_j e'_l - c_i[jl]^\iota$。特别地， $e_{i'} \times e_{j'} = e'_{l'}$ 和 $c_{i'}[j'l'] \times e_{i'} = -c_{i'}[j'l']^\iota$。(ii) $c_{l'}[i'j'] \times d_{i'}[j'l'] = \gamma_{j'} c_{l'} d_{i'}[il]$ 对所有 $d_{i'} \in C$均成立。(iii) $a \times d_{ij} = -T(c_{ij}, d_{ij})e'_l - \xi_l d^\iota_{ij} + c_{li} \times d_{ij} + d_{ij} \times c_{jl}$ 对所有 $d_{ij} \in J_{ij}$均成立。

证明。 这些是如下公式的特殊情形，所述公式定义 $\times$ 与 T，见记号9.6。同样，一般情形由循环情形推出，因为

$$\begin{aligned} e_l \times e_j &= e_j \times e_l = e_i, \\ c_l[ji] \times e_l &= \overline{c_l}[ij] \times e_l = -\overline{c_l}[ij]^\iota = -c_l[ji]^\iota \quad \text{and} \\ c_i[lj] \times d_l[ji] &= \overline{d_l}[ij] \times \overline{c_i}[jl] = \gamma_j \overline{d_l}\,\overline{c_i}[il] = \gamma_j c_i d_l[li]. \end{aligned}$$

或者，我们可以引用 [GPR24，（37.13.4）] 来证明 (i) 和 (iii)。 □

引理 9.14。 对于两两不同的 i、j、$l \in \{1,2,3\}$，以下结论成立：

(i) $J_{ij} \times J_{jl} \subseteq J'_{il}$。(ii) $J_{ij} \times J_{ij} \subseteq J'_{ll}$ 和 $J_{ij} \times J_{ll} \subseteq J'_{ij}$。(iii) $J_{ij} \times J_{jj} = 0 = J_{jj} \times J_{jj}$。

证明。 若 $(i\,j\,l)$ 是 $(1\,2\,3)$的循环置换，则由引理 9.13，所有断言均由引理 9.13得出。一般情形则由 $\times$ 具有对称性且 $J_{ij} = J_{ji}$而得出。此外，(i)是 [GPR24,(37.13.1)]。 □

我们还可以根据定义 2.7 计算算子 $D_{a,a'} = D(a,a')$ 的显式公式；这些公式与引理 9.11 一起刻画了这些算子。实际上，我们只需要其中少数几个公式，但为求完整，仍将它们全部列出。此时我们已经可以看到，对于许多（但并非所有）可能的 i,j,p,q 取值，算子 $D(a[ij],b[pq])$ 只取决于乘积 ab。这将在后文引出关于 $\mathsf{d}(a[ij],b[pq])$ 的类似结论，见引理 10.9 和 10.10。不过，我们只会利用引理 9.15 中的显式公式证明引理 10.9；而引理 10.10 则由引理 4.17 通过特化到三次约旦矩阵代数而得出。

引理 9.15. 设 $i,j,l \in \{1,2,3\}$ 两两不同，设 $a_1,a_2,a_3 \in C$，且设$s_1,s_2,s_3 \in k$。则有以下结论：

(i) 算子 $D(a_1[jl],a_2[li]^\iota)$ 满足

$$\begin{aligned}\{a_1[jl],a_2[li]^\iota,a_3[ij]\} &= \gamma_i\gamma_j\gamma_l t(a_1a_2a_3)e_j,\\ \{a_1[jl],a_2[li]^\iota,a_3[il]\} &= \gamma_i\gamma_l(a_1a_2)a_3[jl],\\ \{a_1[jl],a_2[li]^\iota,s_3e_i\} &= \gamma_l s_3 a_1a_2[ji].\end{aligned}$$

(ii) 算子 $D(s_1e_j,a_2[ji]^\iota)$ 满足

$$\begin{aligned}\{s_1e_j,a_2[ji]^\iota,a_3[ij]\} &= \gamma_i\gamma_j s_1 t(a_2a_3)e_j,\\ \{s_1e_j,a_2[ji]^\iota,a_3[il]\} &= \gamma_i s_1a_2a_3[jl]\\ \{s_1e_j,a_2[ji]^\iota,s_3e_i\} &= s_1s_3a_2[ji].\end{aligned}$$

(iii) 算子 $D(a_1[ji],s_2e'_i)$ 满足

$$\begin{aligned}\{a_1[ji],s_2e'_i,a_3[ij]\} &= \gamma_i\gamma_j s_2 t(a_1a_3)e_j,\\ \{a_1[ji],s_2e'_i,a_3[il]\} &= \gamma_i s_2a_1a_3[jl],\\ \{a_1[ji],s_2e'_i,s_3e_i\} &= s_2s_3a_1[ji].\end{aligned}$$

(iv) 算子 $D(s_1e_i,s_2e_i)$ 满足

$$\begin{aligned}\{s_1e_i,s_2e'_i,s_3e_i\} &= 2s_1s_2s_3e_i,\\ \{s_1e_i,s_2e'_i,a_3[ij]\} &= s_1s_2a_3[ij].\end{aligned}$$

(v) 算子 $D(a_1[ij],a_2[ji])$ 满足

$$\begin{aligned}\{a_1[ij],a_2[ji]^\iota,s_3e_i\} &= \gamma_i\gamma_j s_3 t(a_1a_2)e_i,\\ \{a_1[ij],a_2[ji]^\iota,a_3[ij]\} &= \gamma_i\gamma_j\big(t(a_2a_3)a_1 + t(a_1a_2)a_3 - t(a_1\overline{a_3})\overline{a_2}\big)[ij],\\ \{a_1[ij],a_2[ji]^\iota,a_3[il]\} &= \gamma_i\gamma_j a_1(a_2a_3)[il].\end{aligned}$$

此外，若将所有元素 $b \in J$ 和 $c \in J'$ 分别替换为 $b^\iota \in J'$ 和 $c \in J$，则相同的结论仍然成立。

证明。这是一个直接的计算，详见第 9.3 节。注意，由于 $\{a,b',c\}=\{c,b',a\}$ 对于 a，$c\in J$，$b'\in J'$ 和 $a[ij]=a[ji]$ 对于 $a\in C$ 以及 $i\neq j$，有些公式是冗余的。对于(i)中的第二个公式，我们先通过直接计算证明

$$\{a_1[jl],a_2[li]^\iota,a_3[il]\}=\gamma_i\gamma_l\big(t(a_2a_3)a_1-(a_1\overline{a_3})\overline{a_2}\big),$$

然后，应用注 9.4(iv)即可得到所需公式。 □

9.3. 三次 Jordan 矩阵代数中的计算。证明引理 9.15 所需的J 中的计算，以及稍后我们需要在 L和 Aut(L)中进行的类似计算，都归结为以下两个步骤：首先，我们展开所有相关算子（例如 D、U、N、$\sharp$、$\times$、T 以及李括号）的定义，进而发现所需断言等价于C 和 k中的一组方程。其次，我们证明这些方程可由乘法圆锥替代代数上的已知恒等式推出，例如注 9.4 中的恒等式。原则上，这一过程很直接，但所需的计算可能相当冗长。特别是，验证 Aut(L)中的某些元素是韦伊元（命题 11.11）似乎过于繁复，难以手工完成。因此，我们使用计算机代数系统 GAP [GAP25]完成了这些计算。我们的代码可在 [Wie25]获取。下面，我们将介绍这些计算的一些细节。

关键问题在于处理一个任意乘法圆锥交错代数。换言之，我们必须在一个自由乘法圆锥代数中工作，其生成元可视为不定元。假设我们要证明涉及圆锥代数中至多 p 个元素以及交换环中至多q 个元素的恒等式。我们引入相应的不定元（即抽象符号） $a_1,\dots,a_p$ 和 $t_1,\dots,t_q$。对每个 $i\in\{1,\dots,p\}$，我们还引入抽象符号 a_i 和 $n(a_i)=n(a_i)$，它们（尚）与符号 a_i没有任何关系。类似地，对由 $A:=\{a_1,\dots,a_p,a_1,\dots,a_p\}$中的符号生成的自由幺 magma A^* 中的每个 a，我们定义一个抽象符号 $t(a)$。

利用上述所有符号，我们将 k 定义为 $\mathbb{Z}$上以不定元 $t_1,\dots,t_q$、$n(a_1)\dots,n(a_p)$以及对 $a\in A$的 $t(a)$为变元的多项式环。类似地，我们将 C 定义为由符号$a_1,\dots,a_p$、$a_1,\dots,a_p$生成的 k 上的自由非结合代数。现在我们可以赋予先前引入的符号名称以含义：定义 $t\colon C\to k$ 为将 $a\in A^*\subseteq C$ 映到 $t(a)\in k$ 的唯一 k-线性映射，并定义 $\bar{\cdot}\colon C\to C$ 为将 a_i 映到a_i、将 a_i映到 a_i（对所有 $i\in\{1,\dots,p\}$）且使得对所有 $a,b\in A^*\subseteq C$有 $ab=ba$ 的唯一 k-线性映射。我们还定义 $n\colon A^*\to k$ 为将$a\in A$ 映到抽象符号 $n(a)$的唯一 magma 同态。在 A^* 上选取任意全序 $<$（例如字典序），我们可以通过令

$$n\Big(\sum_{a\in A^*}\lambda_a a\Big):=\sum_{a\in A^*}\lambda_a^2 n(a)+\sum_{a<b\in A^*}\lambda_a\lambda_b t(a\bar{b}) \tag{27}$$

对于 k 中任意一族标量 $(\lambda_a)_{a\in A^*}$，其中只有有限多个非零。换言之，n是唯一的 k-二次映射 $C\to k$，它将 a_i 和 a_i 映射到$n(a_i)=n(a_i)$，对所有 $i\in\{1,\dots,p\}$ 均成立，且满足 $n(a+b)=n(a)+n(b)+t(ab)$

~ ~对所有 $a < b \in A^*$ 均成立。对象和映射 k、C、t、n、$\cdot$ 在 GAP 中很容易实现。因此，我们也可以实现定义在 $\tilde{J} := \tilde{C}^3 \oplus \tilde{k}^3$ 上的映射 N、T、$\times$ 和 $\sharp$。

~ ~根据构造，k 与 C 满足如下泛性质：对任意 $b_1, \ldots, b_p \in C$ 与 $s_1, \ldots, s_q \in k$，存在唯一同态 $\pi_k\colon\ k \to \tilde{k}$ 与 $\pi_C\colon\ C \to C$，使得 $\pi_k(t_i) = s_i$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, q\}$ 成立，$\pi_C(a_j) = b_j$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, p\}$ 成立，并且

$$\pi_k(t(c)) = t_C\big(\pi_C(c)\big), \quad \pi_k(n(c)) = n_C\big(\pi_C(c)\big), \quad \pi_C(\bar{c}) = \overline{\pi_C(c)}$$

~对所有 $c \in C$ 成立，其中 n_C、t_C 表示 C 上的范数与迹。特别地，虽然 ~ ~ $n\colon\ C \to k$ 依赖于 A^* 上全序 $<$ 的选取，但映射 $\pi_k \circ n\colon\ C \to k$ 与该选取无关，因为它等于 $n_C \circ \pi_C$。我们称化简~ ~ ~映射是指映射 $\alpha\colon\ C \to C$（或 $\alpha\colon\ k \to k$），使得对 k、C、b_1，……，$b_m \in C$ 以及 s_1，……，$s_n \in k$ 的所有可能选取，对所有 $c \in C$~都有 $\alpha(c) - c \in \ker(\pi_C)$（或对所有 $s \in k$ 都有 $\alpha(s) - s \in \ker(\pi_k)$）。例如，对 $A = \{a_1, \ldots, a_p, a_1, \ldots, a_p\}$ 上的任意全序 $\prec$，把所有针对 $c \prec b \in A$ 出现的 $t(bc)$ 替换为 $t(cb)$ 的映射，由注 9.4(viii) 可知是一个化简映射。为了证明~诸如引理 9.15 中的恒等式 $\ell = r$，我们“在 J 中”计算两边 ℓ、r（对 C 中出现的每个变量使用不定元 a_1，……，a_p 之一，并类似地对 k 中的变量使用 t_1，……，t_q），并对差 $\ell - r$ 施加某一（固定的）化简映射序列。若结果为 0，则我们已证明该恒等式对任意 C 与 k 成立。否则，我们得不到任何信息。当前的主要挑战在于寻找并实现在计算上可行、但仍“足够强”以覆盖我们想要证明的全部恒等式的化简映射。这些化简映射的正确性依赖于注 9.4 中的恒等式。

~从这里开始，适当对象 L 的实现~十分直接 L_0，唯独零分量 ~ ~，0 例外。我们再次使用抽象 ζ 符号 ξ 和 d_a（以及它们的线性组合）$_{a'}$ 来表示 a 的元素，并使用合适的“化简映射” $a' \in J$（尝试）证明各项相等。这些化简映射依赖于引理 10.9、10.10 和 10.13 中的恒等式。最后，我们可以根据第 7 节中的公式定义指数自同构，并通过在 L_0 上求值来证明这类自同构的乘积相等；~ ~在 $L_{-2} \cup L_1$ 中的像是李代数的一个生成集。

~在少数情况下，化简映射不会将 C 的一个元素化为 0，而是将其化为一个相当短的表达式。在这种情况下，我们只需手动证明，对于所有可能的 π_C 取值，“化简后”的表达式都属于 $\ker(C)$（而不必实现一个可能相当复杂、但能自动完成这一证明的化简映射）。

请注意，本节所述的策略仅适用于三次 Jordan 矩阵代数，而不适用于任意三次范数对。虽然类似的策略当然也可以用于三次范数对，但由于三次范数对的结构中包含更多映射，实现起来会更加复杂。此外，范数 N 是三次的，而不仅仅是二次的，这一事实会使这一工作更加困难。同时，由于 G_2 中的根空间数量更易于处理，对计算机辅助的需求也较少。

~ ~我们还考虑过一种采用 k、 C和 $L_{0,\ 0}$ 中元素的“标准形”的方法，而不是使用化简映射。在某种程度上，我们所使用的化简映射会将“短（乘积）长度”的元素变换为接近标准形的形式，但为任意元素寻找标准形这一任务似乎要困难得多。

10. 细化李代数的 G_2-分次

我们沿用9.2、9.6 与9.7 的记号，并用 $L := L(J,\ J')$ 表示第4 节中相对于三次范数对 $(J,\ J')$ 的李代数，该对来自一个三次约旦矩阵代数。我们的目标是进一步细化 G_2-分次，即 L在命题4.28 中的分次，使之成为一个 F_4-分次。

10.1. **细化的构造**。 为了构造这一分次的细化，我们将首先构造三个新的分次。它们来自“双曲对” $(e_i,\ e_i')$ ，其中 e_i 与 e_i' 如第9节所述。当 k 是一个域时，我们确实可以直接遵循来自 [DMM25] 的方法，并由这些双曲对构造分次；但在我们的设定中，我们将把这一过程反过来：先描述该分次的各个不同部分（定义10.15），然后再验证这确实定义了一个5-分次（命题10.21）。

最难控制的部分是“中间”子空间 Z （见定义 4.9）。我们利用多重皮尔斯分解引入某些子空间 $Z_{i\to j}$， Z 并在引理 10.5至 10.7中考察这些子空间如何与各个分量相互作用。在命题 10.14中，我们将证明 $Z_{i\to j}$ 同构于圆锥代数 C。

定义 10.1。 (i) 对于每个子空间 $A \le J$ 和每个子空间 $A' \le J'$，记作

$$Z(A, A') := \langle \mathbf{d}_{a,a'} \mid a \in A, a' \in A' \rangle \le Z.$$

(ii) 利用引理 J_{ij} 中的皮尔斯子空间 9.11，记作

$$Z_{ij,lm} := Z(J_{ij}, J'_{lm}),$$

对所有 i、 j、 l、 $m \in \{1,2,3\}$。 （允许 $i = j$或 $l = m$。）

(iii) 最后，对于所有 i、 $j \in \{1,2,3\}$（不一定互不相同），记作

$$Z_{i\to j} := Z_{i1,1j} + Z_{i2,2j} + Z_{i3,3j}.$$

注 10.2。 注意，根据引理 9.11 和命题 4.14， $Z_{ij,\ lm} = 0$ 当且仅当 $\{i,j\} \cap \{l,m\} = \emptyset$ 时成立。

以下记号有助于避免一些分类讨论。

定义10.3。 设 I 是 J、 J' 或 Z 的子空间，并设 P 是一个逻辑命题。定义 $I^P := I$ ，若 P 为真；若 P 为假，则定义 $I^P := 0$ 。

引理 10.4. 设 i、 j、 l、 p、 $q \in \{1,2,3\}$ 为任意元素。设 $a \in J_{il}$ 和 $a' \in J'_{lj}$。则：

(i) 若 $i \ne j$，则

$$D_{a,a'}(J_{pq}) \subseteq J_{iq}^{p=j} + J_{ip}^{q=j}.$$

(ii) 若 $i = j$，则

$$D_{a,a'}(J_{pq}) \subseteq J_{pq}^{\{p,q\}\cap\{i,l\}\ne\emptyset}.$$

如果交换 J 和 J' 的角色，同样的断言仍然成立。

证明。 这是引理 9.11的直接推论。 □

引理 10.5。 设 i、j、p、$q \in \{1,2,3\}$，且 $i \neq j$。则下列结论成立：

(i) $[Z_{i\to j}, J_{pq}] \subseteq J_{iq}^{p=j} + J_{ip}^{q=j}$ 与 $[Z_{i\to j}, J'_{pq}] \subseteq (J'_{jq})^{p=i} + (J'_{jp})^{q=i}$。(ii) $[Z_{i\to i}, J_{pq}] \subseteq J_{pq}$ 与 $[Z_{i\to i}, J'_{pq}] \subseteq J'_{pq}$。

证明。 设 i, j, p, q, $l \in \{1,2,3\}$。（我们不假定 $i \neq j$。）设 $a \in J_{il}$, $a' \in J_{lj}$, $c_{pq} \in J_{pq}$ 与 $c'_{pq} \in J'_{pq}$。由命题 4.14,

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, c_{pq}] = D_{a,a'}(c_{pq}) \quad \text{and} \quad [\mathbf{d}_{a,a'}, c'_{pq}] = -D_{a',a}(c'_{pq}).$$

断言现在由引理 10.4 得出。 □

引理 10.6。 设 $i,j,p,q \in \{1,2,3\}$ 满足 $i \neq j$。那么， $Z_{i\to j}$和$Z_{i\to i}$ 在 $L_{\pm 1}$ 上的作用满足以下公式：

(i) $[Z_{i\to j}, (k, J_{pq}, J'_{pq}, k)_\pm] \subseteq (0, J_{iq}^{p=j} + J_{ip}^{q=j}, (J'_{jq})^{p=i} + (J'_{jp})^{q=i}, 0)_\pm$.
(ii) $[Z_{i\to i}, (0, J_{pq}, J'_{pq}, 0)_\pm] \subseteq (0, J_{pq}, J'_{pq}, 0)_\pm$.

证明。 这由命题 4.12和引理 10.5推出。对于第一个断言，我们还利用了对所有 $a \in J_{il}$, $a' \in J_{lj}$满足 $l \in \{1,2,3\}$（即，对于使相应的(a,a')所对应的 $\mathbf{d}_{a,a'}$ 生成 $Z_{i\to j}$的集合），有 $T(a,a') = 0$，由引理9.12(iii)得出。 □

引理 10.7。 设 $i,j,l \in \{1,2,3\}$ 任意。

(i) $Z_{i\to j}$ 是 Z的李子代数；若 $i \neq j$，则它是阿贝尔的。(ii) $[Z_{i\to j}, Z_{j\to i}] \subseteq Z_{i\to i} + Z_{j\to j}$。(iii) 李代数 $Z_{i\to i}$ 正规化 $Z_{j\to l}$，即 $[Z_{i\to i}, Z_{j\to l}] \subseteq Z_{j\to l}$。(iv) 当 i,j,l 两两不同时， $[Z_{i\to j}, Z_{j\to l}] \subseteq Z_{i\to l}$。(v) 当 i,j,l 两两不同时， $[Z_{i\to j}, Z_{i\to l}] = 0$ 和 $[Z_{i\to j}, Z_{l\to j}] = 0$。

证明。 由推论4.13 可知

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}] = \mathbf{d}_{D_{a,a'}(b),b'} - \mathbf{d}_{b,D_{a',a}(b')}. \tag{28}$$

在整个证明中，我们将假定 $i,j,l,p,q \in \{1,2,3\}$ 均为任意的。我们首先注意到，由引理10.4(ii) 与（28）， $Z_{i\to i}$ 正规化每一个$Z_{jl,pq}$，因此特别地，

$$[Z_{i\to i}, Z_{p\to q}] \subseteq Z_{p\to q}. \tag{29}$$

（i）首先假设 $i = j$。则由（29）并取 $p = q = i$, $Z_{i\to i}$ 确实是 Z的李子代数。

接下来假设 $i \neq j$。我们必须证明，对所有 $a \in J_{ip}$, $a' \in J'_{pj}$,$b \in J_{iq}$, $b' \in J'_{qj}$, 有 $[\mathbf{d}_{a,a'},\mathbf{d}_{b,b'}] = 0$。由引理10.4(i)，我们有

$$D_{a,a'}(b) \in J_{ii}^{q=j} \quad \text{and} \quad D_{a',a}(b') \in J'^{\,q=i}_{jj}.$$

然而，由引理9.11，我们有$Z_{ii,jj} = 0$，这意味着$\mathbf{d}_{D_{a,a'}(b)\ b'}$与$\mathbf{d}_{b,D_{a',a}(b')}$ 在 $q = j$ 或 $q = i$时也是平凡的。

(ii) 我们不妨假设 $i \neq j$。令 $a \in J_{ip}$, $a' \in J'_{pj}$, $b \in J_{jq}$, $b' \in J'_{qi}$。于是由引理10.4(i)和（28），可得

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}] \in Z_{iq,qi} + Z_{jq,qj} \subseteq Z_{i\to i} + Z_{j\to j}.$$

(iii) 这就是（29）。(iv) 令 $a \in J_{ip}$, $a' \in J'_{pj}$, $b \in J_{jq}$, $b' \in J'_{ql}$。于是由引理 10.4(i) 和（28），可得

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}] \in Z_{iq,ql} + Z^{q=i}_{qj,jl} \subseteq Z_{i\to l}.$$

(v) 设 $a \in J_{ip}$, $a' \in J'_{pj}$, $b \in J_{iq}$, $b' \in J'_{ql}$。则由引理 10.4(i) 和（28），可得

$$[\mathbf{d}_{a,a'}, \mathbf{d}_{b,b'}] \in Z^{q=j}_{ii,ql} + Z^{q=i}_{iq,jl} \subseteq Z_{ii,jl} = 0.$$

另一个恒等式的证明完全类似。 □

我们的下一个目标是证明每个空间 $Z_{i\to j}$ 都与圆锥代数 C（$i \neq j$）同构（命题 10.14）。显然，我们有一个满同态 $C \to Z_{ii,\ ij}$: $a \mapsto \mathbf{d}_{e_i,\ a[ij]^\iota}$（利用 $i \neq j$），因此需要证明的主要性质是 $Z_{ii,\ ij} = Z_{i\to j}$。

引理 10.8. 设 $i, j \in \{1,2,3\}$ 互不相同，且设 $a \in C$。则

$$D(a[ij], 1_C[ji]^\iota) = D(1_C[ij], a[ji]^\iota) \quad \textit{and} \quad D(a[ij]^\iota, 1_C[ji]) = D(1_C[ij]^\iota, a[ji]).$$

证明。我们只证明第一个结论，第二个结论的证明类似。由引理 9.11 和引理 9.15(v) 可立即得出，两个算子在 J 的所有分量上的作用方式相同，唯一可能的例外是 J_{ij}。对于在 J_{ij}上的作用，我们对任意的 $b \in C$进行计算：

$$\{a[ij], 1_C[ji]^\iota, b[ij]\} = \gamma_i\gamma_j\big(t(b)a + t(a)b - t(a\bar{b})1_C\big)[ij],$$
$$\{1_C[ij], a[ji]^\iota, b[ij]\} = \gamma_i\gamma_j\big(t(ab)1_C + t(a)b - t(\bar{b})\bar{a}\big)[ij].$$

回顾注 9.4(iii)、(vi) 和(vii) 可知 $t(b) = t(\bar{b})$ 且

$$t(a\bar{b}) = n(a,b) = t(a)t(\bar{b}) - n(a,\bar{b}) = t(a)t(b) - t(ab).$$

因此，上述两个表达式之差为

$$t(b)a - t(a)t(b)1_C + t(b)\bar{a},$$

由于 $t(a)1_C = a + \bar{a}$，因此该值为零。 □

引理 10.9。 设 $i, j \in \{1,2,3\}$ 互不相同，且设 $a \in C$。则 $\mathbf{d}(a[ij], 1_C[ji]^\iota) = \mathbf{d}(1_C[ij], a[ji]^\iota)$。

证明。由于 $T(a[ij],\ 1_C[ji]^\iota) = \gamma_i\gamma_j t(a) = T(1_C[ij],\ a[ji]^\iota)$，这由命题 4.12和引理 10.8可得。 □

引理 10.10。 设 $i, j, l \in \{1,2,3\}$ 两两互不相同，且设 $a, b \in C$。则有以下结论。

(i) $d_{e_1,e'_1} + d_{e_2,e'_2} + d_{e_3,e'_3} = 2\zeta - \xi$. (ii) $d(e_j, a[ji]^\iota) = d(a[ji], e'_i)$. (iii) $d(a[jl], b[li]^\iota) = d(1_C[jl], ab[li]^\iota) = d(ab[jl], 1_C[li]^\iota)$ (iv) $d(a[ij], a[ji]^\iota) = \gamma_i\gamma_j n(a)(d_{e_i,e'_i} + d_{e_j,e'_j})$. (v) $d(a[ij], b[ji]^\iota) + d(b[ij], a[ji]^\iota) = \gamma_i\gamma_j t(ab)(d_{e_i,e'_i} + d_{e_j,e'_j})$.

证明。 回顾引理 4.17(v) 对所有 p', q', $r' \in J'$，我们有

$$\mathbf{d}_{p'\times q',r'} + \mathbf{d}_{q'\times r',p'} + \mathbf{d}_{r'\times p',q'} = T(r', p'\times q')\cdot(2\zeta - \xi).$$

我们将此项记为 $\varphi(p',q',r')$，并通过将 p', q', r' 取为精心选择的值来证明这些断言。我们还将使用引理 9.12 和 9.13 来计算˜项，例如 $p'\times b'$ 或 $T(r', p'\times q')$。对于 $p' := e'_1$, $q' := e'_2$, 以及 $r' := e'_3$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(p',q',r') &= \mathbf{d}(e'_1\times e'_2, e'_3) + \mathbf{d}(e'_2\times e'_3, e'_1) + \mathbf{d}(e'_3\times e'_1, e'_2)\\ &= \mathbf{d}_{e_1,e'_1} + \mathbf{d}_{e_2,e'_2} + \mathbf{d}_{e_3,e'_3} \quad \text{and}\\ \varphi(p',q',r') &= T(e'_3, e'_1\times e'_2)(2\zeta-\xi) = T(e'_3,e'_3)(2\zeta-\xi) = 2\zeta-\xi.\end{aligned}$$

这意味着 (i)。对于 $p' := e'_l$, $q' := e'_i$ 以及 $r' := a[ji]^\iota$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(p',q',r') &= \mathbf{d}(e'_l\times e'_i, a[ji]^\iota) + \mathbf{d}(e'_i\times a[ji]^\iota, e'_l) + \mathbf{d}(a[ji]^\iota\times e'_l, e'_i)\\ &= \mathbf{d}(e_j, a[ji]^\iota) + \mathbf{d}(0,e'_l) - \mathbf{d}(a[ji]^\iota, e'_i) \quad \text{and}\\ \varphi(p',q',r') &= T(a[ji]^\iota, e'_l\times e'_i)(2\zeta-\xi) = T(a[ji]^\iota, e_j)(2\zeta-\xi) = 0.\end{aligned}$$

恒等式 (ii) 由此得出，这也意味着 (iii)中的等号是最后一个等号。对于 $p' := e'_i$, $q' := 1[jl]^\iota$, $r' := ab[li]^\iota$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(p',q',r') &= \mathbf{d}(e'_i\times 1[jl]^\iota, ab[li]^\iota) + \mathbf{d}(1[jl]^\iota\times ab[li]^\iota, e'_i) + \mathbf{d}(ab[li]^\iota\times e'_i, 1[jl]^\iota)\\ &= -\mathbf{d}(1[jl], ab[li]^\iota) + \mathbf{d}(\gamma_l ab[ji], e'_i) + \mathbf{d}(0, 1[jl]^\iota) \quad \text{and}\\ \varphi(p',q',r') &= T(ab[li]^\iota, e'_i\times 1[jl]^\iota)(2\zeta-\xi) = T(ab[li]^\iota, -1[jl])(2\zeta-\xi) = 0.\end{aligned}$$

由此可得 $\mathbf{d}(1[jl], ab[li]^\iota) = \gamma_l\mathbf{d}(ab[ji], e'_i)$。对于 $p' := e'_i$, $q' := ab[jl]^\iota$, $r' := 1[li]^\iota$，我们得到

$$\begin{aligned}\varphi(p',q',r') &= \mathbf{d}(e'_i\times ab[jl]^\iota, 1[li]^\iota) + \mathbf{d}(ab[jl]^\iota\times 1[li]^\iota, e'_i) + \mathbf{d}(1[li]^\iota\times e'_i, ab[jl]^\iota)\\ &= -\mathbf{d}(ab[jl]^\iota, 1[li]) + \mathbf{d}(\gamma_l ab[ji], e'_i) + \mathbf{d}(0, ab[jl]) \quad \text{and}\\ \varphi(p',q',r') &= T(1[li]^\iota, e'_i\times ab[jl])(2\zeta-\xi) = T(1[li]^\iota, -ab[jl]^\iota)(2\zeta-\xi) = 0.\end{aligned}$$

由此可得 $\mathbf{d}(ab[jl], 1[li]) = \gamma_l\mathbf{d}(ab[ji], e'_i)$。对于 $p := a[jl]$, $q := b[li]$, $r := e_j \in J$，我们有

$$\mathbf{d}_{p,q\times r} + \mathbf{d}_{q,r\times p} + \mathbf{d}_{r,p\times q} = -\mathbf{d}(a[jl], b[li]^\iota) + \mathbf{d}(b[li], 0) + \mathbf{d}(e_j, \gamma_l ab[ji]),$$

$T(r, p\times q)(2\zeta-\xi) = T(e_j, a[jl]\times b[li])(2\zeta-\xi) = T(e_j, \gamma_l ab[ji])(2\zeta-\xi) = 0$.因此，由引理 4.17(vi) 可得 $\mathbf{d}(a[jl], b[li]^\iota) = \gamma_l\mathbf{d}(e_j, ab[ji])$，由此完成了 (iii) 的证明。

对于(iv)，令 $p := e_l$ 以及 $q := a[ij]$。则

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{p,q^\sharp} + \mathbf{d}_{q,p\times q} &= \mathbf{d}(e_l, -\gamma_i\gamma_j n(a)e'_l) + \mathbf{d}(a[ij], -a[ij]^\iota),\\ T(p,q^\sharp)(2\zeta-\xi) &= T(e_l, -\gamma_i\gamma_j n(a)e_l)(2\zeta-\xi) = -\gamma_i\gamma_j n(a)(2\zeta-\xi)\\ &= -\gamma_i\gamma_j n(a)(\mathbf{d}_{e_1,e_1} + \mathbf{d}_{e_2,e_2} + \mathbf{d}_{e_3,e_3})\end{aligned}$$

由(i)可得。现在，(iv) 由引理4.17(iii)推出。最后，(v) 是(iv)的线性化。□

注记 10.11。 引理中的恒等式10.10 在以 D 替代$\mathbf{d}$（并且随后作为 J 或 J'中的恒等式）同样成立，不过 (i) 应读作

$$\sum_{i=1}^{3} D(e_i, e'_i) = 2\,\mathrm{id}_J \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{3} D(e'_i, e_i) = 2\,\mathrm{id}_{J'}.$$

注记 10.12。令 i、j、$l \in \{1,2,3\}$ 两两不同。我们希望证明一般而言并不有 $\mathbf{d}(a[il], b[li]^\iota) = \mathbf{d}(1[il], ab[li]^\iota)$。反设 $\mathbf{d}(a[il], b[li]) = \mathbf{d}(1[il], ab[li]^\iota)$ 对所有 a、$b \in C$均成立，并令 a、b、$c \in C$为任意元素。由于

$$T(a[il], b[li]) = \gamma_i\gamma_j t(ab) = T(ab[il], 1[li])$$

根据引理9.12(ii)，由命题 4.12 可得

$$D(a[il], b[li]) = D(1[il], ab[li]).$$

Thus

$$\begin{aligned}\{a[jl], b[li]^\iota, c[il]\} &= \{c[il], b[li]^\iota, a[jl]\} = \{1[il], cb[li]^\iota, a[jl]\}\\ &= \{a[jl], cb[li]^\iota, 1[il]\} = \gamma_i\gamma_l a(cb)[jl].\end{aligned}$$

根据引理9.15(i)。另一方面，

$$\{a[jl], b[li]^\iota, c[il]\} = \gamma_i\gamma_l (ab)c[jl]$$

另外假设 γ_i、γ_j 可逆，则对所有 a，b，$c \in C$，都有 $(ab)c = a(cb)$。换言之，C是交换且结合的，而任意乘法圆锥替代代数并非如此。

引理 10.13。设 a_1，a_2，$a_3 \in C$。则

$$\sum \gamma_i \mathbf{d}_{a_i[jl], \overline{a_l}\,\overline{a_j}[jl]} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t(a_1a_2a_3)\cdot(2\zeta - \xi)$$

其中求和遍历 $(i\,j\,l)$ 的所有循环置换$(1\,23)$。

证明。由引理4.17，可得

$$\sum \mathbf{d}_{a_i[jl], a_j[li]\times a_l[ij]} = T(a_2[31], a_3[12]\times a_1[23])\cdot(2\zeta - \xi).$$

回顾引理9.14(i)可知

$$a_i[jl]\times a_j[li] = \gamma_l \overline{a_j}\,\overline{a_i}[ij]$$

对于 (1 2 3) 的所有循环置换 $(i\,j\,l)$。因此

$$\sum \mathbf{d}_{a_i[jl], a_j[li]\times a_l[ij]} = \sum \gamma_i \mathbf{d}_{a_i[jl], \overline{a_l}\,\overline{a_j}[jl]}.$$

此外，

$$\begin{aligned}T(a_2[31], a_3[12]\times a_1[23]) &= T(a_2[31], \gamma_2\overline{a_1}\,\overline{a_3}[31]) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t(a_2a_3a_1)\\ &= \gamma_1\gamma_2\gamma_3 t(a_1a_2a_3)\end{aligned}$$

由引理9.14(i) 和引理 9.12(ii)。断言得证。 □

命题 10.14. 设 $i \neq j \in \{1,2,3\}$。则映射

$$\theta\colon C \to Z_{i\to j}, a \mapsto \mathbf{d}_{e_i, a[ij]^\iota}$$

是 k-模的一个同构。

证明。根据引理，该映射显然是一个同态且为满射 10.10(ii)和 (iii)。现在令 $a \in C$ 满足 $\theta(a) = 0$。于是由命题 4.12，

$$0 = [\theta(a), (0, e_j, 0, 0)_+] = \big(0, D_{e_i, a[ij]^\iota}(e_j), 0, 0\big)_+.$$

由于 $D_{e_i,\ a[ij]^\iota}(e_j) = a[ij]$ 根据引理 9.15(ii)，我们推得 $a = 0$。因此 θ 是单射。 □

现在我们可以在李代数 L上定义三种新的分次。验证它们确实是分次，将一直占用我们的时间，直到命题 10.21。

定义 10.15。 设 $i \in \{1,2,3\}$，且 $(i\,j\,l)$ 是 (1 2 3) 的唯一循环置换。我们将定义一个分解

$$L = L_{-2}^{(i)} \oplus L_{-1}^{(i)} \oplus L_0^{(i)} \oplus L_1^{(i)} \oplus L_2^{(i)}$$

其中 $L_{-2}^{(i)} = ke_i'$ 且 $L_2^{(i)} = ke_i$。我们设

$$\begin{aligned}
L_{-1}^{(i)} := 0 \;\oplus\; & (k,\ ke_j + ke_l + J_{jl},\ ke_i',\ 0)_- \\
& \oplus \Big((J_{ij}' + J_{li}') \oplus Z_{-1}^{(i)} \oplus 0\Big) \\
& \oplus\ (k,\ ke_j + ke_l + J_{jl},\ ke_i',\ 0)_+ \;\oplus\; 0\,, \\
L_0^{(i)} := kx \;\oplus\; & (0,\ J_{ij} + J_{li},\ J_{ij}' + J_{li}',\ 0)_- \\
& \oplus \Big((ke_j' + ke_l' + J_{jl}') \oplus Z_0^{(i)} \oplus (ke_j + ke_l + J_{jl})\Big) \\
& \oplus\ (0,\ J_{ij} + J_{li},\ J_{ij}' + J_{li}',\ 0)_+ \;\oplus\; ky\,, \\
L_1^{(i)} := 0 \;\oplus\; & (0,\ ke_i,\ ke_j' + ke_l' + J_{jl}',\ k)_- \\
& \oplus \Big(0 \oplus Z_1^{(i)} \oplus (J_{ij} + J_{li})\Big) \\
& \oplus\ (0,\ ke_i,\ ke_j' + ke_l' + J_{jl}',\ k)_+ \;\oplus\; 0\,,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
Z_{-1}^{(i)} &:= Z_{j\to i} + Z_{l\to i}\,, \\
Z_0^{(i)} &:= Z_{i\to i} + Z_{j\to j} + Z_{l\to l} + Z_{j\to l} + Z_{l\to j} + k\xi + k\zeta, \\
Z_1^{(i)} &:= Z_{i\to j} + Z_{i\to l}.
\end{aligned}$$

10.2. **分次性质的验证**。

命题 10.16。 设 $i \in \{1,2,3\}$。那么：

(i) 我们有 $Z = Z_{-1}^{(i)} \oplus Z_0^{(i)} \oplus Z_1^{(i)}$ 作为 k-模。(ii) 由(i) 中的分解定义了3-分次于 Z。

证明。令 $(i\,j\,l)$ 表示从 i 开始的 (1 2 3) 的唯一循环置换。根据定义 4.9，我们有 $Z = Z_{-1}^{(i)} + Z_0^{(i)} + Z_1^{(i)}$。现在令 $d_{-1} \in Z_{-1}^{(i)}$, $d_0 \in Z_0^{(i)}$ 和$d_1 \in Z_1^{(i)}$ 满足 $d_{-1} + d_0 + d_1 = 0$；我们需要证明 $d_{-1} = d_0 = d_1 =$为零。回忆定义 4.1， M 中的元素为零，当且仅当它在 $\bigoplus_{m\neq 0} L_m$ 上的作用平凡。根据命题 4.12， d_{-1} 和 d_1 在 $L_{\pm 2}$ 上的作用平凡，因此 $d_0 = -d_{-1} - d_1$ 也如此。同理，根据引理 10.6(i)， d_{-1} 和 d_1 在 $L_{\pm 1}$ 的子空间 $(k, 0, 0, k)_\pm$ 上的作用平凡，因此 d_0 也如此。

尚需证明，对所有 p、$q \in \{1,2,3\}$、 d_{-1}、 d_1 和 d_0，它们在 $L_{\pm 1}$ 的子空间 $(0, J_{pq}, J_{pq}', 0)_\pm$ 上平凡地作用。由引理 10.6 与定义 4.1(iv) 可知， d_{-1}、 d_1 和 d_0 将 $(0, J_{ii}, J_{ii}', 0)_\pm$ 映射到

$$(0, J_{ij} + J_{il}, 0, 0)_\pm, \qquad (0, 0, J_{ij}' + J_{il}', 0)_\pm \quad \text{and} \quad (0, J_{ii}, J_{ii}', 0)_\pm,$$

分别。由于这三个空间的和是直和，且 $d_{-1} + d_0 + d_1 = 0$，我们推得 d_{-1}、 d_1 和 d_0 在 $(0,\ J_{ii},\ J_{ii}',\ 0)_\pm$ 上均作用平凡。

类似地， d_{-1}、 d_1 和 d_0 将空间 $(0,\ J_{pp},\ J'_{pp},\ 0)_\pm$、$(0,\ J_{ip},\ J'_{ip},\ 0)_\pm$ 和 $(0,\ J_{pq},\ J'_{pq},\ 0)_\pm$（对于任意 $(p,\ q) \in \{(j,\ l),\ (l,\ j)\}$）映射到

$$(0,0,J'_{pi},0)_\pm, \quad (0,J_{pi},0,0)_\pm, \quad (0,J_{pp}+J_{pq},J'_{pp}+J'_{pq},0)_\pm,$$
$$(0,J_{pp}+J_{pq},J'_{ii},0)_\pm, \quad (0,J_{ii},J'_{pp}+J'_{pq},0)_\pm, \quad (0,J_{ip}+J_{iq},J'_{ip}+J'_{iq},0)_\pm,$$
$$(0,0,J'_{iq}+J'_{pi},0), \quad (0,J_{iq}+J_{pi},0,0), \quad (0,J_{pq},J'_{pq},0)_\pm,$$

分别。再次，每行中的三个子空间构成直和，因此我们得出 d_{-1}， d_1 和 d_0 在形如$(0,\ J_{pq},\ J'_{pq},\ 0)_\pm$的每个子空间上都作用平凡，其中 $p,\ q \in \{1,2,3\}$。由此可知 $d_{-1} = d_0 = d_1 = 0$，这就证明了 (i)。现在 (ii) 由引理 10.7 和注4.11立即得出。□

引理 10.17. 设 $i \in \{1,2,3\}$，并设 $(i\,j\,l)$ 为以 i 开始的 $(12\,3)$ 的唯一循环置换。考虑 k-模同态

$$\theta^{(i)}_\pm \colon L_{\pm1} \to L_{\pm1} \colon z \mapsto [e_i, z].$$

设 $z = (\lambda, b, b', \mu)_\pm \in L_{\pm1}$，并记

$$b = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + c_{23} + c_{31} + c_{12} \in J,$$
$$b' = \xi'_1 e'_1 + \xi'_2 e'_2 + \xi'_3 e'_3 + c'_{23} + c'_{31} + c'_{12} \in J',$$

其中每个 $\xi_i, \xi'_i \in k$ 以及每个 $c_{jl} \in J_{jl}$, $c'_{jl} \in J'_{jl}$。那么

$$[e_i, z] = \big(0,\ \lambda e_i,\ \xi_l e'_j + \xi_j e'_l - c^\iota_{jl},\ \xi'_i\big)_\pm.$$

特别地， $\theta^{(i)}_\pm$ 的像和核分别为

$$\operatorname{im}\theta^{(i)}_\pm = \big(0,\ ke_i,\ ke'_j + ke'_l + J'_{jl},\ k\big)_\pm \le L^{(i)}_1,$$
$$\ker\theta^{(i)}_\pm = \big(0,\ ke_i + J_{ij} + J_{li},\ ke'_j + ke'_l + J'_{ij} + J'_{jl} + J'_{li},\ k\big)_\pm \le L^{(i)}_0 + L^{(i)}_1,$$

。

证明。 由引理9.12，可得

$$e_i \times b = \xi_l e'_j + \xi_j e'_l - c^\iota_{jl} \quad \text{and} \quad T(e_i, b') = \xi'_i.$$

因此，由定义 4.7，可得

$$\begin{aligned}[e_i, z] &= \big(0,\ \lambda e_i,\ e_i \times b,\ T(e_i, b')\big)_\pm \\ &= \big(0,\ \lambda e_i,\ \xi_l e'_j + \xi_j e'_l - c^\iota_{jl},\ \xi'_i\big)_\pm,\end{aligned}$$

结论由此得证。 □

现在我们进入一系列引理，它们处理了一些较为复杂的情形，以检验定义 10.15 是否能够导出 5-分次的 L。建议读者备好定义 10.15 ，以便跟上我们的计算。证明中的不同情形和子情形分别对应于定义 L_i中三个子空间各自的不同 10.15-分量。

引理 10.18. 设 $i \in \{1,2,3\}$。则 $[L^{(i)}_{-1}, L^{(i)}_1] \subseteq L^{(i)}_0$。

证明。令 $(i\,j\,l)$ 表示从 i 开始的 (1 2 3) 的唯一循环置换。令 $z_1 \in L_{-1}^{(i)}$ 和 $z_2 \in L_1^{(i)}$。我们将写作

$$z_1 = (\lambda, b, \lambda_i' e_i', 0)_\pm \quad \text{or} \quad z_2 = (0, \mu_i e_i, c', \mu)_\pm$$

如果 z_1 或 z_2分别属于 $L_{\pm 1}$，其中 λ，λ_i'，μ_i，$\mu \in k$、$b \in ke_j + ke_l + J_{jl}$ 和 $c' \in ke_j' + ke_l' + J_{jl}'$。

首先，考虑 $z_1 \in L_{\pm 1}$的情形。作为第一个子情形，我们假设$z_2 \in L_{\pm 1}$ 也成立。如果 z_1 和 z_2 都属于 L_1 或都属于 L_{-1}，那么 $[z_1, z_2] \in ky \subseteq L_0^{(i)}$ 或 $[z_1, z_2] \in kx \subseteq L_0^{(i)}$，分别成立。如果 $z_1 \in L_{-1}$ 和 $z_2 \in L_1$，那么根据定义 4.22，

$$\begin{aligned}[z_1, z_2] = &\big(-\lambda c' + b \times \mu_i e_i\big) \\ &+ \big((\lambda\mu - T(b, c'))\zeta + T(\mu_i e_i, \lambda_i' e_i')(\xi - \zeta) + \mathbf{d}_{b,c'} + \mathbf{d}_{\mu_i e_i, \lambda_i' e_i'}\big) \\ &+ \big(-\mu b + \lambda_i' e_i' \times c'\big).\end{aligned}$$

Now

$$b \times \mu_i e_i \in ke_l' + ke_j' + J_{jl}' \quad \text{and} \quad \lambda_i' e_i' \times c' \in ke_l + ke_j + J_{jl},$$
$$\mathbf{d}_{b,c'} \in Z_{j\to j} + Z_{j\to l} + Z_{l\to l} + Z_{l\to j} \quad \text{and} \quad \mathbf{d}_{\mu_i e_i, \lambda_i' e_i'} \in Z_{i\to i},$$

分别由引理 9.13(i) 和定义 10.1得到。因此在此子情形中 $[z_1, z_2] \in L_0^{(i)}$。子情形 $z_1 \in L_1$，$z_2 \in L_{-1}$ 完全类似。

现在我们转向子情形 $z_2 \in L_0$。若 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$，则由定义 4.7，

$$[z_1, z_2] = -[z_2, z_1] = -\big(0, \lambda z_2, z_2 \times b, T(z_2, \lambda_i' e_i')\big)$$

其中 $z_2 \times b \in J_{ij}' + J_{il}'$ 由引理 9.14 给出，且 $T(z_2, \lambda_i' e_i') = 0$ 由引理 9.12(iii)给出。因此在此子情形中 $[z_1, z_2] \in L_0^{(i)}$。在最后的子情形 $z_2 \in Z_1^{(i)}$ 中，我们有

$$[z_1, z_2] \in (0, J_{ij} + J_{il}, J_{ij}' + J_{il}', 0)_\pm \subseteq L_0^{(i)}$$

由引理 10.6(i)。

其次，我们考虑 $z_1 \in J_{ij}' + J_{li}'$的情形。若 $z_2 \in L_{\pm 1}$，则定义 4.7给出

$$[z_1, z_2] = -\big(T(\mu_i e_i, z_1), z_1 \times c', \mu z_1, 0\big)_\pm$$

其中 $T(\mu_i e_i, z_1) = 0$ 根据引理 9.12(iii) 以及 $z_1 \times c' \in J_{ij} + J_{li}$ 根据引理 9.14。若 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$，则

$$[z_1, z_2] = \mathbf{d}_{z_2, z_1} \in Z_{i\to i} + Z_{j\to l} + Z_{l\to j} \subseteq L_0^{(i)}.$$

若 $z_2 \in Z_1^{(i)}$，则根据引理 10.5(i)，$[z_1, z_2] \in J_{jj}' + J_{ll}' + J_{jl}' \subseteq L_0^{(i)}$，由此完成 $z_1 \in J_{ij}' + J_{li}'$的情形。

最后，我们假设 $z_1 \in Z_{-1}^{(i)}$。若 $z_2 \in L_{\pm 1}$，则由引理 10.6(i)可推得

$$[z_1, z_2] \in (0, J_{ji} + J_{li}, J_{ji}' + J_{li}', 0)_\pm \subseteq L_0^{(i)}.$$

若 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$，则 $[z_1, z_2] \in J_{jj} + J_{ll} + J_{lj}$由引理 10.5(i)。若最后 $z_2 \in Z_1^{(i)}$，则

$$[z_1, z_2] \in Z_{i\to i} + Z_{j\to j} + Z_{j\to l} + Z_{l\to j} + Z_{l\to l} \subseteq L_0^{(i)}$$

由引理10.7（正如我们在命题10.16(ii)中已经观察到的）。 □

引理 10.19。设 $i \in \{1,2,3\}$。则 $[L_0^{(i)}, L_1^{(i)}] \subseteq L_1^{(i)}$。

证明。令 $(i\,j\,l)$ 表示从 i 开始的 (1 2 3) 的唯一循环置换。令 $z_1 \in L_0^{(i)}$ 和 $z_2 \in L_1^{(i)}$。我们将写作

$$z_1 = (0, b_{ij} + b_{li}, b'_{ij} + b'_{li}, 0)_\pm \quad \text{or} \quad z_2 = (0, \mu_i e_i, c', \mu)_\pm$$

若 z_1 或 z_2 分别属于 $L_{\pm 1}$，其中 μ_i，$\mu \in k$, $b_{ij} \in J_{ij}$, $b_{li} \in J_{li}$, $b'_{ij} \in J'_{ij}$, $b'_{li} \in J'_{li}$ 和 $c' \in ke'_j + ke'_l + J'_{jl}$。

首先假设 $z_1 \in \{x, y\}$。若 $z_2 = (0,\ \mu_i e_i,\ c',\ \mu)_\pm \in L_{\pm 1}$，则

$$[z_1, z_2] \in \{0, (0, \mu_i e_i, c', \mu)_\mp, -(0, \mu_i e_i, c', \mu)_\mp\} \subseteq L_1^{(i)}$$

根据定义 4.22。若 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$ 或 $z_2 \in Z_1^{(i)}$，则有 $[z_1, z_2] = 0$ 根据定义 4.7或命题4.12，分别可得。

其次，我们考虑 $z_1 \in L_{\pm 1}$的情形。我们从子情形 $z_2 \in L_{\pm 1}$开始。若z_1 和 z_2 都属于 L_1，则由定义4.22 和引理9.12(iii)可得，

$$[z_1, z_2] = \big(T(b_{ij} + b_{li}, c') - T(\mu_i e_i, b'_{ij} + b'_{li})\big)x = (0 - 0)x = 0.$$

若 z_1、z_2 都属于 L_{-1}，则同样成立。若 $z_1 \in L_{-1}$ 和 $z_2 \in L_1$，则由定义4.22 可得

$$\begin{aligned}[z_1, z_2] &= (b_{ij} + b_{li}) \times \mu_i e_i \\ &\quad + \big(-T(b_{ij} + b_{li}, c')\zeta + T(\mu_i e_i, b'_{ij} + b'_{li})(\xi - \zeta) + \mathbf{d}_{b_{ij}+b_{li}, c'} + \mathbf{d}_{\mu_i e_i, b'_{ij}+b'_{li}}\big) \\ &\quad + \big(-\mu(b_{ij} + b_{li}) + (b'_{ij} + b'_{li}) \times c'\big).\end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned}(b_{ij} + b_{li}) \times \mu_i e_i = 0 \quad &\text{and} \quad (b'_{ij} + b'_{li}) \times c' \in J_{ij} + J_{il}, \\ T(b_{ij} + b_{li}, c') = 0 \quad &\text{and} \quad T(\mu_i e_i, b'_{ij} + b'_{li}) = 0, \\ \mathbf{d}_{b_{ij}+b_{li}, c'} \in Z_{i\to j} + Z_{i\to l} \quad &\text{and} \quad \mathbf{d}_{\mu_i e_i, b'_{ij}+b'_{li}} \in Z_{i\to j} + Z_{i\to l},\end{aligned}$$

分别由引理9.14、引理9.12(iii) 和定义10.1可得，因此 $[z_1, z_2] \in L_1^{(i)}$。情形 $z_1 \in L_1$ 和 $z_2 \in L_{-1}$ 类似。

我们继续讨论子情形 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$。由定义 4.7，$[z_1, z_2] = -[z_2, (0, b_{ij} + b_{li}, b'_{ij} + b'_{li}, 0)] = -\big(0, 0, z_2 \times (b_{ij} + b_{li})\ T(z_2, b'_{ij} + b'_{li})\big)_\pm$，它属于 $L_1^{(i)}$，因为根据引理 9.14，$z_2 \times (b_{ij} + b_{li}) \in J'_{ll} + J'_{jl} + J'_{jj}$。在最后一个子情形 $z_2 \in Z_1^{(i)}$ 中，我们有

$$[z_1, z_2] \in (0, J_{ii}, J'_{jj} + J'_{ll} + J'_{jl}, 0)_\pm \subseteq L_1^{(i)}$$

根据引理 10.6(i)。

第三，我们转而讨论 $z_1 \in ke_j + ke_l + J_{jl}$ 的情形，并同时考虑元素 $z'_1 \in ke'_j + ke'_l + J_{jl}$ 的相反情形。若 $z_2 \in L_{\pm 1}$，则定义 4.7给出

$$[z_1, z_2] = \big(0, 0, z_1 \times \mu_i e_i, T(z_1, c')\big)_\pm, \quad [z'_1, z_2] = -\big(T(\mu_i e_i, z'_1), z'_1 \times c', \mu z'_1, 0\big)_\pm$$

其中 $z_1 \times \mu_i e_i \in J'_{ll} + J'_{jj} + J'_{jl}$ 且 $z'_1 \times c' \in J_{ii}$根据引理 9.14 以及 $T(\mu_i e_i,\ z'_1) = 0$根据引理 9.12(iii)。因此 $[z_1, z_2]$，$[z'_1, z_2] \in L_1^{(i)}$ 在此子情形下。如果 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$，

那么 $[z_1,z_2]=0$ 因为 J 是阿贝尔的，且 $[z_1',z_2]=\mathbf{d}_{z_2,\,z_1'}\in Z_{i\to j}+Z_{i\to l}\in L_1^{(i)}$。如果$z_2\in Z_1^{(i)}$，那么由引理 10.5 可知 $[z_1,z_2]\in J_{ij}+J_{il}$ 且 $[z_1',z_2]=0$。

最后，我们假设 $z_1\in Z_0^{(i)}$。根据定义4.1(iv) 和注4.11，断言对 $z_1\in\{\xi,\zeta\}$成立，因此我们可以假设

$$z_1\in Z_{i\to i}+Z_{j\to j}+Z_{l\to l}+Z_{j\to l}+Z_{l\to j}.$$

若 $z_2\in L_{\pm1}$，则

$$[z_1,z_2]\in(0,ke_i,ke_j'+ke_l'+J_{jl}',k)_\pm\subseteq L_1^{(i)}$$

由引理10.6。若 $z_2\in J_{ij}+J_{li}$，则 $[z_1,z_2]\in J_{ij}+J_{li}$ 由引理10.5。在最后一个子情形 $z_2\in Z_1^{(i)}$ 中，由引理 $[z_1,z_2]\in Z_1^{(i)}$ 10.7 （正如我们已在命题10.16(ii)中所观察到的）。□

引理 10.20。设 $i\in\{1,2,3\}$。则 $[L_0^{(i)},L_0^{(i)}]\subseteq L_0^{(i)}$。

证明。令 $(i\,j\,l)$ 表示以 i 开始的 (1 2 3) 的唯一循环置换。令 $z_1,\ z_2\in L_0^{(i)}$。我们将记作

$$z_1=(0,b,b',0)_\pm\quad\text{or}\quad z_2=(0,c,c',0)_\pm$$

如果 z_1 或 z_2 分别属于 $L_{\pm1}$，其中 $b,\ c\in J_{ij}+J_{li}$ 且 $b',\ c'\in J_{ij}'+J_{li}'$。

首先，我们考虑 $z_1\in\{x,y\}$ 的情形。由定义 $[x,x]=0=[y,y]$ 和 $[x,y]=\xi$ 4.22，根据定义 4.1(iv) 和定义 4.7，可得 $[x,L_0]\le kx$和 $[y,L_0]\le ky$。这已经涵盖了子情形 $z_2\in\{x,y\}$和 $z_2\in L_0$。对于$z_2\in L_1$，可得 $[y,z_2]=0$和 $[x,z_2]=-(0,\ c,\ c',\ 0)_-\in L_0^{(i)}$，由定义 4.22。子情形 $z_2\in L_{-1}$ 完全类似。

其次，我们假设 $z_1\in L_{\pm1}$。我们先讨论子情形 $z_2\in L_{\pm1}$。定义 4.22 表明 $[z_1,z_2]$ 属于 kx 或 ky，如果 $z_1,\ z_2$ 则二者均属于 L_1 或均属于 L_{-1}，并且

$$[z_1,z_2]=b\times c+\big(-T(b,c')\zeta+T(c,b')(\xi-\zeta)+\mathbf{d}_{b,c'}+\mathbf{d}_{c,b'}\big)+b'\times c'$$

如果 $z_1\in L_{-1}$ 且 $z_2\in L_1$。现在，由引理 $b\times c\in J_{jj}'+J_{ll}'+J_{jl}'$ 和 $b'\times c'\in J_{jj}+J_{ll}+J_{jl}$ 9.14 以及 $\mathbf{d}_{b,\,c'},\ \mathbf{d}_{c,\,b'}\in Z_{i\to i}+Z_{j\to l}+Z_{l\to j}$根据定义 10.1，因此 $[z_1,z_2]\in L_0^{(i)}$。

现在我们转而讨论子情形 $z_2\in ke_j+ke_l+J_{jl}$，同时考虑子情形 $z_2'\in ke_j'+ke_l'+J_{jl}'$。根据定义 4.7，

$$[z_1,z_2]=-\big(0,0,z_2\times b,T(z_2,b')\big)_\pm,\quad [z_1,z_2']=\big(T(b,z_2'),z_2'\times b',0,0\big)_\pm$$

其中，由引理 9.12 可得 $T(z_2,b')=0$, $T(b,z_2')=0$；由引理 9.14 可得 $z_2\times b\in J_{ij}'+J_{il}'$, $z_2'\times b'\in J_{ij}+J_{il}$。因此 $[z_1,z_2]\in L_0^{(i)}$。最后，若 $z_2\in Z_0^{(i)}$，则 ad_{z_2} 依定义 4.1 和引理 10.6 保持 $(0,J_{ij}+J_{li},J_{ij}'+J_{li}',0)_\pm$ 不变，因此 $[z_1,z_2]\in L_0^{(i)}$。

第三，我们考虑 $z_1\in ke_j+ke_l+J_{jl}$ 和 $z_1'\in ke_j'+ke_l'+J_{jl}'$ 的情形。对于 $z_2\in ke_j+ke_l+J_{jl}$，我们有 $[z_1,z_2]=0$，因为 J 是阿贝尔的，并且

$$[z_1',z_2]=\mathbf{d}_{z_2,z_1'}\in Z_{j\to j}+Z_{j\to l}+Z_{l\to j}+Z_{l\to l}\subseteq L_0^{(i)}.$$

若 $z_2 \in Z_0^{(i)}$，则 ad_{z_2} 保持 $ke_j + ke_l + J_{jl}$ 和 $ke'_j + ke'_l + J'_{jl}$ 不变，由注 和引理 可知 $[z_1, z_2] \in L_0^{(i)}$。

第四，在 $z_1 \in \{\xi, \zeta\}$ 和 $z_2 \in Z_0^{(i)}$ 的情形下，由备注 4.11可得 $[z_1, z_2] = 0$。最后，$Z_{i\to i} + Z_{j\to j} + Z_{l\to l} + Z_{j\to l} + Z_{l\to j}$是 L的李子代数，由引理 10.7可知，因此在 $[z_1, z_2] \in L_0^{(i)}$ 每种可能的情形下均成立。□

命题 10.21。对于每个 $i \in \{1, 2, 3\}$，分解 $L = \bigoplus_{p=-2}^{2} L_p^{(i)}$定义了 L 的5分次。

证明。将从 i 开始的 (1 2 3) 的循环置换记为 $(i\, j\, l)$。我们需要验证，对于所有满足 $-2 \le p \le q \le 2$ 的可能的对 (p, q)，都有 $[L_p^{(i)}, L_q^{(i)}] \subseteq L_{p+q}^{(i)}$。当然，这需要进行分类讨论。定义中存在显而易见的对称性，而 (−1, 1)、(0, 1) 和 (0, 0) 这几种情形已由引理 10.18 至 10.20 涵盖，因此还需检查 (p, q) 的以下 6 种情形：

$$(2,2), \qquad (1,2),\ (0,2),\ (-1,2),\ (-2,2) \qquad\qquad (1,1).$$

情形$(2, 2)$**：**此情形显然，因为 $[e_i, e_i] = 0$。

情形$(1, 2)$**：**令 $z \in L_1^{(i)}$。我们需要验证 $[z, e_i] = 0$。若 $z \in L_{\pm 1}$，由引理 10.17可得。若 $z \in J_{ij} + J_{li}$，则因为 $[J, J] = 0$而成立。最后，若$z \in Z_{i\to j} + Z_{i\to l}$，由引理 10.5(i) 可得，其中 $p = q = i$。

情形 (0, 2)：令 $z \in L_0^{(i)}$。在大多数情况下，我们有 $[z, e_i] = 0$：若 $z \in kx+ky$，由定义 4.7 可得；若 $z \in L_{\pm 1}$，由引理 10.17 可得；若 $z \in ke'_j + ke'_l + J'_{jl}$，由注 10.2 可得；若 $z = \xi$，由注 4.11 可得；最后，若 $z \in ke_j + ke_l + J_{jl}$，则因为 $[J, J] = 0$。若 $z \in Z_{i\to i} + Z_{j\to j} + Z_{l\to l} + Z_{j\to l} + Z_{l\to j}$，则由引理 10.5 可得 $[z, e_i] \in ke_i$。最后，由注 4.11 可得 $[\zeta, e_i] = e_i$，因此所有情况下都有 $[z, e_i] \in ke_i = L_2^{(i)}$。

情形 $(-1, 2)$**：**设 $z \in L_{-1}^{(i)}$。若 $z \in L_{\pm 1}$，则根据引理 10.17有。若$z \in J'_{ij} + J'_{li}$，则

$$[z, e_i] = \mathbf{d}_{e_i, z} \in Z_{ii,ij} + Z_{ii,il} \subseteq Z_{i\to j} + Z_{i\to l} = Z_1^{(i)}.$$

最后，在情形 $z \in Z_{-1}^{(i)} = Z_{j\to i} + Z_{l\to i}$ 下，根据引理 $[z, e_i] \in J_{ij} + J_{li} \subseteq L_1^{(i)}$ 10.5(i)。

情形 $(-2, 2)$**：**这由以下事实可得：$[e'_i, e_i] = \mathbf{d}_{e_i,\ e'_i} \in Z_{i\to i} \le L_0^{(i)}$。

情形 $(1, 1)$**：**设 $z_1,\ z_2 \in L_1^{(i)}$。我们记

$$z_1 = (0, \lambda_i e_i, b', \lambda)_\pm \quad \text{or} \quad z_2 = (0, \mu_i e_i, c', \mu)_\pm$$

若 z_1或 z_2分别属于 $L_{\pm 1}$，其中 $\lambda_i,\ \lambda,\ \mu_i,\ \mu \in k$ 以及 $b',\ c' \in ke'_j + ke'_l + J'_{jl}$。在情形 $z_1,\ z_2 \in L_1$下，我们有

$$[z_1, z_2] = \big(T(\lambda_i e_i, c') - T(\mu_i e_i, b')\big)x = 0$$

根据定义 4.22 和引理 9.12(iii)。情形 $z_1,\ z_2 \in L_{-1}$ 完全类似。若 $z_1 \in J_{ij} + J_{li}$ 且 $z_2 \in L_{\pm 1}$，则

$$[z_1, z_2] = \big(0, 0, z_1 \times \mu_i e_i, T(z_1, c')\big)_\pm = 0$$

根据定义 4.7、引理 9.14 和引理 9.12(iii)。在情形 $z_1 \in Z_1^{(i)}$，$z_2 \in L_{\pm 1}$，由引理 10.6(i)，有 $[z_1, z_2] = 0$。最后，设z_1，$z_2 \in L_0$。由于 J 和 $Z_1^{(i)}$ 是阿贝尔的，后者由引理 10.7(i)，我们可以假设 $z_1 \in Z_1^{(i)}$ 且 $z_2 \in J_{ij} + J_{li}$。于是，由引理10.5(i)有。□

现在我们得到了所承诺的 F_4-分次。

注 10.22. 令 e_1，e_2，e_3，e_4 表示 $\mathbb{Z}^4$ 的标准基，并令

$$\Phi := \{\pm 2e_i \mid i \in \{1,2,3,4\}\} \sqcup \{\epsilon_1 e_i + \epsilon_2 e_j \mid i \neq j \in \{1,2,3,4\}, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{\pm 1\}\} \sqcup \{\epsilon_1 e_1 + \epsilon_2 e_2 + \epsilon_3 e_3 + \epsilon_4 e_4 \mid \epsilon_1, \ldots, \epsilon_4 \in \{\pm 1\}\}$$

以及 $\Phi^0 := \Phi \cup \{(0,\ 0,\ 0,\ 0)\}$。此外，令 $(\delta_1, \ldots\ldots, \delta_4)$ 为中的一个标准简单根系（定义1.9的意义下）。那么存在唯一的群同态 ω：$\mathbb{Z}F_4 \to \mathbb{Z}^4$ 映射

$$\delta_1 \mapsto (1,1,-1,-1), \quad \delta_2 \mapsto (-2,0,0,0), \quad \delta_3 \mapsto (1,-1,0,0), \quad \delta_4 \mapsto (0,1,1,0).$$

直接计算可得 $\omega(\Phi) = F_4$。正如我们将在定理 10.23 中看到的，集合 Φ 是在我们所处语境下对根系 F_4 的自然描述。注意到，这一描述与 [Bou81，VI.4 中的描述对偶。9]，但由于 F_4 是自对偶根系，这一区别无关紧要。为简化记号，我们有时将 F_4^0 与集合 $\Phi^0 \subseteq \mathbb{Z}^4$ 等同起来，这与我们对 G_2（见注 4.4）所做的类似。

定理 *10.23*。设 k 为交换环，设 C 为乘法圆锥替代代数，设 $\Gamma \in k^3$，并设 (J, J') 为由三次约旦矩阵代数 $Her_3(C,\Gamma)$ 诱导的三次范数对。令 $L = L(J, J')$ 为第 *4* 节中构造的李代数，令 $\Phi, \Phi^0 \subseteq \mathbb{Z}^4$ 如注 *10.22* 所述，并按照定义 *10.15* 对所有 $i \in \{1,2,3\}$ 和 $p \in \{-2,-1,0,1,2\}$ 定义 $L_p^{(i)}$。对于所有 $p, i, j, l \in \{-2,-1,0,1,2\}$（特别地，对于所有 $(p,i,j,l) \in \Phi^0$），置

$$L_{pijl} := L_p \cap L_i^{(1)} \cap L_j^{(2)} \cap L_l^{(3)}.$$

那么，$(L_\alpha)_{\alpha \in \Phi^0}$ 是 L 的 F_4分次，满足

$$L_\alpha \cong \begin{cases} (k,+) & \text{if } \alpha \text{ is long,} \\ (C,+) & \text{if } \alpha \text{ is short} \end{cases}$$

对所有 $\alpha \in F_4$均成立。进一步地，如果 $J \neq 0 \neq J'$，那么

$$\Phi^0 = \{(p,i,j,l) \in \{-2,-1,0,1,2\}^4 \mid L_{pijl} \neq 0\}.$$

证明。通过考察定义 10.15中引入的各个分次，不难计算出它们的交集。我们将结果总结在图 3中，其中为节省篇幅，我们记 $2 := -2$ 以及 $1 := -1$，并记J 和 J' 为它们的“矩阵形式”

$$J = \begin{pmatrix} ke_1 & J_{12} & J_{13} \\ & ke_2 & J_{23} \\ & & ke_3 \end{pmatrix}, \qquad J' = \begin{pmatrix} ke_1' & J_{12}' & J_{13}' \\ & ke_2' & J_{23}' \\ & & ke_3' \end{pmatrix}.$$

中间分量 Z 分解为 7 个部分：其中有 6 个形如 $Z_{i \to j}$ 的分量，我们将其记为 $Z_{0 p_1 p_2 p_3}$，其中 $p_i = 1$、$p_j = -1$ 以及剩余的 $p_l = 0$；第七个分量为 $Z_{0000} = Z_{1\to 1} + Z_{2\to 2} + Z_{3\to 3} + k\xi + k\zeta$。

现在可以简单地观察到， Φ^0 与满足 L_{pijl}“一般非平凡”的指标元组 $(p,\ i,\ j,\ l)$ 的集合重合，也就是说，除非处于 $J=0$ 或 $J'=0$ 的退化情形，否则其非零。

由于我们用于标记的四个分次确实都是分次（由命题 4.27 和 10.21可知），因此这自动意味着所得的整个李代数的分解 L 是一个 Φ-分次，因而也是一个F_4-分次。□

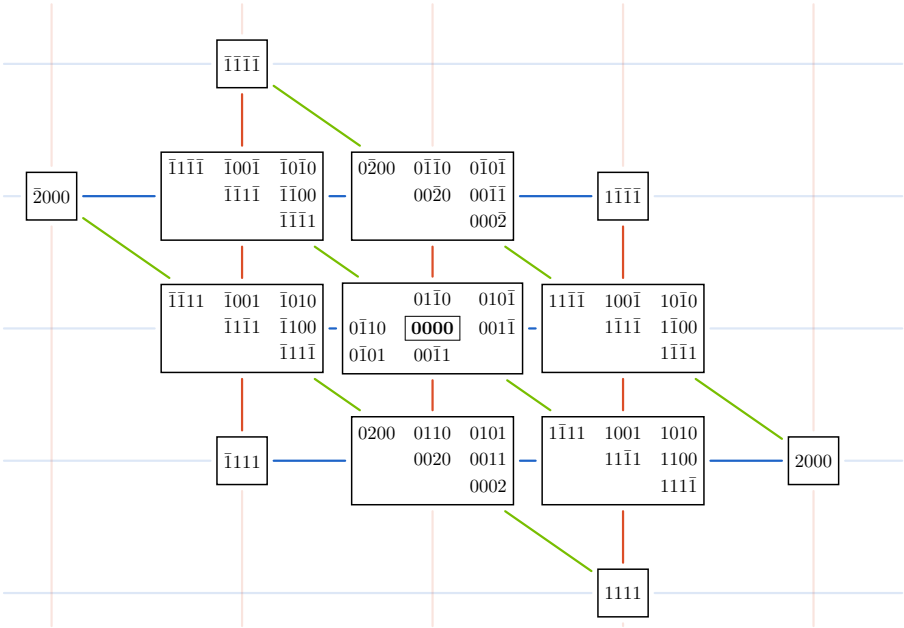


图3. 四个分次的交叠

备注 10.24。 与备注 4.4 和 10.22中一样，我们将 G_2^0 和 F_4^0 分别视为 $\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbb{Z}^4$的子集，并考虑单根系

$$g_1=(1,0),\qquad g_2=(-2,-1)\in G_2,$$

$$f_1=(1,\ 1,\ -1,\ -1)\quad f_2=(-2,\ 0,\ 0,\ 0)\quad f_3=(1,\ -1,\ 0,\ 0)\quad f_4=(0,\ 1,\ 1,\ 0)\in F_4.$$

于是，引理 8.4 中的映射 $\pi\colon F_4^0\to G_2^0$（相对于单根系 (f_1,f_2,f_3,f_4) 和 (g_1,g_2) 定义）由图 3 描述：对于任意 $\alpha\in F_4^0$，$\pi(\alpha)$ 由包含 α 的矩形块在 $\mathbb{Z}^2$-网格中的坐标给出。这意味着，按照命题 8.10 根据 F_4-分次 $(L_\alpha)_{\alpha\in F_4^0}$ 构造的 G_2-分次，恰好就是命题 4.28 中的 G_2-分次 $(L_\alpha)_{\alpha\in G_2^0}$。注意，我们也可以用公式描述 π

$$\pi\big((p,i,j,l)\big)=\left(p,\ \frac{p+i+j+l}{2}\right)$$

对所有的 $(p,\ i,\ j,\ l)\in F_4$。

注释10.25 （参见 8.8）。 沿用注 10.24 中的记号，并设 $\beta \in G_2$ 是短的。由引理 8.7(iv)，原像 $C_\beta := \pi^{-1}(\{\beta, -\beta, 0\}) = C_{-\beta}$ 是 F_4 的一个 C_3 型子系。因此，$L' := \bigoplus_{\alpha \in C_\beta} L_\alpha$ 是 C_3-分次子代数 L。具体而言， L' 有三种可能：

$$L_{-1,0} \oplus L_{0,0} \oplus L_{1,0}, \quad L_{-1,-1} \oplus L_{0,0} \oplus L_{1,1}, \quad L_{0,-1} \oplus L_{0,0} \oplus L_{0,1}.$$

10.3. **李代数的 Chevalley 型基**。 将表 1 中的交换子公式专门化到 J 为三次约旦矩阵代数的情形，我们得到定理 F_4中的分次李代数的交换子公式 10.23。例如，

$$[(0, c[12], 0, 0)_-, (0, 0, d[12]^\iota, 0)_-] = T(c[12], d[12]^\iota)x = \gamma_1\gamma_2 t(\bar{c}d)$$

由引理 9.12(ii)，对所有 $c, d \in C$ 均成立。公式中出现常数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 并不令人意外，因为 (J, J') 的结构映射取决于它们。不过，我们已在注释9.8中指出，只要假设 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 可逆，李代数 $L(J, J')$ 的同构类型便不依赖于它们。因此，在这一假设下，我们可以预期存在一族 $(\vartheta_\alpha)_{\alpha \in F_4}$ 根同态（其定义域为 k 或 C，值域为 L_α），使得相对于这族根同态的交换子关系不涉及 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$。本小节的目标正是找到这样一族根同态。我们通过将 L 中“自然的”根同态乘以 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 及其逆元的适当乘积，构造出这族根同态。

我们还将看到，由我们的根同态定义的元素 $(\vartheta_\alpha(1))_{\alpha \in F_4}$ 与复半单李代数的 Chevalley 基有若干关键性质。为此，某些根同态不仅需要乘以 γ_1、 γ_2、 γ_3 及其逆元的乘积，还需要乘以 -1 。存在“Chevalley 型基”带来的一个直接推论是：若 C 作为一个 k-代数是忠实的，那么 L 就包含一个类型为 F_4 、定义在 k 上的分裂Chevalley李代数，作为其子代数；这意味着 L 是 F_4-分次的，且满足更强的 [BM92] 意义。详情见备注 1.3 和 10.34。

在第 11节中，我们将对本小节中的根同态进行“指数化”，从而得到 $L(J, J')$ 相应自同构群中的根同态（随后将证明它们也是 F_4- 分次的）。因此，这个 F_4-分次群中的交换子公式也不会涉及 γ_1、 γ_2、 γ_3 （见命题 11.13）。这与任意 F_4-分次群的坐标化定理（定理 1.15）相一致：对该群进行坐标化所需的代数数据只涉及一个交换环和一个乘法锥交替代数，而不涉及在交换环中选取常数。此外，使用 Chevalley 型基还有助于描述自同构群中的韦伊元，这一点将在备注 11.6中显现。

记号 10.26。从现在起，我们假设 γ_1、 γ_2、 γ_3 是可逆的。在下文中，我们将始终使用备注 4.4 和 10.22 中的约定，分别将 G_2^0 和 F_4^0 等同于 $\mathbb{Z}^2$ 和 $\mathbb{Z}^4$ 的子集。我们有时会使用图 3 中的约定来书写，例如将 $11\bar{1}\bar{1}$ 作为 $(1, 1, -1, -1)$ 的缩写。此外，我们用 $\pi\colon F_4^0 \to G_2^0$ 表示备注 10.24 中定义的映射，从而对所有 $\alpha \in F_4^0$ 有 $L_\alpha \leq L_{\pi(\alpha)_1} \cap L_{\pi(\alpha)_2}$。最后，对所有 $\alpha \in F_4$，若 α 为长，则令 $P_\alpha := k$；若 α 为短，则令 $P_\alpha := C$，从而 $L_\alpha \cong P_\alpha$ 作为 k-模。

我们首先定义根同态 $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$。事实表明，它们可以逐步构造：我们先定义 J 和 J' 中的根同态，然后定义 (k, J, J') $\cong L_{\pm 1}$ 中的根同态，再定义 L 中的根同态。注意，尽管 $J \cong J'$， J' 中的根同态与 J 中的根同态定义方式不同。

定义 10.27 （J 和 J'中的根同态）。对于 (12 3) 的任意循环置换 $(i\,j\,l)$，我们定义同态

$$\begin{aligned}
\vartheta_l^+ &\colon (k,+) \to J \colon t \mapsto \gamma_i^{-1}\gamma_j t e_l,\\
\vartheta_l^- &\colon (k,+) \to J' \colon t \mapsto \gamma_i\gamma_j^{-1} t e'_l,\\
\vartheta_l^+ &\colon (C,+) \to J \colon a \mapsto \gamma_j^{-1} a[ij],\\
\vartheta_l^- &\colon (C,+) \to J' \colon a \mapsto \gamma_i^{-1} a[ij].
\end{aligned}$$

请注意，我们对定义在 k 上的映射和定义在 C上的映射使用相同的名称，但在下文中不会产生混淆。

定义 10.28 （(k, J, J', k)中的根同态）。设 $p_1, p_2, p_3 \in \{-1, 0, 1\}$满足 $(1, p_1, p_2, p_3) \in F_4$（或等价地，$(-1, p_1, p_2, p_3) \in F_4$），并令 $s \coloneqq p_1 + p_2 + p_3$。我们如下定义同态 $\vartheta_{p_1p_2p_3}$：

(i) 若 $s = -3$，定义 $\vartheta_{p_1p_2p_3}\colon k \to (k, J, J', k)\colon t \mapsto (t, 0, 0, 0)$。(ii) 若 $s = -1$，则存在唯一的 (1 2 3) 的循环置换 $(i\,j\,l)$，使得$p_l \neq p_i = p_j$，并定义 $\vartheta_{p_1p_2p_3}\colon P_{(1,p_1,p_2,p_3)} = P_{(-1,p_1,p_2,p_3)} \to (k, J, J', k)\colon a \mapsto (0, \vartheta_l^+(a), 0, 0)$

(iii) 若 $s = 1$，则存在唯一的 (1 23) 的循环置换 $(i\,j\,l)$，满足$p_l \neq p_i = p_j$，并定义

$$\vartheta_{p_1p_2p_3}\colon P_{(1,p_1,p_2,p_3)} = P_{(-1,p_1,p_2,p_3)} \to (k, J, J', k)\colon a \mapsto (0, 0, \vartheta_l^-(a), 0)$$

(iv) 若 $s = 3$，定义 $\vartheta_{p_1p_2p_3}\colon k \to (k,\ J,\ J',\ k)\colon t \mapsto (0,\ 0,\ 0,\ t)$。

定义 10.29 （L 中的根同态）。设 $\alpha = (p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3) \in F_4$ 并令 $\mathcal{S} \coloneqq \mathcal{S}^{\mathrm{sh}} \cup \mathcal{S}^{\mathrm{lo}}$，其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}^{\mathrm{lo}} &\coloneqq \{\alpha \in F_4 \mid \alpha \text{ is long}\} \setminus \{\bar1\bar1\bar11, 11\bar11, 1\bar111, \bar1111\}\\
\mathcal{S}^{\mathrm{sh}} &\coloneqq \{10\bar10, 0101, 0011, 0\bar1\bar10, \bar1100, \bar1001\}.
\end{aligned}$$

我们先定义一个辅助映射 $\vartheta_\alpha\colon P_\alpha \to L$，如下所示。

(i) 若 $\pi(\alpha)_1 = -2$，定义 $\vartheta_\alpha\colon k \to L\colon t \mapsto tx_\alpha$。(ii) 若 $\pi(\alpha)_1 = \varepsilon 1$，对 $\varepsilon \in \{+, -\}$，定义 $\vartheta_\alpha\colon P_\alpha \to L\colon a \mapsto \vartheta_{p_1p_2p_3}(a)_\varepsilon$。(iii) 若 $\pi(\alpha) = (0, \varepsilon 1)$，对 $\varepsilon \in \{+, -1\}$，定义 $\vartheta_\alpha\colon P_\alpha \to L\colon a \mapsto \vartheta_l^\varepsilon(a) \in J + J' \leq L_0$，其中 $l \in \{1, 2, 3\}$ 是唯一满足以下条件的指标：若 α 为长根，则 $|p_l| = 2$；若 α 为短根，则 $p_l = 0$。(iv) 若 $\pi(\alpha) = (0, 0)$，则存在唯一的 i、j、$l \in \{1, 2, 3\}$，满足 $p_i = 1$、$p_j = -1$、$p_l = 0$，并定义

$$\bar\vartheta_\alpha\colon C \to L\colon a \mapsto \begin{cases} \lambda_{ij}\mathbf{d}_{e_i, a[ij]} & \text{if } i < j,\\ \lambda_{ij}\mathbf{d}_{e_i, \bar a[ij]} & \text{if } i > j \end{cases} \tag{30}$$

其中

$$\lambda_{12} \coloneqq \gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}\gamma_3, \qquad \lambda_{13} \coloneqq \gamma_2^{-1}, \qquad \lambda_{23} \coloneqq \gamma_1\gamma_2^{-1}\gamma_3^{-1},$$

$$\lambda_{21} \coloneqq \gamma_3^{-1}, \qquad \lambda_{31} \coloneqq \gamma_1^{-1}\gamma_2\gamma_3^{-1}, \qquad \lambda_{32} \coloneqq \gamma_1^{-1}.$$

(v) 如果 $\pi(\alpha)_1 = 2$，定义 $\vartheta_\alpha\colon\ k \to L\colon\ t \mapsto ty$。

此外，在 L 中关于 α 的根同态是

$$\vartheta_\alpha\colon P_\alpha \to L\colon a \mapsto \begin{cases} \bar{\vartheta}_\alpha(a) & \text{if } \alpha \notin \mathcal{S}, \\ \bar{\vartheta}_\alpha(-a) & \text{if } \alpha \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

在（30）中使用分类讨论的理由只有到后文才会显现，见注记11.12。

下述定义的动机来自复半单李代数中Chevalley基的经典概念。例如，参见 [Hum72，25.2]。

定义 10.30. (i) 回顾定义4.1 可知，M 表示李代数$\bigoplus_{i\neq 0}\mathfrak{gl}(L_i)$，它包含 L_0。对所有 $\alpha \in F_4$，我们用 h_α 表示 M中由 $[h_\alpha, y_\beta] = \langle\beta|\alpha\rangle y_\beta$所定义的元素，此式对所有 $y_\beta \in L_\beta$以及所有 $\beta \in F_4$成立，其中 $\pi(\beta)_1 \neq 0$。这里 $\langle\beta|\alpha\rangle \coloneqq 2\frac{\beta\cdot\alpha}{\alpha\cdot\alpha}$表示嘉当整数。

(ii) L 的 ***Chevalley*** 型基 是一个族 $(x_\alpha \in L_\alpha)_{\alpha\in F_4}$，具有以下性质：

(a) 对所有 $\alpha \in F_4$，都有 $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$。(b) 对所有 α，$\beta \in F_4$，若 $\alpha + \beta \in F_4$，则存在 $c_{\alpha,\,\beta} \in \mathbb{Z}$ 使得$[x_\alpha, x_\beta] = c_{\alpha,\,\beta}x_{\alpha+\beta}$。(c) 可以选取上文的常数 $c_{\alpha,\,\beta}$，使得对所有 α，$\beta \in F_4$，若 $\alpha+\beta \in F_4$，则有 $c_{\alpha,\,\beta} = -c_{-\alpha,\,-\beta}$。

满足上述性质的整数族 $c_{\alpha,\,\beta}$（其中 α，$\beta \in F_4$ 且 $\alpha+\beta \in F_4$）称为与 $(x_\alpha)_{\alpha\in F_4}$相符。

注 10.31。(i) 注意，L 的 Chevalley 型基 $(x_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 实际上并不是 k-模 L 的基：其 k-线性张成与 L_{0000} 的交为零；对于任意短根 $\alpha \in F_4$，k-张成 x_α 通常是 $L_\alpha \cong C$ 的真子模。

(ii) 设 L' 是一个复半单李代数，设 H 表示 L'的一个极大环面子代数，设 κ 表示 L'上的基灵形式，设 $\Phi \subseteq H^*$ 表示 L' 的根系，并令 $h_\alpha, t_\alpha \in L'$ 对 $\alpha \in \Phi$ 的定义如 [Hum72, 8.2,8.3]所述。那么对所有 $\alpha, \beta \in \Phi$ 以及所有属于 β-根空间 L'_β的 y_β，都有

$$[h_\alpha, y_\beta] = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}[t_\alpha, y_\beta] = \frac{2}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}\beta(t_\alpha)y_\beta = 2\frac{\kappa(t_\beta, t_\alpha)}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}y_\beta = \langle\beta|\alpha\rangle y_\beta.$$

因此，经典理论中的元素 h_α 具有与定义 10.30(i)中相同的性质。事实上，它们是 H 中具有此性质的唯一元素，因为 H 在 L'上的作用是忠实的。

(iii) 定义 10.30(ii) 中的数值$c_{\alpha,\beta}$ 通常并非唯一确定，因为 L 作为 $\mathbb{Z}$-模的作用未必忠实。例如，当 k 是一个正特征域时，情况便是如此。甚至 $c_{\alpha,\beta}$ 在 k 中的像也未必唯一确定，因为 C（因此，对所有短 $\gamma \in F_4$而言，L_γ 也如此）作为 k-模的作用未必忠实。

注 10.32。设 α，$\beta \in F_4$满足 $\alpha+\beta \in F_4$。若 β和 $\alpha+\beta$是长的，则α 也是长的。若 β 是长的而 $\alpha+\beta$ 是短的，则 α 必定是短的。因此，除非 α，β 是短的且 $\alpha+\beta$ 是长的，否则我们总有一个乘法映射

$P_\alpha \times P_\beta \to P_{\alpha+\beta}$，它是映射 $k \times k \to k$、$C \times C \to C$、$k \times C \to C$ 之一。然而，在 α，β 是短的且 $\alpha+\beta$ 是长的这种情形下（因此 $P_\alpha = P_\beta = C$ 和 $P_{\alpha+\beta} = k$），在 $P_\alpha \times P_\beta = C \times C$ 上定义的乘法的像属于 C，而不属于 $k = P_{\alpha+\beta}$。

现在我们可以陈述根同态的关键性质 $(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$。我们发现，不仅 L 中的交换子公式与 γ_1、γ_2、γ_3无关，而且所有交换子公式看起来都相同，除了短根空间可能会被 $\cdot$ 的 C共轭“扭曲”。这与我们在定义 1.10中已经看到的“扭曲”类型相同。

命题 10.33。存在唯一的族 $c = (c_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in F_4,\alpha+\beta\in F_4}$ 取值于 $\{-2,\dots,2\}$ 的整数，使得对于所有交换环 k、所有乘法锥式替代 k-代数 C，以及所有可逆的 $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathrm{Mat}_3(k)$，以下结论成立：

(i) 令 $\alpha, \beta \in F_4$ 满足 $\alpha+\beta \in F_4$。对于每个 $\gamma \in F_4$，令 $T_\gamma := \{\text{恒等映射}_C, \cdot\} \le \text{自同构群}(P_\gamma)$ 如果 γ 是短的；若 γ 是长的，则令 $T_\gamma := \{\text{恒等映射}_k\} \le \text{自同构群}(P_\gamma)$。如果 α，β 是短的，且 $\alpha+\beta$ 是长的，那么 $c_{\alpha,\beta}$ 是偶数，并且存在 $* \in T_\alpha = \{\text{恒等映射}_C, \cdot\}$，使得对所有 $c, d \in C$，以下交换子关系成立：

$$\big[\vartheta_\alpha(c), \vartheta_\beta(d)\big] = \vartheta_{\alpha+\beta}\big(c_{\alpha,\beta}/2 \cdot t(c^* d)\big).$$

否则，存在 $* \in T_\alpha$，$\star \in T_\beta$ 和 $\sigma \in T_{\alpha+\beta}$，使得对所有 $c \in P_\alpha$，$d \in P_\beta$，以下交换子关系成立：

$$\big[\vartheta_\alpha(c), \vartheta_\beta(d)\big] = \vartheta_{\alpha+\beta}\big(c_{\alpha,\beta}(c^* \cdot d^\star)^\sigma\big).$$

(此处 $c \cdot d \in P_{\alpha+\beta}$ 根据备注 10.32。)

(ii) 这一族 $(\vartheta_\alpha(1))_{\alpha\in F_4}$（其中“1”应读作 1_k 或 1_C，具体取决于 α）是 L 的 *Chevalley* 型基，c 与之相符。

此外，对于所有 $\alpha \in F_4$，元素 h_α 属于 L_0，并且对于所有 $y_\beta \in L_\beta$ 和所有 $\beta \in F_4$，都满足 $[h_\alpha, y_\beta] = \langle\beta|\alpha\rangle y_\beta$。

证明。计算机计算（见第 9.3 节）表明，对于所有满足 $\alpha+\beta \in F_4$ 的 α，$\beta \in F_4$，都存在满足 $[\vartheta_\alpha(1)\ \vartheta_\beta(1)] = \vartheta_{\alpha+\beta}(c_{\alpha,\beta})$ 的 $c_{\alpha,\beta} \in \{-2,\dots,2\}$，且该式对 k、C、Γ 的所有可能取值均成立。特别地，该方程在 $k = C = \mathbb{C}$（或任意特征为 0 的域）上的成立说明，族 c由这一性质唯一确定（因为此时 L 是自由的 $\mathbb{Z}$-模）。进一步的计算表明，对于所有 α，$\beta \in F_4$，以及$y_\beta \in L_\beta$，都有 $[[x_\alpha, x_{-\alpha}], y_\beta] = \langle\beta|\alpha\rangle y_\beta$。这意味着，对于所有 $\alpha \in L$，都有 $h_\alpha = [x_\alpha, x_{-\alpha}] \in [L_\alpha, L_{-\alpha}] \subseteq L_0$。其余断言也可由计算得到。□

注记 10.34。回顾注记 1.3中来自 [BM92]的根分次李代数这一更强概念。由L 中存在 Chevalley 型基可知，L 在 F_4是忠实的 C -代数时，按这种更强的意义是 k-分次的。这一附加条件根据 [GPR24，11.14]，当2 在k中可逆时总是满足；这一条件是为了确保短根 k的 kx_α -子模 $\alpha \in F_4$ 同构于 k，而不是 k的一个商。

¯ ¯由于任意三次范数对 (J, J') 不一定包含特定基点，因此没有显而易见的方法来定义相应李代数 $L(J, J')$的 Chevalley 型基（在定义 ¯ ¯10.3的意义下，但将 F_4 替换为 G_2）。

¯ ¯因此，没有理由认为 $L(J,J')$ 总是在更强的¯ ¯意义下是 G_2-分次的。不过，现在假设 (J,J) 是由一个三次范数结构（诱导）而来，且其特定基点 $1_{\bar{J}}$ 是幺模的（见注 2.5(2)）。记¯ ¯$(\vartheta_\alpha)_{\alpha\in G_2}$ 为定义 6.4 中 $L(J,J)$ 内的根同态。对于所有的根α、$\beta\in G_2$，其中 α 为长根且 β 为短根，置

$$\mathcal{S}_1 := \{(-2,-1),(-1,-2)\}, \qquad \mathcal{S}_2 := \{(-1,0),(0,-1)\},$$

$$x_\alpha := \begin{cases} \vartheta_\alpha(-1_k) & \text{if } \alpha\in\mathcal{S}_1,\\ \vartheta_\alpha(1_k) & \text{otherwise,}\end{cases} \qquad x_\beta := \begin{cases} \vartheta_\beta(-1_{\bar{J}}) & \text{if } \alpha\in\mathcal{S}_2,\\ \vartheta_\beta(1_{\bar{J}}) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

利用 $T(1_{\bar{J}},1_{\bar{J}}) = 3_k$和 $D(1_{\bar{J}},1_{\bar{J}}) = 2\mathrm{id}_{\bar{J}}$，可以证明 $(x_\alpha)_{\alpha\in G_2}$是¯ ¯$L(J,J)$ 的一种 G_2 型 Chevalley 型基。事实上，直接观察可知，对于所有 $\alpha,\beta\in G_2$，存在唯一的整数 $c_{\alpha,\beta}$，使得 $\alpha+\beta\in G_2$；并且对于所有 $\alpha,\beta\in G_2$，存在唯一的¯ ¯整数 $d_{\alpha,\beta}$，使得对于所有三次范数结构 (J,J)，均有 $[x_\alpha,x_\beta] = c_{\alpha,\beta}x_{\alpha+\beta}$和 $[[x_\alpha,x_{-\alpha}],y_\beta] = d_{\alpha,\beta}y_{\beta}$。证明 $(x_\alpha)_{\alpha\in G_2}$是 Chevalley 型基，归结为证明这些整数满足某些性质，因此只需证明它对于某个作为 $\mathbb{Z}$-模且自由的三次范数结构是 Chevalley 型基。对于三次 Jordan 矩阵代数，可以采用第 9.3 节中概述的策略完成这一点。

11. 精细化自同构群的 G_2-分次

我们沿用第 10 节的记号，包括记号 10.26。根据定理 7.24，在李代数 $L = L(J,J')$ 的自同构群中有一个 G_2-分次 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$，其中 $J = J' = \mathrm{Her}_3(C,\Gamma)$ 是定义在圆锥 k-代数 (C,n) 上的三次约旦矩阵代数。令 $G := \langle U_\alpha \mid \alpha\in G_2\rangle \le \mathrm{Aut}(L)$。我们的目标是利用第 10 节中构造的 F_4-分次，将 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$ 精细化为 G 的一个 F_4-分次 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$。

诱导映射 $(f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4)$的 F_4单根系 $\pi\colon\ F_4^0\to G_2^0$（见注 10.24）不便于使用，因为其中有两个单根映射为零。因此，我们将考虑以下单根系；此外，它的三个元素映射到 G_2 中的正根系，而我们已在命题 7.23中确定了该正根系的交换子关系。

记号11.1。 我们将 $\Delta_F = (\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$表示为 F_4 中的标准单根系，定义如下

$$\delta_1 = 11\bar{1}\bar{1},\quad \delta_2 = \bar{2}000,\quad \delta_3 := 1\bar{1}00,\quad \delta_4 := 0110.$$

此外，我们用 $T := \{\pm1\}\times\{\pm1\}$ 表示(k,C)的扭曲群，它作用于 k 和 C（见定义 1.10）。

对于根 $\alpha\in F_4$ 满足 $\pi(\alpha)\neq(0,0)$，我们可以通过将第 10.3节中 L的根同态取指数，定义$\mathrm{Aut}(L)$中的根同态。

定义11.2. 设 $\alpha\in F_4$满足 $\pi(\alpha)\neq(0,0)$，并设 $\vartheta_\alpha\colon P_\alpha\to L_\alpha\le L_{\pi(\alpha)}$表示定义 10.29 中的根同态。则相对于 G 的根同态 α为

$$\theta_\alpha\colon P_\alpha\to G\colon a\mapsto \exp_{\pi(\alpha)}\big(\vartheta_\alpha(a)\big)$$

α	$01\bar{1}0$	$0\bar{1}10$	$010\bar{1}$	$0\bar{1}01$	$001\bar{1}$	$00\bar{1}1$
β	$\bar{1}001$	$100\bar{1}$	$\bar{1}010$	$10\bar{1}0$	$0\bar{1}0\bar{1}$	0101
i	1	1	1	1	4	4
η_α	$(-1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ -1)$	$(1,\ -1)$	$(1,\ -1)$	$(1,-1)$

表 2. 选取 β 与 i，见注记11.7，依赖于 α

其中 $\exp^{\pi(\alpha)}\colon\ L_{\pi(\alpha)} \to \mathrm{Aut}(L)$ 是来自命题 $\pi(\alpha)$-参数化（位于 G_2-分次李代数 L 中），见命题 7.20。此外，与 相关联的根群 α 为$U_\alpha := \theta_\alpha(P_\alpha)$。

对于其余六个映射到0 在 G_2中的根，我们定义相应的根同态，即用来自定义11.2的根同态经适当的反射进行共轭。

定义 11.3. 对所有 $\alpha \in F_4$，使得 $\pi(\alpha) \neq (0,0)$，我们定义

$$w_\alpha := \theta_{-\alpha}(-1_\alpha)\theta_\alpha(1_\alpha)\theta_{-\alpha}(-1_\alpha) \in G \leq \mathrm{Aut}(L)$$

其中 $1_\alpha = 1_k$，若 α 为长，且 $1_\alpha = 1_C$，若 α 为短。

引理 11.4. 对所有 $\alpha \in F_4$，使得 $\pi(\alpha) \neq (0,0)$，元素 $w_\alpha \in$ 自同构群(L) 是一个 α-反射。

证明。 对于所有 $\alpha,\ \beta \in F_4$，我们需要证明 $w_\alpha(L_\beta) = L_{\beta^{\sigma(\alpha)}}$。我们已在计算机上验证了这些 $48 \cdot 48$ 断言。详情请见第 9.3 节。 □

注 11.5。 我们只需要引理 11.4 中关于 $\alpha \in \{\delta_1, \delta_4\}$的陈述。

注 11.6。令 $\alpha \in F_4$ 满足 $\pi(\alpha) \neq (0,0)$。虽然根群 $U_\alpha = \exp^{\pi(\alpha)}(L_\alpha)$ 不依赖于根同态 $\vartheta_\alpha\colon\ P_\alpha \to L_\alpha$in L的选择，但根同态 $\theta_\alpha\colon\ P_\alpha \to U_\alpha$ in G 则依赖于此。事实上，在定义 10.29 中通过 γ_1、γ_2、γ_3、-1 的乘积对 ϑ_α 进行的“扭曲”，正是确保$\tilde{w}_\alpha$ 确为反射的关键。如果我们选择了不同的映射 $\vartheta_\alpha\colon\ P_\alpha \to L_\alpha$，并相应地定义 $\tilde{\theta}_\alpha\colon\ P_\alpha \to G\colon\ a \mapsto \exp^{\pi(\alpha)}(\vartheta_\alpha(a))$，那么所需的反射 $\tilde{w}_\alpha = \tilde{\theta}_{-\alpha}(1_\alpha)\tilde{\theta}_\alpha(1_\alpha)\tilde{\theta}_{-\alpha}(1_\alpha)$（如引理 B.6 中关于 G_2-分次的情形）。更糟的是，用 $\tilde{\theta}_\alpha$、$\tilde{\theta}_{-\alpha}$ 表示它们时，表达式可能会涉及结构常数 γ_1、γ_2、γ_3。正是这一障碍最初促使我们寻找 L的 Chevalley 型基。

注 11.7. 六个根中的每一个 $\alpha \in F_4$ with $\pi(\alpha) = (0,0)$ 都可以表示为$\alpha = \beta^{\sigma(\delta_i)}$，其中某个 $i \in \{1,4\}$ 和某个满足 $\pi(\alpha) \neq (0,0)$ 的 $\beta \in F_4$。具体而言，我们可以选择表 2 中所示的 β 和 i。因此，对于每个这样的 α，由引理 7.3 和 11.4 可知

$$\exp_\alpha\colon L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)\colon b \mapsto w_i^{-1} \circ \exp_\beta\big(w_i(b)\big) \circ w_i$$

是一个 α参数化，其中 $\beta \in F_4$ 和 $i \in \{1,4\}$ 按表 2 (根据 α) 中所示选取，而 $w_i := w_{\delta_i}$。因此，我们可以定义

$$\theta_\alpha\colon C \to \mathrm{Aut}(L)\colon a \mapsto \exp_\alpha\big(\vartheta_\alpha(a)\big) = w_i^{-1} \circ \exp_\beta\big(w_i(\vartheta_\alpha(a))\big) \circ w_i.$$

此外，计算机计算（见第 9.3 节）表明，对于所有 $w_i(\vartheta_\alpha(a)) = \vartheta_\beta(\eta_\alpha.a)$，其中 $a \in C$ 由表 $\eta_\alpha \in T$ 2 最后一行给出。

定义 11.8。令 $\alpha \in F_4$ 满足 $\pi(\alpha) = (0,0)$。那么，来自注 $\theta_\alpha\colon C \to$ 自同构群(L) 11.7 的映射（其中 β 和 i 按表 2 选取）称为相对于 α的根同态，其像 U_α 称为与 α相关的根群。

注 11.9。对于所有满足 $\pi(\alpha) = (0,0)$ 的 $\alpha \in F_4$，都有 w_i 和 U_β 包含于 G 中；G 是由 $(U_\gamma)_{\gamma\in G_2}$ 生成的群。因此，由 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 生成的群恰好是 G（而不是更大的群）。

定义了所有根同态 $(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 后，现在验证 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 满足 G 的 F_4-分次公理。我们先从 Weyl元的存在性开始。

记号11.10（参见 1.14）。我们用 $\eta^{\mathrm{e}}\colon F_4 \times \Delta_F \to T$表示 Δ_F-奇偶映射，其取值于 T（按照定义1.11的意义），该映射由表 3中的取值给出。注意，η^{e} 的定义不涉及 T 在 k 和C上的作用，因此 η^{e} 独立于 k、C 和 Γ。

命题 11.11。对于所有的 $\delta \in \Delta_F$、$\alpha \in F_4$ 和 $a \in P_\alpha$，有

$$w_\delta^{-1} \circ \theta_\alpha(a) \circ w_\delta = \theta_{\alpha^{\sigma(\delta)}}(\eta^e_{\alpha,\delta}.a). \tag{31}$$

特别地，w_δ 是关于$(U_\beta)_{\beta\in F_4}$的 δ-*Weyl*元，$(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 是由(k, C)对$(U_\beta)_{\beta\in F_4}$ 进行的参数化（相对于$(w_\delta)_{\delta\in\Delta_F}$），且 η^e（按照定义 *1.12* 的意义），并且$(U_\beta)_{\beta\in F_4}$ 满足公理 *1.5(iii)*。

证明。第一个断言是一个直接的计算，但非常冗长：对所有 $\alpha \in F_4$ 以及任意的 $a \in P_\alpha$，我们必须计算 $w_\delta^{-1}\circ\theta_\alpha(a)\circ w_\delta$与$\theta_{\alpha^{\sigma(\delta)}}(\eta^{\mathrm{e}}_{\alpha,\delta}.a)$ 在 L 的一个生成集上的作用（例如 $L_{-2} \cup L_1$，它由15 F_4-根空间张成），并证明所得表达式相同。（这一过程正是我们得到 η^{e}之值的方式。）我们已在计算机上完成这些计算（详见第9.3 节）。由根群的定义，我们推知 w_δ 是一个 δ-Weyl元。由于 Δ_F 是一个单根系，由注 1.8 可知公理1.5(iii) 成立。□

注 11.12。命题 11.11 中的映射 η^{e} 具有如下性质：对所有 $\alpha \in F_4$ 与 $\delta \in \Delta$，有 $\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\delta) = \eta^{\mathrm{e}}(-\alpha,\delta)$。与注 11.6 中一样，这一性质依赖于我们在定义 10.29 中对根同态$(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 的审慎选取。特别地，该性质对于满足 $\pi(\alpha) = (0,0)$ 的 $\alpha \in F_4$ 成立，依赖于 (30) 中的分类讨论。

命题 11.13. 对于所有的 $t, s \in k$ 和$c, d \in C$，以下交换子关系成立：

$$\begin{aligned}
[\theta_{\delta_1}(t), \theta_{\delta_2}(s)] &= \theta_{\delta_1+\delta_2}(ts),\\
[\theta_{\delta_2}(t), \theta_{\delta_3}(c)] &= \theta_{\delta_2+\delta_3}(-tc)\theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(tn(c)\big),\\
[\theta_{\delta_2+\delta_3}(c), \theta_{\delta_3}(d)] &= \theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(-t(c\bar{d})\big),\\
[\theta_{\delta_2}(t), \theta_{\delta_2+2\delta_3}(s)] &= 1_G,\\
[\theta_{\delta_4}(c), \theta_{\delta_3}(d)] &= \theta_{\delta_3+\delta_4}(\bar{d}\bar{c}).
\end{aligned}$$

特别地，公理 *1.5*(ii) 成立。

α	$\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\ \delta_1)$	$\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\ \delta_2)$	$\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\ \delta_3)$	$\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\ \delta_4)$
1000	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
0100	$(-1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
0010	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(-1,\ -1)$
0001	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,-1)$	$(-1,\ -1)$
1100	$(1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
0110	$(-1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(-1,\ -1)$
0011	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(1,\ -1)$
1110	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(1,\ 1)$
0120	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
0111	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,-1)$	$(1,-1)$
1120	$(1,1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(-1,\ 1)$
1111	$(-1,\ -1)$	$(1,\ 1)$	$(1,1)$	$(-1,\ 1)$
0121	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,-1)$	$(-1,\ -1)$
1220	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,1)$
1121	$(-1,1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$
0122	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
1221	$(1,\ 1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,-1)$
1122	$(-1,\ 1)$	$(1,1)$	$(1,1)$	$(-1,\ 1)$
1231	$(1,1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
1222	$(1,\ 1)$	$(-1,1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$
1232	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(-1,\ -1)$	$(-1,\ -1)$
1242	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
1342	$(1,\ 1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$
2342	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$	$(1,\ 1)$

表3. 命题 η^{e}的取值： $F_4\times\Delta\to T$见命题 11.11。第一列中的序列 $a_1a_2a_3a_4$ 表示$\sum_{i=1}^4 a_i\delta_i$。此外， $\eta^{\mathrm{e}}(\alpha,\ \delta)=\eta^{\mathrm{e}}(-\alpha,\ \delta)$对所有 $\alpha\in F_4$ 和 $\delta\in\Delta$。

证明。前四个交换子公式可由命题 7.23 中针对任意三次范数对所确立的公式推出。例如，对于 $t,\ s\in k$:

$$\begin{aligned}[\theta_{\delta_1}(t),\theta_{\delta_2}(s)] &= \big[\exp_{1,0}\big(\vartheta_{11\bar1\bar1}(s)\big),\exp_{-2,-1}\big(\vartheta_{\bar2000}(t)\big)\big]\\ &= \big[\exp_{1,0}\big((0,-\gamma_2^{-1}\gamma_3 se_1,0,0)_+\big),\exp_{-2,-1}(tx)\big]\\ &= \big[x_1\big(-\gamma_2^{-1}\gamma_3 se_1\big),x_6(t)\big] = x_5\big(-t\gamma_2^{-1}\gamma_3 se_1\big).\end{aligned}$$

这里我们用到了 $b:=-\gamma_2^{-1}\gamma_3 se_1$ 满足 $N(b)=0$ 和 $b^\sharp=0$。由此得到所需的交换子关系，因为

$$\theta_{\delta_1+\delta_2}(ts)=\exp_{-1,-1}\big(\vartheta_{\bar1\bar11\bar1}(ts)\big)=x_5\big(-t\gamma_2^{-1}\gamma_3 se_1\big).$$

或者，交换子公式可通过直接进行计算机计算得出（参见第9.3节了解详情），最后一个公式也可通过这种方式得到。

由上述内容可知，换位子关系 $[U_\alpha, U_\beta] \subseteq U_{]\alpha,\beta[}$ 对所有

$$(\alpha,\beta) \in X := \{(\delta_1,\delta_2),(\delta_2,\delta_3),(\delta_2+\delta_3,\delta_3),(\delta_2,\delta_2+2\delta_3),(\delta_3,\delta_4)\}.$$

根据备注 1.16中的类似论证，我们推知 $[U_\alpha, U_\beta] \subseteq U_{]\alpha,\beta[}$ 对所有不成比例的 $\alpha,\beta \in F_4$ 都成立。因此满足公理 1.5(ii) 。 □

命题 11.14. 设 Π 是 F_4 中的任意根的正系统，并以 U_+ 和 U_- 表示由 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Pi}$ 和 $(U_\alpha)_{\alpha\in-\Pi}$ 分别生成的群。那么 $U_+ \cap U_- = 1$。特别地，根群 $(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$ 满足公理 *1.5*(iv)

证明。 这由命题 7.8得出。 □

我们以最后一个主要结果作结。

定理 ***11.15.*** 设 k 为交换环， C 为 k 上的乘法圆锥替代代数。设 $\Gamma = diag(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in Mat_3(k)$ 可逆，令 $J := Her_3(C,\Gamma)$ 表示相应的三次约旦矩阵代数（见注记 *9.6*），并令 $L := L(J,J)$ 表示在第 *4* 节中构造的李代数。那么，定义 *11.2* 和 *11.8* 中的根群 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 构成它们所生成的群 $G \leq Aut(L)$ 的一个 F_4-分次。此外，$(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 是由 (k,C) 对 $(G,(U_\alpha)_{\alpha\in F_4})$ 的一个参数化，相对于 $(w_\delta)_{\delta\in\Delta_F}$ 和 η^e 而言，它满足命题 *11.13* 中的交换子公式。

证明。 这是命题 11.11、11.13和11.14 以及注记 11.9的推论。

□

注 11.16（参见 1.17）。命题 11.13 中的交换子公式与定理 1.15 中的相同，只是“差一个扭曲”，也就是说，“差一些符号和共轭”。类似地，本节中的奇偶映射 η^e 与注记 1.14 中由定理 1.15 导出的奇偶映射 η^c 并不相同。在本注中，我们说明如何修改根同态 $(\theta_\alpha)_{\alpha\in F_4}$，从而得到 G 的参数化，使其看起来与定理 1.15 中的参数化完全相同。令 $\Delta := \Delta_F$。由于我们已在定理 11.15 中证明 $(G,(U_\alpha)_{\alpha\in F_4})$ 是一个 F_4-分次群，因此可以应用定理 1.15。于是存在一个交换环 k'、一个乘法圆锥替代 k'-代数 (C',n')，以及一个参数化 $(\theta'_\alpha)_{\alpha\in F_4}$，它将 $(U_\alpha)_{\alpha\in F_4}$ 按照 $(w_\delta)_{\delta\in\Delta}$（定义 11.3 中的 Weyl元）和 η^c 参数化为 (k',C')。我们的目标是证明 $k = k'$（作为环）以及 $(C,n) = (C',n')$（作为圆锥代数）。

根据 [Wie24，4.5.17]，我们可以使得 $k = k'$， $C = C'$ 作为加法群，并且 $\theta'_{\delta_i} = \theta_{\delta_i}$ 对于 $i \in \{2,3\}$。我们的主要工具是以下观察：对于所有 $i \in \{2,3\}$， δ_1，... ...，$\delta_\ell \in \Delta$， $p \in P_{\delta_i}$ 以及 $\alpha := \delta^{\sigma(\delta_1)\cdots\sigma(\delta_\ell)}$，我们有（采用定义 1.11 和注记1.13中的记号）：

$$\theta_\alpha(\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_i,\delta_1\cdots\delta_\ell}.p) = \theta_{\delta_i}(p)^{w_{\delta_1}\cdots w_{\delta_\ell}} = \theta'_{\delta_i}(p)^{w_{\delta_1}\cdots w_{\delta_\ell}} = \theta'_\alpha(\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_i,\delta_1\cdots\delta_\ell}.p). \tag{32}$$

注意，尽管扭曲群 T和 T' 属于 $(k,\ C)$ 以及 $(k',\ C')$ 作为抽象群是相同的，且作用于相同的集合 $k = k'$ 和 $C = C'$，但它们在$C = C'$ 上的作用并不相同（目前尚未证明相同），因为它们分别涉及对 C 和 C'的共轭。左侧（32）出现的是 T' 的作用，而右侧出现的是 T' 的作用。下文中，我们将写作

¯· 对于 C 的共轭，且永远不（需要）提及 C'的共轭。

我们首先证明 $k = k'$ 作为环的性质。我们将频繁使用 η^{c}的一些具体值，例如

$$\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_2,\delta_1} = (-1,1) = \eta^{\mathrm{e}}_{\delta_1+\delta_2,\delta_2} \quad \text{and} \quad \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_2,\delta_1} = (1,1) = \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_1+\delta_2,\delta_2},$$

可从表3 和 [Wie24、图10中分别读出。4], 利用这些值和定义 1.11，我们计算得 $\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_2,\ \delta_1\delta_2} = (1,\ 1) = \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_2,\ \delta_1\delta_2}$。因此，由（32），可得

$$\theta_{\delta_1+\delta_2}(t) = \theta'_{\delta_1+\delta_2}(-t) \quad \text{and} \quad \theta_{\delta_1}(t) = \theta_{\delta_1}(t)$$

对所有 $t \in k$ 均成立。这意味着

$$\theta_{\delta_1+\delta_2}(t \cdot_k s) = [\theta_{\delta_1}(t), \theta_{\delta_2}(s)] = [\theta'_{\delta_1}(t), \theta'_{\delta_2}(s)] = \theta'_{\delta_1+\delta_2}(-t \cdot_{k'} s) = \theta_{\delta_1+\delta_2}(t \cdot_{k'} s)$$

对所有 $t,\ s \in k$ 均成立。因此 $k' = k$。

同样，为了证明 $C = C'$ 作为（非结合）环，我们注意到

$$\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_3,\delta_4} = (-1,-1) = \eta^{\mathrm{e}}_{\delta_3+\delta_4,\delta_3} \quad \text{and} \quad \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3,\delta_4} = (-1,1) = \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3+\delta_4,\delta_3}.$$

这意味着 $\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_3,\ \delta_4\delta_3} = (1,\ 1) = \eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3,\ \delta_4\delta_3}$ 并且，由（32），

$$\theta_{\delta_3+\delta_4}(\bar{c}) = \theta'_{\delta_3+\delta_4}(c) \quad \text{and} \quad \theta_{\delta_4}(c) = \theta'_{\delta_4}(c)$$

对所有 $c \in C$。因此

$$\theta'_{\delta_3+\delta_4}(c \cdot_C d) = [\theta'_{\delta_4}(c), \theta'_{\delta_3}(d)] = [\theta_{\delta_4}(c), \theta_{\delta_3}(d)] = \theta_{\delta_3+\delta_4}(\bar{d} \cdot_C \bar{c}) = \theta'_{\delta_3+\delta_4}(c \cdot_C d)$$

for all $c, d \in C$, so $C = C'$ as (nonassociative) rings.

Finally, we have $\eta^{\mathrm{e}}_{\delta_2,\delta_3} = (1,1)$, $\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_2,\delta_3} = (-1,1)$, $\eta^{\mathrm{c}}_{\delta_3,\delta_2} = (1,1) = \eta^{\mathrm{e}}_{\delta_3,\delta_2}$ and thus

$$\theta_{\delta_2+2\delta_3}(t) = \theta'_{\delta_2+2\delta_3}(-t) \quad \text{and} \quad \theta_{\delta_2+\delta_3}(c) = \theta'_{\delta_2+\delta_3}(c)$$

对所有 $t \in k$、 $c \in C$，这意味着

$$\begin{aligned}\theta_{\delta_2+\delta_3}(-t \cdot_C c)\theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(tn(c)\big) &= [\theta_{\delta_2}(t), \theta_{\delta_3}(c)] = [\theta'_{\delta_2}(t), \theta'_{\delta_3}(c)] \\ &= \theta'_{\delta_2+\delta_3}(-t \cdot_{C'} c)\theta'_{\delta_2+2\delta_3}\big(-tn'(c)\big) \\ &= \theta_{\delta_2+\delta_3}(-t \cdot_{C'} c)\theta_{\delta_2+2\delta_3}\big(tn'(c)\big)\end{aligned}$$

对所有 $t \in k$， $c \in C$。因此， $n = n'$ 与 k-代数在 C 上以及在 C'上的结构一致。总而言之，我们得出如下结论：从任意乘法圆锥交错代数 C 出发，它定义在交换环 k上，我们可以构造一个 F_4-分次群，并带有参数化 $(\theta'_\alpha)_{\alpha \in F_4}$，其表现与定理1.15中的完全相同。

附录A. 高阶莱布尼茨法则

在本附录中，我们建立所需的工具，用以验证某些“指数自同态”在任意环上保持李括号。我们将运用这一工具来证明，映射 $e_{(0,b,0,0)_+}$ （对应于 $b \in J$）以及 $e_{\rho x}$ （对应于 $\rho \in k$），来自定义 7.11 与 7.12，是李代数 L的自同态。

引理 A.1。 设 L 是任意交换环 k上的李代数。假设 δ_0、 δ_1、……、 δ_s 是 L 的 k-线性自同态，且

$$\delta_\ell([v,w]) = \sum_{i+j=\ell} [\delta_i(v), \delta_j(w)] \tag{$*$}_\ell$$

对所有 v、 $w \in L$ 以及所有 $\ell \in \mathbb{N}$，其中 $\delta_\ell = 0$ 对所有 $\ell > s$。

则映射 $\varphi := \sum_{\ell=0}^{s} \delta_\ell$ 是一个李代数自同态，即 $\varphi([v,w]) = [\varphi(v)\ \varphi(w)]$ 对所有 v、$w \in L$。

证明。 我们有 $\varphi([v,w]) = \sum_\ell \delta_\ell([v,w])$，因此对每个 ℓ调用$(*)_\ell$，得到

$$\varphi([v,w]) = \sum_{\ell} \sum_{i+j=\ell} [\delta_i(v), \delta_j(w)] = \Big[\sum_i \delta_i(v), \sum_j \delta_j(w)\Big] = [\varphi(v), \varphi(w)]. \qquad \square$$

如果映射 δ_0、……、δ_s与 L 的分次相关（在我们的情形中这一假设总能满足），则有引理 A.1的以下逆命题。

引理 *A.2.* 设 $(A,+)$ 为一个阿贝尔群，设 $L = \bigoplus_{a\in A} L_a$ 是交换环 k 上的 A-分次李代数。假设 δ_0、δ_1、……、δ_s 是 k-线性自同态，且映射 $\varphi := \sum_{\ell=0}^{s} \delta_\ell$ 是李代数自同态，并对所有 $\ell > s$ 置 $\delta_\ell := 0$。进一步假设存在 $a \in A$，使得对所有 $b \in A$ 和 $\ell \in \mathbb{N}$，$\delta_\ell(L_b) \subseteq L_{b+\ell a}$。则对所有 v、$w \in L$ 以及所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$(*)_\ell$ 成立。

证明。 只需证明 $(*)_\ell$ 对齐次元素 u, v，因此令 $b, c \in A$ 并令 $v \in L_b$, $w \in L_c$。由于 φ 是 L的一个自同态，对引理 A.1 中的计算稍作调整即可得到

$$\sum_{\ell=0}^{s} \delta_\ell([v,w]) = \varphi([v,w]) = [\varphi(v), \varphi(w)] = \sum_{\ell} \sum_{i+j=\ell} [\delta_i(v), \delta_j(w)].$$

注意，$\delta_\ell([v,w])$ 和 $\sum_{i+j=\ell}[\delta_i(v)\ \delta_j(w)]$ 对所有 $\ell \in \mathbb{N}$ 都属于 $L_{b+c+\ell a}$。由于 $L = \bigoplus_{d\in A} L_d$，可得对所有 $\ell \in \mathbb{N}$，$\delta_\ell([v,w]) = \sum_{i+j=\ell}[\delta_i(v)\ \delta_j(w)]$。$\square$

我们所考虑的典型例子是这样的情形：δ 是 L的一个导子，且对于某个 $s \in \mathbb{N}_0$有 $\delta^{s+1} = 0$；并且对于每个 ℓ，都有 $\delta_\ell := \frac{1}{\ell!}\delta^\ell$，前提是每个 $\ell!$ 在 k 中都可逆。注意

$$\varphi = \sum_{\ell=0}^{s} \delta_\ell = \sum_{\ell=0}^{s} \frac{1}{\ell!}\delta^\ell$$

因此是对应于 δ 的通常指数映射。在这种情况下，$(*)_0$ 显然成立（因为 $\delta_0 = \mathrm{id}$），而 $(*)_1$ 则是定义导子的莱布尼茨法则。应用莱布尼茨法则 ℓ 次后，我们得到

$$\ell! \cdot \delta_\ell([v,w]) = \ell! \cdot \sum_{i+j=\ell} [\delta_i(v), \delta_j(w)]$$

对所有 ℓ，因此若每个 $\ell!$ 在 k中均可逆，则 $(*)_\ell$ 对每个 ℓ都成立。

关键在于，我们所关注的映射是定义在任意环上的导子的指数映射。我们仍然有 $\delta_0 = \mathrm{id}$ 和 $\delta_1 = \delta$ 是导子，但不能仅凭 $(*)_\ell$ 是导子这一事实，就推出“高阶莱布尼茨法则” $(*)_\ell$。证明这些 $(*)_\ell$ 都需要进行计算，过程相当繁复。下面我们将加以说明，并提供足够的细节，使有勇气的读者无需费太多力气便能重构完整证明。

注 A.3. 我们一直在思考，是否存在某种一般原理，能让我们从 $\mathbb{Z}$ 推广到任意环 k （例如通过张量化），从而省去下文冗长的证明。然而，在这一过程中我们需要许多额外的恒等式和引理，这表明这种可能性似乎不大。

文献中一个相关的例子是，在 [Fau89], 的附录中，Faulkner由一个替代环构造了一个 A_2-分次的李代数和一个 A_2-分次的群。他在 [Fau89, （A.7）] 中面临与我们相同的问题（只不过他的分次是3-分次，因此只有2的可逆性是问题）。他正是通过手工证明恒等式 $(*)_\ell$ 来进行的，因此他显然没有看到绕过这一点的方法。

A.1. **指数映射** $e_{(0,b,0,0)_+}$。 现在我们继续证明，定义 $e_{(0,b,0,0)_+}$ 7.12 中的映射确实是李代数 L的自同态。因此，固定 $b \in J$，令 $\varphi := e_{(0,b,0,0)_+}$ 并按次数分解 $\varphi = \sum_{\ell=0}^{3} \delta_\ell$。特别地， $\delta_0 :=$ 恒等映射 以及 $\delta_1 := \mathrm{ad}_{(0,b,0,0)_+}$。具体而言，映射 δ_1、 δ_2 和 δ_3 如下。

$$\delta_1 : \begin{cases} x & \mapsto (0,b,0,0)_- \\ (\nu,c,c',\rho)_- & \mapsto -b\times c + T(b,c')(\zeta-\xi) - \mathbf{d}_{b,c'} + \rho b \\ c' & \mapsto \big(T(b,c'),0,0,0\big)_+ \\ \mathbf{d}_{e,e'} & \mapsto \big(0,-D_{e,e'}(b)+T(e,e')b,0,0\big)_+ \\ \xi & \mapsto (0,-b,0,0)_+ \\ \zeta & \mapsto 0 \\ c & \mapsto (0,0,-b\times c,0)_+ \\ (\nu,c,c',\rho)_+ & \mapsto T(b,c')y \\ y & \mapsto 0 \end{cases} \tag{33}$$

$$\delta_2 : \begin{cases} x & \mapsto -b^\sharp \\ (\nu,c,c',\rho)_- & \mapsto \big(-T(c,b^\sharp),\ T(b,c')b - b^\sharp\times c',\ -\rho b^\sharp,\ 0\big)_+ \\ c' & \mapsto 0 \\ \mathbf{d}_{e,e'} & \mapsto 0 \\ \xi & \mapsto 0 \\ \zeta & \mapsto 0 \\ c & \mapsto -T(c,b^\sharp)y \\ (\nu,c,c',\rho)_+ & \mapsto 0 \\ y & \mapsto 0 \end{cases} \tag{34}$$

$$\delta_3\colon \begin{cases} x & \mapsto \big(-N(b),0,0,0\big)_+ \\ (\nu,c,c',\rho)_- & \mapsto -\rho N(b)y \\ c' & \mapsto 0 \\ \mathbf{d}_{e,e'} & \mapsto 0 \\ \xi & \mapsto 0 \\ \zeta & \mapsto 0 \\ c & \mapsto 0 \\ (\nu,c,c',\rho)_+ & \mapsto 0 \\ y & \mapsto 0 \end{cases} \tag{35}$$

注 A.4. (i) 为了使表达式更易读，我们通常省略括号，并用 $\delta_i v$ 代替 $\delta_i(v)$。

(ii) 注意到 $\delta_\ell(L_{i,\,j}) \subseteq L_{i+\ell,\,j}$对所有 i，j，ℓ。特别地，$(*)_\ell$若 $v \in L_{ij}$ 且 $w \in L_{rs}$，则当$L_{i+r+\ell,\,j+s} = 0$时平凡成立。这将大大减少我们必须验证的情形数目。

下面这个小技巧将大幅减少所需的计算。

引理 A.5. 设 $n \geq 2$ 并设 a，b，$c \in L$。假设 $(*)_\ell$ 对所有 $\ell \leq n$成立，对以下五个对中的每一个：

(i) $v = a$ 与 $w = b$；(ii) $v = a$ 与 $w = c$；(iii) $v = b$ 与 $w = c$；(iv) $v = b$ 与 $w = [a,c]$；(v) $v = c$ 与 $w = [a,b]$。

那么，$(*)_\ell$ 对于 $v = a$ 和 $w = [b,c]$也成立，对所有 $\ell \leq n$均成立。

证明。 根据雅可比恒等式，$*)_\ell$ 对于 $v = a$ 和 $w = [b,c]$ 的两边均可化简为同一个表达式

$$\sum_{i+j+m=\ell} \big[[\delta_i a, \delta_j b], \delta_m c\big] - \sum_{i+j+m=\ell} \big[[\delta_i a, \delta_m c], \delta_j b\big]. \qquad \square$$

下面给出一个我们将多次使用的具体实例。

推论 A.6。 设 $r \in \{-2,-1,0,1,2\}$，设 $n \geq 2$，设 $e \in J$和 $e' \in J'$。假设$(*)_\ell$ 在以下每种情形中对所有 $\ell \leq n$ 均成立：

(i) $v \in L_r$ 和 $w = e$；(ii) $v \in L_r$ 和 $w = e'$。

那么，$(*)_\ell$ 也对所有 $v \in L_r$ 和 $w =\mathbf{d}_{e,\,e'}$以及所有 $\ell \leq n$成立。

证明。 根据定义，我们有 $\mathbf{d}_{e,\,e'} = [e',e]$。注意，对于每个 $v \in L_r$，元素 $[v,e']$ 和 $[v,e]$ 也属于 L_r。此外，$(*)_\ell$ 对 $v = e$和 $w = e'$也成立：对 $\ell = 0$ 和 $\ell = 1$显然成立；而一旦 $\ell \geq 2$，由备注 A.4 可知其成立，因为 $L_{\ell,\,0} = 0$。由引理 A.5即可得出结论。 $\square$

现在我们可以开始证明 $(*)_\ell$ 对每个 ℓ 都成立，先从 $\ell = 2$ 开始。（回想一下，$(*)_1$ 就是雅可比恒等式，因为 $\delta_0 = \mathrm{id}$，而且 δ_1 是一个内导子。）对于每个 ℓ，

这需要根据 v 和 w进行大量分类讨论，我们将如表 1 所示，逐一考察不同情形。

情形 $\ell = 2$。我们需要证明

$$\delta_2[v,w] = [\delta_2 v, w] + [\delta_1 v, \delta_1 w] + [v, \delta_2 w] \tag{$*$}_2$$

对所有 $v,\ w \in L$。我们先列出需要考虑的不同情形。

(a) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$, (b) $v = x$, $w = \mathsf{d}_{e,e'}$, (c) $v = x$, $w = \xi$, (d) $v = x$, $w = \zeta$, (e) $v = x$, $w = c \in J$, (f) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_+$, (g) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$, (h) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = c' \in J'$, (i) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \mathsf{d}_{e,e'}$, (j) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \xi$, (k) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \zeta$, (l) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = c \in J$, (m) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_+$, (n) $v = \mathsf{d}_{e,e'}$, $w = c \in J$, (o) $v = \xi$, $w = c \in J$, (p) $v = \zeta$, $w = c \in J$.

注意，由于注 A.4，有几种情形被省略了。例如，当 $v = x$ 和 $w = c' \in J'$时，我们有 $v \in L_{-2,-1}$ 和 $w \in L_{0,-1}$，但$L_{-2+0+2,-1-1} = L_{0,-2} = 0$。再举一例，注意当 $v \in L_{0,i}$ 和$w \in L_{0,j}$时，我们得到 $L_{2,i+j}$，除非 $i + j = 1$，否则它为 0；这意味着对于 $v, w \in L_0$，只会出现情形 (n) 到 (p)（在对称意义下）。

现在我们将分别处理这些情形。在每种情形中，我们只给出涉及的四项在 $(*)_2$ 中的计算结果，并说明计算或验证 $(*)_2$ 是否涉及其他恒等式。

(a) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$. Then

$$\begin{aligned}
\delta_2[v,w] &= 0\\
[\delta_2 v, w] &= \big(T(c, b^\sharp),\ b^\sharp \times c',\ \rho b^\sharp,\ 0\big)_-\\
[\delta_1 v, \delta_1 w] &= \big(-2T(c, b^\sharp),\ T(b, c')b - 2b^\sharp \times c',\ -2\rho b^\sharp,\ 0\big)_-\\
[v, \delta_2 w] &= \big(T(c, b^\sharp),\ -T(b, c')b + b^\sharp \times c',\ \rho b^\sharp,\ 0\big)_-.
\end{aligned}$$

(b) $v = x$, $w = \mathbf{d}_{e,\ e'}$。由推论 A.6 可知，我们可以略去此情形，因为它可由 (e) 推出。（注意，情形 $v = x$, $w = e' \in J'$ 可由注记 A.4 得出。）(c) $v = x$, $w = \xi$。于是

$$\begin{aligned}
\delta_2[v,w] &= -2b^\sharp\\
[\delta_2 v, w] &= 0\\
[\delta_1 v, \delta_1 w] &= -2b^\sharp\\
[v, \delta_2 w] &= 0.
\end{aligned}$$

(d) $v = x$, $w = \zeta$。于是

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= -b^\sharp\\ [\delta_2 v, w] &= -b^\sharp\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= 0\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

(e) $v = x$, $w = c \in J$。然后

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= 0\\ [\delta_2 v, w] &= -\mathbf{d}_{c,b^\sharp}\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= 2T(c,b^\sharp)\zeta - \mathbf{d}_{b,b\times c}\\ [v, \delta_2 w] &= -T(c,b^\sharp)\xi.\end{aligned}$$

在计算 $[\delta_1 v, \delta_1 w]$时，我们用到了以下事实： $T(b, b\times c) = T(c, b\times b) = 2T(c,b^\sharp)$。此外，为了验证 $(*)_2$,，我们需要引理 4.17(iii)。

(f) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_+$。然后

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= \big(T(c,b^\sharp),\ b^\sharp\times c' - T(b,c')b,\ \rho b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_2 v, w] &= \big(T(c,b^\sharp),\ b^\sharp\times c',\ \rho b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= \big(0,\ -T(b,c')b,\ 0,\ 0\big)_+\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

(g) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$。可以直接进行计算，但过程相当繁琐，因此调用引理 A.5 效率高得多。于是写作$w = [z, x]$，其中 $z = (\nu, c, c', \rho)_+$。那么，对于给定的对 (v, w)，$(*)_2$ 成立，只需证明它对以下五对分别成立：(v, z)、(v, x)、(z, x)、$(x, [v, z])$ 和 $(z, [v, x])$。对于 (v, z)，这是下文的情形 (m)。对于 (v, x) 和 (z, x)，前文的情形 (a) 和 (f) 已分别处理过。由于 $[v, z] \in L_0$，情形 $(x, [v, z])$ 可由上文的 (b) 至 (e) 推出。最后，情形 $(z, [v, x])$ 是显然的，因为 $[v, x] = 0$。

(h) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = c' \in J'$。那么

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= \big(-T(c'\times a', b^\sharp),\ \mu T(b,c')b - \mu b^\sharp \times c',\ 0,\ 0\big)_+\\ [\delta_2 v, w] &= \big(T(b,a')T(b,c') - T(b^\sharp\times a', c'),\ -\mu c'\times b^\sharp,\ 0,\ 0\big)_+\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= \big(-T(b,a')T(b,c'),\ \mu T(b,c')b,\ 0,\ 0\big)_+\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

(i) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = \mathbf{d}_{e,\ e'}$。根据推论 A.6，我们可以略过此情形，因为它可由 <style id='34>(h) 和 (l) 推出。

(j) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = \xi$。那么

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= \big(-T(a,b^\sharp),\ T(b,a')b - b^\sharp\times a',\ -\mu b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_2 v, w] &= \big(T(a,b^\sharp),\ -T(b,a')b + b^\sharp\times a',\ \mu b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= \big(-2T(a,b^\sharp),\ D_{b,a'}(b),\ -2\mu b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

根据定义，$D_{b,a'}(b) = 2T(b,a')b - 2b^\sharp\times a'$。

(k) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \zeta$。然后

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= \big(-T(a,b^\sharp),\ 0,\ \mu b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_2 v, w] &= \big(-T(a,b^\sharp),\ 0,\ \mu b^\sharp,\ 0\big)_+\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= 0\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

(l) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = c \in J$。我们可以再次利用引理 A.5 来避免计算。事实上，再次写作 $v = [z, x]$，其中 $z = (\lambda, a, a', \mu)_+$。对于给定的对 (v, w)，只要我们证明五个对 (x, z)、(c, z)、(x, c)、$(z, [x, c])$ 和 $(x, [z, c])$ 分别满足 $(*)_2$，即可得出结论。对于 (x, c)，这是上面的情形 (e)。对于 (x, z) 和 $(x, [z, c])$，这是上面的情形 (f)。对于 (c, z)，由注 A.4 可知这显然成立。最后，对于 $(z, [x, c])$，因为 $[x, c] = 0$，所以这显然成立。

(m) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_+$。于是

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= T(\rho a - a' \times c' + \mu c,\ b^\sharp)y\\ [\delta_2 v, w] &= \rho T(a, b^\sharp)y + T(b, a')T(b, c')y - T(b^\sharp \times a', c')y + \mu T(c, b^\sharp)y\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= -T(b, a')T(b, c')y\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

(n) $v = \mathbf{d}_{e,e'}$, $w = c \in J$。于是

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= -T\big(D_{e,e'}(c), b^\sharp\big)y\\ [\delta_2 v, w] &= 0\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= T\big(D_{e,e'}(b) - T(e,e')b, b \times c\big)y\\ [v, \delta_2 w] &= 0.\end{aligned}$$

为证明两个非零右端相等，我们展开

$$-T\big(D_{e,e'}(c), b^\sharp\big) = -T(e,e')T(c,b^\sharp) - T(c,e')T(e,b^\sharp) + T\big((c \times e) \times e', b^\sharp\big),$$

$$T\big(D_{e,e'}(b) - T(e,e')b, b \times c\big) = T(b,e')T(e,b \times c) - T\big((b \times e) \times e', b \times c\big).$$

现在应用引理2.8(9) 进行改写

$$T\big((b \times e) \times e', b \times c\big) = T\big((b \times e) \times (b \times c), e'\big)$$

$$= T(c, b \times e)T(b, e') + T(c, b^\sharp)T(e, e') + T(e, b^\sharp)T(c, e') - T\big((c \times e) \times b^\sharp, e'\big)$$

结论由此得出。

(注意，我们不能应用引理A.5 或推论A.6，因为那样会导致循环论证。)

(o) $v = \xi$, $w = c \in J$. 然后

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= 0\\ [\delta_2 v, w] &= 0\\ [\delta_1 v, \delta_1 w] &= 2T(c, b^\sharp)y\\ [v, \delta_2 w] &= -2T(c, b^\sharp)y.\end{aligned}$$

(p) $v = \zeta$, $w = c \in J$。则

$$\begin{aligned}\delta_2[v,w] &= -T(c, b^\sharp)y\\ [\delta_2 v, w] &= 0\end{aligned}$$

$$[\delta_1 v, \delta_1 w] = 0$$
$$[v, \delta_2 w] = -T(c, b^\sharp)y.$$

情形 $\ell = 3$。 我们必须证明

$$\delta_3[v,w] = [\delta_3 v, w] + [\delta_2 v, \delta_1 w] + [\delta_1 v, \delta_2 w] + [v, \delta_3 w] \qquad (*)_3$$

对所有 $v, w \in L$。同样，我们先列出需要考虑的各种情形。

(a) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$, (b) $v = x$, $w = \mathsf{d}_{e,e'}$, (c) $v = x$, $w = \xi$, (d) $v = x$, $w = \zeta$, (e) $v = x$, $w = c \in J$, (f) $v = x$, $w = (0, 0, 0, \rho)_+$, (g) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$, (h) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \mathsf{d}_{e,e'}$, (i) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \xi$, (j) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = \zeta$, (k) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = c \in J$.

当然，我们再次应用了注记A.4。特别要注意，对于情形 (f)，其中 $v = x \in L_{-2,\,-1}$ 且 $w \in L_1$，$(*)_3$ 在 $w \in L_{1j}$ 且 $j \neq 1$时是平凡的，这就是为什么我们可以将讨论限制在情形 $w = (0,\ 0,\ 0,\ \rho)_+$。

(a) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$. Then

$$\delta_3[v,w] = 0$$
$$[\delta_3 v, w] = -N(b)c' - \rho N(b)(\xi - \zeta)$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = -T(b, c')b^\sharp + D_{c',b}(b^\sharp) - \rho \mathbf{d}_{b,b^\sharp}$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = T(b, c')b^\sharp - N(b)c' + 3\rho N(b)\zeta - \rho \mathbf{d}_{b,b^\sharp}$$
$$[v, \delta_3 w] = -\rho N(b)\xi,$$

其中，在计算 2.3(iii) 及 (vi) 时，我们用到了定义 $[\delta_1 v, \delta_2 w]$。现在，这两个恒等式还意味着 $D_{c',\,b}(b^\sharp) = 2N(b)c'$。再结合 $\mathbf{d}_{b,\,b^\sharp} = {}^N(b)(2\zeta - \xi)$ 由引理 4.17(i)可知，$(*)_3$ 便得证。

(b) $v = x$, $w = \mathbf{d}_{e,\,e'}$。根据推论 A.6，我们可以略去此情形，因为它可由 (e) 推出。（注意，情形 $v = x$, $w = e' \in J'$ 由注记 A.4 得出。）(c) $v = x$, $w = \xi$。于是

$$\delta_3[v,w] = \big(-2N(b),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_3 v, w] = \big(N(b),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = \big(-3N(b),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = 0$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

(d) $v = x$、 $w = \zeta$。那么

$$\delta_3[v,w] = \big(-N(b),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_3 v, w] = \big(-N(b),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = 0$$

$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = 0$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

(e) $v = x$、 $w = c \in J$。那么

$$\delta_3[v,w] = 0$$
$$[\delta_3 v, w] = \big(0,\ N(b)c,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = \big(0,\ -b^\sharp \times (b \times c),\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = \big(0,\ T(c, b^\sharp)b,\ 0,\ 0\big)_+$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

该结果现在由引理 2.8(8)得出。

(f) $v = x$, $w = (0,\ 0,\ 0,\ \rho)_+$。于是

$$\delta_3[v,w] = \rho N(b)y$$
$$[\delta_3 v, w] = \rho N(b)y$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = 0$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = 0$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

(g) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$。再次，我们将应用引理 A.5，记$w = [z, x]$ 为 $z = (\nu, c, c', \rho)_+$。那么，对于给定的对 (v, w)，只要我们对以下五对中的每一对都知道 $(*)_3$，结论便成立：(v, z)、(v, x)、(z, x)、$(x, [v, z])$ 和 $(z, [v, x])$。对于 (v, z)，由注 A.4 可知这是显然的。对于 (v, x) 和 (z, x)，上述相应的情况 (a) 和 (f) 已经处理过。由于 $[v, z] \in L_0$，情况 $(x, [v, z])$ 可由上述 (b) 至 (e) 得出。最后，情况 $(z, [v, x])$ 显然成立，因为 $[v, x] = 0$。

(h) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = \mathbf{d}_{e,\ e'}$。由推论 A.6，我们可以略去此情形，因为它可由 (k)推出。（注意，情形 $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = e' \in J'$ 根据注 A.4成立。）

(i) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = \xi$。于是

$$\delta_3[v,w] = -\mu N(b)y$$
$$[\delta_3 v, w] = 2\mu N(b)y$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = -3\mu N(b)y$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = 0$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

(j) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = \zeta$。于是

$$\delta_3[v,w] = \mu N(b)y$$
$$[\delta_3 v, w] = \mu N(b)y$$
$$[\delta_2 v, \delta_1 w] = 0$$
$$[\delta_1 v, \delta_2 w] = 0$$
$$[v, \delta_3 w] = 0.$$

(k) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = c \in J$。然后

$$\delta_3[v,w] = T(c, a')N(b)y$$

$$
\begin{aligned}
[\delta_3 v, w] &= 0\\
[\delta_2 v, \delta_1 w] &= T(c,a')N(b)y - T(b,a')T(c,b^\sharp)y\\
[\delta_1 v, \delta_2 w] &= T(b,a')T(c,b^\sharp)y\\
[v, \delta_3 w] &= 0,
\end{aligned}
$$

其中，我们在计算 2.8(8) 时使用了引理 $[\delta_2 v, \delta_1 w]$。

情形 $\ell = 4$。注意到 $\delta_4 = 0$，因此我们必须证明

$$0 = [\delta_3 v, \delta_1 w] + [\delta_2 v, \delta_2 w] + [\delta_1 v, \delta_3 w] \tag{$*$}_4$$

对所有 v, $w \in L$。根据注 A.4，需要考虑的情形并不多。

(a) $v = x$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$,
(b) $v = (\lambda, a, a', \mu)_-$, $w = (\nu, c, c', \rho)_-$.

注意到，当 $v = x \in L_{-2,\,-1}$ 且 $w \in L_{0j}$ 时，注 A.4 总是适用，因为$L_{2,\,-1+j} = 0$ 除非 $j = 2$，但此时 $L_{0j} = L_{02} = 0$。

(a) $v = x$, $w = (\nu,\ c,\ c',\ \rho)_-$。于是

$$
\begin{aligned}
[\delta_3 v, \delta_1 w] &= \big(-N(b)T(b,c'),\ \rho N(b)b,\ 0,\ 0\big)_+\\
[\delta_2 v, \delta_2 w] &= \big(T(b,c')T(b,b^\sharp) - T(b^\sharp \times c, b^\sharp),\ -\rho b^\sharp \times b^\sharp,\ 0,\ 0\big)_+\\
[\delta_1 v, \delta_3 w] &= \big(0,\ \rho N(b)b,\ 0,\ 0\big)_+.
\end{aligned}
$$

由于 $b^\sharp \times b^\sharp = 2b^{\sharp\sharp} = 2N(b)b$ 且 $T(b,\ b^\sharp) = 3N(b)$，结论便得证。

(b) $v = (\lambda,\ a,\ a',\ \mu)_-$, $w = (\nu,\ c,\ c',\ \rho)_-$。当然，我们可以直接计算得出 $(*)_4$ 成立，但根据前面的同一论证并调用引理 A.5，这是没有必要的。

情形 $\ell \geq 5$。由于 $\delta_j = 0$ 对所有 $j \geq 4$都成立，恒等式 $(*)_\ell$ 在 $\ell \geq 7$时便显然成立。对于 $\ell = 5$ 和 $\ell = 6$，它们可简化为

$$0 = [\delta_3 v, \delta_2 w] + [\delta_2 v, \delta_3 w] \quad \text{and} \tag{$*$}_5$$

$$0 = [\delta_3 v, \delta_3 w], \tag{$*$}_6$$

分别成立。然而，根据备注A.4，当 $v \in L_i$ 且$w \in L_j$ 满足 $i + j > -3$时，它们显然成立。因此唯一剩下的情形是 $v = x$ 且 $w \in L_{-1}$，但由于 $L_{-1,\,2} = 0$，这仍可由同一备注 A.4处理。

由此证明了映射 $e^{(0,b,0,0)_+}$ 是李代数 L 的自同构。

A.2. 指数映射 $e^{\rho x}$。现在我们证明，定义 7.11 中的映射$e^{\rho x}$ 是李代数 L的自同构。这与映射 $e^{(0,b,0,0)_+}$的情形相同，但需要验证的情况要少得多。固定 $\rho \in k$，令 $\varphi := e^{\rho x}$，并分解 $\varphi = \sum_{\ell=0}^{2} \delta_\ell$。这里，$\delta_0 = \mathrm{id}$，$\delta_1 = \mathrm{ad}^{\rho x}$，而 δ_2 定义为：$\delta_2(y) = \rho^2 x$ 以及 $\delta_2(L_{ij}) = 0$，对所有 $(i,j) \neq (2,1)$ 均成立。此外，δ_1 在除以下情况外的所有 L_{ij} 上均为平凡映射：

$$\delta_1(\xi) = 2\rho x, \quad \delta_1(\zeta) = \rho x, \quad \delta_1\big((\lambda, b, b', \mu)_+\big) = -\rho(\lambda, b, b', \mu), \quad \delta_1(y) = \rho\xi.$$

注 A.7。与注 A.4类似，对于所有 i、j、ℓ，我们有 $\delta_\ell(L_{i,\,j}) = L_{i-2\ell,\,j-\ell}$。因此，对于满足 $L_{i+r-2\ell,\,j+s-\ell} = 0$ 的所有 $v \in L_{ij}$、$w \in L_{rs}$，$(*)_\ell$ 显然成立。

为了验证

$$\delta_2[v,w] = [\delta_2 v, w] + [\delta_1 v, \delta_1 w] + [v, \delta_2 w], \tag{$*$}_2$$

根据备注，A.7中只需考虑以下情况。

(a) $v \in L_0$，$w = y_\circ$ (b) $v = (0, 0, 0, \mu)_+$，$w = y_\circ$ (c) $v = (0, 0, a', 0)_+$，$w = (0, 0, b', 0)_+$。(d) $v = (\lambda, b, b', \mu)_+$，$w = y_\circ$ (e) $v = y$，$w = y_\circ$

在(d)的情况下，我们计算得

$$[\delta_1 v, \delta_1 w] = [-\rho(\lambda, b, b', \mu)_-, \rho\xi] = -\rho^2(\lambda, b, b', \mu)_-,$$
$$[v, \delta_2 w] = [(\lambda, b, b', \mu)_+, \rho^2 x] = \rho^2(\lambda, b, b', \mu)_-$$

并且 $\delta_2[v,w] = [\delta_2 v, w] = [v, \delta_2 w] = 0_\circ$ 在(e)的情况下，我们有 $\delta_2[v,w] = 0 = [\delta_1 v, \delta_1 w]$ 和 $[\delta_2 v, w] = -[v, \delta_2 w]$，因为 $v = w_\circ$ 在所有其余情况下，

$$\delta_2[v,w] = [\delta_2 v, w] = [\delta_1 v, \delta_1 w] = [v, \delta_2 w] = 0.$$

因此，满足 $(*)_2$。

现在我们转向 $(*)_3$。利用注记 A.7，我们可以省略除$v = y = w$之外的所有情形，而此情形可用与 $(*)_2$相同的论证轻易得出。关系式$(*)_\ell$ 对 $\ell \geq 4$ 也由注记 A.7 成立。由此可知，$e_{\rho x}$ 确实是 L的一个自同构。

Appendix B. Weyl elements in the G_2-grading

我们可以将第 A 节的结果概括如下。

引理 B.1。对于所有 $\lambda \in k$，都有 $e_{\lambda x} \in \mathrm{End}(L)$。

引理 B.2。对于所有 $b \in J$，都有 $e_{(0,b,0,0)_+} \in \mathrm{End}(L)$。

本附录旨在证明，定义 7.11 至 7.14 中定义的所有其余映射，都可以表示为 $e_{\lambda x}$ 或$e_{(0,b,0,0)_+}$ 与第 5节所定义的反射的适当乘积的共轭。特别地，我们由此得出，所有这些映射都与李括号相容，因此属于 $\mathrm{End}(L)$。完成这一步后，只需再进行少量计算，即可证明这些反射实际上是定义 1.5(iii)意义下的韦伊元。

引理 B.3. 对所有 $\lambda \in k$，我们有 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{\lambda y}$。特别地，$e_{\lambda y} \in \mathrm{End}(L)$。

证明. 设 $\lambda \in k_\circ$ 利用定义 5.8 和 7.11 以及注记 5.17 中的公式，我们可以计算出 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi_{\leftrightarrow}$ 在 $L_1 + L_2$ 上以及在 $\mathbf{d}_{c,c'}$上对所有 $c \in J$、$c' \in J'$ 作为恒等式作用，并且它在 k-模L的其余生成元上的作用如下：

$$x \mapsto x - \lambda\xi + \lambda^2 y, \qquad (\nu, c, c', \rho)_- \mapsto (\nu, c, c', \rho)_- + \lambda(\nu, c, c', \rho)_+,$$
$$\xi \mapsto \xi - 2\lambda y, \qquad \zeta \mapsto \zeta - \lambda y.$$

将我们的计算结果与 $e_{\lambda y}$ 的定义进行比较，我们得出$\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{\lambda y}$。由引理 B.1 和 5.15，可知 $e_{\lambda y} \in \mathrm{End}(L)_\circ$ □

引理 B.4。 对于所有 $\lambda \in k$，我们都有 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{\lambda y} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{\lambda x}$。

证明。 设 $\lambda \in k$。由引理 B.3 可知 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{\lambda y} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = \varphi_{\leftrightarrow}^{-2} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi_{\leftrightarrow}^{2}$。由于 $\varphi_{\leftrightarrow}^{2}$ 是分次 $(L_i)_{-2\le i\le 2}$ 的奇偶自同构，由观察 5.12，该断言由引理7.7得出。 □

引理 B.5。 对于所有 $a \in J$ 和 $a' \in J'$，我们有 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_a \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_a$ 和 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{a'} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{a'}$。

证明。 只需验证 $e_a \circ \varphi_{\leftrightarrow} = \varphi_{\leftrightarrow} \circ e_a$ 和 $e_{a'} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = \varphi_{\leftrightarrow} \circ e_{a'}$，这显而易见。主要论证基于这样一个观察： e_a 在 L_1 和 L_{-1} 上的作用公式相同，对于$e_{a'}$也同样如此。□

引理 B.6。我们有 $\varphi_{\leftrightarrow} = e_y \circ e_x \circ e_y = e_x \circ e_y \circ e_x$。

证明。如引理B.3中所述，我们可以计算得

$$e_y \circ e_x \circ e_y(x) = y, \qquad e_y \circ e_x \circ e_y\big((\nu, c, c', \rho)_+\big) = -(\nu, c, c', \rho)_-$$

对所有 ν， $\rho \in k$， $c \in J$ 和 $c' \in J'$。由于所有映射 $\varphi_{\leftrightarrow}$， e_x 和 e_y 都属于$\mathrm{End}(L)$，由注 7.19可知 $\varphi_{\leftrightarrow} = e_y \circ e_x \circ e_y$。这意味着

$$\varphi_{\leftrightarrow} = \varphi_{\leftrightarrow}^{\varphi_{\leftrightarrow}} = e_y^{\varphi_{\leftrightarrow}} \circ e_x^{\varphi_{\leftrightarrow}} \circ e_y^{\varphi_{\leftrightarrow}} = e_x \circ e_y \circ e_x$$

根据引理B.3和B.4。 □

引理 B.7。对所有 $\lambda \in k$，我们有 $\varphi^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi = e_{(-\lambda,0,0,0)_-}$。特别是，$e_{(\lambda,0,0,0)_-} \in \mathrm{End}(L)$。

证明。令 $\lambda \in k$。与引理B.3的证明类似，我们可以计算得$\varphi^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi$ 在 k-模 L 的生成元上的作用如下：

$$\begin{aligned}
&y \mapsto y + (\lambda, 0, 0, 0)_-, && x \mapsto x, && c' \mapsto c',\\
&(\nu, c, c', \rho)_- \mapsto (\nu, c, c', \rho)_- + \lambda\rho x, && && \xi \mapsto \xi + (-\lambda, 0, 0, 0)_-,\\
&\mathbf{d}_{c,c'} \mapsto \mathbf{d}_{c,c'} + \big(-T(c, c')\lambda, 0, 0, 0\big)_-, && && \zeta \mapsto \zeta + (-2\lambda, 0, 0, 0)_-,\\
&(\nu, c, c', \rho)_+ \mapsto (\nu, c, c', \rho)_+ + \lambda c' - \lambda\rho\zeta + (\lambda^2\rho, 0, 0, 0)_-, && && c \mapsto c + (0, \lambda c, 0, 0)_-
\end{aligned}$$

对所有 ν， $\rho \in k$， $c \in J$， $c' \in J'$。我们得出 $\varphi^{-1} \circ e_{\lambda x} \circ \varphi = e_{(-\lambda,0,0,0)_-}$。根据引理 B.1 和 5.15，可得 $e_{(\lambda,0,0,0)_-} \in \mathrm{End}(L)$。 □

引理 B.8。 对于所有 $\lambda \in k$，我们有 $\varphi^{-1} \circ e_{\lambda y} \circ \varphi = e_{(0,0,0,-\lambda)_+}$。特别地，$e_{(0,0,0,\lambda)_+} \in \mathrm{End}(L)$。

证明。 令 $\lambda \in k$。于是 $\varphi^{-1} \circ e_{\lambda y} \circ \varphi = e_{(0,0,0,-\lambda)_+}$ 作用于 L 如下：

$$\begin{aligned}
&x \mapsto x + (0, 0, 0, -\lambda)_-, && (\nu, c, c', \rho)_- \mapsto (\nu, c, c', \rho)_- + \lambda\nu\zeta + (0, 0, 0, \lambda^2\nu)_+ - \lambda c,\\
&c' \mapsto c' + (0, 0, -\lambda c', 0)_+, && (\nu, c, c', \rho)_+ \mapsto (\nu, c, c', \rho)_+ - \lambda\nu y,\\
&\xi \mapsto \xi + (0, 0, 0, \lambda)_+, && \mathbf{d}_{c,c'} \mapsto \mathbf{d}_{c,c'} + \big(0, 0, 0, T(c, c')\lambda\big)_+,\\
&\zeta \mapsto \zeta + (0, 0, 0, 2\lambda)_+, && c \mapsto c, \qquad y \mapsto y
\end{aligned}$$

对所有 ν， $\rho \in k$， $c \in J$， $c' \in J'$。我们得出 $\varphi^{-1} \circ e_{\lambda y} \circ \varphi = e_{(0,0,0,-\lambda)_+}$。由引理 B.3 和 5.15，可知 $e_{(0,0,0,\lambda)_+} \in \mathrm{End}(L)$。 □

引理 B.9。 (i) 设 $\lambda, \mu \in k$, $b \in J$, $b' \in J'$ 满足 λ, b, b', μ 中至多一个非零。则 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{(\lambda,b,b',\mu)_+} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{(\lambda,b,b',\mu)_-}$。(ii) 对于所有 $\lambda \in k$, $b \in J$ 和 $\varepsilon \in \{\pm\}$，有 $e_{(\lambda,0,0,0)_\varepsilon}, e_{(0,b,0,0)_\varepsilon}, e_{(0,0,0,\lambda)_\varepsilon} \in \mathrm{End}(L)$。

证明。 设 $\lambda, \mu \in k$, $b \in J$, $b' \in J'$ 使得 λ, b, b', μ 中至多有一个非零。那么，像之前一样进行计算可知 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{(\lambda,b,b',\mu)_+} \circ \varphi_{\leftrightarrow}$ 与 $e_{(\lambda,b,b',\mu)_-}$ 在 k-模 L 的一组通常生成元上的作用一致。最后的断言由引理B.1、B.2、 B.7和B.8推出。 □

引理 B.10。 设 $\lambda, \mu \in k$, $b \in J$, $b' \in J'$，使得 λ, b, b', μ 中至多有一个非零。那么 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{(\lambda,b,b',\mu)_-} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = e_{-(\lambda,b,b',\mu)+}$。

证明。 我们有 $\varphi_{\leftrightarrow}^{-1} \circ e_{(\lambda,b,b',\mu)_-} \circ \varphi_{\leftrightarrow} = \varphi_{\leftrightarrow}^{-2} \circ e_{(\lambda,b,b',\mu)_+} \circ \varphi_{\leftrightarrow}^{2}$ 由引理 B.9得出。因此，该断言由注记 5.13和引理 7.7推出。 □

以下引理 B.11 和 B.12 可由与前面相同类型的计算得出。

引理 B.11。 对所有 $a \in J$，我们有 $\varphi^{-1} \circ e_{(0,a,0,0)_+} \circ \varphi = e_{-a}$。特别地，$e_a \in \mathrm{End}(L)$。

引理 B.12。 对所有 $a' \in J'$，我们有 $\varphi^{-1} \circ e_{(0,0,a',0)_-} \circ \varphi = e_{-a'}$。

引理 B.13。 使用注记 *7.16*中的记号，我们有

$$(\psi^{(J',J)})^{-1} \circ e^{(J,J')}_{(0,a,0,0)_+} \circ \psi^{(J',J)} = e^{(J',J)}_{-a}$$

对所有 $a \in J$。特别地，$e^{(J,J')}{}_{a'} \in \mathrm{End}(L(J,J'))$ 对所有 $a' \in J'$。

证明。 第一个断言由与之前相同类型的计算得出。由引理 B.2 和 5.15 可知，对所有三次范数对 (J,J') 以及所有 $a \in J$，映射 $e^{(J',J)}{}_a$ 是 $L(J',J)$ 的自同态。将此观察应用于三次范数对 (J',J)，第二个断言随之得出。 □

本节到目前为止的结果可总结如下。

命题 B.14. (i) 设 $\lambda \in k$ 和

$$e \in \{e_{\lambda x}, e_{(\lambda,0,0,0)_\pm}, e_{(0,0,0,\lambda)_\pm}, e_{\lambda y}\}.$$

则存在 $n \in \{0,1,2,3\}$、$\epsilon \in \{\pm 1\}$ 和 $\varphi_1, \ldots\ldots, \varphi_n \in \{\varphi_{\leftrightarrow}, \varphi\}$，使得 $e = \varphi^{-1} \circ e_{\epsilon\lambda x} \circ \varphi$，其中 $\varphi := \varphi_1 \cdots \varphi_n$（若 $n = 0$，则应解释为 id_L）。特别地，$e \in \mathrm{End}(L)$。

(ii) 设 $a \in J$ 和 $e \in \{e_a, e_{(0,a,0,0)_\pm}\}$。则存在 $\varphi \in \{\varphi_{\leftrightarrow}, \varphi, \mathrm{id}_L\}$ 和 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，使得 $e = \varphi^{-1} \circ e_{(0,\epsilon a,0,0)_+} \circ \varphi$。特别地，$e \in \mathrm{End}(L)$。(iii) 设 $a' \in J'$ 和

$$e \in \{e^{(J,J')}_{a'}, e^{(J,J')}_{(0,0,a',0)_\pm}\}.$$

于是存在

$$\varphi^{(J',J)} \in \{\mathrm{id}_L, \varphi^{(J,J')} \circ \varphi^{(J,J')}_{\leftrightarrow}\}$$

以及 $\epsilon \in \{\pm 1\}$，使得

$$(\varphi^{(J,J')})^{-1} \circ e \circ \varphi^{(J,J')} = (\psi^{(J,J')})^{-1} \circ e^{(J',J)}_{(0,\epsilon a',0,0)} \circ \psi^{(J,J')}.$$

特别地，$e \in \mathrm{End}(L)$。

证明。第一个断言由引理B.1、B.3和B.7 至B.10得出。第二个断言由引理B.2、B.9 和B.11得出。最后，注意到

$$(\psi^{(J,J')})^{-1} \circ e^{(J',J)}_{(0,\epsilon a',0,0)} \circ \psi^{(J,J')} = e^{(J,J')}_{-\epsilon a'}$$

由引理B.13可知，左侧映射根据第二个断言属于$\mathrm{End}(L)$。因此，第三个断言由引理B.9和B.12得出。□

命题B.14得证后，由命题7.20可知，$\exp_\alpha \colon L_\alpha \to \mathrm{Aut}(L)\colon a \mapsto e_a$ 是 α-参数化，在 L中良定义，因此我们可以按照定义$(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$ 在$\mathrm{Aut}(L)$ 中定义根群，正如定义7.21所述。本附录余下部分将证明这些根群具有定义1.5(iii)意义下的 Weyl 元。事实上，已有一半工作完成。

命题 B.15. $\varphi_\leftrightarrow$ 是相对于$(U_\alpha)_{\alpha\in G_2}$的(2,1)-*Weyl*元。

证明. 这由引理 B.3、B.4、B.6、B.9 和 B.10可得。 □

根据注记 1.8，接下来只需找到一个 δ-Weyl元，使其对应于根 δ，并满足$\{(2,\ 1)\ \delta\}$ 是 G_2中的单根系。我们选择寻找一个 $(-1,\ -1)$-Weyl元。

约定 B.16. 从现在起，我们假设存在 $b \in J$，使得$N(b)$ 可逆。固定这样的一个 b，并令 $b' := N(b)^{-1} b^\sharp$。根据注记 2.17，对于 $t := N(b)$，数对 $(N(b)U_{b'}, N(b)^{-1}U_b)$ 因而是 (J, J') 的一个 t-对合，我们将其记为 $(\iota,)$。

我们旨在证明，定义 $\varphi := \varphi^{(\iota,\ ,t)} = \psi^{(J',J)} \circ L(\iota, , t)$ 5.18 中的反射是一个 $(-1, -1)$-Weyl 元。我们首先证明它具有所需的乘积分解。

引理 B.17. 我们有 $\varphi^{-1} = e_{(0,0,-b',0)_+} \circ e_{(0,b,0,0)_-} \circ e_{(0,0,-b',0)+}$。

证明。 我们计算 $g := e_{(0,0,-b',0)_+} \circ e_{(0,b,0,0)_-} \circ e_{(0,0,-b',0)+}$ 在生成集上的作用

$$\varphi_\leftrightarrow \circ \varphi \ \ (kx + L_1) = kx + (0, 0, J', 0)_- + J + (k, 0, 0, k)_+$$

于 L。由于这项计算依赖若干恒等式，我们将完整而详细地进行推导，其中每个箭头“$\mapsto$”表示依次应用 g 的下一个因子。我们将频繁用到：根据公理 2.3(iii)，$T(b, b^\sharp) = 3N(b) = 3t$；$(b')^\sharp = t^{-1}b$，以及 $N(b') = -t^{-1}$；此外，由于 $\times$ 是 $\sharp$ 的线性化，故 $b \times b = 2b^\sharp$。我们还将在许多情况下应用引理 2.8(7) 和 (8)，以及公理 2.3(v) 和 (vi)。

g的每个因子都逐点固定（k，0，0，0）$_+$。 g 在 x 上的作用由下式给出

$$x \mapsto x + (0, 0, -t^{-1}b^\sharp, 0)_- - t^{-1}b + (0, 0, 0, -t^{-1})_+$$

$$\begin{aligned}
&\mapsto x + (0,0,-t^{-1}b^\sharp,0)_- - t^{-1}T(b,b^\sharp)x - t^{-1}b + (0,0,t^{-1}b\times b,0)_-\\
&\qquad + t^{-1}T(b,b^\sharp)x + (0,0,0,-t^{-1})_+ + t^{-1}b + (0,0,-t^{-1}b^\sharp,0)_- - t^{-1}N(b)x\\
&= (0,0,0,-t^{-1})_+ \mapsto (0,0,0,-t^{-1})_+.
\end{aligned}$$

$c' \in J'$ 为任意元素时，g 在 $(0,\ 0,\ c',\ 0)_-$ 上的作用由下式给出

$$\begin{aligned}
(0,0,c',0)_- &\mapsto (0,0,c',0)_- + t^{-1}c'\times b^\sharp + \big(0,0,0,t^{-1}T(b,c')\big)_+\\
&\mapsto (0,0,c',0)_- + T(b,c')x + t^{-1}c'\times b^\sharp + \big(0,0,-t^{-1}(c'\times b^\sharp)\times b,0\big)_-\\
&\qquad - t^{-1}T(c'\times b^\sharp,b^\sharp)x + \big(0,0,0,t^{-1}T(b,c')\big)_+ - t^{-1}T(b,c')b\\
&\qquad + \big(0,0,t^{-1}T(b,c')b^\sharp,0\big)_- + T(b,c')x\\
&= t^{-1}c'\times b^\sharp - t^{-1}T(b,c')b + \big(0,0,0,t^{-1}T(b,c')\big)_+\\
&\mapsto t^{-1}c'\times b^\sharp + \big(0,0,0,t^{-2}T(c'\times b^\sharp,b^\sharp)\big)_+ - t^{-1}T(b,c')b\\
&\qquad + \big(0,0,0,-t^{-2}T(b,c')T(b,b^\sharp)\big)_+ + \big(0,0,0,t^{-1}T(b,c')\big)_+\\
&= -t^{-1}\big(T(b,c')b - c'\times b^\sharp\big) = -t^{-1}U_b c'
\end{aligned}$$

这里我们两次使用了 $T(c'\times b^\sharp,\ b^\sharp) = T(c',\ b^\sharp\times b^\sharp) = 2tT(c',\ b)$，以及

$$-t^{-1}(c'\times b^\sharp)\times b = -c' - t^{-1}T(b,c')b^\sharp$$

根据公理 2.3(vi)。对于任意 $c\in J$，g 在 c 上的作用由下式给出

$$\begin{aligned}
c &\mapsto c + \big(0,0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)\big)_+\\
&\mapsto c + (0,0,-c\times b,0)_- - T(c,b^\sharp)x + \big(0,0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)\big)_+ - t^{-1}T(c,b^\sharp)b\\
&\qquad + \big(0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)b^\sharp,0\big)_- + T(c,b^\sharp)x\\
&= \big(0,0,t^{-1}U_{b^\sharp}c,0\big)_- + c - t^{-1}T(c,b^\sharp)b + \big(0,0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)\big)_+\\
&\mapsto \big(0,0,t^{-1}U_{b^\sharp}c,0\big)_- + t^{-2}U_{b^\sharp}(c)\times b^\sharp + \big(0,0,0,t^{-2}T(b,U_{b^\sharp}c)\big)_+ + c\\
&\qquad + \big(0,0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)\big)_+ - t^{-1}T(c,b^\sharp)b + \big(0,0,0,-t^{-2}T(c,b^\sharp)T(b,b^\sharp)\big)_+\\
&\qquad + \big(0,0,0,t^{-1}T(c,b^\sharp)\big)_+\\
&= (0,0,t^{-1}U_{b^\sharp}c,0)_-.
\end{aligned}$$

这里我们使用了 $U_{b^\sharp}(c)\times b^\sharp = T(b^\sharp,c)b^{\sharp\sharp} - N(b^\sharp)c = tT(b^\sharp,c)b - t^2c$，这是由引理 2.19 中的 ((iii)) 得出的；还使用了 $T(b,U_{b^\sharp}c) = tT(b^\sharp,c)$，这是由引理 2.19 中的 ((ii)) 得出的（将 $b^\sharp$, c 代替 b, c' 应用，并利用 $t = N(b)$ 是可逆的）。最后，g 在 $(0,0,0,1)_+$ 上的作用由下式给出

$$\begin{aligned}
(0,0,0,1)_+ &\mapsto (0,0,0,1)_+ \mapsto (0,0,0,1)_+ - b + (0,0,b^\sharp,0)_- + tx\\
&\mapsto (0,0,0,1)_+ - b + \big(0,0,0,-t^{-1}T(b,b^\sharp)\big)_+ + (0,0,b^\sharp,0)_- + t^{-1}b^\sharp\times b^\sharp\\
&\qquad + \big(0,0,0,t^{-1}T(b,b^\sharp)\big)_+ + tx + (0,0,-b^\sharp,0)_- - b + (0,0,0,-1)_+\\
&= tx.
\end{aligned}$$

由注记 5.19，我们得出 $\varphi^{-1} = e_{(0,0,-b',0)_+}\circ e_{(0,b,0,0)_-}\circ e_{(0,0,-b',0)_+}$。 □

还需证明，由 φ 共轭所诱导的排列是根群所需的排列。我们先在短根群上验证这一点。

引理 B.18. 对于所有 $a \in J$ 和 $\varphi^{-1}\circ e_{a'}\circ\varphi = e_{(0,(a'),\,0,\,0)+}$，我们有 $\varphi^{-1}\circ e_{(0,a,0,0)_+}\circ\varphi = e_{-a^\iota}$ $a' \in J'$。

证明。由引理 B.13 可知

$$\varphi^{-1}\circ e_{(0,a,0,0)_+}\circ\varphi = L(\iota,\ ,t)^{-1}\circ e^{(J',J)}_{-a}\circ L(\iota,\ ,t).$$

右侧的映射固定 x，并将$(\nu,c,c',\rho)_+$映射为

$$\big(\nu + T(c^\iota,a) + tT(a^\sharp,(c')\ ) + t\rho N(a),\, c + a^\iota\times c' + t\rho(a^\sharp)\ ,\, c' + \rho a^\iota,\, \rho\big)$$

这里，由于$(\iota,\ )$是一个 t-对合，

$$T(c^\iota,a) = T(c,a^\iota),\qquad tT\big(a^\sharp,(c')\ \big) = T\big((a^\iota)^\sharp,c'\big),$$
$$t\rho N(a) = \rho N(a^\iota),\qquad t\rho(a^\sharp)\ = \rho(a^\iota)^\sharp.$$

第一个断言得证。这意味着

$$\varphi^{-1}\circ e_{a'}\circ\varphi = \varphi^{-2}\circ e_{(0,-(a')\ ,0,0)_+}\circ\varphi^2$$

对所有 $a' \in J'$，因此第二个断言由注 5.19和引理7.7得证。□

引理 B.19. 对于所有 $a' \in J$，我们有 $\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,a',0)_+}\circ\varphi = e_{(0,-t(a')\ ,\ 0,\ 0)_-}$；对于所有 $a \in J$，还有$\varphi^{-1}\circ e_{(0,a,0,0)_-}\circ\varphi = e_{(0,0,-t^{-1}a^\iota,0)+}$。

证明。设 $a' \in J_\circ$。我们计算 $\varphi^{-1}\circ e_{(0,0.a',0)_-}\circ\varphi$ 对生成集的作用

$$\varphi_\updownarrow(kx + L_1) = (k,0,0,k)_- + J' + (0,J,0,0)_+ + ky$$

$L_\circ$ 模 $(0,\ 0,\ 0,\ k)_-$ 被逐点固定，而对其余生成元的作用如下，其中每个生成元对应的最后一个等式成立，是因为 $(\iota,\ )$ 是一个 t-同伦：

$$(1,0,0,0)_- \mapsto (1,0,0,0)_-,$$
$$c' \mapsto c' + \big(-T((c')\ ,a')t,0,0,0\big)_- = c' + \big(T((-ta')\ ,c'),0,0,0\big)_-,$$
$$(0,c,0,0)_+ \mapsto (0,c,0,0)_+ - (c^\iota\times a')^\iota + \big(tT((a')^\sharp,c^\iota),0,0,0\big)_-$$
$$\text{where}\quad tT\big((a')^\sharp,c^\iota\big) = T\big(((-ta')\ )^\sharp,c\big),$$
$$y \mapsto y + \big(0,t(a')\ ,0,0\big)_+ - t\big((a')^\sharp\big)^\iota + \big(t^2N(a'),0,0,0\big)_-$$
$$\text{where}\quad -t\big((a')^\sharp\big)^\iota = -\big((-ta')\ \big)^\sharp,\quad t^2N(a') = -N\big((-ta')\ \big).$$

其中 $c \in J$ 且 $c' \in J'$。第一个断言得证。由此可知

$$\varphi^{-1}\circ e_{(0,a,0,0)_-}\circ\varphi = \varphi^{-2}\circ e_{(0,0,-t^{-1}a^\iota,0)_+}\circ\varphi^2$$

对所有 $a \in J$，因此第二个断言由注记 5.19 和引理 7.7得出。□

引理 B.20。 我们有 $\varphi^{-1}\circ e_a\circ\varphi = e_{(0,0,a^\iota,0)_-}$ 对所有 $a \in J$ 和 $\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,a',0)_-}\circ\varphi = e_{-(a')}$ 对所有 $a' \in J'$。

证明。令 $a \in J_\circ$。我们计算 $\varphi^{-1}\circ e_a\circ\varphi$ 对生成集的作用

$$\varphi\ \ (kx + L_1) = (k,0,0,k)_- + kx + (0,J,0,0)_- + J'$$

L。模 $(0,\ 0,\ 0,\ k)_+$ 按点固定。其在剩余部分上的作用为

$$\begin{aligned}&\rho x+(0,c,0,0)_-+c'+(\nu,0,0,0)_+\\&\quad\mapsto(\nu,0,0,0)_+ +\left(c'-\nu a^\iota\right)+\left(0,c+t(a\times(c')\ )^\iota-t\nu(a^\sharp)\ ,0,0\right)_-\\&\qquad+\left(\rho-T(a,c^\iota)-tT\left((c')\ ,a^\sharp\right)+t\nu N(a)\right)\end{aligned}$$

对所有 $\rho,\ \nu\in k$、 $c\in J$ 和 $c'\in J'$。此处，由于（$\iota,\ $）是一个 t-同伦，

$$t\left(a\times(c')\ \right)^\iota=a^\iota\times c',\qquad -t\nu(a^\sharp)\ =-\nu(a^\iota)^\sharp,$$

$$-T(a,c^\iota)=-T(a^\iota,c),\quad -tT\left((c')\ ,a^\sharp\right)=-T\left((a^\iota)^\sharp,c'\right),\quad t\nu N(a)=\nu N(a^\iota).$$

第一个断言随之成立。因此

$$\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,a',0)}\circ\varphi\ =\varphi^{-2}\circ e_{(a')}\ \circ\varphi^2\ =e_{-(a')}$$

对所有 $a'\in J'$，由注记 5.19 和引理 7.7。 □

在长根群上，所需的计算要短得多。

引理 B.21. 对所有 ν、 $\rho\in k$，我们有

$$\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,0,\rho)_-}\circ\varphi\ =e_{(0,0,0,\rho)_-}\quad and\quad \varphi^{-1}\circ e_{(\nu,0,0,0)_+}\circ\varphi\ =e_{(\nu,0,0,0)_+}.$$

证明。 这由引理 B.17 和 7.6 得出，因为根 $(-1,1)$ 和 $(1,-1)$与 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$相邻。 □

引理 B.22. 对于所有 $\lambda\in k$，我们有 $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda x}\circ\varphi\ =e_{(0,0,0,-t^{-1}\lambda)_+}$ 和 $\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,0,\lambda)_+}\circ\varphi\ =e_{t\lambda x}$。

证明。 设 $\lambda\in k$。由于 $e_{\lambda x}$ 是 L_{-1}上的恒等式， $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda x}\circ\varphi$ 是 $\varphi^{-1}(L_{-1})$上的恒等式。此外， $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda x}\circ\varphi$ 在 $(k,0,0,0)_-=\varphi^{-1}(ky)$上的作用为

$$(1,0,0,0)_-\mapsto(1,0,0,0)_-+t^{-1}\lambda\zeta+(0,0,0,t^{-2}\lambda^2)_+.$$

由于 $\varphi^{-1}(ky+L_{-1})$ 生成 L，第一个断言即得。因此

$$\varphi^{-1}\circ e_{(0,0,0,\lambda)_+}\circ\varphi\ =\varphi^{-2}\circ e_{-t\lambda x}\circ\varphi^2\ =e_{t\lambda x}.$$

根据注记5.19 和引理 7.7。 □

引理 B.23. 对所有 $\lambda\in k$，我们有 $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda y}\circ\varphi\ =e_{(-t\lambda,0,0,0)_-}$ 和 $\varphi^{-1}\circ e_{(\lambda,0,0,0)_-}\circ\varphi\ =e_{t^{-1}\lambda y}$。

证明。 设 $\lambda\in k$。由于 $e_{\lambda y}$ 是 L_1上的恒等映射， $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda y}\circ\varphi$ 是 $\varphi^{-1}(L_1)$上的恒等映射。此外， $\varphi^{-1}\circ e_{\lambda y}\circ\varphi$ 在 $(0,0,0,k)\ =\varphi^{-1}(kx)$ 上的作用为

$$(0,0,0,1)_+\mapsto(0,0,0,1)-t\lambda\zeta+(t^2\lambda^2,0,0,0)_-.$$

由于 $\varphi^{-1}(ky+L_{-1})$ 生成 L，第一个断言得证。因此

$$\varphi^{-1}\circ e_{(\lambda,0,0,0)_-}\circ\varphi\ =\varphi^{-2}\circ e_{-t^{-1}\lambda y}\circ\varphi^2\ =e_{t^{-1}\lambda y}$$

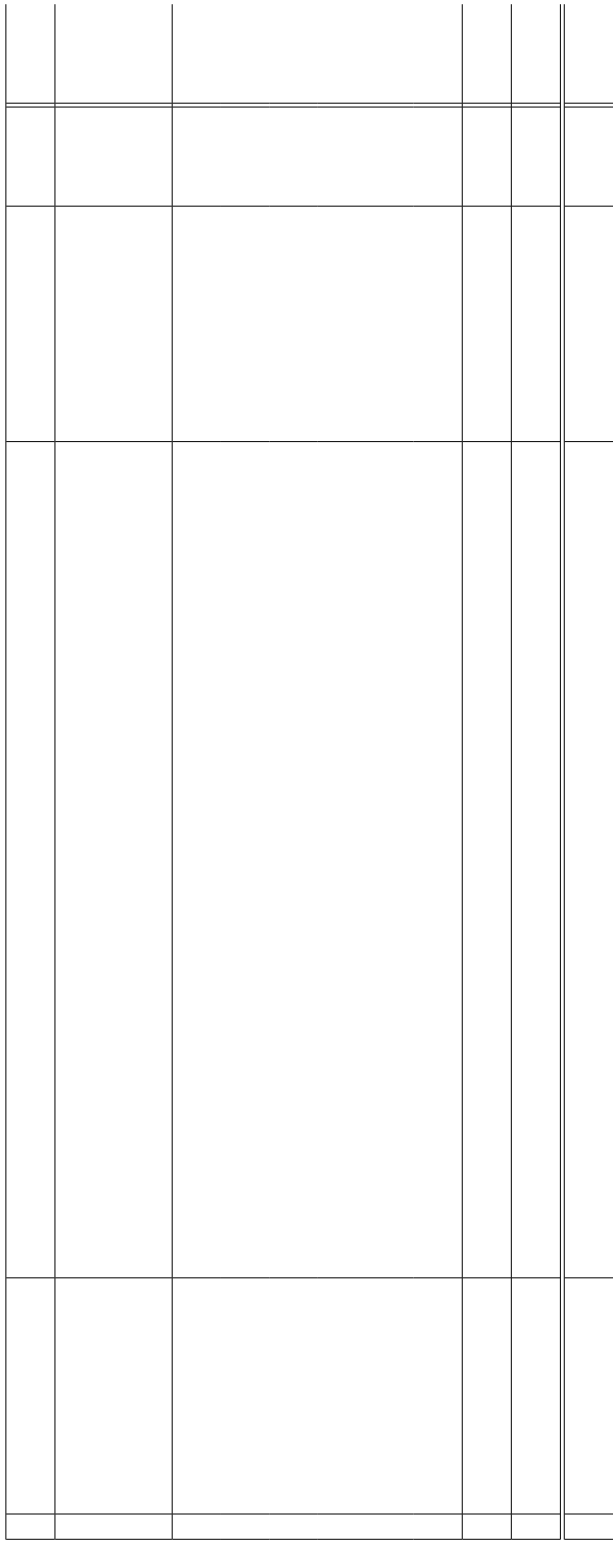
根据备注5.19 和引理 7.7。 □

命题 B.24。 假设存在 $b \in J$ 使得 $N(b)$ 可逆，并定义 $(\iota, , t)$ 如约定 *B.16*。那么 $\varphi^{(\iota, , t)}$ 是相对于 $(U_\alpha)_{\alpha \in G_2}$ 的一个 $(-1, -1)$-*Weyl*元。

证明。 这由引理B.17 至B.23得出。 □

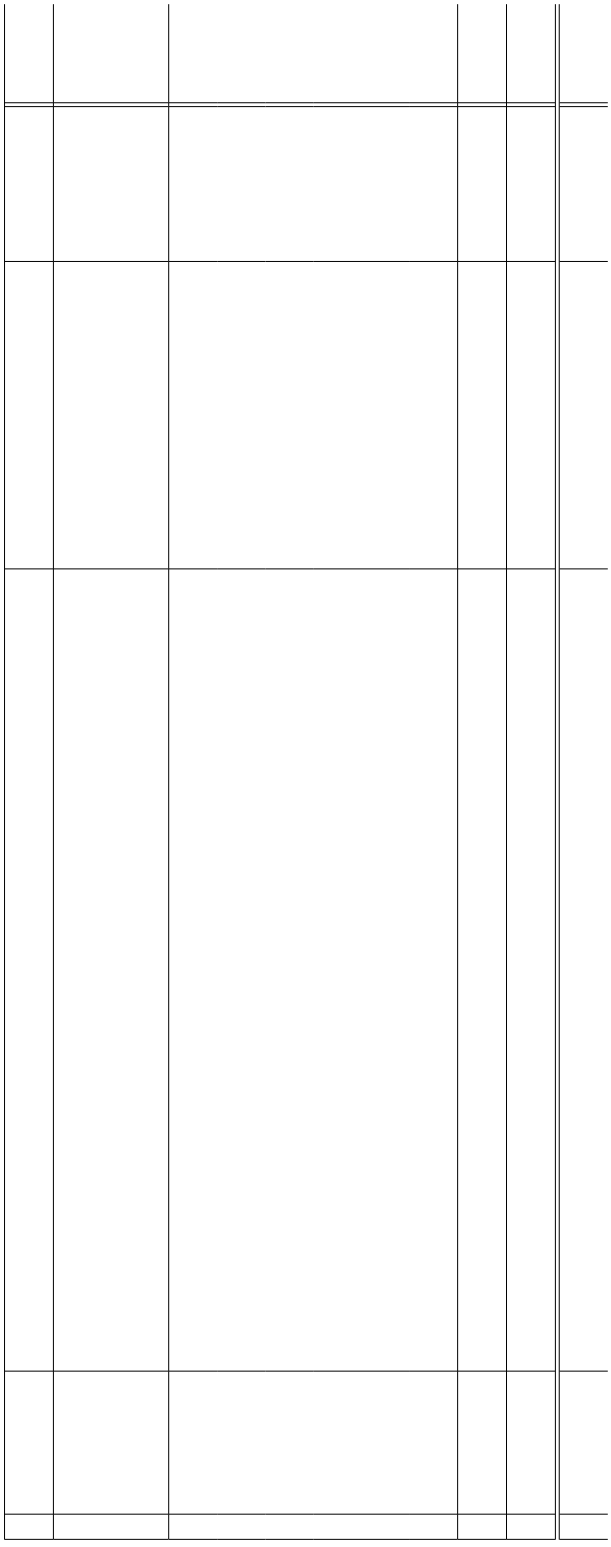
命题 B.25。 假设存在 $p \in J$，使得 $N(p)$ 可逆。那么对于所有 $\alpha \in G_2$，存在一个关于 $(U_\alpha)_{\alpha \in G_2}$ 的 α-*Weyl*元。

证明。 根据命题 B.15 和 B.24，对于系统$\{(2, 1), (-1, -1)\}$中的单根 G_2存在Weyl元。断言现在由注释 1.8得出。□



$\varphi_{\leftrightarrow}$	x	$(\nu,c,c',\rho)_-$	c'	$\mathbf{d}_{e\ e'}$	ξ	ζ	c	$(\nu,c,c',\rho)_+$	y
x	0								
$(\lambda,b,b',\mu)_-$	0	$\big(T(b,c')-T(c,b')+\mu\nu-\lambda\rho,0,0,0\big)_-$							
b'	0	$T(c,b')x+\big(0,\ -b'\times c',\ 0,\ 0\big)_- -\rho b'$	0						
$\mathbf{d}_{a\ a'}$	0	$\nu T(a,a')x$ $+\big(0,\ D_{a\ a'}(c)-T(a,a')c,\ 0,\ 0\big)_-$ $-D_{a',a}(c')+T(a,a')c'$ $+\big(-\rho T(a,a'),\ 0,\ 0,\ 0\big)_+$	$\big(0,\ 0,\ D_{a',a}(c'),\ 0\big)_-$	$\mathbf{d}_{D_{a\ a'}(e),e'}$ $-\mathbf{d}_{e,D_{a',a}(e')}$					
ξ	$(-2,0,0,0)_-$	$\nu x-(0,c,0,0)_- -c'+(\rho,0,0,0)_+$	0	0	0				
ζ	$(-1,0,0,0)_-$	$2\nu x-(0,c,0,0)_- -(\rho,0,0,0)_+$	$(0,0,c',0)_-$	0	0	0			
b	0	$(0,\nu b,0,0)_- +b\times c-\big(T(b,c'),0,0,0\big)_+$	$-\mathbf{d}_{b,c'}+T(b,c')(\zeta-\xi)$	$\big(0,-D_{e\ e'}(b),0,0\big)_+$	0	$(0,b,0,0)_+$	0		
$(\lambda,b,b',\mu)_+$	$-\lambda x+(0,b,0,0)_-$ $+b'-(\mu,0,0,0)_+$	$\big(0,0,-\lambda c'+b\times c-\nu b',0\big)_-$ $+(T(c,b')-\mu\nu)\cdot\xi$ $+(\lambda\rho+T(c,b'))\cdot(\zeta-\xi)$ $-\mathbf{d}_{b,c'}-\mathbf{d}_{c,b'}$ $+\big(0,-\rho b+b'\times c'-\mu c,0,0\big)_+$	$\big(0,0,0,-T(b,c')\big)_-$ $+c'\times b'$ $+(0,0,\mu c',0)_+$	$\big(0,0,0,-\lambda T(e,e')\big)_-$ $-D_{e\ e'}(b)+T(e,e')b$ $+\big(0,0,D_{e',e}(b')-T(e,e')b',0\big)_+$ $+\mu T(e,e')y$	$(0,0,0,\lambda)_-$ $-b$ $+(0,0,-b',0)_+$ $+\mu y$	$(0,0,0,-\lambda)_-$ $+(0,0,-b',0)_+$ $+2\mu y$	$(0,0,-c\times b,0)_+$ $-\lambda c$ $-T(c,b')y$	$\big(0,0,0,$ $T(b,c')-T(c,b')$ $+\mu\nu-\lambda\rho\big)_+$	
y	$-\zeta$	$-(0,0,0,\nu)_- +c+(0,0,c',0)_+ -\rho y$	0	0	$(0,0,0,-2)_+$	$(0,0,0,-1)_+$	0	0	0

TABLE 5. Computation in Lemma 5.15: The entry at row a and column b shows $\varphi\ \ ([a,b])=[\varphi\ \ (a),\varphi\ \ (b)]$



参考文献

[ABG00] Bruce Allison、Georgia Benkart 和 Yun Gao。《有限根系分次李代数的中心扩张》。《数学年刊》，316(3)：499–527，2000年。[ABG02] Bruce Allison、Georgia Benkart 和 Yun Gao。《按根系 BC_r、 $r \geq 2$分次的李代数》。《美国数学会回忆录》，158(751)：x+158，2002年。[BDMS19] Lien Boelaert、Tom De Medts 和 Anastasia Stavrova。《Moufang集与结构化除代数》。《美国数学会回忆录》，259(1245)：v+90，2019年。[BM92] S. Berman 和 R. V. Moody。《有限根系分次李代数与 Slodowy 的交矩阵代数》。《数学发明》，108(2)：323–347，1992年。[Bou81] Nicolas Bourbaki。《李群与李代数》。施普林格出版社，柏林、海德堡，1981年。[BS03] Georgia Benkart 和 Oleg Smirnov。《按根系 BC_1分次的李代数》。《李理论杂志》，13(1)：91–132，2003年。[BW25] Lennart Berg 和 Torben Wiedemann。《 H_3 型和 H_4型根分次群》。《代数杂志》，682：481–544，2025年。[BZ96] Georgia Benkart 和 Efim Zelmanov。《有限根系分次李代数与交矩阵代数》。《数学发明》，126(1)：1–45，1996年。[Car72] Roger W. Carter。《李型单群》，纯粹与应用数学第28卷。John Wiley & Sons，伦敦-纽约-悉尼，1972年。[DEF+25] Wolfram Decker、Christian Eder、Claus Fieker、Max Horn 和 Michael Joswig 编。《计算机代数系统 OSCAR：算法与示例》，数学与计算第32卷。施普林格出版社，第1版，2025年。[DMM25] Tom De Medts 和 Jeroen Meulewaeter。《 5×5-分次李代数、三次范数结构与四角代数》。《Forum Math. Sigma》，13：论文编号 e88，63页，2025年。[Fau71] John R. Faulkner。《从一类三元代数构造李代数》。《美国数学会汇刊》，155：397–408，1971年。[Fau89] John R. Faulkner。《Barbilian平面》。《几何专论》，30(2)：125–181，1989年。[Fau00] John R. Faulkner。《Jordan 对与Hopf代数》。《代数杂志》，232(1)：152–196，2000年。[Fau01] John R. Faulkner。《广义四边形与三次型》。《通讯代数》，29(10)：4641–4653，2001年。[GAP25] GAP Group。《GAP——群、算法与编程》，4 1版，2025年 15。.[GPR24] Skip Garibaldi、Holger P. Petersson 和 Michel L. Racine。《交换环上的Albert代数——Jordan系统的最后前沿》，新数学专著第48卷。剑桥大学出版社，剑桥，2024年。[Hum72] James E. Humphreys。《李代数与表示论导论》，数学研究生教材第9卷。施普林格出版社，纽约-柏林，1972年。[LN19] Ottmar Loos 和 Erhard Neher。《Jordan 对的Steinberg群》，数学进展第332卷。Birkhäuser/Springer，纽约， [2019] ©2019。[MPW15] Bernhard Mühlherr、Holger P. Petersson 和 Richard M. Weiss。《建筑中的下降》，数学年刊研究丛书第190卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2015年。[Neh94] Erhard Neher。《3-分次李代数与Jordan 对》。载于《非结合代数及其应用》（奥维耶多，1993），数学应用第303卷，第296–299页。Kluwer学术出版社，多德雷赫特，1994年。[Neh96] Erhard Neher。《按三分次根系分次且由网格覆盖的李代数与Jordan 对》。《美国数学杂志》，118(2)：439–491，1996年。[OSC25] OSCAR——开源计算机代数研究系统，1.6.0版，2025年。[Shi93] Zhiyong Shi。《按有限根系分次的群》。《东北数学杂志》(2 108, 1993 45 1 89), ( ): – .[Sme25] 米歇尔·斯梅特。《厄米三次范数结构与相对秩一群》，2025年。[Ste16] Robert Steinberg。《Chevalley群讲义》，大学讲座系列第66卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，2016年。John Faulkner 和 Robert Wilson 整理的讲义，Robert R. Snapp 作序。[Tit66] J. Tits。《代数半单群的分类》。载于《代数群与离散子群》（1965年博尔德纯粹数学专题讨论会论文集），第33–62页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1966年。

[Tit74] 雅克·蒂茨。《球型建筑与有限 BN-对》，数学讲义第386卷。施普林格出版社，柏林-纽约，1974年。[Tit92] 雅克·蒂茨。《李生建筑与 Kac-Moody 型群》。载于《群、组合学与几何》（达勒姆，1990），伦敦数学会讲义丛书第165卷，第249–286页。剑桥大学出版社，剑桥，1992年。[TW02] Jacques Tits 和 Richard M. Weiss。《Moufang 多边形》。数学专著丛书。施普林格出版社，柏林，2002年。[Wie24] Torben Wiedemann。《根分次群》。吉森尤斯图斯-李比希大学，2024年。博士论文，doi.org/10.22029/jlupub-18373。[Wie25] Torben Wiedemann。《CubicJordanMatrixAlg》，2025年。GAP软件包，版本1.0.0，https: //github.com/TWiedemann/CubicJordanMatrixAlg。[Zha14a] 张泽洲。《群、非结合代数与性质 (T)》。博士论文，圣迭戈，2014年。[Zha14b] 张泽洲。《非结合代数与具有性质 (T) 的群》。《国际代数与计算杂志》，24(3)：347–364，2014年。