数学建模与数值分析
数学建模与数值分析

将由出版商填写

arXiv:2602.06152v1 [math.NA] 5 Feb 2026

时间调制介质中传播波的调制傅里叶展开

J ¨ORG NICK[1]

摘要。通过主动改变介质的材料参数来控制波，可以开发新型声学和电气器件。调制材料会破坏互易性和能量守恒等经典性质，从而增加数学分析的难度。若没有极限振幅原理，通常无法使用时谐形式。本文针对时间调制声波方程提出了一种基于调制傅里叶展开（MFE）的替代工具。该解由多个平滑变化的系数函数刻画，这些系数函数满足一个具有时间常系数的演化偏微分方程耦合系统。研究表明，对于小振幅快速时间调制，该演化偏微分方程系统存在一个平滑变化的解，它能够以较小的缺陷刻画精确解。

对所推导的耦合系统进行离散化后，得到的积分器在采用较大时间步时，仍比直接应用于时间调制声波方程的数值格式更加稳定、准确。数值实验验证了理论结果，并展示了该方法的应用。

2020年数学主题分类。35L52, 35B27,65M12, 65M15.

日期将由出版商填写。

1. 引言

材料设计中新增的一个自由度——物理参数随时间变化——带来了新型超材料的探索。时变材料使得构造无源介质无法实现的器件成为可能，因为波在时间调制介质中传播时，不受互易性和能量守恒的约束。这些特性对于开发非互易器件（如隔离器或环行器）至关重要 [32], , 也可用于实现信号放大 [3]。其他应用还包括频率转换 [36] ，因为材料的调制会使入射波和散射波中的各种单色分量相互耦合，从而实现以新方式操控在时间调制介质中传播的波的频谱的光学和声学器件。因此，近年来这类新型材料受到了广泛关注 [37]。

穿过时变介质的声波由具有时变系数的声波方程建模，其一般形式为

$$\partial_t^2 u(x,t) - \nabla \cdot \mu(x,t/\varepsilon)\nabla u(x,t) = f(x,t), \quad \text{in} \quad \Omega \times [0,T]. \tag{1}$$

关键词和短语：时变超材料，调制傅里叶展开，拉普拉斯域技术，时间步进[1] 瑞士日内瓦大学数学系。

© EDP Sciences，SMAI 2026

该问题的表述还包括齐次狄利克雷边界条件，终止时间记为T，并假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是维数为$d \in \{1,2,3\}$的有界利普希茨区域。最后，假设解u初始为零，并由光滑源项f激发，该源项初始时也为零。假设调制 μ 是 2π 周期性的，其形式为

$$\mu(x,t/\varepsilon) = \mu_0(x) + \rho\mu_{\text{per}}(x,t/\varepsilon),$$

其中 ρ 是一个振幅，且假定其值较小，因为据作者所知，演化问题（1）的稳定性界仅在某个常数倍 $e^{C\rho t/\varepsilon}$ 的范围内才已知是稳定的，其中 $C > 0$。

1.1. 相关工作

具有可变波速且存在有界振荡 的波动方程早已得到研究，相关重要成果见例如 [11], [30], [33] 和 [23]。耗散波动方程中的快速振荡已在 [31] 中研究，最近又见于 [17]。针对振荡调制的数学分析（例如涵盖 ε的小值情形）在文献中则少得多。均匀化技术（如 [13, 34],中的研究）在计算中显示出良好前景，但目前仅有有限的严格理论支持（见 [13]）。此外，要观察到非互易性等有趣现象，必须采用高阶均匀化 [1]。在 [12], 中，推导了时变材料的均匀化方程。据作者所知，文献中的严格数学误差估计要么附带极为严格的非共振条件，要么完全缺失 [13]。在 [14], 中，对周期性和随机时间调制对波的影响进行了量化和比较。针对具有高度振荡系数的演化问题，寻求稳定积分器的其他途径还包括双尺度形式 [8]。专著 [35]汇集了多种方法。

时间调制声波方程的问题可以通过不同方式进行表述。研究波在（时间调制）超材料中传播时的长时间行为，自然引出了对时间准周期边界条件的研究。这一思路对应于基于弗洛凯–布洛赫理论的方法，可以理解为研究前向算子的频谱；该算子使解经过一个完整周期的传播（即 $u(\cdot,t) \to u(\cdot,t+\varepsilon 2\pi)$）。弗洛凯–布洛赫理论已广泛用于分析具有周期系数的常微分方程和椭圆型偏微分方程（例如参见 [25]），并进一步用于研究具有时间周期哈密顿量的薛定谔方程[29]。这些研究成果大多无法推广至时间调制声波方程。目前尚不清楚，能否为时间调制声学介质建立这类方法的核心构件，例如常微分方程弗洛凯定理的对应理论（见 [25]），或极限振幅原理。对系统进行空间离散化后，常微分方程的弗洛凯定理确实成立，但通过一系列逐步细化的离散系统来逼近空间连续系统并据此得出结论，颇具挑战性 [28]。克服这些困难的一种直观方法，是在问题表述中忽略（或滤除）高频时间振荡，并聚焦于一定范围内的频率；这种方法也称为谐波平衡或耦合谐波。该方法难以直接与时间调制声波方程对应的一般初值问题联系起来，但研究表明，它是深入了解时间调制材料性质的有效工具，例如参见 [2, 21]。近期的手稿 [22] 量化了波在高反差时间依赖介质中传播时的能量变化。

将调制声波方程作为初值问题来研究时，必须模拟相对较长的时间，并解析许多 μ 的振荡，才能对演化问题的长时间行为得出结论（1），即使调制的振幅很小也是如此。本文试图调和这些不同的方法，通过推导初值问题解的调制傅里叶展开，用少数几个缓变函数刻画该解。因此，本文采用的方法与此前对调制傅里叶展开的推导密切相关；这些展开已在 [24] 中得到应用，并在例如 [27] 和 [18]中进一步发展。其现代名称和记号由

在 [19]中提出。调制傅里叶展开作如下设定：

$$u(x,t) = \sum_{k=-K}^{K} z_k^K(x,t)e^{ikt/\varepsilon} + R_K(x,t), \tag{2}$$

其中，系数函数 z_k^K对于 $-K \leq k \leq K$ 是缓变的，即其时间导数有界，且界与 ε 无关，而余项 R_K 较小。已有研究表明，这些展开是许多演化问题及其离散化的有效工具。与本文主题最相关的是，它们在振荡常微分方程 [9], 、形式上属于 [10] 的非线性波动方程，以及波速缓变的半线性波动方程 [15]中的应用。 [16]中简要概述了调制傅里叶展开及其应用。 [15] 对波速缓变的波动方程所作的研究与本文最为接近；然而，其方法关键依赖于调制缓变这一事实，因此无法推广到本文所讨论的情形。 [15] 中的处理与本文的核心区别，在于系数函数 z^K 的构造方式。 [15] 中的缓变时间调制系统依赖于一个由一组时间谐波问题补充的单一动力系统，而本文则将系数 z^K 导出为一个耦合演化问题系统的解。

1.2. 本文的贡献

本文推导并分析了一个线性时不变系统，其缓慢变化的解 z^K能够刻画时间调制声波方程的精确解，且误差至多为一个小的余项。只要满足 $\rho t < \varepsilon$，其系数的时间导数便有界，且该界与振荡周期 ε 无关；其中 t 表示关注的时刻。在右端项具有充分正则性的条件下，证明余项会随着关于 ε 和 ρ显式的因子幂次增大而迅速衰减。对这些耦合系统应用时间步进格式，可得到系数 z^K （进而得到时间调制声波方程的解 u ）的近似；这些近似不受关于 ε 的步长限制，并且当振幅足够小时，对于与调制周期 ε无关的步长 τ，该方法保持稳定。

我们注意到，采用常系数耦合系统近似时间调制演化问题还具有其他计算优势：最重要的是，空间算子只需组装一次，整个模拟过程中也只需计算一次有效的预条件子。其他特别适用于（或仅适用于）系数随时间保持常数的线性演化问题的计算技术包括指数积分器和时间并行技术。

1.3. 提纲

下一节将完整阐述问题的表述，介绍调制傅里叶展开方法，并概述各篇论文的主要结果。我们推导出调制傅里叶展开中系数函数 z^K 所满足的耦合时不变动力系统。第 3 节通过推导这些系数函数的拉普拉斯变换的界，分析这一线性时不变耦合系统。在随后的第 4 节中，我们阐述并证明这些拉普拉斯域界对时变系数函数的影响。第5 节展示其对时间调制声波方程的一些影响，以及调制傅里叶展开的系数函数的一种守恒性质。最后，第 6–7 节对耦合动力系统进行离散化，给出时间收敛误差界（基于第 3 节的拉普拉斯域界），并通过数值实验展示结果。

2. 问题表述、主要结果及推导

2.1. 问题表述

我们考虑系统中具有时间调制的如下声波方程：

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \nabla \cdot \mu(x,t/\varepsilon)\nabla u(x,t) = f(x,t), \quad \text{in} \quad \Omega \times [0,T], \\ u(x,t) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma \times [0,T], \end{aligned} \tag{3}$$

并通过零初始条件补全，即 $u(\cdot,0) = \partial_t u(\cdot,0) = f(\cdot,0) = 0$。这一设定自然地描述了静止的介质随后受到某个外部源f激励的情形，该外部源在时间和空间上均具有正则性，并且初始时为零。此框架便于处理，也使表述更加简洁。研究非零初始条件或非光滑数据f的影响是一个有趣的未来研究方向，但超出了本文的范围。

2.2. 主要结果

我们考虑小振幅调制 μ 的两种变体。作为第一个模型问题，我们研究最简单的调制情形

$$\mu(t/\varepsilon) = 1 + 2\rho\cos(t/\varepsilon) = 1 + \rho(e^{it/\varepsilon} + e^{-it/\varepsilon}), \quad \text{where} \quad \rho, \varepsilon \ll 1. \tag{4}$$

关键在于 ε 和 ρ 对解 u 的依赖关系。将调制傅里叶展开代入调制声波方程，并比较指数函数 $e^{ikt/\varepsilon}$ 的系数，可得耦合系统

$$(\partial_t + ik/\varepsilon)^2 z_k^K - \Delta z_k^K - \rho\Delta(z_{k-1}^K + z_{k+1}^K) = \delta_{k0} f, \tag{5}$$

对范围 $-K \le k \le K$ 内的所有整数 k 均成立，其中截断参数 $K < \infty$ 有界。在外侧指标$k \in \{-K,K\}$处，将项 z_{K+1}^K 和 z_{-K-1}^K 置为零。对于最前面的指标，系统为

$$\begin{aligned} \partial_t^2 z_0^K - \Delta z_0^K - \rho\Delta(z_{-1}^K + z_1^K) &= f, \\ (\partial_t + i/\varepsilon)^2 z_1^K - \Delta z_1^K - \rho\Delta(z_0^K + z_2^K) &= 0, \\ (\partial_t + 2i/\varepsilon)^2 z_2 - \Delta z_2^K - \rho\Delta(z_1^K + z_3^K) &= 0, \\ &\cdots, \\ (\partial_t + Ki/\varepsilon)^2 z_K^K - \Delta z_K^K - \rho\Delta z_{K-1}^K &= 0. \end{aligned}$$

我们为耦合系统补充齐次狄利克雷边界条件，并对系数函数 z_k^K（对于 $-K \le k \le K$）及其时间导数施加零初始条件。于是得到以下结果。

定理 1 (调制傅里叶展开)。 考虑系统 (3)，该系统定义在光滑区域Ω上，且右端项f连同其在 $t < 0$处的零延拓具有足够的正则性，使得以下右端项均为有限值。此外，设终止时间满足

$$T < \frac{\varepsilon}{4\rho}.$$

在这些假设下，式(3) 的解满足展开式(2) ，其中系数函数 $z^K(t)$ 和余项 $R_K(t)$满足以下性质。对于 $|k| \le K$，系统的系数函数 z_k^K:$[0,T] \to H_0^1(\Omega)$ 定义为

该系统光滑且正则，即对于任意整数值 $r > 0$，我们有

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t^{r+1} z^K(t)\| \le 4T \left(\int_0^T \|\partial_t^r f(t)\|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

此外，设对所有时刻 $0 \le t \le T$，f 的支集位于内部区域 Ω_0 中，且其闭包仍为$\Omega_0 \subset \Omega$的子集。在这些假设下，余项满足如下估计

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R_K(t)\| + \|\nabla R_K(t)\| \le C\rho^K \varepsilon^{K+1} \left(\int_0^T \left\| \partial_t^{K+1} \Delta^{K+1} f(t) \right\|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中常数 C 仅依赖于 K，并以多项式方式依赖于终止时间 T。为使这两个估计成立，要求右端项 f 及其足够多的导数在初始时刻为零，从而当对 $t < 0$ 以零延拓时，右端项中相应的被积函数是连续的。

其次，我们考虑更一般的小振幅调制类 $\mu(x,t)$，其形式为

$$\mu(x, t/\varepsilon) = \mu_0(x) + 2\rho \sum_{j=0}^{J} \widehat{\mu}_j(x) \cos(jt/\varepsilon) = \mu_0(x) + \rho \sum_{j=-J}^{J} \widehat{\mu}_j(x) e^{ijt/\varepsilon}, \tag{6}$$

其中动态分量的实值系数 $\widehat{\mu}_j$ 关于负指标镜像（即我们令 $\widehat{\mu}_{-j} = \widehat{\mu}_j$），并进一步假定其足够正则（即 $\mu_{j(x)} \in C^1(\Omega)$）。此外，假定 μ 的静态分量，即 μ_0，为正、远离零且有上界，即存在常数 c^μ 与 C^μ，使得

$$0 < c_\mu < \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} \mu_0(x) \le \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} \mu_0(x) < C_\mu < \infty. \tag{7}$$

此外，我们假设振荡系数的空间系数及其导数连续有界，即对所有 $\widehat{\mu}_j \in C^1(\Omega)$ $-J \le j \le J$均成立。系数函数 z^{JK} 仍由一个演化问题确定，该问题通常表述如下：对所有 $0 \le t \le T$，求系数函数

$$z_k^{JK}(t) \in V_K = H_0^1(\Omega)^{2JK+1}, \tag{8}$$

使得对于范围 $-JK \le k \le JK$ 内所有取整数值的k，均有

$$\left(\partial_t + \frac{ik}{\varepsilon} \right)^2 z_k^K - \nabla \cdot \mu_0 \nabla z_k^K - \sum_{j=-J}^{J} \nabla \cdot \widehat{\mu}_j \nabla z_{k-j}^K = \delta_{k0} f, \tag{9}$$

其中空间变化算子为

$$A_0(x) = -\nabla \cdot \mu_0(x) \nabla \quad \text{and} \quad \widehat{A}_j(x) = -\nabla \cdot \widehat{\mu}_j(x) \nabla, \quad \text{for} \quad j = -J, \ldots, J.$$

由于假设精确解初始时刻为零，我们通过令系数 z_k^K及其导数初始时刻为零来补全该系统。于是得到以下结果。

定理 2(空间变化较弱时的调制傅里叶展开 μ)。 考虑调制满足以下条件的时间调制声波方程(6) : (7)并进一步假设定理 1中的假设成立。那么，对于足够小的 ρ，对所有 r，以下界成立 ≥ 0

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_t^{r+1} z^{JK}(t)\| \leq C\left(\int_0^T \|\partial_t^r f(t)\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中，常数 C 取决于函数 $\widehat{\mu}_j$ （ $|j| \leq J$），终止时间 T 和 K，但与 ρ 和 ε 无关。余项有如下界:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R_{JK}(t)\| + \|\nabla R_{JK}(t)\| \leq C\frac{\rho^K}{\varepsilon^K}\left(\int_0^T \left\|\partial_t^{K+1} f(t)\right\|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中，常数 C 仅取决于 K，并且关于终止时间 T 和调制 μ 的系数$\widehat{\mu}_j$ （ $|j| \leq J$）呈多项式依赖，但与 ρ 和 ε 无关。要使这两个估计均成立，右端项 f 及其足够多阶的导数必须在初始时刻为零，从而右端项中的相应被积函数在通过对 $t < 0$ 的情形作零延拓后保持连续。

对于空间变化的调制 μ，定理 2所讨论的情形，或许可以推导出更强的衰减条件，但克服由 μ 的空间依赖性所带来的技术难题超出了本文的范围（空间调制的某些方面在第 3.3 节中有所表述）。为简化表述并展示导出定理 1 中快速衰减条件的技术，以下各节将聚焦于公式（5）。

注 2.1(快速振荡激励)。 耦合动力系统 (5)/(9) 还可以针对源项本身具有调制傅里叶展开形式的情形进行表述，即

$$f(x,t/\varepsilon) = \sum_{\ell=-L}^{L} f_\ell^L(x,t)e^{i\ell t/\varepsilon},$$

具有缓变系数 f_ℓ^L。那么，相应的耦合系统 (5)/(9) 只需在右端项中使用缓变系数 f_ℓ^L即可表述。在 $f_{L\ell}$ 满足充分衰减条件时，定理 1–2 的衰减条件仍然适用，或者只需稍作调整，使衰减从 f_ℓ^L首次为零的下标开始。

注 2.2 (方法的局限性)。 本文的结果适用于较小的 ε，前提是比值 $\rho t/\varepsilon$ 受到某个常数的限制；该常数可能以乘法因子的形式指数增长，并出现在所有误差界的右端项中。这一限制使得本文的研究范围仅涵盖时间尺度 $t \sim 1$ 上的小振幅调制；这一限制源于时间调制声波方程，而该方程已知仅在此类时间尺度内稳定（见命题 8）。耦合动力系统在这些时间尺度内也仅稳定，这是命题 1 中拉普拉斯域预解算子的解析域缩小所导致的（相应地，系统适定要求 $\mathrm{Re}\, s > c\rho/\varepsilon$ ）。若要建立更强的理论（如果可能的话），就必须克服这两个困难，以将现有理论推广到更长的时间范围。这类结果将是对文献的有益补充，但超出了本文的研究范围。

注 2.3 （系数的对称性）. 我们指出，对于实值 f，对耦合系统取共轭后可得

$$(\partial_t - ik/\varepsilon)^2\overline{z}_k - \Delta\overline{z}_k - \rho\Delta(\overline{z}_{k-1} + \overline{z}_{k+1}) = \delta_{k0}f. \tag{10}$$

将其与原系统进行比较，并结合解的唯一性（将在本文后续部分予以确立），可知

$$\overline{z}_k = z_{-k}, \tag{11}$$

这表明，只要 f 不含复值分量，调制傅里叶展开就是实值的。

3. 耦合系统的拉普拉斯域分析

对系统（5）两边应用拉普拉斯变换，可得到系数函数 z_k^K 的拉普拉斯变换的一个表达式，下文将其记为 $\widehat{z}_k^K$。对于拉普拉斯参数 $s \in \mathbb{C}$，假设其实部为正（即 $\mathrm{Re}\, s > 0$），我们对所有 $-K \le k \le K$

$$\left(s + \frac{ik}{\varepsilon}\right)^2 \widehat{z}_k^K - \Delta(\widehat{z}_k^K + \rho\widehat{z}_{k-1}^K + \rho\widehat{z}_{k+1}^K) = \delta_{k0}\widehat{f}. \tag{12}$$

这里我们利用了系数函数 z_k^K 初始时为零这一条件。更一般的初始条件会在右端项中引入其他项；为简化表述，本文忽略了这些项，但这并不构成对该方法整体适用性的限制。下文将介绍该系统的泛函分析框架，以便对拉普拉斯域中的耦合系统（12）进行严格表述。

注释 3.1（与耦合谐波的联系）。近年来，人们投入了大量精力来理解这样一个耦合谐波系统：通过时间傅里叶基对准周期时间边界条件进行离散化截断，并限制时间频率的范围后，便会得到该系统（例如参见 *[2, 21, 22, 28]*）。由此得到的弗洛凯指数近似值恰好是 (12) 的预解算子的极点（类似于无源介质的共振频率，它们是亥姆霍兹问题预解算子 $R(s)$ 的极点）。

接下来，我们在适当的空间上建立耦合系统，该空间用于系数函数的拉普拉斯变换，即

$$V_K = H_0^1(\Omega)^{2K+1}.$$

在此空间上作用着与调制声波方程中出现的微分算子相对应的截断算子，记为

$$D_K(s) : V_K \to V_K', \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_\Delta : V_K \to V_K'.$$

它们对系数函数各分量的作用如下

$$D_K(s)z = \left((s + \tfrac{ik}{\varepsilon})z_k\right)_{|k|\le K} \quad \text{and} \quad \mathcal{T}_\Delta z = \left(-\rho\Delta z_{k-1} - \Delta z_k - \rho\Delta z_{k+1}\right)_{|k|\le K}.$$

对于指标 $k = K, -K$，为简化记号，我们采用约定 $z_{K+1} = z_{-K-1} = 0$。右端记为

$$\widehat{f}^K = \left(\delta_{k0}\widehat{f}\right)_{-K\le k\le K}.$$

于是，耦合方程的拉普拉斯域系统的强形式为

$$(D_K^2(s) + \mathcal{T}_\Delta)\widehat{z}^K = \widehat{f}^K, \tag{13}$$

其弱形式为

$$a_K(v,\widehat{z}^K) \coloneqq \left\langle v,(D_K^2(s)+\mathcal{T}_\Delta)\widehat{z}^K\right\rangle = \left\langle v,\widehat{f}^K\right\rangle \quad \text{for all} \quad v\in V_K. \tag{14}$$

$V_K \times V'K$ 中的反对偶 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是各个分量之和

$$\langle v,w\rangle = \sum_{k=-K}^{K} \langle v_k,w_k\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \quad \text{for all} \quad v,w\in V_K,$$

其中，与单个分量相关联的每个反对偶 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0^1(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}$ 是 $L^2(\Omega)$ 配对的扩展。为简化与 $H^1(\Omega)$ 半范数相关的配对记号，我们写作

$$\langle z_1,z_2\rangle_1 = \langle \nabla z_1,\nabla z_2\rangle .$$

下一节分析并给出充分条件，使弱形式（14）存在唯一解，且该解由右端项 $\widehat{f}^K$ 控制。鉴于界依赖于时间，我们特别关注跟踪 s 对这些界的依赖关系。

3.1. 耦合系统的适定性

当 s 的实部充分大时，耦合系统（14）是适定的，本小节将对此进行研究。更准确地说，本节中的结论适用于满足以下条件的拉普拉斯参数

$$\operatorname{Re} s > \frac{4\rho}{\varepsilon}. \tag{15}$$

这一假设确保可以吸收（14）中出现的混合项，这一点将在下面的引理中阐明。

引理 1（的强制性 $_K$）。设 $s \in \mathbb{C}$满足假设 (15)。在此假设下，我们有强制性估计

$$\operatorname{Re}\, a_K(D_K(s)z,z) \geq \tfrac{1}{2}\operatorname{Re} s\, \left(\|D_K(s)z\|^2+\|\nabla z\|^2\right),$$

该结论对所有 $z \in V_K$ 均成立。

证明。由下式可直接推出第一项的强制性

$$\operatorname{Re}\left\langle D_K(s)z, D_K^2(s)z\right\rangle = \operatorname{Re} s\|D_K(s)z\|^2.$$

我们先改写第二个加数，其形式为

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left\langle D_K(s)z,\mathcal{T}_\Delta z\right\rangle = \operatorname{Re}\sum_{k=-K}^{K}\left(\overline{s}-\frac{ik}{\varepsilon}\right)\left\langle z_k,\rho z_{k-1}+\widehat{z}_k+\rho z_{k+1}\right\rangle_1\\
&= \operatorname{Re} s\sum_{k=-K}^{K}\|z_k\|_1^2+\rho\operatorname{Re}\left(\overline{s}\sum_{k=-K}^{K}\left\langle z_k,z_{k-1}+z_{k+1}\right\rangle_1\right)-\frac{\rho}{\varepsilon}\sum_{k=-K}^{K}\operatorname{Re} ik\left\langle z_k,z_{k-1}+z_{k+1}\right\rangle_1\\
&= \qquad \mathrm{I} \qquad + \qquad \mathrm{II} \qquad - \qquad \mathrm{III}.
\end{aligned}$$

我们的目的是将第二和第三级数 II 和 III 中的各项与第一级数 I 中出现的各项合并。第二个加数中作为因子的级数至关重要，因为它是实值的，这可由恒等式得出

$$\sum_{k=-K}^{K} \langle z_k, z_{k-1} + z_{k+1} \rangle_1 = 2\mathrm{Re} \sum_{k=-K}^{K} \langle z_k, z_{k+1} \rangle_1 .$$

因此，当 ρ 足够小时，第二项可以吸收，因为

$$\begin{aligned} \mathrm{II} = \rho \mathrm{Re}\, \bar{s} \sum_{k=-K}^{K} \langle z_k, z_{k-1} + z_{k+1} \rangle_1 &= 2\rho\, \mathrm{Re}\, s\ \mathrm{Re} \sum_{k=-K}^{K} \langle z_k, z_{k+1} \rangle_1 \\ &\le \rho 2\mathrm{Re}\, s \sum_{k=-K}^{K} \|z_k\|^2 . \end{aligned}$$

通过类似望远镜求和的论证，可以用有界系数替换各项的系数 k，并以类似的方式估计最后一项。我们每次分析两项，从而重写该级数，得到

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{\rho}\mathrm{III} &= \mathrm{Im}\,(-K)\,\langle z_{-K}, z_{-K+1} \rangle_1 + \mathrm{Im}\,(-K+1)\,\langle z_{-K+1}, z_{-K} + z_{-K+2} \rangle_1 + \dots \\ &= \mathrm{Im}\ \langle z_{-K+1}, z_{-K} \rangle_1 + \mathrm{Im}\,(-K+1)\,\langle z_{-K+1}, z_{-K+2} \rangle_1 + \dots , \\ &\dots \\ &= \mathrm{Im}\ \langle z_{-K+1}, z_{-K} \rangle_1 + \dots + \mathrm{Im}\ \langle z_K, z_{K-1} \rangle_1 . \end{aligned}$$

这里的关键论证在于，该级数中的每一项都会“几乎”消去其后一项，误差至多为系数 1。因此，对右端项的每一项应用柯西–施瓦茨不等式和杨氏不等式，可得以下界

$$\mathrm{III} \le \frac{\rho}{\varepsilon} \sum_{k=-K}^{K} \|z_k\|_1^2 .$$

在给定的 $4\rho < \varepsilon \mathrm{Re} s$ 假设下，因此可以利用 I 的下界吸收该项。□

a_K 的强制性结论是适定性结果以及系数 $\widehat{\ }z^K$ 的界的关键。对产生的两个项分别应用柯西–施瓦茨不等式，即可得到双线性型的连续性，具体表述如下。

引理 2. 双线性型 a_K 是有界的，即满足

$$|a_K(D_K(s)v, w)| \le C \left(|s| + \frac{K}{\varepsilon} \right) \left(\left\| D_K(s)v \right\| \left\| D_K(s)w \right\| + \|\nabla v\| \, \|\nabla w\| \right),$$

其中，C 仅取决于 ρ 的一个上界。

截断拉普拉斯域系统（14）的适定性现可由标准的 Lax–Milgram 理论推出，前提是满足所述的下界（15），该下界针对拉普拉斯参数 s 的实部。

命题 1. 对于任意满足假设 $\in \mathbb{C}$ 的 s (15)，系统 (14) 有唯一解 $\widehat{\ }z^K$，且其有界性满足

$$\|D_K(s)\widehat{z}^K\|^2 + \|\nabla \widehat{z}^K\|^2 \le \frac{4}{(\mathrm{Re}\, s)^2} \|\widehat{f}\|^2 .$$

证明. 根据引理 (1) 的强制性和引理 (2) 的有界性，Lax–Milgram定理直接推出有界性和适定性。解 $\widehat{z}^K$ 的有界性可由以下标准的不等式链得到

$$\|D_K(s)\hat{z}^K\|^2 + \|\nabla\hat{z}^K\|^2 \le \frac{2}{\operatorname{Re} s}\operatorname{Re} a_K(D_K(s)\hat{z}^K,\hat{z}^K) = \frac{2}{\operatorname{Re} s}\left(D_K(s)\hat{z}^K,\widehat{f}^K\right) \le \tfrac{1}{2}\|D_K(s)\hat{z}^K\|^2 + \frac{2}{(\operatorname{Re} s)^2}\|\widehat{f}\|^2,$$

通过吸收右端项中的第一项。 □

本节旨在给出调制傅里叶展开的误差界，并明确展示其对小参数 ρ 和 ε的高次幂的依赖。这些误差界源于系数函数 $\widehat{z}_k^K$的衰减，它们减轻了在指标 K 处截断的影响。下一节将证明此类衰减估计。

3.2. 系数 $\widehat{z}_k^K$的衰减

为估计截断误差，我们利用系数 $\widehat{z}_k^K$ 关于指标 k 的衰减性质。重新整理耦合系统（k 阶方程（12），可得（当 $k \neq 0$ 时）

$$\left(s + \frac{ik}{\varepsilon}\right)^2 \widehat{z}_k^K - \Delta\widehat{z}_k^K = \rho\Delta\widehat{z}_{k-1}^K + \rho\Delta\widehat{z}_{k+1}^K. \tag{16}$$

与标准亥姆霍兹问题相关的算子（波数为 $s+ik/\varepsilon$）的预解算子界，因此给出了系数的初步界估计。以下段落汇总了此类估计。

预备内容：未调制算子的预解算子界

标准亥姆霍兹方程的预解算子记为

$$R(s) = (s^2 - \Delta)^{-1}. \tag{17}$$

注意，在适当的相容空间上，具有不同参数$s_1,s_2 \in \mathbb{C}$ （实部为正）的两个预解算子可交换，因为我们有

$$R(s_1)R(s_2) = ((s_2^2 - \Delta)(s_1^2 - \Delta))^{-1} = ((s_1^2 - \Delta)(s_2^2 - \Delta))^{-1} = R(s_2)R(s_1).$$

此外，同样的论证表明，任意亥姆霍兹预解算子都与拉普拉斯算子交换，因为我们有（在相容空间上）

$$\Delta R(s) = (s^2\Delta^{-1} - \Delta\Delta^{-1})^{-1} = (\Delta^{-1}s^2 - \Delta^{-1}\Delta)^{-1} = R(s)\Delta.$$

亥姆霍兹预解算子满足以下界。

引理 3. *F 或任意 $\operatorname{Re} s > 0$，我们都可以得到亥姆霍兹问题预解算子的以下界*

$$\left\|R(s)\right\|_{L^2(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)} \le \frac{1}{|s|\operatorname{Re} s}, \tag{18}$$

$$\left\|R(s)\right\|_{H_0^1(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)} \le \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{Re} s}. \tag{19}$$

证明。 这类界在声波方程的拉普拉斯域技术背景下是众所周知的（例如参见 [7, 第4节。4] 以查阅一组估计）。为方便读者，我们简要

证明所述估计。设 $\widehat{w}$ 由 $(s^2-\Delta)\widehat{w} = \widehat{g}$ 定义。将两边同除以 s，用 $\widehat{w}$ 检验该方程并取实部，得到

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} s\int_\Omega |\widehat{w}|^2+|s^{-1}\nabla\widehat{w}|^2\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_\Omega \overline{\widehat{w}}\cdot s^{-1}\widehat{g}\,\mathrm{d}x,\\ &\le \int_\Omega |\widehat{w}|\left|s^{-1}\widehat{g}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \frac{\operatorname{Re} s}{2}|\widehat{w}|^2+\frac{1}{2\operatorname{Re} s}\left|s^{-1}\widehat{g}\right|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将右端项的第一项移至左侧，并忽略左端项中的第二项，即得第一个结果。反过来，忽略左端项中的第一项，即得第二个界。□

我们经常会遇到亥姆霍兹解算子与拉普拉斯算子的组合（由于它们的组合出现在 (16) 中）。下面的引理给出了这一组合的若干算子界。

引理 4. 对于任意 $\operatorname{Re} s > 0$，我们有以下算子界

$$\left\|R(s)\Delta\right\|_{H_0^1(\Omega)\leftarrow H_0^1(\Omega)} \le \frac{|s|}{\operatorname{Re} s}, \tag{20}$$

$$\left\|R(s)\Delta\right\|_{L^2(\Omega)\leftarrow H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{Re} s}, \tag{21}$$

$$\left\|R(s)\Delta\right\|_{L^2(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)} \le \frac{|s|}{\operatorname{Re} s}. \tag{22}$$

证明。令 $\widehat{w}$ 由 $(s^2-\Delta)\widehat{w} = \Delta\widehat{g}$ 定义。于是，我们得到以下界

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} s\int_\Omega |\widehat{w}|^2+|s^{-1}\nabla\widehat{w}|^2\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_\Omega s^{-1}\nabla\overline{\widehat{w}}\cdot\nabla\widehat{g}\,\mathrm{d}x,\\ &\le \int_\Omega \left|s^{-1}\nabla\widehat{w}\right|\left|\nabla\widehat{g}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_\Omega \frac{\operatorname{Re} s}{2}\left|s^{-1}\nabla\widehat{w}\right|^2+\frac{1}{2\operatorname{Re} s}\left|\nabla\widehat{g}\right|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

A将右端项的第一项移至左端，便得到

$$\int_\Omega |\widehat{w}|^2+\tfrac{1}{2}|s^{-1}\nabla\widehat{w}|^2\mathrm{d}x \le \frac{1}{2(\operatorname{Re} s)^2}\int_\Omega \left|\nabla\widehat{g}\right|^2\,\mathrm{d}x,$$

因此，对于 $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\|\widehat{w}\| \le \frac{1}{\sqrt{2}\operatorname{Re} s}\left\|\widehat{g}\right\|_1, \tag{23}$$

$$\|\widehat{w}\|_1 \le \frac{|s|}{\operatorname{Re} s}\left\|\widehat{g}\right\|_1, \tag{24}$$

这证明了前两个界。对于最后一个界，我们利用拉普拉斯算子的谱定理得到

$$\|R(s)\Delta\|_{L^2(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)} = \sup_{\lambda>0}\frac{\lambda}{|s^2+\lambda|} = \sup_{\lambda>0}\frac{|s|\lambda}{||s|^2 s+\bar{s}\lambda|} \le \sup_{\lambda>0}\frac{|s|\lambda}{\operatorname{Re} s(|s|^2+\lambda)} \le \frac{|s|}{\operatorname{Re} s}.$$

□

关于 $\|\widehat{z}_k^K\|_1$ 的衰减估计

通过重新整理（16）并应用引理3中的界，预解算子估计可得衰减估计。对于适当范围内的任意 k，可得

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 = \rho \left\| \left((s+ik/\varepsilon)^2 - \Delta \right)^{-1} \Delta (\widehat{z}_{k-1}^K + \widehat{z}_{k+1}^K) \right\|_1 \leq \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{|k|}{\operatorname{Re} s} + \rho \frac{|s|}{\operatorname{Re} s} \right) \left(\left\| \widehat{z}_{k-1}^K \right\|_1 + \left\| \widehat{z}_{k+1}^K \right\|_1 \right).$$

首先注意到，由命题1可知系数有界；在给定假设下，对任意k 满足 $-K \leq k \leq K$，估计为

$$\left\| \widehat{z}_k^K \right\|_1 \leq \left(\sum_{k'=-K}^{K} \left\| \widehat{z}_{k'}^K \right\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\operatorname{Re} s} \left\| \widehat{f} \right\|. \tag{25}$$

然而，对于任意$k \neq 0$，我们可以先使用（23），再使用这个界，从而得到

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 \leq \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{|k|}{\operatorname{Re} s} + \rho \frac{|s|}{\operatorname{Re} s} \right) \left(\left\| \widehat{z}_{k-1}^K \right\|_1 + \left\| \widehat{z}_{k+1}^K \right\|_1 \right) \leq \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{2K}{\operatorname{Re} s} + \rho \frac{2|s|}{\operatorname{Re} s} \right) \frac{2}{\operatorname{Re} s} \left\| \widehat{f} \right\|.$$

与界（25）相比，我们额外获得了一个因子；当 $\rho/\varepsilon \to 0$趋于零时（固定s），该因子线性趋于零。对这一过程进行归纳，即对任意 $|k| \geq m$，使用$m = 0, \ldots\ldots, K$对应的界，即可得到以下界。

命题2。 设 $s \in \mathbb{C}$ 满足假设（15）。对于适当范围内的任意 k $-K \leq k \leq K$，系数$\widehat{z}_k^K$关于 k 衰减，其含义是

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 \leq \left(\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{2K}{\operatorname{Re} s} + \rho \frac{2|s|}{\operatorname{Re} s} \right)^k \frac{2}{\operatorname{Re} s} \left\| \widehat{f} \right\|.$$

对于负指标 $k < 0$， $|k|$ 也满足类似的界。

证明。 如命题前面的段落所述，该结论可通过对$|k|$进行归纳法得到，具体是将引理3 中的预解算子界与命题1中所述的标准系数界直接结合。 □

在前一个界中，没有对右端项f的空间正则性作出任何假设。若右端项具有额外的空间正则性，且区域 Ω满足相应条件，则衰减速度会更快。

命题 3。 设 Ω 光滑，且 $s \in \mathbb{C}$的实部足够大，以满足假设 (15)。此外，设 f 的支集位于 Ω_0，这是 Ω 的任意开子集，且满足 $\Omega_0 \subset \Omega$。对于适当范围内的任意 k $0 \leq k \leq K$，系数 $\widehat{z}_k^K$ 关于 k 的衰减满足

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 \leq C \rho^k \varepsilon^k \frac{|s|^k}{(\operatorname{Re} s)^{2k+1}} \left\| \Delta^{k+1} \widehat{f} \right\|,$$

其中常数 C 仅取决于 K。对于负指标 $k < 0$，相应指数为 $|k|$ 时，也有类似的界。

证明。 在整个证明过程中，我们形式上使用 Δ 的幂及其逆，这一过程由 [20, 定理 11。2]严格化。注意，由于拉普拉斯算子与耦合系统的预解算子具有交换性，界（25）可推广至拉普拉斯算子的幂，即对于任意$\ell \in \mathbb{N}$ (且足够光滑的区域 Ω)，有估计

$$\left\|\Delta^{\ell}\widehat{z}_k^K\right\|_1 \leq \left(\sum_{k'=-K}^{K}\left\|\Delta^{\ell}\widehat{z}_{k'}^K\right\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\operatorname{Re} s}\left\|\Delta^{\ell}\widehat{f}\right\|, \tag{26}$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$若 f 足够正则，使得右端项有限。注意，假设 f 的支集位于 Ω 的内部，从而保证了边界值的相容性。将（16）改写为预解算子形式，并施加拉普拉斯算子 Δ 于两边，则得到

$$\Delta\widehat{z}_k^K = \rho\Delta R(s+\tfrac{ik}{\varepsilon})\Delta(\widehat{z}_{k-1}^K + \widehat{z}_{k+1}^K),$$

并且，对于 $k \neq 0$，该估计

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 \leq \rho\|\Delta^{-1}\|_{H_0^1(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)}\|R(s+\tfrac{ik}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)}\left\|\Delta^2(\widehat{z}_{k-1}^K + \widehat{z}_{k+1}^K)\right\| \leq C\frac{2\rho}{(\operatorname{Re} s)^2|s+\frac{ik}{\varepsilon}|}\left\|\Delta^2\widehat{f}\right\|.$$

我们注意到，对任意的 $|k| \leq K$，我们有如下初等估计

$$\frac{1}{|s+ik/\varepsilon|} = \frac{|s|}{|s||s+ik/\varepsilon|} \leq \frac{|s|}{\operatorname{Re} s \max\left(|s|, \left|s+\frac{ik}{\varepsilon}\right|\right)} \leq \frac{2\varepsilon|s|}{|k|\operatorname{Re} s}.$$

将这一估计代入前述界，得到

$$\|\widehat{z}_k^K\|_1 \leq \varepsilon\rho\frac{C|s|}{(\operatorname{Re} s)^3}\left\|\Delta^2\widehat{f}\right\|,$$

其中C d 仅取决于k。更一般地，对于任意整数值的 $\ell \geq 1$，当$k \neq$时，我们有 0

$$\begin{aligned}\|\Delta^{\ell}\widehat{z}_k^K\| &\leq \rho\|R(s+\tfrac{ik}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)\leftarrow L^2(\Omega)}\left\|\Delta^{\ell+1}(\widehat{z}_{k-1}^K + \widehat{z}_{k+1}^K)\right\| \\ &\leq \rho\varepsilon\frac{2|s|}{|k|(\operatorname{Re} s)^2}\left\|\Delta^{\ell+1}(\widehat{z}_{k-1}^K + \widehat{z}_{k+1}^K)\right\| \leq \rho\varepsilon\frac{C|s|}{(\operatorname{Re} s)^3}\left\|\Delta^{\ell+1}\widehat{f}\right\|.\end{aligned}$$

常数C 同样仅取决于k。采用与前一个命题2中相同的归纳法即可得出结果。□

注记3.2（情形 $K = 1$）。 当仅考虑单个耦合谐波时，拉普拉斯域中的耦合系统可写成分块形式

$$D_K^2(s) + \mathcal{T}_\Delta = \begin{pmatrix}(s-\frac{i}{\varepsilon})^2 - \Delta & -\rho\Delta & 0 \\ -\rho\Delta & s^2 - \Delta & -\rho\Delta \\ 0 & -\rho\Delta & (s+\frac{i}{\varepsilon})^2 - \Delta\end{pmatrix}. \tag{27}$$

该算子的逆可以写成诺伊曼级数，形式化地记为

$$(D_K^2(s)+\mathcal{T}_\Delta)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(\rho\Delta)^n\begin{pmatrix}0 & R(s-\frac{i}{\varepsilon}) & 0\\ R(s) & 0 & R(s)\\ 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon}) & 0.\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}R(s-\frac{ik}{\varepsilon}) & 0 & 0\\ 0 & R(s) & 0\\ 0 & 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon})\end{pmatrix}.$$

注意，迭代矩阵平方的第二个因子具有如下形式

$$\begin{pmatrix}0 & R(s-\frac{ik}{\varepsilon}) & 0\\ R(s) & 0 & R(s)\\ 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon}) & 0.\end{pmatrix}^2=R(s)\begin{pmatrix}R(s-\frac{ik}{\varepsilon}) & 0 & R(s-\frac{i}{\varepsilon})\\ 0 & R(s-\frac{ik}{\varepsilon})+R(s+\frac{i}{\varepsilon}) & 0\\ R(s+\frac{ik}{\varepsilon}) & 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon})\end{pmatrix}.$$

最后，第二个因子的三次方为

$$\begin{pmatrix}0 & R(s-\frac{ik}{\varepsilon}) & 0\\ R(s) & 0 & R(s)\\ 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon}) & 0.\end{pmatrix}^3=R(s)(R(s-\tfrac{i}{\varepsilon})+R(s+\tfrac{i}{\varepsilon}))\begin{pmatrix}0 & R(s-\frac{ik}{\varepsilon}) & 0\\ R(s) & 0 & R(s)\\ 0 & R(s+\frac{i}{\varepsilon}) & 0\end{pmatrix}.$$

利用预解算子与拉普拉斯算子的交换性，我们因此得到关于 ρ 和 ε 的高阶显式公式，用于求解耦合系统：对于指标为零的主阶分量，有

$$\widehat{z}_0^1=R(s)\widehat{f}+\mathcal{O}(\rho^2\varepsilon),$$

对于两个修正项，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{z}_{-1}^1&=\rho R(s-\tfrac{i}{\varepsilon})\Delta R(s)\widehat{f}+\mathcal{O}(\rho^3\varepsilon^2),\\ \widehat{z}_1^1&=\rho R(s+\tfrac{i}{\varepsilon})\Delta R(s)\widehat{f}+\mathcal{O}(\rho^3\varepsilon^2),\end{aligned}$$

对于满足以下条件的源项 $\widehat{f}$：$\|\Delta^2\widehat{f}\|$ 随 $|s|\to\infty$ 充分快速衰减（若它对应于时间依赖函数 $\Delta^2 f$ 的拉普拉斯变换，则该条件成立）。

3.3. 空间变系数的一般调制

本节简要讨论更一般调制的含义 μ，其类型为 (6)，由若干变化系统之和构成，其耦合的拉普拉斯域表述如下：求系数 $z^{JK}{}_k\in H_0^1(\Omega)^{2JK+1}$，使得对于范围$k$ 内的所有 $-JK\le k\le JK$，均有

$$\left(s+\frac{ik}{\varepsilon}\right)^2\widehat{z}_k^{JK}+A_0\widehat{z}_k^{JK}+\rho\sum_{j=-JK}^{JK}\widehat{A}_j\widehat{z}_{k-j}^{K}=\delta_{k0}\widehat{f}.$$

该系统自然地定义在空间

$$V_{JK}=H_0^1(\Omega)^{2JK+1},$$

在其上定义了算子

$$D_{JK}(s):\ V_{JK}\to V_{JK}',\quad\text{and}\quad\mathcal{T}_A:\ V_{JK}\to V_{JK}',$$

其作用于系数函数 $z \in H_0^{JK}(\Omega)$ 的方式由以下内容决定

$$D_{JK}(s)z = \left((s + \tfrac{ik}{\varepsilon})z_k\right)_{|k|\le JK} \text{ and } \mathcal{T}_A z = \left(A_0 + \rho(\widehat{A}_{-J}z_{k-J} + \cdots + \widehat{A}_J z_{k+J})\right)_{|k|\le JK}.$$

利用这些算子，我们将耦合方程的拉普拉斯域系统改写为

$$(D_{JK}^2(s) + \mathcal{T}_A)\widehat{z}^{JK} = \widehat{f}^{JK}, \tag{28}$$

或弱形式表述为

$$a_{JK}(v, \widehat{z}^{JK}) := \left\langle v, (D_{JK}^2(s) + \mathcal{T}_A)\widehat{z}^{JK}\right\rangle = \left\langle v, \widehat{f}^{JK}\right\rangle \quad \text{for all} \quad v \in V_{JK}. \tag{29}$$

命题4. 设参数 μ 满足(7)中所述的性质。存在常数 $c > 0$，使得对所有 $s \in \mathbb{C}$ 满足 $\mathrm{Re}s > c\rho/\varepsilon$ 且对于充分小的 ρ，我们有如下结果。对所有 $z \in V^{JK}$ 成立

$$\mathrm{Re}\, a_{JK}(D_{JK}(s)z, z) \ge C_0 \,\mathrm{Re}\, s \left(\|D_{JK}(s)z\|^2 + \|\nabla z\|^2\right).$$

此外，系统 (29) 具有唯一解 $\widehat{z}^{JK}$，其界为

$$\|D_{JK}(s)\widehat{z}^{JK}\|^2 + \|\nabla\widehat{z}^{JK}\|^2 \le \frac{C_1}{(\mathrm{Re}\, s)^2}\|\widehat{f}\|^2.$$

常数 C_0 与 C_1 仅依赖于调制 $\widehat{\mu}$。

证明。 通过a^{JK} 的强制性，可对引理1的证明逐项重复，并选择c足够小以吸收混合项。然后应用 Lax–Milgram 引理即可得到适定性。 □

命题5。 设 Ω 光滑，系数 μ_0 满足性质(7)，并且对范围 $-J \le j \le J$内的所有 j，均有$\widehat{\mu}_j \in C^{2k+1}(\Omega)$。那么，存在一个正的常数 $c > 0$，使得对于所有满足Re$s > c\rho/\varepsilon$的 s，都有以下界。系数 $\widehat{z}_k^K$在适当范围 $0 \le k \le K$内随 k 衰减，其意义为

$$\|\widehat{z}_{Jk}^{JK}\|_1 \le C_K \left(\frac{\rho}{\varepsilon \mathrm{Re}\, s} + \rho\frac{|s|}{\mathrm{Re}\, s}\right)^k \left\|\Delta^{k+1}\widehat{f}\right\|,$$

其中，常数 C 仅依赖于 K、系数 μ_0 以及对 $-J \le j \le J$，μ_j 的^。对于负指标 $k < 0$，相应指数 $|k|$满足类似的界。

证明。 证明方法是重复命题 2 的证明（其中，对每个J^{th} 分量z^{JK} 反复使用预解算子界）。 □

注3.3。 对于空间变化的调制，也可能成立类似命题 3的更强衰减条件，但这超出了本文的讨论范围。

4. 调制傅里叶展开的误差界

调制傅里叶展开的误差界通过以下步骤得到：首先，我们将上一节的拉普拉斯域界转化到时域，从而得到系数z^K的界。其次，我们针对时间调制声波方程引入能量估计，以适用于

所研究的情形。最后，我们将截断调制傅里叶展开代入时间调制声波方程（1），并应用能量估计。下一节将介绍必要的符号，为把拉普拉斯域界转化到时域做准备。

4.1. 时间卷积算子

设$K(s)\colon V \to W$为有界线性算子的解析族，对所有满足 $\operatorname{Re} s > \sigma_0$的$s \in \mathbb{C}$ 均有定义，其中 σ_0。这里，V 和W 通常是抽象希尔伯特空间，在以下各节中将取为$L^2(\Omega)$、$H_0^1(\Omega)$ 或V_K 。上一节中的界关于拉普拉斯域参数s呈多项式形式，具体而言：存在实数 $\kappa, \nu \geq 0$ ，并且对每个 $\sigma > \sigma_0$，存在$M_\sigma < \infty$，使得

$$\|K(s)\|_{V' \leftarrow V} \leq M_\sigma \frac{|s|^\kappa}{(\operatorname{Re} s)^\nu}, \qquad \operatorname{Re} s \geq \sigma > \sigma_0 > 0. \tag{30}$$

对于初始时刻及其前$m > \kappa$阶导数均为零的正则时变函数$g : [0,T] \to V$ ，我们使用运算微积分中的海维赛德记号，写作

$$K(\partial_t) g = (\mathcal{L}^{-1} K) * g. \tag{31}$$

将K 的逆拉普拉斯变换与g进行时间卷积，其中g 在负实轴上延拓为零，即得到一种时域表述：将解析算子族 $K(s)$ 作用于g的拉普拉斯变换。

在拉普拉斯变换中，将作用于相容空间的两个解析族$K(s)$ 和$L(s)$ 串接起来，等价于将相应的两个时间卷积算子串接起来，这就是复合规则

$$K(\partial_t) L(\partial_t) g = (KL)(\partial_t) g. \tag{32}$$

我们将定义在 $\mathbb{R}$ 上、取值于V的实数阶r 函数的Sobolev空间记为$H^r(\mathbb{R}, V)$ ；在有限区间$(0,T)$上，记为

$$H_0^r(0,T;V) = \{ g|_{(0,T)} \,:\, g \in H^r(\mathbb{R},V) \ \text{with} \ g = 0 \ \text{on} \ (-\infty, 0) \}.$$

$H_0^r(0, T;V)$ 上的自然范数为：对于取整数值的$r \geq 0$，记作

$$\|g\|^2_{H_0^k(0,T;V)} = \sum_{\ell=0}^{k} \int_0^T \|\partial_t^\ell g(t)\|_V^2 \, \mathrm{d}t,$$

对于$g \in H_0^r(0, T; V)$。在此空间上，该范数等价于表达式 $\|\partial_t^r g\|_{L^2(0,T;V)}$，其中常数取决于终止时间$T$。根据Plancherel公式，时间卷积算子$K(\partial_t)$ 在相应的时间Sobolev空间上有界，这可由 [26, 引理 2。1]: 若K(s) 在半平面Re$s > \sigma > 0$内满足界（30），则$K(\partial_t)$ 满足

$$\|K(\partial_t)\|_{H_0^r(0,T;V') \leftarrow H_0^{r+\kappa}(0,T;V)} \leq e^{\sigma T} M_\sigma T^\nu, \tag{33}$$

对于任意实数r，我们进一步假设其为正。为了推导不以时间半范数表示的估计，我们依赖连续嵌入$H_0^{k+\alpha}(0, T;V) \subset C^k([0, T]; V)$，该嵌入对任意整数值$k \geq 0$ 和实数$\alpha > \frac{1}{2}$均成立。

调制傅里叶展开的适定性

用运算微积分的海维赛德记号，我们可以将（28）的时变表述写为：对所有 $t \in [0,T]$, , 求集合 $z^K(t) \in V_K$，使得

$$(D_K^2(\partial_t) + \mathcal{T}_\Delta) z^K = f^K. \tag{34}$$

与拉普拉斯域界一节中的处理相同，我们用记号 $f^K = \left(\delta_{k0} f\right)_{-K \le k \le K}$ 表示右端项。根据时间卷积算子的复合规则，解的系数还可进一步表征为

$$z^K = (D_K^2(\partial_t) + \mathcal{T}_\Delta)^{-1} f^K, \tag{35}$$

其中，右端的时空算子是与拉普拉斯域方程（28）的预解算子相对应的时间卷积算子。

4.2. 适定性与系数 z^K 的界

首先，我们针对截断调制傅里叶展开（5）的时变解，给出一个适定性结果。

命题 6。 设 $f \in H_0^r(0,T;\ L^2(\Omega))$ 对于某个 $r \ge 0$。则，系统 (14) （或等价地，(35)）具有唯一解

$$z^K \in H_0^r(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

其满足界

$$\|z^K\|_{H_0^r(0,T;H_0^1(\Omega))} \le 2T\, e^{T4\rho/\varepsilon}\, \|f\|_{H_0^r(0,T;L^2(\Omega))}.$$

证明。 该结论直接由将命题 1 与（33）结合得到。 □

由索伯列夫嵌入 $H_0^1(0,T;\ V) \subset C^0([0,T];\ V)$，我们注意到命题 6 意味着以下界

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z^K(t)\|_1 \le 2Te^{T4\rho/\varepsilon} \|f\|_{H_0^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

只要 f 的时间正则性足够高，使得右端项有界 .

命题 7. 对于适当范围内的任意 k $-K \le k \le K$，系数 $\hat{z}_k^K$ 关于 $|k|$ 衰减，其意义是

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z_k^K(t)\|_1 \le C\rho^{|k|}\varepsilon^{|k|}T^{2|k|+1}e^{T4\rho/\varepsilon} \left\|\Delta^{k+1} f\right\|_{H_0^{k+1}(0,T;L^2(\Omega))},$$

只要右端项有界即可。当右端项不具备任何额外的空间正则性，即 $f \in H_0^r(0,T;L^2(\Omega))$ 时，我们仍有如下估计

$$\sup_{t\in[0,T]} \|z_k^K(t)\|_1 \le C\frac{\rho^{|k|}}{\varepsilon^{|k|}} T^{|k|+1} e^{T4\rho/\varepsilon} \left\|f\right\|_{H_0^{k+1}(0,T;L^2(\Omega))}.$$

常数 C 仅取决于 K；只要右端项有界，该结论仍然成立。

证明。 结合 2–3 号命题的拉普拉斯域界与 [26, Lemma 2.1], 中表述的 Plancherel公式，再利用索伯列夫嵌入 $C^1([0,T]) \subset H^1([0,T])$，即可直接得到该结论。 □

注 4.1. 类似地，对系数应用拉普拉斯算子时，下述界成立，即对 $k \geq 0$我们有

$$\|\Delta z_k^K\|_{H_0^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\rho^k \varepsilon^k T^{2k+1} e^{T4\rho/\varepsilon} \left\|\Delta^{K+1} f\right\|_{H_0^{K+1}(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{36}$$

其中常数 C 仅依赖于 K。

4.3. 时变调制波动方程的能量估计

本节给出时间调制声波方程的能量估计。声波在给定时刻 t 的能量由下式给出

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\int_D |\partial_t u(x,t)|^2 + \mu(x,t/\varepsilon)\left|\nabla u(x,t)\right|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

在方便时，记号中省略无处不在的空间变量 x 。下述引理给出充分正则的解的能量变化恒等式，我们采用 [28, 引理 2.1] 的表述。

引理 5. 设 $u \in C^2(0,T;H^1(D))$ 是演化问题 (1) 的解，并进一步设 μ 按 (1) 中的方式缩放。那么对所有 $t > 0$, 能量恒等式为

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) = \int_0^t \int_D \partial_t u(x,t') f(x,t') + \frac{\mu'(x,t'/\varepsilon)}{\varepsilon}\left|\nabla u(x,t')\right|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t'.$$

将该恒等式与 Gr¨onwall 引理结合，可得以下界，其中我们采用 [28,命题2。1]。

命题 8. 在引理5的条件下，有如下能量估计

$$\mathcal{E}(t) \leq e^{C'_\mu(t+\varepsilon)}\left(\mathcal{E}(0) + \frac{1}{4C'_\mu}\int_0^t \|f(t')\|^2_{L^2(\Omega)}\,\mathrm{d}t'\right),$$

其中常数为

$$C'_\mu = \frac{2}{2\pi\varepsilon^2}\int_0^{2\pi\varepsilon}\left\|\frac{\mu'(t'/\varepsilon)_+}{\mu(t/\varepsilon)}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\mathrm{d}t' \;\propto\; \frac{\rho}{\varepsilon}.$$

注 4.2. 当 $\mu(t/\varepsilon) = 1 + 2\rho\cos(t/\varepsilon)$ 时，常数为

$$C'_\mu = \frac{4\rho}{2\pi\varepsilon}\left(\int_0^\pi \sin(t)(1 - 2\rho\cos(t))\mathrm{d}t' + \mathcal{O}(\rho^2)\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{4}{\pi} + \mathcal{O}(\rho^2)\right).$$

4.4. 误差界的证明

将调制傅里叶展开代入时间调制声波方程（1），可得到（2）中余项的刻画。将系数 z^K的衰减条件（如命题 7所述）与命题 8 中的能量估计相结合，可得如下误差界。

命题 题 9。设 $\Delta^{K+1} f \in H_0^{K+1}(0,\ T;\ L^2(\Omega))$。则（2）的余项 R_K 满足如下界

$$\sup_{t\in[0,T]} \|R_K(t)\|_1 \leq C\rho^K \varepsilon^{K+1} e^{T4\rho/\varepsilon} T^{2K+1} \left\|\Delta^{K+1} f\right\|_{H_0^{K+1}(0,T;L^2(\Omega))},$$

其中常数 C 仅取决于 K。

证明。 将调制傅里叶展开代入时间调制声波方程，根据系数的构造可得 z_k^K

$$(\partial_t^2 - (1+2\rho\cos(t/\varepsilon))\Delta) \sum_{k=-K}^{K} z_k^K(x,t) e^{ikt/\varepsilon} = f + \rho\Delta\left(z_{-K}^K e^{i(-K-1)t/\varepsilon} + z_K^K e^{i(K+1)t/\varepsilon}\right).$$

因此，减去时间调制声波方程可得余项 R_K 满足如下误差方程

$$(\partial_t^2 - (1+2\rho\cos(t/\varepsilon))\Delta)\dot{R}_K = \rho\Delta\left(z_{-K}^K e^{i(-K-1)t/\varepsilon} + z_K^K e^{i(K+1)t/\varepsilon}\right).$$

该结论是 n 这是命题 8 的能量估计结合式（36）的直接推论 .

□

5. 多频展开的结构性影响

调制傅里叶展开对时间调制声波方程的精确解具有重要影响，以下两个小节将对此进行探讨。

5.1. 短时间内一个意想不到的准守恒性质

以引理 5 中量化的能量变化为基础进行 Gr¨onwall 论证，会忽略调制振荡特性带来的抵消效应。利用这些抵消效应，我们得到了短时间内更强的能量准保持性质。

命题10。 考虑调制为（3）的时间调制声波方程。设右端项满足 $\Delta f \in H_0^2$（0, $\tilde{}T$; L^2（Ω）的支集包含于 $[0, \tilde{}T]$（即当 $t > \tilde{}T$ 时为零），并进一步设 $T > \tilde{}T$ 为某个较晚时刻。则存在常数 C，使得

$$\left|\mathcal{E}(T) - \mathcal{E}(\widetilde{T})\right| \leq C\rho e^{CT\rho/\varepsilon}.$$

常数 C 仅取决于几何形状 Ω、终止时间 T 和右端项 f，与 ρ和 ε 无关。

证明。 将调制傅里叶展开代入能量恒等式，并应用命题 9的误差界后，可得估计

$$\mathcal{E}(\widetilde{T}) - \mathcal{E}(T) = \int_T^{\widetilde{T}} \int_\Omega \left(\frac{d}{dt}\mu(t/\varepsilon)\right) |\nabla u(t)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \sum_{j,k=-1}^{1} \int_T^{\widetilde{T}} \int_\Omega \frac{\mu'(t/\varepsilon)}{\varepsilon} e^{i(j-k)t/\varepsilon} \nabla \bar{z}_k^K \cdot \nabla z_j^K \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\rho^3\varepsilon\right).$$

调制的导数（4）具有如下形式

$$\frac{\mu'(t/\varepsilon)}{\varepsilon} = -\frac{\rho}{\varepsilon}\sin(t/\varepsilon) = \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{e^{-it/\varepsilon} - e^{it/\varepsilon}}{2i}.$$

将此表达式代入右端项可得

$$\mathcal{E}(\widetilde{T})-\mathcal{E}(T)=\frac{\rho}{\varepsilon}\sum_{j,k=-1}^{1}\int_{T}^{\widetilde{T}}\int_{\Omega}\frac{e^{i(j-k-1)t/\varepsilon}-e^{i(j-k+1)t/\varepsilon}}{i}\nabla\overline{z}_{k}^{K}\cdot\nabla z_{j}^{K}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\mathcal{O}\left(\rho^{3}\varepsilon\right).$$

被积函数中含有高频振荡因子的每一求和项均为 $\mathcal{O}(\rho)$ 阶，这是由于系数函数 z_j^K具有命题 6 所示的高时间正则性。因此，我们现在只考虑主阶中含有高频振荡项的那些项，并将所有其他项纳入余项，从而得到

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{E}(\widetilde{T})-\mathcal{E}(T)\right|&=\frac{\rho}{\varepsilon}\left|\sum_{k=-K}^{K-1}\int_{T}^{\widetilde{T}}\int_{\Omega}\nabla\overline{z}_{k}^{K}\cdot\nabla z_{k+1}^{K}-\nabla\overline{z}_{k}^{K}\cdot\nabla z_{k-1}^{K}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|+\mathcal{O}\left(\rho\right)\\&\leq i\frac{\rho}{\varepsilon}\sum_{k=-1}^{1}\int_{T}^{\widetilde{T}}\left\|z_{k}^{K}\right\|_{1}\left\|z_{k+1}^{K}\right\|_{1}+\left\|z_{k}^{K}\right\|_{1}\left\|z_{k-1}^{K}\right\|_{1}\mathrm{d}t+\mathcal{O}\left(\rho\right).\end{aligned}$$

该结论随后通过代入衰减界（36）而得到，这些界针对系数 z_k^K。

□

5.2. 多频展开的不变量

我们考虑关于 $f=0$ 的耦合系统，它对所有 $-K\leq k\leq K$ 均写为：

$$(\partial_t+ik/\varepsilon)^2z_k^K-\Delta z_k^K-\rho\Delta(z_{k-1}^K+z_{k+1}^K)=0. \tag{38}$$

就本节而言，我们假设系数要么满足某些非零初始条件（这些条件在注 2.3 的意义下是对称的），要么在某个 f 下求解动力系统，且该量在所关注的时间区间上为零。只要激励消失，该系统便具有一种守恒性质，这将在下面的命题中加以探讨。

命题 11. 耦合系统的解 (38)在右端项 f 为零时，守恒以下量 $E\in\mathbb{R}$，即表达式

$$E=\sum_{k=-K}^{K}\|\dot{z}_k^K\|^2-\frac{k^2}{\varepsilon^2}\|z_k^K\|^2+\|z_k^K\|_1^2+\rho\,\mathrm{Re}\left(\nabla z_k^K,\nabla z_{k-1}^K\right)$$

为常数。

证明. 用 k-th component of (5) 检验 $\dot{z}_k^K=\partial_t z_k^K$并对所有 k 求和，得到

$$\sum_{k=-K}^{K}\left(\dot{z}_k^K,(\partial_t+ik/\varepsilon)^2z_k^K\right)+\left(\nabla\dot{z}_k^K,\nabla z_k^K\right)+\rho\left(\nabla\dot{z}_k^K,\nabla(z_{k-1}^K+z_{k+1}^K)\right)=0. \tag{39}$$

对于第一分量中各项的实部，我们得到

$$\mathrm{Re}\left(\dot{z}_k^K,(\partial_t+ik/\varepsilon)^2z_k^K\right)=\mathrm{Re}\left(\dot{z}_k^K,\partial_t^2z_k^K\right)-\mathrm{Re}\,\frac{k^2}{\varepsilon^2}\left(\dot{z}_k^K,z_k^K\right)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\dot{z}_k^K\|^2-\frac{k^2}{\varepsilon^2}\|z_k^K\|^2\right).$$

对于（39）中的第二项，我们得到

$$\left(\nabla \dot{z}_k^K, \nabla z_k^K\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\nabla z_k^K\right\|^2.$$

最后，对于第三个求和式，我们先通过指标移位得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\sum_{k=-K}^{K}\left(\nabla \dot{z}_k^K, \nabla(z_{k-1}^K + z_{k+1}^K)\right) &= \mathrm{Re}\sum_{k=-K}^{K}\left(\nabla \dot{z}_k^K, \nabla z_{k-1}^K\right) + \left(\nabla z_{k+1}^K, \nabla \dot{z}_k^K\right)\\ = \mathrm{Re}\sum_{k=-K+1}^{K}\left(\nabla \dot{z}_k^K, \nabla z_{k-1}^K\right) + \left(\nabla z_k^K, \nabla \dot{z}_{k-1}^K\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\sum_{k=-K+1}^{K}\left(\nabla z_k^K, \nabla z_{k-1}^K\right).\end{aligned}$$

注意，我们使用记号 $z_{-K-1}^K = z_{K+1}^K = 0$。 □

注 5.1。 当 ε 足够大且 ρ 足够小时，命题 *11* 中的守恒律的第二项和第四项可以被吸收。于是，命题 *11* 的守恒律意味着，耦合动力系统 (5)的解在任意长的时间内都保持有界。

6. 耦合动力系统的时间离散化

由于函数 z^K 及其导数在时间上具有正则性（对于足够光滑的右端项），因此自然的做法是对它们进行近似，而非对时间调制声波方程的振荡解 u 进行近似。设 $t_n = n\tau$ 和 $z^{K,n}{}_k \approx z_k^K(t_n)$。将梯形法则应用于耦合系统（5）可得

$$\begin{aligned}&\frac{z_k^{K,n+1} - 2z_k^{K,n} + z_k^{K,n-1}}{\Delta t^2} + \frac{2ik}{\varepsilon}\frac{z_k^{K,n+1} - z_k^{K,n}}{\Delta t} - \frac{k^2}{\varepsilon^2}\frac{z_k^{K,n+1} + z_k^{K,n}}{2}\\ &-\Delta\frac{z_k^{K,n+1} + z_k^{K,n}}{2} - \frac{\rho}{2}\Delta\left(z_{k-1}^{K,n+1} + z_{k-1}^{K,n} + z_{k+1}^{K,n+1} + z_{k+1}^{K,n}\right) = \delta_{k0}\frac{f(t_n) + f(t_{n+1})}{2}.\end{aligned} \tag{40}$$

这类经典时间步进格式等价于将卷积求积法应用于系统（34）（例如，参见 [26]）。因此，将标准理论与第3节的拉普拉斯域界相结合，是获得近似误差界的一种方便而自然的途径。下一节将简要介绍这些方法，以给出上述及类似时间步进格式的误差界。

6.1. 作为卷积求积的时间步进

卷积求积法是对经典时间步进格式的扩展，它通过步长为 $\tau > 0$的离散卷积来离散时间卷积（31）。关于这类方法及其最初针对波动类问题的推导，读者可参见 [26]。其近似形式为

$$\left(K(\partial_t^\tau)g\right)(t) := \sum_{j\geq 0}\omega_j\, g(t - j\tau),$$

其定义在 $0 \leq t \leq T$ 上，但通常仅在网格 $t_n = n\tau$ 上考虑，因此右端项中只出现 g 的网格值。卷积求积权重定义为生成幂级数的系数

$$\sum_{j=0}^{\infty}\omega_j\,\zeta^j := K\left(\frac{\delta(\zeta)}{\tau}\right), \tag{41}$$

其中，我们选取 $\delta(\zeta)$ 作为梯形法则的生成多项式

$$\delta(\zeta) = \frac{2(1-\zeta)}{1+\zeta}.$$

该方法是 A稳定的，也就是说，我们有 $\mathrm{Re}\,\delta(\zeta) \geq 0$ 对于 $|\zeta| \leq 1$，这确保了在计算权重（*41*）时，仅在其解析域内对 K 求值。这类方法的一个关键性质是离散运算微积分：正如 $K(\partial_t)L(\partial_t)g = (KL)(\partial_t)g$，我们也有复合规则

$$K(\partial_t^\tau)L(\partial_t^\tau)g = (KL)(\partial_t^\tau)g. \tag{42}$$

6.2. 离散化耦合系统

应用时间　　离散化到耦合系统（34）后，得到时间离散格式　　e

$$(D_K^2(\partial_t^\tau) + \mathcal{T}_\Delta)z_\tau^K = f^K, \tag{43}$$

根据复合规则（42），该格式等价于对左端算子求逆，因为根据命题 4，拉普拉斯域对应算子的逆存在。因此，近似的显式形式为

$$z_\tau^K = (D_K^2(\partial_t^\tau) + \mathcal{T}_\Delta)^{-1} f^K, \tag{44}$$

其中右端　　项是方程 3 的预解算子的卷积求积近似　　5.

注6.1（表述的等价性）。比较格式(43) 与格式(40) 的生成函数可知，二者在数学上等价。但在计算上，这两种方法有所不同。经典格式(40)（结合标准空间离散）易于实现，并可构成时间推进代码，依次求解各时间步的近似值 $z^K(t_n)$）；在这一过程中，需要对同一个线性系统针对许多不同的右端项进行求逆。另一种做法是通过(44)将该格式实现为卷积求积法，相关讨论见例如 *[4]*。这里需要在 (N) 个不同的 $s \in \mathbb{C}_+$ 值处对拉普拉斯域系统 (28) 进行近似；这些计算可以并行完成，但会带来一定的计算开销。

误差界可直接由拉普拉斯域界和一般的卷积求积近似结果推出（即 [4, 定理A。2]）。

定理 3。考虑时间耦合系统（34）（或其多模态对应系统（9））及其梯形法离散（43）在时刻 $t_n = n\tau$，满足 $t_n\rho < C\varepsilon$。那么，当右端项 f 具有充分的时间正则性时，我们有如下估计：

$$\left\| z^K(t_n) - (z_\tau^K)_n \right\|_1 \leq C\tau^2 \|f\|_{H_0^4(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{45}$$

常数 C 取决于终止时间 T 和调制 μ。

证明。该证明直接来自命题 4 的拉普拉斯域界以及基于梯形法则的卷积求积法的一般逼近结果 [4,定理 A。2], 其应用于近似式（44）。□

注 6.2（高阶方法与误差界）。由于系数 z^K具有很高的时间正则性，这一点由命题6保证，因此只要右端项 f 具有足够的时间正则性且 τ 足够小，高阶离散方法的表现就优于梯形法则。由于 *Dahlquist* 阶数障碍排除了阶数高于2的 *A*稳定离散方法，多阶段方法自然成为关注的对象，而且往往优于基于多步法的格式，尤其是在卷积求积法的背景下（见 *[4]*）。根据拉普拉斯域分析，

对于一般方法类，误差界可直接通过重复定理 3 的论证并采用适当的一般逼近结果得到，其中 *[6,* 定理 *3]*可用于强稳定的龙格–库塔方法（如 *Radau IIA* 方法），也可用于 *[5]* 基于高斯的方法。

7. 数值实验

用于开展实验和生成图表的代码可通过 GitHub[1]获取。我们的数值研究基于区域 $\Omega = (0,1)$上的一维声波方程，并采用齐次狄利克雷边界条件。对于调制，我们仅考虑空间齐次调制（4）。系统由右端项中的一个平衡源项激励，其形式为

$$f(x,t) = g(x,t-t_0) - g(x,t-t_0-0.1), \tag{46}$$

其中时空高斯函数为

$$g(x,t) = e^{-100(x-0.5)^2-10t^2}.$$

激励采用相反符号，在时刻$t_0 = 1$ 附近激发一个小波包；仿真则观测波动方程的行为，直至终止时间$T = 4$。我们采用标准有限元方法对空间积分器 $-\Delta$进行离散化，具有 1000 个自由度。作为误差度量，我们计算时间和空间上的L^2–范数，其表达式为

$$\mathrm{ERR} = \left(\sum_{n=0}^{N} \|e_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

时间积分器的误差行为。图 1展示了两种不同积分器的时间收敛性：首先，考察将标准梯形法则应用于时间调制声波方程（1）所得的误差。正如预期，只有当步长 τ 小于时间振荡的尺度 ε时，该方法才收敛。其次，我们考察通过梯形法则近似系数 z^K 所产生的近似误差，即方程 43的近似。耦合系统在 $K = 3$处截断，从而确保截断误差足够小，以便观察将梯形法则应用于耦合动力系统时的收敛性。为计算误差，我们采用一个参考解，该解使用 $N = 2^{14}$ 个时间步并采用相同的空间离散化计算得到。

解的可视化。考虑解 u 在与之前相同的设定下，即采用正则右端项f （46），$\rho = 0.4$ 和 $\varepsilon = 0.04$。这里，我们采用具有 500 个自由度的空间离散，现将其与耦合动力系统的梯形时间离散相结合，后者使用 $N = 2^8 = 256$ 个时间步。图 2 展示了解 u 的近似，该解属于时间调制声波方程。该解呈现出振荡行为，在终止时间处更为明显。我们注意到，该可视化所描绘的时间超出了理论所涵盖的范围，因为常数对因子 $T\rho/\varepsilon = 40$ 在终止时间处呈指数依赖。尽管如此，对于这一具体例子，解直到该时间仍保持有界（尽管在该例子中观察到一定的增长）。光滑变化的系数函数 z_k 在图 3 中进行了可视化，图中显示了它们随时间变化的绝对值。

系数函数 z 的衰减$_k$。在有限指标K 处截断耦合动力系统所引入的缺陷，取决于系数函数z_k的衰减。

图4展示了对于（46）的正则右端项，在若干组 ε 和 ρ取值下的衰减情况。作为参考线，我们绘出了定理1所预测的衰减率，即 $\rho^k\varepsilon^k$。由于对称性$z_{-k} = \overline{z_k}$，负指标 $-k$ 也具有相同的衰减性质。对于所有 ε 和 ρ的取值，我们都观察到了显著的一致性

[1] https://github.com/joergnick/ModulatedFourierExpansion，最后访问日期为2026年2月5日。

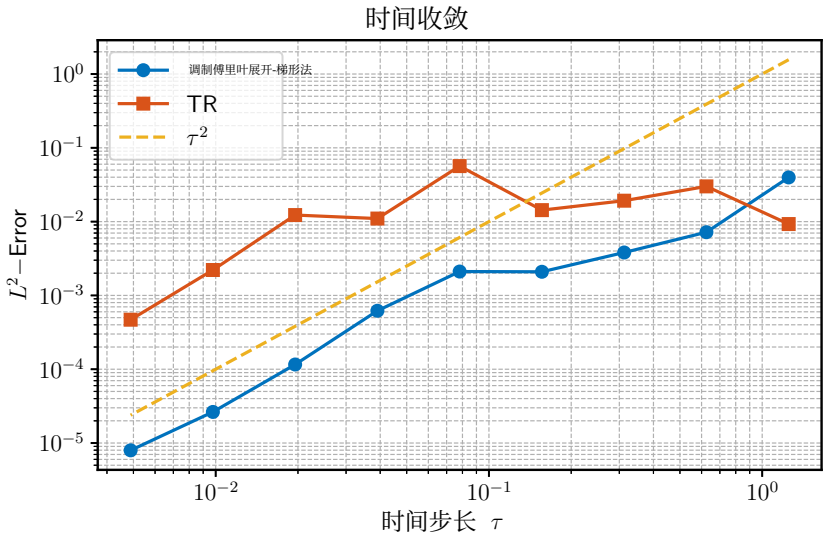


图 1. 对于 $\rho = 0.4$ 和 $\varepsilon = 0.04$，时间收敛误差以时空 L^2-范数衡量。解计算至终止时间 $T = 5$，并使用多频展开，取 $K = 3$。空间离散采用有限差分求解器，共有 1000 个自由度。

：理论预测结果与实际实验结果相符。需要指出的是，该理论并未给出关于 $K \to \infty$ 的收敛性结论（因为相关常数，例如定理1中的常数，并未得到关于 K 的控制）。

右端项的高空间正则性f是理论中的关键组成部分，用于证明定理 1中的高阶衰减估计。为测试低空间正则性源项的影响，我们考虑一种激励：它在任意时刻都是空间上的阶跃函数，其形式为

$$f(x,t) = \begin{cases} e^{-10(t-1)^2}, & \text{for} \quad \frac{1}{4} \le x \ \text{ or } \ x \le \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \tag{47}$$

值的衰减 z_k 对于这种低空间正则性的激励（具有 1000 个空间自由度、$N = 2^{12} = 4096$ 个时间步，直至终止时间 $T = 2$）如图 5 所示。值得注意的是，此处观察到的衰减远强于理论预测的结果（因为在不对空间正则性作任何假设的情况下，理论衰减只能由定理 2 估计，该定理预测的指数衰减率为 ρ/ε）。然而，缺乏高空间正则性确实会影响 z_k 的衰减性质：与图 *4* 相比，当 k 较大时，其指数衰减率明显变慢。

致谢

作者感谢 Habib Ammari 和 Martin J. Gander 提供支持，并给予作者独立开展这一课题的自由，同时感谢他们进行了许多有益的讨论。作者还感谢 Christian Lubich 富有启发性的讨论，正是这些讨论使作者接触到调制傅里叶展开。最后，作者感谢 Andreas Prohl 和 Bin Wang 提供的宝贵意见。

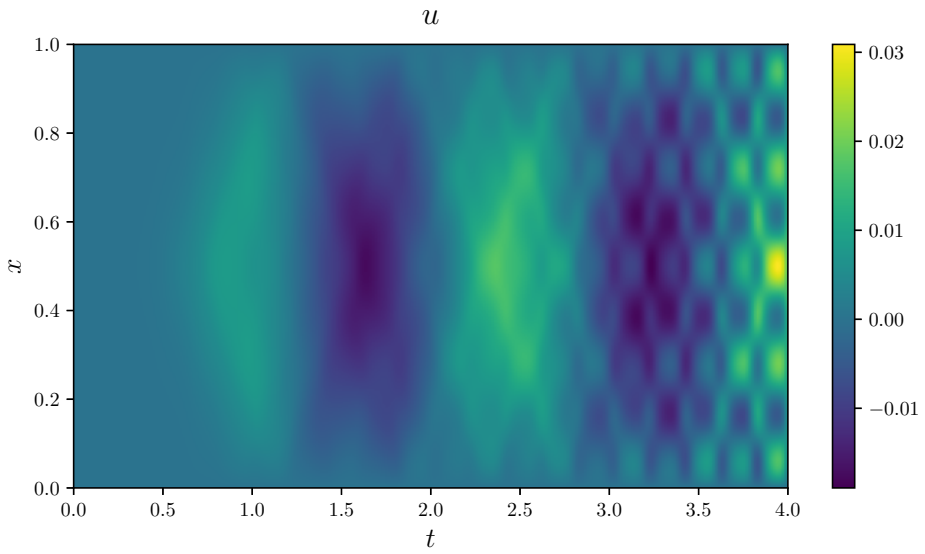


图 2. u 的可视化，具有 500 个空间自由度和 $N = 256$ 个时间步。参数设定为 $\rho = 0.4$ 和 $\varepsilon = 0.04$。

参考文献

[1] H. Ammari, J. Cao, and E. O. Hiltunen. 时空调制介质中的非互易波传播。*Multiscale Model. Simul.*, 20(4):1228–1250, 2022年。[2] H. Ammari, J. Cao, E. O. Hiltunen, and L. Rueff. 时变调制亚波长谐振器的散射。*Proc. A.*, 480(2289):论文编号 20240177, 22, 2024年。[3] V. Asadchy, A. Lamprianidis, G. Ptitcyn, M. Albooyeh, Rituraj, T. Karamanos, R. Alaee, S. Tretyakov, C. Rockstuhl, and S. Fan. 时变调制散射体中的参数Mie共振与定向放大。*Phys. Rev. Appl.*, 18:054065, 2022年11月。[4] L. Banjai. 波动方程的多步与多级卷积求积：算法与实验。*SIAM J. Sci. Comput.*, 32(5):2964–2994, 2010。[5] L. Banjai and M. Ferrari. 基于高斯方法的龙格-库塔卷积求积。《数值数学》, 156(5):1719–1750, 2024年。[6] L. Banjai, C. Lubich, and J. M. Melenk. 用于波传播中算子的龙格-库塔卷积求积。《数值数学》, 119(1):1–20, 2011。[7] L. Banjai and F.-J. Sayas. 演化偏微分方程的积分方程方法——卷积求积途径，载于第59卷*Springer*计算数学丛书。Springer，沙姆， [2022] ©2022年。[8] P. Chartier, N. Crouseilles, M. Lemou, and F. M´ehats. Klein-Gordon 方程与非线性薛定谔方程的高振荡一致精确数值格式。《数值数学》, 129(2):211–250, 2015。[9] D. Cohen, E. Hairer, and C. Lubich. 高振荡微分方程的调制傅里叶展开。*Found. Comput. Math.*, 3(4):327–345, 2003。[10] D. Cohen, E. Hairer, and C. Lubich. 通过调制傅里叶展开对非线性扰动波动方程进行长时间分析。*Arch. Ration. Mech. Anal.*, 187(2):341–368, 2008。[11] F. Colombini, D. Del Santo, and M. Reissig. 双曲柯西问题中系数的最优正则性。*Bull. Sci. Math.*, 127(4):328–347, 2003。[12] C. D¨oding and B. Verf¨urth. 时变介质中波传播的局部与非局部均匀化。*arXiv*预印本 *arXiv:2505.21390*，2025年。[13] F. Feppon and H. Ammari. 快速时变调制介质中的亚波长共振声散射。*J. Math. Pures Appl. (9)*, 187:233–293, 2024年。[14] J. Garnier. 周期与随机含时介质中的波传播。*Multiscale Model. Simul.*, 19(3):1190–1211, 2021。[15] L. Gauckler, E. Hairer, and C. Lubich. 缓变波速下半线性波动方程的长时间分析。*Comm. Partial Differential Equations*, 41(12):1934–1959, 2016。[16] L. Gauckler, E. Hairer, and C. Lubich. 动力学、数值分析与若干几何问题。载于《*2018*年里约热内卢国际数学家大会论文集》第一卷：大会报告，第453–485页。World Sci. Publ.，美国新泽西州哈肯萨克，2018年。

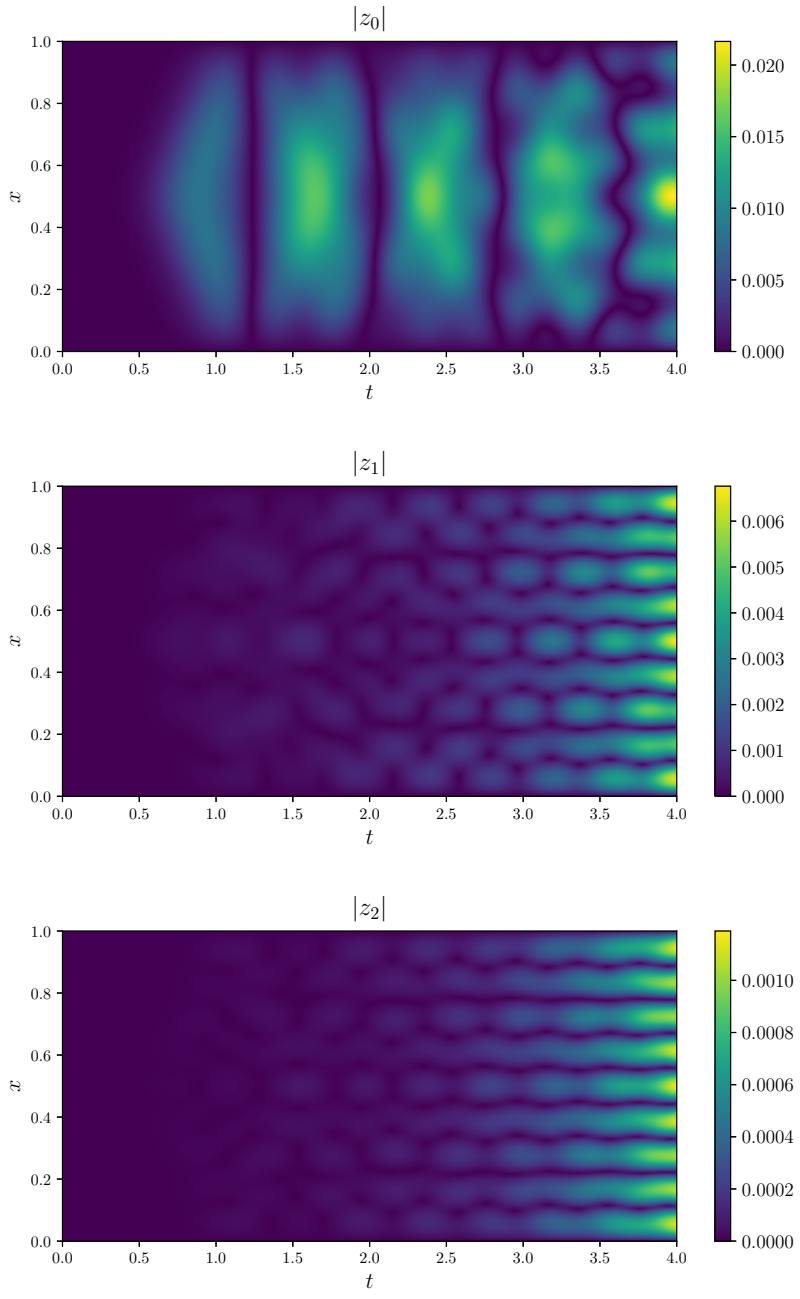


图3. 系数函数 z_0,z_1 和 z_2 用于计算图2的近似。

[17] K. Goto 和 F. Hirosawa。关于具有极快振荡系数和光滑初始数据的耗散波动方程的能量衰减估计。*J.Math.Anal.Appl.*，548(1)：论文编号 129386，36 页，2025年。

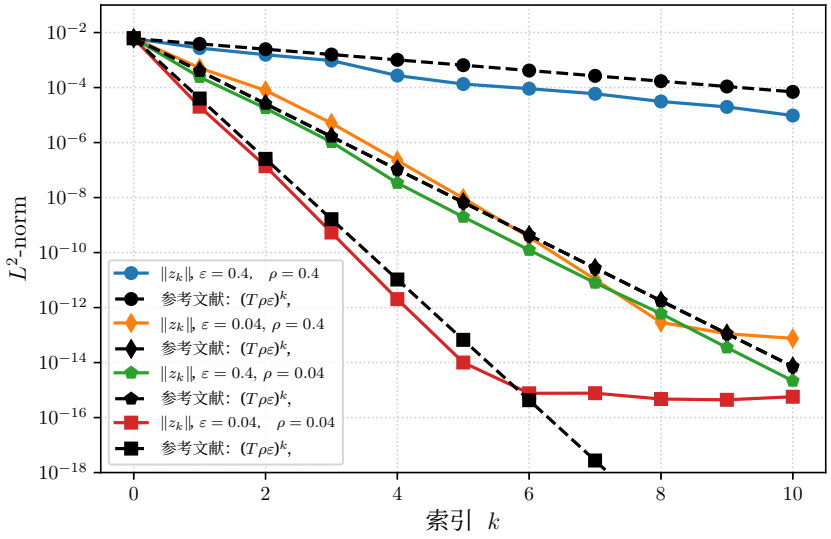


图4. 时空调制函数的 L^2-范数 z_k，其中 $k = 0,\ldots,K$ 取 $K = 10$，对应不同的 ε 和 ρ，正则右端项 f 见式（46）。

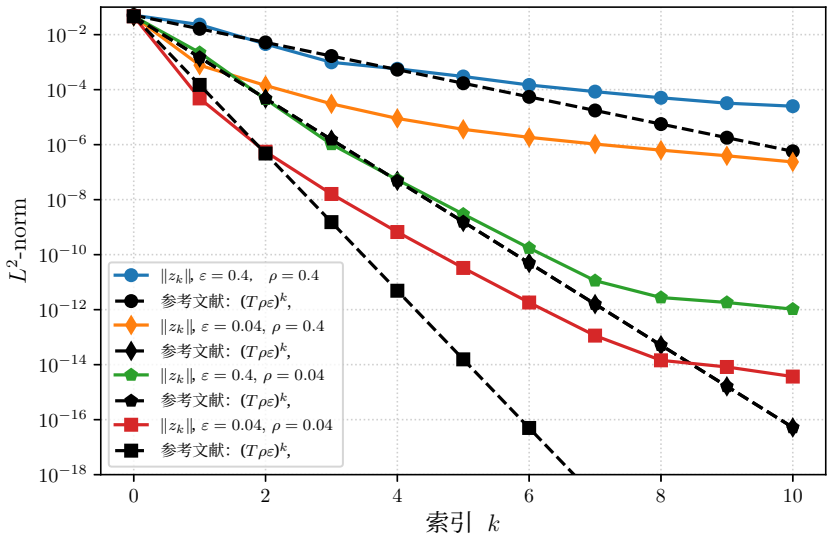


图5. 与图4相同的图，但对应于激励 f，该激励由方程 47描述，具有低空间正则性。

[18] E. Hairer 和 C. Lubich. 振荡微分方程数值方法的长时间能量守恒。*SIAM* 数值分析杂志，38(2):414–441，2000年。[19] E. Hairer、C. Lubich 和 G. Wanner。几何数值积分，*Springer*计算数学丛书第31卷。施普林格出版社，柏林，2002年。常微分方程的保结构算法。[20] E. Hairer 和 G. Wanner。常微分方程求解。*II*，*Springer*计算数学丛书第14卷。施普林格出版社，柏林，第2版，1996年。刚性问题与微分代数问题。

[21] E. O. Hiltunen 和 B. Davies. 时间调制点散射体引起的耦合谐波。《物理评论*B*》，110:184102，2024年11月。[22] E. O. Hiltunen 和 L. Rueff. 时间调制亚波长谐振器阵列的能量平衡与光学定理。*arXiv*预印本 *arXiv:2507.11201*，2025年。[23] F. Hirosawa 和 J. Wirth. 可变传播速度波动方程的广义能量守恒定律。*J. Math. Anal. Appl.*，358(1):56–74，2009年。[24] M. Kruskal. 带电粒子的回旋。技术报告，普林斯顿大学，新泽西州马特洪峰计划，1958年。[25] P. Kuchment. 偏微分方程的*Floquet*理论，《算子理论：进展与应用》第60卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1993年。[26] C. Lubich. 线性初边值问题及其边界积分方程的多步时间离散化。《数值数学》，67(3):365–389，1994年。[27] W. L. Miranker 和 M. van Veldhuizen. 包络法。《数学计算》，32(142):453–496，1978年。[28] J. Nick、R. Hiptmair 和 H. Ammari. 时间周期系数下的波散射：能量估计与谐波表述。*arXiv*预印本 *arXiv:2410.10297*，2024年。[29] T. Oka 和 S. Kitamura. 量子材料的Floquet工程。《凝聚态物理年度评论》，10(1):387–408，2019年。[30] M. Reissig 和 J. Smith. 波动方程的*L*

p q 34 3 541 586, *-L*估

2005

计（系数为有界时间依赖系数）。《北海道数学杂志》，( ): – 。[31] M. Reissig 和 K. Yagdjian. 时间依赖系数波动方程的Klein-Gordon型衰减率。载于演化方程：存在性、正则性与奇点（华沙，*1998*），《Banach中心出版物》第52卷，第189–212页。波兰科学院数学研究所，华沙，2000年。[32] C. Shen、X. Zhu、J. Li 和 S. A. Cummer. 时空调制耦合谐振器中的非互易声传输。《物理评论*B*》，100:054302，2019年8月。[33] S. Tarama. 系数属于某类Besov型类的波动方程能量估计。《电子微分方程杂志》，第85号，12页，2007年。[34] M. Touboul、B. Lombard、R. C. Assier、S. Guenneau 和 R. V. Craster. 时变调制波动方程的高阶均 homogenization：单一变化参数导致的非互易性。《皇家学会会刊*A*辑：数学、物理与工程科学》，480(2289):20230776，2024年。[35] X. Wu、X. You 和 B. Wang. 振荡微分方程的保结构算法。Springer，海德堡；北京科学出版社，北京，2013年。[36] K. Yi、M. Collet 和 S. Karkar. 时空调制介质诱导的频率转换。《物理评论*B*》，96:104110，2017年9月。[37] S. Yin、E. Galiffi 和 A. Al`u. Floquet超材料。*ELight*，2(1):8，2022年。