arXiv:2602.06160v1 [math.GR] 5 Feb 2026

关于一致完美的莫尔斯边界

Suzhen Han 和 Qing Liu

2026年2月9日

摘要

我们引入并从几何角度刻画适当测地度量空间的一致完美莫尔斯边界这一概念。作为一项统一性结果，我们证明，任意有限生成的非初等群，其莫尔斯边界只要非空，就一致完美。该定理适用于广泛的一类群，包括所有无轴双曲群、阿廷群和分层双曲群。

此外，我们为此类边界之间的同胚建立了一项刚性定理：对于任意两个具有一致完美莫尔斯边界的空间，同胚由拟等距诱导，当且仅当它满足若干自然几何条件中的任意一个。这些条件包括双 H¨older、拟共形、拟对称，或 2-稳定且拟 M¨obius。

1 引言与主要结果

格罗莫夫边界是格罗莫夫双曲空间的一项基本不变量，将其内部几何与拓扑联系起来。Gromov 的一项奠基性结果 [19] 断言，此类空间之间的拟等距会在其边界上诱导同胚。因此，对于双曲群，格罗莫夫边界是拟等距不变量，在同胚意义下良定义。

格罗莫夫边界的一种自然推广，是适当测地度量空间 X的莫尔斯边界 $\partial_* X$ 。它定义为莫尔斯测地射线的等价类集合，其中两条射线等价，当且仅当它们的像之间的豪斯多夫距离有界。经典结果表明，双曲空间中的所有测地线都是一致莫尔斯的。Charney 和 Sultan [10] 最早为 CAT(0)空间构造了莫尔斯边界，随后 Cordes [11]将其推广到所有适当测地度量空间。此后，该边界得到了广泛研究，并被证明继承了格罗莫夫边界 [8, 9, 12, 14, 22, 25, 26, 31, 32, 48, 50]的许多重要性质。本文聚焦于这一边界的一项特定基础性质——其一致完美性。

一致完美性的概念最早出现在共形动力学领域（归功于 Beardon 和 Pommerenke [1, 36]）以及几何函数论领域（Tukia 和 V¨ais¨al¨a [46]），当时最初被称为齐次稠密性。在随后的几十年中，它逐渐被证明是一种极具普适性的性质，对分析、几何和拓扑都具有深刻影响 [2, 6, 21, 23, 27–30, 42, 43, 47]。

关键词：一致完美、莫尔斯边界、莫尔斯测地线丰富、刚性。

对于一般度量空间，一致完美性有多种等价定义[28, 33, 43]。值得注意的是，Mart´ınez-P´erez 和 Rodr´ıguez [28] 将这一概念推广到有界度量空间，并将其应用于双曲流形和图的 Gromov边界。近年来，Liang 和 Zhou [24] 利用这一框架研究了双曲空间。

Gromov 边界与莫尔斯边界之间的一个根本区别在于拓扑：莫尔斯边界在其标准拓扑下通常不可度量化。这一内在特征对直接移植一致完美性的经典理论构成了重大障碍。尽管人们已经为某些群的莫尔斯边界构造了替代性的可度量化拓扑 [7, 13, 38], 但由此得到的度量在几何上晦涩难懂，不适合具体应用。我们的工作弥合了这一鸿沟。我们引入了一种内在适用于莫尔斯边界的一致完美性概念（定义 3.4），并在适当测地度量空间的背景下，为其建立了等价的几何刻画。我们的第一个主要结果如下：

定理 1.1. 设 X 是一个莫尔斯边界 $\partial_* X$ 至少包含 3 个点的适当测地度量空间。则以下陈述等价：

1. $\partial_* X$ 是一致完美的，且 X 是一致莫尔斯基点空间；
2. X 是莫尔斯测地线丰富的；
3. X 是中心穷尽的。

此外，上述每个等价条件都意味着 X 具有莫尔斯边界刚性。

测地度量空间的测地丰富性概念最早在 [40]中提出。这里我们将其推广为任意适当测地度量空间的莫尔斯测地线丰富性（定义 3.11）。边界刚性空间这一概念由 [24], 引入，它探讨了以下自然问题：对于双曲空间 X，从拟等距群到边界同胚群的典范同态 ∂: $\mathcal{QI}(X) \to \mathrm{Homeo}(\partial X)$何时是单射？若 ∂ 是单射，我们就称 X 具有边界刚性。莫尔斯边界的类似概念见定义 3.8。对于适当余紧空间，我们得到如下直接刻画：

定理 1.2. 设 X 是一个适当、余紧的测地度量空间，其莫尔斯边界 $\partial_* X$至少包含 3 个点。那么 $\partial_* X$ 是一致完美的，并且 X 既是莫尔斯测地线丰富的，又具有莫尔斯边界刚性。

代数与几何之间的一个关键联系由以下事实给出（[25]中的推论 5.8）：对于有限生成群 G, 若 $\partial_* G$ 非空且 G 不是几乎循环的，则∂_G 包含无穷多个（因而至少三个）点。将此与定理 1.2 相结合，我们得到一个统一准则，将代数、几何与边界理论性质联系在一起：

定理 1.3. 设 G 是一个莫尔斯边界非空且不是几乎循环的有限生成群。则莫尔斯边界 $\partial_* G$是一致完美的，且 G 是莫尔斯测地线丰富且莫尔斯边界刚性的。

本定理的假设适用于一大类重要的群，包括但不限于：无轴双曲群（包括双曲群、相对双曲群、映射类群和 $\mathrm{Out}(F_n)$）；阿廷群；考克斯特群；小

消去群；分层双曲群（包括 CAT(0) 群、3-流形群等）；以及莫尔斯局部到整体群。参见例如 [9, 14–16、18、20、31、34、39、41、44、45、48–50]。

几何群论中的一个核心主题是，一个空间在多大程度上由其边界决定。对于格罗莫夫双曲空间，这一问题有着丰富的研究历史 [3, 4, 35], ，并已推广到更一般的情形 [8, 26, 31]。

莫尔斯边界的一致完美性为将边界同胚延拓为拟等距提供了一个自然框架。我们工作的一个关键创新在于揭示，一致完美性恰好是实现此类延拓的条件。我们的刚性定理如下：

定理 1.4. 设 X、Y 为适当测地度量空间，且 $f\colon \partial_* X \to \partial_* Y$ 为一个同胚。假设 X 和 Y 各自满足定理 1.1 中的等价条件之一。那么以下陈述等价：

1. f 是由拟等距 $F\colon X \to Y$ 诱导的；2. f 和 f^{-1} 是双赫尔德连续的；3. f 和 f^{-1} 是拟共形的；4. f 和 f^{-1} 是拟对称的；5. f 和 f^{-1} 是 2-稳定且拟莫比乌斯的。

本文结构如下。第2节回顾格罗莫夫双曲空间、莫尔斯测地线以及莫尔斯边界的必要背景。第3节专门引入莫尔斯边界的 Morse 测地线丰富性、中心穷尽性与一致完美性等关键概念。第4节给出我们主要刻画定理（定理 1.1）的证明。第5节证明这些性质在拟等距下保持不变。最后一节包含刚性定理（定理 1.4）的证明。

致谢

两位作者感谢 Wenyuan Yang、Hao Liang、Chenxi Wu 和 Qingshan Zhou 的有益讨论。我们也感谢审稿人的仔细阅读以及诸多宝贵意见与建议。Han 得到国家自然科学基金（批准号 12401082）的资助。Liu 部分得到国家自然科学基金（批准号 12301084）以及天津市自然科学基金（批准号 22JCYBJC00690、22JCQNJC01080）的资助。

2 预备知识

我们回顾基本定义并确定记号。全文中，X 表示一个度量空间，其度量为 d。

X 中的测地线是从 $\mathbb{R}$ 的一个有限或无限区间到 X的等距嵌入；我们将其与其像等同。若任意两点之间都存在一条测地线，则 X 是测地度量空间；若所有闭球都是紧的，则称其为适当空间。

对于 $A \subseteq X$ 和 $r \geq 0$，定义 $\mathcal{N}_r(A) := \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$ 其中 $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$。豪斯多夫距离为

$$d_{\mathcal{H}}(A_1, A_2) := \inf\{r \geq 0 : A_1 \subseteq \mathcal{N}_r(A_2) \text{ and } A_2 \subseteq \mathcal{N}_r(A_1)\}.$$

定义 2.1（拟等距嵌入与拟等距）。映射 $f: (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 是一个 (K, C)-拟等距嵌入（$K \geq 1$，$C \geq 0$），如果对所有 $x, x' \in X$，

$$\frac{1}{K} d_X(x, x') - C \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq K d_X(x, x') + C.$$

此外，若 $\mathcal{N}_C(f(X)) = Y$，则 f 是一个 (K, C)-拟等距。

定义 2.2. 若一条测地线 $\alpha \subseteq X$ 满足存在 $N: \mathbb{R}_{\geq 1} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得每条端点位于 α 上的 (K, C)-拟测地线都包含于 $\mathcal{N}_{N(K,C)}(\alpha)$ 中，则称其为莫尔斯测地线。我们称 N 为莫尔斯控制函数，并称 α 是 N- 莫尔斯的。

对于 $x, y \in X$，记连接它们的测地线段为 $[x, y]$。若 α 是一条测地线且 $x, y \in \alpha$，则用 $[x, y]_\alpha$ 表示定向子线段（方向从 x 到 y，可能与 α 本身的方向一致，也可能相反）。拼接曲线记作 $[x, y]_\alpha \cup [y, z]$。对于一条双无限莫尔斯测地线 α，令 $\alpha_-, \alpha_+ \in \partial_* X$ 为其端点；对于一条莫尔斯射线 σ，用 σ_+ 表示其边界点。一般而言，两点之间的测地线并不唯一。在后续关于 $[x, y]_\alpha \cup [y, z]$ 的讨论中，线段 $[y, z]$ 通常由上下文预先确定，而非任意选取。此外，我们考虑测地线段与测地射线的拼接，因此所得拼接路径的两个端点可以位于莫尔斯边界 $\partial_* X$ 上。

下面陈述若干关于莫尔斯测地线的初等结果，这些结果将在后续论证中用到。

引理 2.3. *[25]*对于任意莫尔斯控制函数 N，存在一个莫尔斯控制函数 N'（仅依赖于N），使得每条 N-莫尔斯测地线的任意子路径都是 N'-莫尔斯的。

引理 2.4. 设 p、q、$r \in X \cup \partial_* X$、$o \in X$，并假设 $\alpha_1 = [r, p]$ 是 N-莫尔斯的。取满足 $d(o, o_1) \leq D$ 的 $o_1 \in \alpha_1$，并令 $o_2 \in \alpha_2 = [p, q]$ 为离 o最近的点。那么：

1. 拼接$[o, o_2] \cup [o_2, p]_{\alpha_2}$是一条 (3,0)-拟测地线。

2. 存在 $x \in \alpha_1$和一个常数 $C = C(N, D)$，使得 $d(x, o_2) \leq C$..

证明。我们首先验证拼接 $[o, o_2] \cup [o_2, p]_{\alpha_2}$ 构成一条 (3, 0)-拟测地线。由于 $[o, o_2]$ 和 $[o_2, p]_{\alpha_2}$ 是测地线，只需对任意点 $y_1 \in [o, o_2]$ 和 $y_2 \in [o_2, p]_{\alpha_2}$ 验证拟测地线不等式即可。由于 $o_2 \in \alpha_2$ 是距离 o 最近的点，因此 $d(o_2, y_1) \leq d(y_1, y_2)$。应用三角不等式，我们得到

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, o_2) + d(o_2, y_2) \leq d(y_1, y_2) + (d(y_2, y_1) + d(y_1, o_2)) \leq 3d(y_1, y_2).$$

这就完成了该不等式的证明。

接下来，我们根据 $p \in X$ 或 $p \in \partial_* X$ 分两种情形讨论。设点 $p \in X$。定义拼接 $\eta_1 = [o_1, o] \cup [o, o_2] \cup [o_2, p]_{\alpha_2}$。它是一条 $(3, D)$-拟测地线。由于测地线 α_1 是 N-莫尔斯的，因此 $o_2 \in \eta_1 \subset \mathcal{N}_{N(3,D)}(\alpha_1)$。特别地，存在一点 $x \in \alpha_1$，使得 $d(x, o_2) \leq N(3, D)$。

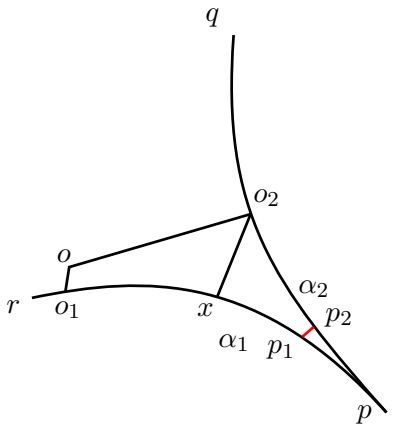


图 1：图注

设点 $p \in \partial_* X$。根据假设，测地线 α_1 和 α_2 渐近于边界上的同一点 p。由 [11]，中命题 2.4 的证明可知，存在一个仅依赖于 N 的常数 $D_0 > 0$，使得存在 $p_1 \in [o_1, p]_{\alpha_1}$ 和 $p_2 \in [o_2, p]_{\alpha_2}$，满足 $d(p_1, p_2) \leq D_0$（见图 1）。考虑拼接 $\eta_2 = [o_1, o] \cup [o, o_2] \cup [o_2, p_2]_{\alpha_2} \cup [p_2, p_1]$。它构成一条 $(3, D_0 + D)$-拟测地线。由于测地线 α_1 是 N-莫尔斯的，拼接 η_2 位于 α_1 的 $N(3, D_0 + D)$-邻域内。因此，存在 $x \in \alpha_2$ 使得 $d(x, o_2) \leq N(3, D_0 + D)$。最后，令 $C = \max\{N(3, D_0 + D)\ N(3, D)\}$。常数 C 仅依赖于 N 和 D。

□

如果三角形的每条边都包含在另外两条边并集的 δ-邻域内，则称该测地三角形为 δ-薄。

以下引理结合了 [8]，中的引理 2.3 和引理 2.4，将原始表述（在 [11] 中针对 X 中的顶点给出）推广到了顶点可以位于莫尔斯边界上的情形。

引理 2.5（薄三角形与莫尔斯三角形）。设 $\triangle(p, q, r)$ 是一个顶点为 p、q、$r \in X \cup \partial_* X$ 的三角形。假设 $\triangle(p, q, r)$ 的任意两条边都是 N-莫尔斯的。那么存在一个常数 δ_N 和一个莫尔斯控制函数 N'，二者仅依赖于 N，使得第三条边是 N'-莫尔斯的，并且三角形 $\triangle(p, q, r)$ 是 δ_N-薄的。

对于任意 $K > 0$，长度至多为 K 的每条测地线都是某个 $N = N(K)$-莫尔斯的。因此，在使用引理 2.5 时，我们可以考虑一条或多条边长度有界的三角形。

2.1 双曲空间的边界

我们简要回顾格罗莫夫边界及其视觉度量的构造；详细介绍可见 [5, 17]。

定义 2.6。设 (X, d) 是一个度量空间，且 $x, y, z \in X$。x 和 y 关于 z 的格罗莫夫积定义为

$$(x \cdot y)_z = \frac{1}{2}(d(x, z) + d(y, z) - d(x, y))$$

在下述定义中，空间 X 不一定是测地空间。

定义 2.7. 设 (X,d) 为一个度量空间，$\delta \geq 0$ 为一个常数。我们称 X 是 δ-双曲的，如果对所有 $x,y,z,w \in X$，我们有

$$(x \cdot y)_w \geq \min\{(x \cdot z)_w, (y \cdot z)_w\} - \delta.$$

设 $o \in X$ 为一个基点。X 中的序列 (x_n) 在无穷远处收敛，如果当 $i,j \to \infty$ 时 $(x_i \cdot x_i)_0 \to \infty$。$X$ 中的两个收敛序列 (x_n) 与 (y_n) 称为等价的，如果当 $i,j \to \infty$ 时 $(x_i \cdot y_j)_o \to \infty$。等价类 (x_n) 记为 $\lim x_n$。序列边界 $\partial_s X$ 定义为等价类的集合。在本文中，我们将省略下标 s。设 $x,y \in \partial X$。我们将格罗莫夫积延拓到 ∂X，方式如下：

$$(x \cdot y)_o = \sup \liminf_{i,j \to \infty} (x_i \cdot y_j)_o,$$

其中上确界取遍 X 中满足 $x = \lim x_i, y = \lim y_j$ 的所有序列 $(x_i), (y_j)$

定义 2.8。设 X 是带有基点 o 的双曲空间。d 上的一个度量 ∂X 称为参数为 $\epsilon > 0$ 的视觉度量，若存在常数 k_1、$k_2 > 0$，使得对于所有 p、$q \in \partial X$，

$$k_1 \exp(-\epsilon(p \cdot q)_0) \leq d(p,q) \leq k_2 \exp(-\epsilon(p \cdot q)_0).$$

下面给出在 ∂X 上构造度量的标准构造。设 X 是带有基点 o 的 δ-双曲空间。设 p、$q \in \partial X$、$\epsilon > 0$。考虑如下内容：

$$d_{o,\epsilon}(p,q) = \inf \sum_{i=1}^{n} \exp(-\epsilon(p_{i-1} \cdot p_i)_0),$$

其中，下确界取遍 ∂X 中的所有有限序列 $p = p_1$、p_2、……、$p_n = q$，对 n 不作任何限制。

命题 2.9。设 X 是带有基点 o 的 δ-双曲空间。设 $\epsilon > 0$ 是满足 $4\delta\epsilon \leq \ln 2$ 的常数。则 $d_{o,\epsilon}$ 是 ∂X 上的视觉度量。对于所有 p、$q \in \partial X$，有

$$(3 - 2\exp(2\delta\epsilon))\exp(-\epsilon(p \cdot q)_o) \leq d_{o,\epsilon}(p,q) \leq \exp(-\epsilon(p \cdot q)_o)$$

注记 2.10. 形如 $d_{o,\epsilon}$ 的所有度量组成的集合，在 ∂X 上记作 $\mathcal{G}(X)$。若存在一个常数 $k > 0$ 使得两个这样的度量 $(\partial X, d_{o_1,\epsilon_1})$ 和 $(\partial X, d_{o_2,\epsilon_2})$ 满足

$$k^{-1} d_{o_1,\epsilon_1}^{\epsilon_2} \leq d_{o_2,\epsilon_2}^{\epsilon_1} \leq k d_{o_1,\epsilon_1}^{\epsilon_2}.$$

命题 2.9 告诉我们，如果 $o_1, o_2 \in X$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ 和 $4\delta\epsilon_1, 4\delta\epsilon_2 \leq \ln 2$，那么 $(\partial X, d_{o_1,\ \epsilon_1})$ 和 $(\partial X, d_{o_2,\ \epsilon_2})$ 等价。由 $d_{o,\ \epsilon}$ 诱导的 ∂X 上的拓扑不依赖于基点 0 和视觉参数 ϵ 的选择。

2.2 莫尔斯边界与度量莫尔斯边界

我们首先为适当测地度量空间 X 定义莫尔斯边界。固定一个基点$o \in X$。作为一个集合，莫尔斯边界 $\partial_* X_o$ 由所有从基点 o 出发的莫尔斯测地射线的等价类组成。这里，如果两条测地射线的豪斯多夫距离有界，则称它们等价。

对于一个固定的莫尔斯控制函数 N，我们引入以下子集:

$$\partial_*^N X_o = \{[\alpha] \mid \text{存在一条以 } o\}\text{.为基点的 } N\text{-莫尔斯测地射线 } \beta \in [\alpha]$$

可以在 $\partial_*^N X_o$ 和 $\partial_* X_o$ 上赋予拓扑结构。不过，在本文的框架中，我们将不讨论这些拓扑问题。更多细节请参阅 [11]。

现在我们来关注度量莫尔斯边界。固定一个莫尔斯控制函数 N 和 $o \in X$，并将 $X_o^{(N)}$ 定义为满足如下条件的点 $x \in X$ 的集合：存在一条位于 X 中的 N-莫尔斯测地线段 $[o, x]$。这个度量空间不一定是测地的。不过，根据定义 2.7，$X_o^{(N)}$ 是一个 $32N(3, 0)$-双曲空间。我们将 $\partial X_o^{(N)}$ 记为 $X_o^{(N)}$ 的序列边界；关于度量莫尔斯边界的详细背景，请参阅 [14]。

必须仔细而明确地区分与适当测地度量空间 X 和莫尔斯控制函数 N 相关联的两个边界 $\partial X_o^{(N)}$和 $\partial_*^N X_o$。它们各有优缺点，具体选择取决于语境。一方面，$\partial_*^N X_o$通过实际的测地射线来定义，几何直观清晰；但通常不可度量化。另一方面，$\partial X_o^{(N)}$与双曲空间的格罗莫夫边界一致，尽管 $X_o^{(N)}$本身可能既非适当空间，也非测地空间。不过，这种差异并不构成障碍。应用以下定理并系统地比较这两个边界，我们便能发挥它们互补的优势。

定理 2.11（[14, 26]）。对于任意莫尔斯控制函数 N，存在一个仅依赖于 N 的莫尔斯控制函数 N'，使得以下结论成立。设 X 是一个基点为 o 的真测地空间。存在两个自然嵌入:

$$i_N : \partial X_o^{(N)} \to \partial_*^{N'} X_o \quad and \quad j_N : \partial_*^N X_o \to \partial X_o^{(N')}.$$

注记 2.12. 根据定理 2.11，在后续讨论中，我们可以分别将 $i_N(\partial X_o^{(N)}) \subset \partial_*^{N'} X_o$和 $\partial X_o^{(N)}$ 中的点，以及将 $j_N(\partial_*^N X_o) \subset \partial X^{(N')o}$ 和 $\partial_*^N X_o$ 中的点视为相同，而无需进一步区分。

考虑 $X_o^{(N)}$ 的格罗莫夫边界 $\partial X_o^{(N)}$：对于适当的视觉参数 ϵ_N，存在视觉度量 $d_{o,\ \epsilon_N} \in \mathcal{G}(X_o^{(N)})$。为方便起见，对于任意测地度量空间 X，我们为每个莫尔斯控制函数 N 固定一个视觉参数 ϵ_N，并始终使用视觉度量 $(\partial X_o^{(N)}, d_{o,\ \epsilon_N})$。对于两个点 p 和 $q \in \partial X_o^{(N)}$，我们将 p 与 q 的格罗莫夫积记作 $(p \dot{}_N q)_o$（而不是标准记法 $(p \cdot q)$），以明确强调其对莫尔斯控制函数 N 的依赖。

以下引理（ [26]中的引理 2.16）断言，在可接受的误差范围内，$(p \dot{}_N q)_o$近似等于 $d(o, [p, q])$。

引理 2.13。对于任意莫尔斯控制函数 N，存在一个常数 $k_N > 0$，使得以下结论成立。设 X 是一个以 $o \in X$为基点的适当测地度量空间。对于任意 p、$q \in \partial X_o^{(N)}$，以及连接 p 和 q的任意测地线 $[p,q]$，我们有

$$\left|(p \underset{N}{\cdot} q)_o - d(o,[p,q])\right| \le k_N.$$

注记 2.14. 将引理 2.13 和命题 2.9 应用于视觉度量 $(\partial X_o^{(N)}, d_{o,\epsilon_N})$，我们直接推出一个仅依赖于 N 的常数 $D_N \ge 1$，使得对任意 p、$q \in \partial X_o^{(N)}$ 以及任意连接 p 与 q 的测地线 γ，不等式

$$D_N^{-1} \exp\left(-\epsilon_N d(o,\gamma)\right) \le d_{o,\epsilon_N}(p,q) \le D_N \exp\left(-\epsilon_N d(o,\gamma)\right)$$

成立。这一估计将在后续各节中被引用。

3 一致完美性与 Morse 测地线丰富性

3.1 中心穷尽空间

在本小节中，我们始终假设莫尔斯边界 $\partial_* X$ 至少包含三个点。

固定一个莫尔斯控制函数 N。对 $n \ge 2$，用 $\partial_* X^{(n,N)}$ 表示所有由互异点构成的 n 元组 $(p_1, \dots, p_n) \in (\partial_* X)^n$ 的集合，使得每条双无限测地线 $[p_i, p_j]\,(i \ne j)$ 均为 N- 莫尔斯的。

由引理 2.5，存在 $\delta_N = \delta_N(N) > 0$，使得所有顶点均位于$\partial_* X^{(3,N)}$ 中的三角形都是 δ_N-薄的。

引理 3.1（粗中心；[8]）。令 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N)}$，并定义

$$E_K(p,q,r) := \left\{x \in X \mid x \text{到某个理想三角形 } \triangle(p,q,r) \text{的三条边的距离均不超过 } K\right\}$$

对于任意 $K \ge \delta_N$，集合 $E_K(p,q,r)$ 非空，且直径至多为 $L = L(N,K)$。

对于三元组 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N)}$ 和 K，若 $E_K(p,q,r) \ne \emptyset$，则称 $E_K(p,q,r)$ 中的点为 (p,q,r) 的 K-中心；当 K 的含义由上下文可知时，我们简称为粗中心。

定义 3.2（中心穷尽空间）。若存在莫尔斯控制函数 N 和常数 $K \ge 0$，使得对于每个点 $x \in X$，都存在一个三元组 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N)}$ 满足 $x \in E_K(p,q,r)$，则称适当测地度量空间 X 为中心穷尽空间。

3.2 莫尔斯边界的一致完美性

文献中对一致完美空间有几种不同的定义 [28, 33, 43]。下面的定义遵循 Mart´ınez-P´erez 和 Rodr´iguez [28]

定义 3.3. 若存在 $S > 1$ and$r_0 > 0$，使得对于每个点 $x \in X$ 以及所有 $r \in (0, r_0]$，都存在一个点 $x' \in X$ 满足，则称度量空间 (X,d) 一致完美。

$$\frac{r}{S} < d(x,x') \le r.$$

回顾一下，莫尔斯边界在赋予归纳极限拓扑后通常不是可度量化的。这一内在特性使得恰当地表述一致完美性的概念颇为微妙。我们的定义如下。

定义 3.4（ $\partial_* X$的一致完美性）。设 X 是一个适当测地度量空间，且具有$\partial_* X \neq \emptyset$。如果对于每个满足 $\bigcup_{o\in X} \partial_*^N X_o \neq \emptyset$的莫尔斯控制函数 N，都存在一个莫尔斯控制函数 $N' = N'(N)$、常数 $S = S(N) > 1$ 以及 $r_0 = r_0(N) \in (0, 1]$），使得：对于任意满足 $\partial_*^N X_o \neq \emptyset$的基点 $o \in X$、任意 $p \in \partial_*^N X_o$以及任意 $(0, r_0]$的 $r \in$，都存在$q \in \partial_* X$，则称 $\partial_* X$ 是一致完美的。

$$p, q \in \partial X_o^{(N')} \quad and \quad \frac{r}{S} < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q) \leq r.$$

相应地，我们称 X 具有一致完美的莫尔斯边界。

由于 $\partial_* X \neq \emptyset$，至少存在一个基点 $o \in X$ 和一个莫尔斯控制函数 N，使得存在一条从 o 出发的 N-莫尔斯射线；因此，对于某个 N而言，条件 $\bigcup_{o\in X} \partial_*^N X_o \neq \emptyset$ 并非空泛。

注记 3.5. 针对某些群 *[7, 13, 38]*，已在莫尔斯边界上构造了其他可度量化拓扑。人们或许会问，能否相对于这些度量来研究一致完美性。然而，这类度量往往在几何上不透明，也不适合我们在此讨论的内在几何问题；因此，我们的定义直接用可视度量 d_{o,ϵ_N} 来表述，它们具有清晰的几何意义。

与双曲情形的比较

对于真测地格罗莫夫双曲空间 X 以及固定的视觉参数 $\epsilon > 0$，经典定义如下：

定义 3.6（ ∂X 的一致完美性）。设 X 是带有 $\partial X \neq \emptyset$ 的真 δ-双曲测地度量空间。我们称 ∂X 是一致完美的，如果存在常数 $S > 1$ 与 $r_0 \in (0, 1]$，使得对每一个 $o \in X$、每一个 $p \in \partial X$ 以及每一个 $r \in (0, r_0]$，都存在 $q \in \partial X$，满足

$$\frac{r}{S} < d_{o,\epsilon}(p, q) \leq r.$$

当 X 是双曲空间时，定义 3.4 与定义 3.6 一致：所有测地线都是一致莫尔斯的，因此莫尔斯控制函数 N 和 N' 可以一致地选取，并且对适当的 N，并集$\bigcup_{o\in X} \partial_*^N X_o$ 等于 ∂X。

备注 3.7。在 *[24]*中，对双曲空间所使用的定义要求存在常数 $S > 1$ 和 $r_0 > 0$，它们可能取决于基点 o。我们的表述要求 S 和r_0 不依赖于 o，从而给出一个真正一致的条件。

3.3 莫尔斯边界刚性空间

现在考虑度量空间 X 的拟等距群，记作 $\mathcal{QI}(X)$。该群由所有自拟等距 $f : X \to X$ 构成，并按照等价关系 $f_1 \sim f_2$ 划分，当且仅当 $\sup_{x\in X} d(f_1(x), f_2(x))$ 有限。正如 [10, 11], 中所确立的，适当测地度量空间 X 上的每个自拟等距都会在其莫尔斯边界 ∂f 上诱导一个同胚。

此外，两个相距一致有界的拟等距会在莫尔斯边界上诱导相同的同胚。因此，我们得到一个自然的同态：

$$\partial : \mathcal{QI}(X) \to \mathrm{Homeo}(\partial_* X)$$

由 $\partial(f) = \partial f$ 给出。

因此，我们给出以下莫尔斯边界刚性的定义：

定义 3.8（莫尔斯边界刚性空间）。设 X 是一个具有非空莫尔斯边界 $\partial_* X$ 的适当测地度量空间。以下定义等价：

1. 自然同态 $\partial : \mathcal{QI}(X) \to \mathrm{Homeo}(\partial_* X)$ 是单射。

2. 对每个拟等距 $f: X \to X$，若 $\partial f = \mathrm{id}_{\partial_* X}$，则 $\sup_{x \in X} d(x, f(x)) < \infty$。

若任一条件成立，则称 X 为莫尔斯边界刚性的。

次线性莫尔斯边界刚性空间也可以采用类似的定义。双曲空间的边界刚性空间这一概念最早在 [24, 40] 中得到研究。[24] 中建立了该性质的若干刻画。以下结果揭示了这两种边界刚性概念之间的基本关系。

命题 3.9. 设 X 是一个边界非空的适当测地度量空间。若 X 是莫尔斯边界刚性空间，则 X 是次线性莫尔斯边界刚性空间。

证明. 根据 [37, 38], ，莫尔斯边界中的每个点都属于次线性莫尔斯边界。对于任意拟等距 $f : X \to X$ ，若其在次线性莫尔斯边界上诱导的同胚是恒等映射，则 f 在莫尔斯边界上诱导恒等同胚。由于 X 是莫尔斯边界刚性空间，因此位移 $\sup_{x \in X} d(x, f(x))$ 有限。

□

3.4 莫尔斯测地线丰富空间

我们先介绍一类受到广泛研究的空间：所有具有非空 Gromov边界的双曲空间，以及所有具有非空莫尔斯边界的有限生成群。

定义 3.10（一致莫尔斯基点空间）。若存在一个莫尔斯控制函数 N，使得对每个点 $x \in X$，都存在至少一条 N-莫尔斯测地射线 $\gamma_x : [0, \infty) \to X$，满足$\gamma_x(0) = x$，则称适当测地度量空间 X 为一致莫尔斯基点空间（UMB 空间）。

所有此类空间组成的类记作 $\mathcal{UMB}$。需要强调特定的控制函数时，我们记作 $\mathcal{UMB}(N)$。

UMB 性质在拟等距下保持不变。它对每个有限生成群都有定义。每个具有非空 Gromov边界的 Gromov 双曲测地度量空间都是 UMB 空间。若 X 是一个余紧的适当测地度量空间，且满足 $\partial_* X \neq \emptyset$，那么 X 是 UMB 空间。特别地，每个具有非空莫尔斯边界的有限生成群都是 UMB 空间。

度量空间的测地丰富性这一概念最早由 [40] 引入。随后，Liang 和 Zhou [24] 证明，对于适当的 Gromov 双曲测地度量空间，原始定义中的第二个条件可由第一个条件直接推出，因此为简洁起见可以省略（见 [24] 中的引理 16）。我们将这一研究方向拓展至任意适当测地度量空间中的莫尔斯测地线丰富性。

定义 3.11（莫尔斯测地线丰富空间）。设 N_0 为一个莫尔斯控制函数， $C_0 > 0$ 为一个常数。若适当测地度量空间 X 满足以下条件，则称其为（N_0， C_0）-莫尔斯测地线丰富空间：

对于每个莫尔斯控制函数 N，都存在一个常数 $C_1 = C_1(N)$，使得对于任意一对由一条 N-莫尔斯测地线连接的点 x_1、$x_2 \in X$，都可以找到一条双无限 N_0-莫尔斯测地线α ，满足

$$d(x_1, \alpha) < C_0 \quad and \quad |d(x_1, x_2) - d(x_2, \alpha)| < C_1.$$

若空间 X 对某个莫尔斯控制函数 N_0 和某个常数 $C_0 > 0$ 是（N_0， C_0）-莫尔斯测地线丰富的，则称空间 X 是莫尔斯测地线丰富的。

由于双曲空间中的每条测地线都是一致莫尔斯的，将上述定义应用于双曲空间可得：

定义 3.12（测地线丰富双曲空间）。若存在正常数 C_0、C_1 ，使得对于任意一对点 x_1、$x_2 \in X$，都存在一条双无限测地线 α 满足，则称一个适当的双曲测地度量空间 X 是测地线丰富的。

$$d(x_1, \alpha) < C_0 \quad and \quad |d(x_1, x_2) - d(x_2, \alpha)| < C_1.$$

注 3.13。对于适当的双曲测地度量空间，我们的定义 3.12 与文献 *[24],* 中定义 4.1 的表述不同，但两者等价。

下面的引理断言，每个莫尔斯测地线丰富空间都是一个 UMB 空间。

引理 3.14. 设 X 是一个 (N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富空间，其莫尔斯控制函数为 N_0，常数为 C_0。则存在一个莫尔斯控制函数 N，它仅依赖于 N_0 和 C_0，使得 $X \in \mathcal{UMB}(N)$。

证明。固定任意一点 $o \in X$ ，并令 x 为 X 中的另一个点。由于测地线段 $[o, x]$ 长度有限，初等论证表明， $[o, x]$ 对于某个莫尔斯控制函数 N' 是 N'-莫尔斯的。由 X 的 (N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富性，存在一条双无限N_0-莫尔斯测地线 α，使得 $d(o, \alpha) < C_0$。选取满足 $d(o, o_1) < C_0$ 的一点 $o_1 \in \alpha$。根据引理 2.3，测地子段 $[o_1, \alpha_+]_\alpha$ 是 N_0'-莫尔斯的，其中 N_0' 仅依赖于 N_0。应用引理 2.5，测地线 $[o, \alpha_+]$ 是 N-莫尔斯的，且 $N = N(N_0, C_0)$。

□

以下引理将在后续各节中反复使用。

引理 3.15. 设 X 是一个 (N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富空间，具有某个莫尔斯控制函数 N_0 和常数 $C_0 > 0$。给定任意莫尔斯控制函数 N，设 x_1、$x_2 \in X$ 是由一条 N-莫尔斯测地线连接的两个点，并设 α 是定义 3.11 所给出的双无限莫尔斯测地线。设 x_1' 和 x_2' 分别是 x_1 和 x_2 在 α 上的最近点投影。那么存在一个常数 $C > 0$，它仅依赖于 N_0、C_0 和 N，使得

$$d(x_1', x_2') < C.$$

证明。根据 X 的莫尔斯测地丰富性以及 x_1、x_2 在 α 上最近点投影 x_1'、x_2' 的定义，我们可直接得到

$$d(x_1, x_1') < C_0, \left|d(x_1, x_2) - d(x_2, x_2')\right| < C_1, \tag{1}$$

其中 C_1 是一个仅依赖于 N 的正常数。由于测地线 $[x_1, x_2]$ 是 N-莫尔斯的，且 $d(x_1, x_1') < C_0$，由引理 2.5 可知，存在一个仅依赖于 N 和 C_0 的莫尔斯控制函数 N_1，使得测地线 $[x_2, x_1']$ 是 N_1- 莫尔斯的。此外，由引理 2.4，拼接 $[x_2, x_2'] \cup [x_2', x_1']_\alpha$ 构成一条 (3,0)- 拟测地线，并且存在一个满足下式的点 $x_3 \in [x_1', x_2]$

$$d(x_2', x_3) \leq N_1(3, 0).$$

两次应用三角不等式，我们首先推导出

$$\begin{aligned}\left|d(x_1', x_2) - d(x_2, x_2') - d(x_2', x_1')\right| &\leq \left|d(x_1', x_2') - d(x_1', x_3)\right| + \left|d(x_2', x_2) - d(x_2, x_3)\right| \\ &\leq 2N_1(3, 0).\end{aligned}$$

然后，再次结合三角不等式，我们得到

$$\left|d(x_1, x_2) - d(x_2, x_2') - d(x_2', x_1')\right| \leq \left|d(x_1, x_2) - d(x_1', x_2)\right| + 2N_1(3, 0).$$

现在，将方程 (1) 中的不等式代入，我们得到

$$d(x_1', x_2') < C_0 + C_1 + 2N_1(3, 0).$$

由于 C_1 和 N_1 仅取决于 N，我们可以令 $C = C_0 + C_1 + 2N_1(3, 0)$，其中 C 是一个仅取决于 N_0、C_0 和 N 的常数。证明至此完成。

□

4 定理 1.1 的证明

4.1 莫尔斯测地线丰富性与中心穷尽性

在本小节中，我们证明莫尔斯测地线丰富性等价于中心穷尽性，这一结论由接下来的两个命题保证。

命题4.1. 设 X 是一个适当测地度量空间。若 X 莫尔斯测地线丰富，则 X 中心穷尽。

证明. 假设 X 关于某个莫尔斯控制函数 N_0 和某个常数 C_0 是 (N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富的。对于任意 $a \in X$，由引理 3.14，存在一条从 a 出发的 N-Morse测地射线 σ，其中莫尔斯控制函数 N 仅依赖于 N_0 和 C_0。根据引理 2.3，σ 的每个测地子段都是 N'-莫尔斯的，其中 $N' = N'(N)$ 是仅依赖于 N 的莫尔斯控制函数。根据 X 的莫尔斯测地线丰富性的定义，存在一个仅依赖于 N' 的常数 C_1，使得对于点 $b \in \sigma$ 和 $b \neq a$，存在一条 N_0-莫尔斯双无限测地线 α，满足以下条件：

$$d(a, \alpha) < C_0, \quad |d(b, \alpha) - d(a, b)| < C_1. \tag{2}$$

令 $a', b' \in \alpha$ 分别表示 α 上距离 a 和 b最近的点（见图 2）。

考虑理想三角形 $\triangle(a, a', \sigma_+)$。由于测地线段 $[a', a]$ 的长度至多为C_0，且测地射线 σ是 N-莫尔斯的，根据引理 2.5，理想三角形 $\triangle(a, a', \sigma_+)$是 δ_1-薄的，其中 δ_1 是仅由 N 和 C_0决定的正常数。因此，

常数 $\delta_1 + C_0$ 和 $\delta_1 + C_1$ 仅依赖于 N_0 和 C_0，而与 $d \in \sigma$ 无关。现在，选取 $b \in \sigma$ 使得

$$d(a, b) > \max\{\delta_1 + C_0, \delta_1 + C_1\}.$$

接下来证明 $\sigma_+ \notin \{\alpha_-, \alpha_+\}$。反设 $\sigma_+ \in \{\alpha_-, \alpha_+\}$。那么我们有

$$d(b, [a, a']) \geq d(a, b) - C_0 > \delta_1.$$

这个不等式意味着，

$$d(b, [a', \sigma_+]_\alpha) \leq \delta_1.$$

由此可得

$$d(b, b') = d(b, \alpha) \leq d(b, [a', \sigma_+]_\alpha) \leq \delta_1.$$

将其代入方程（2），

$$d(a, b) < C_1 + d(b, b') \leq C_1 + \delta_1.$$

这显然与我们最初对 b 的选择矛盾。

根据引理 2.3，测地线段 $[a', \alpha_+]_\alpha$、$[\alpha_-, a']_\alpha$ 是 N_0'-莫尔斯的，其中莫尔斯控制函数 N_0' 仅取决于 N_0。引理 2.5 保证存在一个莫尔斯控制函数 $N_1 = N_1(C_0, N_0')$，使得测地线 $[a, \alpha_+]$ 和 $[a, \alpha_-]$ 是 N_1-莫尔斯的。此外，理想三角形 $\triangle(a, a', \alpha_+)$ 和 $\triangle(a, a', \alpha_-)$ 是 δ-薄的，其中 δ 是仅取决于 C_0 和 N_0' 的正常数。类似地，对于某个正常数 $\delta' = \delta'(N_1, N)$，理想三角形 $\triangle(a, \sigma_+, \alpha_+)$ 和 $\triangle(a, \sigma_+, \alpha_-)$ 是 δ'-薄的。测地线 $[\alpha_-, \sigma_+]$ 和 $[\alpha_+, \sigma_+]$ 是 N_2-莫尔斯的，其中莫尔斯控制函数 $N_2 = (N_1, N')$ 取决于 N_1 和 N'。令 $\delta_2 = \max\{\delta, \delta'\}$。由于 N_1、N、N' 和 N_0' 最终都取决于 N_0 和 C_0，因此常数 δ_2 和莫尔斯控制函数 N_2 仅取决于 N_0 和 C_0。

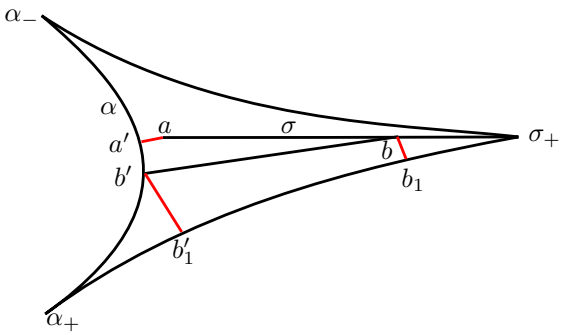


图 2：图注

假设 $b \in \sigma$ 是满足以下条件的点

$$d(a, b) > \max\{\delta_1 + C_0, \delta_1 + C_1, 2\delta_2 + C_0 + C_1\}.$$

通过应用理想三角形 $\triangle(a, a', \alpha_+)$ 的薄三角形性质，并利用 $d(a, a') < C_0$ 这一事实，我们推导出不等式

$$d(b, [a', \alpha_+]_\alpha) < d(b, [a, \alpha_+]) + \delta_2 + C_0.$$

结合方程（2），我们得到以下不等式链：

$$\begin{aligned} d(a,b) &< d(b,b') + C_1 \\ &\le d\big(b,[a',\alpha_+]_\alpha\big) + C_1 \\ &< d\big(b,[a,\alpha_+]\big) + \delta_2 + C_0 + C_1. \end{aligned}$$

立即可得 $d(b,[a,\alpha_+]) > \delta_2$。理想三角形 $\triangle(a,\alpha_+,\sigma_+)$ 是 δ_2-薄的。因此，存在一个点 $b_1 \in [\sigma_+,\alpha_+]$ 使得

$$d(b,b_1) \le \delta_2.$$

考虑拼接 $[b_1,b]\cup[b,b']\cup[b',\alpha_+]_\alpha$。测地线 $[\alpha_+,\sigma_+]$ 是 N_2-莫尔斯的。由引理 2.4，存在一个正常数 C_2，它仅取决于 N_2 和 δ_2，使得存在一点 $b_1' \in [\alpha_+,\sigma_+]$ 满足

$$d(b',b_1') \le C_2.$$

类似地，存在一点 $b_2' \in [\alpha_-,\sigma_+]$ 满足

$$d(b',b_2') \le C_2.$$

此外，引理 3.15 保证存在一个常数 C，它仅取决于 N_0、C_0和 N'，使得

$$d(a',b') < C.$$

令 $K = C_0 + C + C_2$和 $N_3 = \max\{N_2, N_0\}$。由此可得点 $a \in E_K(\sigma_+,\alpha_-,\alpha_+)$，满足 $(\sigma_+,\alpha_-,\alpha_+) \in \partial_* X^{(3,N_3)}$。值得注意的是，常数 K 和莫尔斯控制函数 N_3 均仅取决于 N_0 和 C_0。

□

命题 4.2. 设 X 是一个适当测地度量空间。若 X 是中心穷尽的，则 X是莫尔斯测地线丰富的。

证明. 设 N是一个莫尔斯控制函数，并假设 $a,b \in X$满足存在一条 N-莫尔斯测地线 $[a,b]$。由于 X 是一个中心穷尽空间，存在一个莫尔斯控制函数 N_0 和一个常数 $K \ge 0$，使得 a 是 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N_0)}$ 的一个 K-中心，其中边为 $\alpha_1 = [p,q], \alpha_2 = [q,r]$ 和 $\alpha_3 = [p,r]$。正常数 δ_{N_0}仅依赖于 N_0，并且三角形 $\triangle(p,q,r)$ 是 δ_{N_0}-薄的。

设 b_1是 $\triangle(p,q,r)$ 上 b的最近点投影。不失一般性，假设$b_1 \in \alpha_1 \cap \mathcal{N}_{\delta_{N_0}}(\alpha_3)$。设 $b_2 \in \alpha_2$ 是 α_3 上 b的最近点投影。见图 3。

断言：存在一个常数 $D = D(N_0,K,N)$，使得以下两者之一成立

$$d(a,b_1) \le D \quad \text{or} \quad d(a,b_2) \le D.$$

我们将此断言的证明推迟到论证末尾。断言得证后，令 $C_0 = K+1, C_1 = D+1$；它们是仅取决于 K, N_0和 N 的常数。若$d(a,b_1) \le D$，则有

$$d(a,\alpha_1) < C_0 \quad \text{and} \quad |d(a,b) - d(b,\alpha_1)| \le d(a,b_1) < C_1.$$

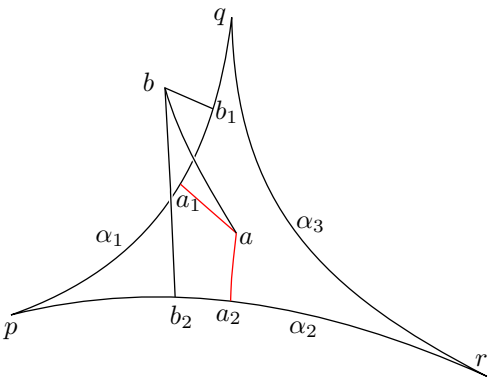


图 3：图注

在这种情况下，我们选取 α_1 作为所需的双无限 N_0-莫尔斯测地线。类似地，若 $d(a, b_2) \leq D$，则选取 α_2 作为所需的双无限 N_0-莫尔斯测地线。由此完成了对 X 是一个.....的证明

(N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富空间。

命题的证明:

由于 a 是 $\triangle(p, q, r)$ 的一个 K-中心，我们可以选取点 $a_1 \in \alpha_1, a_2 \in \alpha_2$，使得$d(a, a_1) \leq K$ 且 $d(a, a_2) \leq K$。由引理 2.4，拼接曲线 $\eta_1 = [a_1, b_1]_{\alpha_1} \cup [b_1, b]$ 和 $\eta_2 = [a_2, b_2]_{\alpha_2} \cup [b_2, b]$ 是 (3, 0)-拟测地线。因此，拼接曲线 $[a, a_1] \cup \eta_1$ 和$[a, a_2] \cup \eta_2$ 是连续的 $(3, K)$-拟测地线，其端点分别为 a 和 b。由于 $[a, b]$ 是N-莫尔斯的，根据 [11], 中的引理 2.1，存在一个常数 $2N(3, K)$，它仅依赖于 K和 N，使得

$$d_{\mathcal{H}}([a, b], [a, a_1] \cup \eta_1) \leq 2N(3, K) \quad \text{and} \quad d_{\mathcal{H}}([a, b], [a, a_2] \cup \eta_2) \leq 2N(3, K).$$

注意，$d(a, a_1) \leq K$ 和 $d(a, a_2) \leq K$。这意味着

$$d_{\mathcal{H}}(\eta_1, \eta_2) \leq 4N(3, K) + 2K$$

特别地，存在一个点 $c \in \eta_1$ 使得

$$d(b_2, c) \leq D_1,$$

其中 $D_1 = 4N(3, K) + 2K$。现在我们考虑两种情形。

情形 I: $\boldsymbol{c \in [b_1, b]}$

注意，b_1 表示将 b 投影到 $\triangle(p, q, r)$ 上的最近点投影，且 $c \in [b, b_1]$。由此可得，b_1 是将 c 投影到 $\triangle(p, q, r)$ 上的最近点投影。因此，

$$d(c, b_1) \leq d(c, b_2) \leq D_1,$$

这进一步意味着

$$d(b_1, b_2) \leq d(b_1, c) + d(b_2, c) \leq 2D_1.$$

因此，点 $a, b_1 \in E_{K_1}(p, q, r)$，其中 $K_1 = \max\{K, 2D_1, \delta_{N_0}\} \geq \delta_{N_0}$。根据引理 3.1，存在一个正常数 L_1，它仅依赖于 N_0、D_1 和 K，使得

$$d(a, b_1) \leq L_1.$$

情形 II: $\boldsymbol{c \in [a_1, b_1]_{\alpha_1}}$

由于 $d(b_1, \alpha_3) \le \delta_{N_0}, d(a_1, a_3) \le d(a_1, a) + d(a, \alpha_3) \le 2K$，根据测地线 α_3 的 N_0-莫尔斯性质，标准论证可保证存在一个常数 $D_2 = N_0(1, \delta_{N_0} + 2K)$，使得

$$c \in [b_1, a_1]_{\alpha_1} \subset \mathcal{N}_{D_2}(\alpha_3).$$

因此， b_2 与 α_3 之间的距离满足不等式

$$d(b_2, \alpha_3) \le d(b_2, c) + d(c, \alpha_3) \le D_1 + D_2.$$

此外，距离 $d(b_2, \alpha_1) \le d(b_2, c) \le D_1$。这表明点 $a, b_2 \in E_{K_2}(p, q, r)$，其中$K_2 = \max\{K, D_1 + D_2, \delta_{N_0}\} \ge \delta_{N_0}$。再次由引理 3.1，存在一个仅依赖于 N_0, D_1, D_2 和 K 的常数 L_2，使得

$$d(a, b_2) \le L_2.$$

令 $D = \max\{L_1, L_2\}$。那么 D 仅依赖于 N_0, K 和 N。因此，所需结论立即成立。

□

定理 1.1 的证明将通过以下三个命题完成，这些命题将在接下来的两个小节中给出。

4.2 Morse 测地线丰富性蕴含一致完美性

命题 4.3. 若 X 是莫尔斯测地线丰富的，则莫尔斯边界 $\partial_* X$ 一致完美。

证明. 假设 X 是一个关于某个莫尔斯控制函数 N_0 和某个常数 C_0 的 (N_0, C_0)-莫尔斯测地线丰富空间。令 N 为任意莫尔斯控制函数。固定一个基点 $o \in X$，并假设 $\partial_*^N X_o$ 非空。对于任意点 $p \in \partial_*^N X_o$，选取一条从 o 出发并通向 p 的测地射线 σ。

对于任意点 $x \in \sigma$ 和 $x \ne o$，引理 2.3 表明测地线段 $[o, x]_\sigma$ 和测地射线 $[x, p]_\sigma$ 都是 N_1-莫尔斯的，其中 $N_1 = N_1(N)$ 是一个仅依赖于 N 的莫尔斯控制函数。对于 N_1-莫尔斯测地线 $[o, x]$，由 X 的莫尔斯测地线丰富性，存在一个仅依赖于 N_1 的常数 $C_1 > 0$，以及一条双向无限的 N_0-莫尔斯测地线 α，满足

$$d(x, \alpha) < C_0, |d(o, \alpha) - d(o, x)| < C_1. \tag{3}$$

令 x' 和 o' 分别表示 x 和 o 在 α 上的最近点投影。根据引理 3.15，存在一个正常数 C_2，它仅取决于 N_0、C_0、N_1，使得

$$d(o', x') < C_2. \tag{4}$$

Claim A: 对于某个莫尔斯控制函数 N'，我们有 p、α_-、$\alpha_+ \in \partial X_o^{(N')}$，该函数仅取决于 N。

我们来证明这一断言。测地线段 $[o, x]_\sigma$ 是 N_1-莫尔斯的，且 $d(x, x') < C_0$；因此，由引理 2.5 可知，测地线段 $[o, x']$ 是 N_2-莫尔斯的，其中 $N_2 = N_2(N_1, C_0)$。注意，再次应用引理 2.3 可得，测地线 $[x', \alpha_+]_\alpha$ 和 $[x', \alpha_-]_\alpha$ 是 N_0'-莫尔斯的，且 $N_0' = N_0'(N_0)$。引理 2.5 保证测地线 $[o, \alpha_+]$ 和 $[o, \alpha_-]$ 是 N_3-莫尔斯的，其中 $N_3 = N_3(N_0', N_2)$。由定理 2.11 可得， $p, \alpha_-, \alpha_+ \in \partial X_o^{(N')}$对于某个

$N' = N'(N_3, N)$。由于 N_3 最终只取决于 N，因此莫尔斯控制函数 N' 只取决于 N。因此，该断言成立。

测地线 α 取决于 $x \in \sigma$ 的选择。现在我们区分两种情形进行进一步分析。

情形 I: $p \in \{\alpha_-, \alpha_+\}$

不失一般性，我们假设 $p = \alpha_-$。由注记 2.14，存在一个常数 $D_{N'} > 0$ 使得

$$D_{N'}^{-1} \exp\left(-\epsilon_{N'} d(o,\alpha)\right) < d_{o,\epsilon_{N'}}(\alpha_-, \alpha_+) < D_{N'} \exp\left(-\epsilon_{N'} d(o,\alpha)\right).$$

由于 $|d(o,\alpha) - d(o,x)| < C_1$，因此

$$D_1^{-1} \exp\left(-\epsilon_{N'} d(o,x)\right) < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, \alpha_+) < D_1 \exp\left(-\epsilon_{N'} d(o,x)\right),$$

其中 $D_1 = D_{N'} \exp(C_1 \epsilon_{N'})$。

情形 II: $p \notin \{\alpha_-, \alpha_+\}$

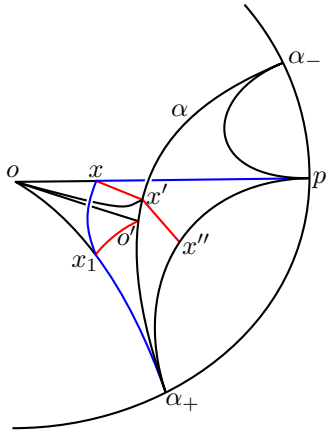


图 4：定理 4.3 中情形 II 的示意图

考虑理想三角形 $\triangle(p, \alpha_-, \alpha_+)$。正如我们将在下面的论证中所示，对于某个常数 $\delta = \delta(N)$，该理想三角形是 δ-薄的，其中该常数仅依赖于 N。

由于 $[o, \alpha_+]$ 是 N_3-莫尔斯的，且测地线 σ 是 N-莫尔斯的，由引理 2.5 可知，测地线 $[p, \alpha_+]$ 是 N_4-莫尔斯的，其中 $N_4 = N_4(N_3, N)$。结合 N_0-莫尔斯测地线 α，由引理 2.5 可得，理想三角形 $\triangle(p, \alpha_-, \alpha_+)$ 是 δ-薄的，其中 δ 仅依赖于 N_4 和 N_0。回想一下，N_3 本身仅依赖于 N，因此我们得出结论：δ 仅依赖于 N。

因此，对于点 $x' \in \alpha$，不失一般性，存在一点 $x'' \in [p, \alpha_+]$，使得 $d(x', x'') \leq \delta$（见图 4）。

我们首先推导 $d(o, [p, \alpha_+])$ 的界：

$$d(o, [p, \alpha_+]) \leq d(o, x'') \leq d(o,x) + d(x, x') + d(x', x'') < d(o,x) + C_0 + \delta.$$

由注记 2.14 可知

$$D_2 \exp\left(-\epsilon_{N'} d(o,x)\right) < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, \alpha_+), \tag{5}$$

其中 $D_2 = D_{N'}^{-1} \exp(-\epsilon_{N'}(C_0 + \delta)) > 0$。

由于测地线 $[o, \alpha_+]$ 是 N_3-莫尔斯的，引理 2.4 保证存在一个点$x_1 \in [o, \alpha_+]$ 和一个常数 $C_3 = C_3(N_3)$，使得

$$d(o', x_1) \leq C_3.$$

T因此，令 $D_3 = C_0 + C_2 + C_3$，由方程 (3) 和方程 (4) 可得 n

$$d(x, x_1) \leq d(x, x') + d(x', o') + d(o', x_1) < D_3, \tag{6}$$

其中常数 D_3 仅取决于 N。

命题 B：存在一个常数 $D_4 = D_{N'} \exp(\epsilon_{N'}(D_3 + 2\delta'))$，其中 δ' 是下文定义的常数，使得

$$d_{o,\epsilon_{N'}}(p, \alpha_+) < D_4 \exp(-\epsilon_{N'} d(o, x)). \tag{7}$$

我们按如下方式证明该命题。首先，选取一个点 $o_1 \in [p, \alpha_+]$，使得 $d(o, [p, \alpha_+]) = d(o, o_1)$。由于测地线段 $[x, p]$ 是 N_1-莫尔斯的，且$[p, \alpha_+]$ 是 N_4-莫尔斯的，引理 2.5 保证三角形 $\triangle(x, p, \alpha_+)$ 是 δ_1- 薄的，其中常数 $\delta_1 = \delta_1(N_1, N_4)$。接下来，引理 2.3 蕴含测地线 $[x_1, \alpha_+]_\alpha$ 对于某个莫尔斯控制函数 $N_3' = N_3'(N_3)$ 是 N_3'-莫尔斯的。再次应用引理 2.5，测地线 $[x, \alpha_+]$对于某个莫尔斯控制函数 N_4是$N_4 = N_4(C_0, N_0')$-莫尔斯的，且三角形 $\triangle(x, x_1, \alpha_+)$ 是 δ_2-薄的，其中 $\delta_2 = \delta_2(N_4, N_3')$。最后，直接验证可知，常数 $\delta' = \max\{\delta_1, \delta_2\}$仅取决于相关的莫尔斯控制函数，而这些控制函数本身仅取决于 N。

令 σ 表示测地线拼接 $[p, x]_\sigma \cup [x, x_1] \cup [x_1, \alpha_+]$。两次应用薄三角形性质，可得

$$d(o_1, \sigma) \leq 2\delta'.$$

由三角不等式，不难看出，

$$d(o, \sigma) \geq d(o, x) - d(x, x_1).$$

结合公式（6），得到

$$d(o, \sigma) > d(o, x) - D_3.$$

为证明公式（7），我们首先需要推导从 o 到测地线 $[p, \gamma_+]$ 的距离下界。再次应用三角不等式，可得

$$d(o, o_1) \geq d(o, \sigma) - d(o_1, \sigma) > (d(o, x) - D_3) - 2\delta'.$$

也就是说，

$$d(o, [p, \alpha_+]) > d(o, x) - (D_3 + 2\delta')$$

因此，令 $D_4 = D_{N'} \exp(\epsilon_{N'}(D_3 + 2\delta'))$，由注记 2.14 可直接得到所需的公式（7），命题 B 的证明至此完成。

结合公式（5）和公式（7），我们得到

$$D_2 \exp(-\epsilon_{N'} d(o, x)) < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, \alpha_+) < D_4 \exp(-\epsilon_{N'} d(o, x)).$$

令 $m = \min\{D_1^{-1}, D_2\} > 0$ 和 $M = \max\{D_1, D_4\}$ 为常数。注意， m 和 M 都只依赖于 N 以及空间 X 的 Morse 测地线丰富性。对于任意莫尔斯控制函数 N 和满足 $\partial_*^N X_o \neq \emptyset$ 的任意基点 $o \in X$，存在一个莫尔斯控制函数 N' （如 Claim A 中所述）以及常数 $S = \frac{M}{m} > 1$ 和 $r_0 = \min\{M, 1\} \in (0, 1]$，使得以下结论成立：

对于任意点 $p \in \partial_*^N X_o$ 以及每个 $r \in (0, r_0]$，选取一个点 $x \in \sigma$ 使得

$$d(o, x) = \frac{1}{\epsilon_{N'}} \ln\left(\frac{M}{r}\right),$$

其中， σ 是此前定义的从 o 到 p 的测地射线。如上所述，测地线α 取决于 $x \in \sigma$的选择。在情形 I 和情形 II 中，我们总能选取一个点$q \in \{\alpha_-, \alpha_+\}$，使得 $p, q \in \partial X_o^{(N')}$并且

$$\frac{r}{S} < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q) < r.$$

至此，所需结论得证。

□

4.3 一致完美性蕴含中心穷尽性

命题 4.4. 设 $X \in \mathcal{UMB}(N)$，其中 N是某个莫尔斯控制函数。若其莫尔斯边界 $\partial_* X$一致完美，则 X 是中心穷尽的。

*P*证明。对于任意点 $o \in X$，由于 $X \in \mathcal{UMB}(N)$，我们取一个点 $p \in \partial_*^N X_o$。

由于莫尔斯边界的一致完美性 $\partial_* X$，存在一个莫尔斯控制函数$N' = N'(N)$和常数 $S = S(N) > 1$以及 $r_0 = r_0(N) \in (0, 1]$，使得对于任意 $r \in (0, r_0]$，都可以找到一个点 $q \in \partial_* X$ 满足

$$p, q \in \partial X_o^{(N')} \quad \text{and} \quad \frac{r}{S} < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q) \leq r.$$

特别地，分别令 $r = r_0$ 和 $r = \frac{r_0}{2S}$，我们可以选取两个点 $q_1, q_2 \in_{\partial X^{(N')o}}$ ，使其满足

$$\frac{r_0}{S} < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q_1) \leq r_0 \quad \text{and} \quad \frac{r_0}{2S^2} < d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q_2) \leq \frac{r_0}{2S}.$$

于是可得

$$\frac{r_0}{2S} < d_{o,\epsilon_{N'}}(q_1, q_2).$$

此外，所有距离 $d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q_2)$、$d_{o,\epsilon_{N'}}(p, q_1)$ 和 $d_{o,\epsilon_{N'}}(q_1, q_2)$ 都有一个统一的下界 $\frac{r_0}{2S^2}$。根据注记 2.14，距离 $d(o, [p, q_1])$、 $d(o, [p, q_2])$ 和 $d(o, [q_1, q_2])$ 都有统一的上界

$$K = \frac{1}{\epsilon_{N'}} \ln\left(\frac{2S^2 D_{N'}}{r_0}\right) > 0.$$

由于 q_1、 $q_2 \in \partial X_o^{(N')}$，定理 2.11 确保测地线 $[o, q_1]$ 和 $[o, q_2]$ 是 N_1-莫尔斯的，其中 N_1 仅取决于 N'。结合 $[o, p]$ 是一条 N-莫尔斯测地线这一事实，

引理 2.5 蕴含存在一个莫尔斯控制函数 N_0（仅取决于 N' 和 N_1），使得测地线 $[p,q_1]$、$[p,q_2]$ 和 $[q_1,q_2]$ 都是 N_0-莫尔斯的。因此，我们有 $(p,q_1,q_2)\in\partial_* X^{(3,N_0)}$。

总之，对于任意 $o\in X$，点 $o\in E_K(p,q_1,q_2)$ 满足 $(p,q_1,q_2)\in\partial_* X^{(3,N_0)}$。由于 K 和 N_0 完全取决于 N，我们得出空间 X 是中心穷尽的。

□

命题 4.5. 假设 X 是一个中心穷尽的适当测地度量空间，那么 X 是莫尔斯边界刚性的。

证明。假设 $f\colon X\to X$ 是一个拟等距，使得诱导同胚$\partial f\colon \partial_* X\to\partial_* X$ 是恒等映射。由于 X 是中心穷尽的，存在一个莫尔斯控制函数 N和一个常数 $K\geq 0$，使得每个 $x\in X$都是某个三元组 $(p,q,r)\in\partial_* X^{(3,N)}$的一个 K-中心。也就是说，x到某个理想三角形 $\triangle(p,q,r)$ 的三条边的距离都不超过 K。在拟等距 f作用下，$\triangle(p,q,r)$各边的像是拟测地线，它们与原来的边之间的豪斯多夫距离一致有界，界为 D，其中 D 仅取决于 f 和 N。注意，$f(x)$与这三条像拟测地线的距离一致有界，界为 D_1，其中 D_1 仅取决于 f和 K。因此，$f(x)$与 $\triangle(p,q,r)$的三条边的距离一致有界，界为 D_1+D。由于 x是 $\triangle(p,q,r)$的一个 K-中心，这意味着

$$x,f(x)\in E_{K'}(p,q,r),\quad \text{where}\quad K'=\max\{K,D_1+D,\delta_N\}.$$

根据引理 3.1，距离 $d(x,f(x))\leq L$，其中 $L=L(K,D_1+D,N)$。因此，位移 $\sup_{x\in X} d(x,f(x))$ 有限，所以 X具有莫尔斯边界刚性。 □

5 拟等距不变量

本节将证明，上一节中定义的许多性质在拟等距下保持不变。

命题 5.1. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是完备测地度量空间。若 $f\colon X\to Y$ 是一个拟等距，且 X 是中心穷尽的，那么 Y 也是中心穷尽的。

证明. 由于对于某个仅取决于 f 的常数 C，$f(X)$ 在 Y 中是 C-稠密的，因此对每个 $y\in Y$，都存在一点 $x\in X$，使得 $d_Y(f(x),y)\leq C$。由于 X 是中心穷尽的，存在一个莫尔斯控制函数 N 和一个常数 $K\geq 0$，使得每条 $x\in X$ 都是某条 $(p,q,r)\in\partial_* X^{(3,N)}$ 的 K-中心。在拟等距 f 下，双无限 N-莫尔斯测地线的像是拟测地线，并且它们与某条双无限N'-莫尔斯测地线之间的豪斯多夫距离一致有界，其中莫尔斯控制函数 N' 和常数 K' 仅取决于 N 和 f。由此可得，y 是 $(\partial f(p),\partial f(q),\partial f(r))\in\partial_* Y^{(3,N')}$ 的 $K'+C$-中心。这里，$K'+C$ 和 N' 都仅取决于 f 和 X。因此，Y 是中心穷尽的。

□

由命题4.1和命题 4.2可知，适当测地度量空间 X 是莫尔斯测地线丰富的，当且仅当它是中心穷尽的。由于中心穷尽性是拟等距不变量，因此莫尔斯测地线丰富性也是拟等距不变量。

命题 5.2. 设 (X,d_X) 和 (Y,d_Y) 是完备测地度量空间。若 $f\colon X\to Y$是拟等距且 X 是莫尔斯测地线丰富的，则 Y 是莫尔斯测地线丰富的。

对于双曲空间， [24] 中证明了边界刚性是拟等距不变量。莫尔斯边界同样是拟等距不变量，并且在拟等距变换下表现良好。因此，自然会问莫尔斯边界刚性是否是拟等距不变量。为此，我们给出以下命题。

命题 5.3. 设 (X, d_X) 和 (Y, d_Y) 是两个边界非空的适当测地度量空间。若 $f : X \to Y$ 是一个拟等距映射，且 Y 是莫尔斯边界刚性的，则 X 是莫尔斯边界刚性的。

证明. 设 $g : X \to X$ 是一个拟等距映射，其在莫尔斯边界上诱导的同胚为恒等映射，即 $\partial g = \mathrm{id}_{\partial_* X}$。我们要证明存在常数 $D > 0$，使得 $\sup_{x\in X} d_X(x, g(x)) < D$。

设 $f_1 : Y \to X$ 是 f 的一个拟逆映射。复合映射 $f \circ g \circ f_1 : Y \to Y$ 也是一个拟等距映射，它在 Y 的莫尔斯边界上诱导同胚 $\partial(f \circ g \circ f_1) : \partial_* Y \to \partial_* Y$。根据莫尔斯边界函子的自然性，我们有：

$$\partial(f \circ g \circ f_1) = (\partial f) \circ (\partial g) \circ (\partial f_1) = (\partial f) \circ \mathrm{id}_{\partial_* X} \circ (\partial f_1) = \mathrm{id}_{\partial_* Y}.$$

由于 Y 是 莫尔斯边界刚性，因此存在一个常数 $D_1 > 0$ ，使得对所有 $y \in Y$ ：

$$d_Y\left(y, f\left(g\left(f_1(y)\right)\right)\right) < D_1.$$

任取一个 $x \in X$，并设 $y = f(x)$、 $h = f \circ g$、 $x' = f_1(y)$。假设 f是一个（K， C）拟等距，则

$$d_X(x, g(x)) \le K d_Y\left(f(x), h(x)\right) + KC.$$

根据度量空间 Y中的三角不等式：

$$d_Y\left(f(x), h(x)\right) \le d_Y\left(f(x), h(x')\right) + d_Y\left(h(x), h(x')\right).$$

并注意到

$$d_Y\left(f(x), h(x')\right) = d_Y\left(y, f\left(g\left(f_1(y)\right)\right)\right) < D_1.$$

由于 $h = f \circ g$是从 X到 Y的拟等距，因此存在常数 $K_1 \ge 1$、$C_1 > 0$（仅取决于 f 和 g），使得：

$$\begin{aligned} d_X(x, g(x)) &\le K\left(D_1 + d_Y\left(h(x), h(x')\right)\right) + KC \\ &\le K\left(D_1 + K_1 \cdot d_X(x, x') + C_1\right) + KC. \end{aligned}$$

由于 f_1是 f的拟逆映射， $d_X(x, x') = d_X(x, f_1(f(x)))$ 有一致上界。令 $M > 0$表示这个一致上界。令 $D = K(D_1 + K_1 M + C_1) + KC$。由于 D是一个与 x无关的常数，我们得到 $\sup_{x\in X} d_X(x, g(x)) < D$，证毕。

□

注 5.4. 上述证明可直接推广到次线性莫尔斯边界刚性的情形，推理过程几乎完全相同。

对于带有有限生成集 S 的有限生成群 G ，上述性质在其关于字度量的凯莱图 $\mathcal{G}(G, S)$ 上定义良好。因此，莫尔斯测地线丰富性、中心穷尽性、莫尔斯边界刚性和莫尔斯一致空间对于群 G 都定义良好。

应用于凯莱图

命题 5.5：设 X 是一个具有至少 3 个点的莫尔斯边界 $\partial_* X$ 的适当余紧测地度量空间。那么， X 是中心穷尽的。

证明。设 $p, q, r \in \partial_* X$ 是三个互不相同的点。固定一个理想三角形 $\triangle(p, q, r)$，并假设 $(p, q, r) \in \partial_* X^{(3,N)}$，其莫尔斯控制函数为 N。固定 (p, q, r) 的一个粗中心 x_0，使得 x_0 到某个理想三角形 $\triangle(p, q, r)$ 的三条边的距离都不超过 δ_N。由 X 余紧这一假设可知，存在一个群 G，它通过等距变换在 X 上余紧作用。存在一个常数 $R > 0$，使得对任意 $x \in X$，都有某个 $g \in G$ 满足 $d(g(x_0)\ x) \leq R$。等距变换保持双无限测地线的莫尔斯控制函数不变。这意味着点 x 到某个理想三角形 $\triangle(p', q', r')$ 的三条边的距离都不超过 $R + \delta_N$，其中 $(p', q', r') \in \partial_* X^{(3,N)}$。证明完毕。

□

定理 1.2 可由命题 5.5 和定理 1.1 轻易得到。

以下命题来自 [25]。如果一个有限生成群 G 不是几乎循环且具有非空的莫尔斯边界，我们称其为非初等莫尔斯群。

命题 5.6。设 G 为非初等莫尔斯群。则其莫尔斯边界包含无穷多个点。

因此，我们得到以下推论，它与定理 1.3 相吻合 .

推论 5.7。设 G为非初等莫尔斯群。则 G 是莫尔斯测地线丰富、中心穷尽的，且其莫尔斯边界 $\partial_* G$ 是一致完美的。特别地， G 具有莫尔斯边界刚性。

正如引言中所指出的，莫尔斯群构成了一个庞大的类别，其中包括映射类群、Out(F_n)、CAT(0) 群、双曲群和相对双曲群、阿廷群、考克斯特群、3-流形群以及相关的群族。

6 定理 1.4 的建立

本节将证明定理 1.4。回顾一下， X 和 Y 中的每个空间都满足定理 1.1 中所述的三个等价条件之一。为便于后续论证，不妨假设 X 和 Y 都是中心穷尽的。

6.1 f的延拓

设 $f\colon \partial_* X \to \partial_* Y$ 是一个同胚。下面我们构造一个映射 Φ_f，使其成为 f 到 X的延拓。我们的构造采用了 [26]第4节所提出的方法。为此，我们首先引入以下记号和辅助概念。

为了在不加证明的情况下引用后续命题，我们采用文献中的术语。令 $\Theta_3(\partial_* X)$ 表示 $\partial_* X$ 中所有互异点三元组的集合。对于任意 $(p, q, r) \in \Theta_3(\partial_* X)$，存在某个莫尔斯控制函数 N'，使得 $(p, q, r) \in \partial_* X^{(3,N')}$。我们定义

$$k = 1 + \inf\left\{K \,\middle|\, E_K(p, q, r) \neq \emptyset \text{ for some Morse gauge } N'\right\},$$

并令 $E(p,q,r) = E_k(p,q,r)$。值得注意的是，常数 k 和集合 $E(p,q,r)$ 仅取决于三元组 (p,q,r)，而与 N' 的选取无关。

对于任意 $(p,q,r) \in \Theta_3(\partial_* X)$，我们定义一个投影映射：

$$\pi_X : \Theta_3(\partial_* X) \to X,$$

$$\pi_X(p,q,r) = x',$$

其中，x' 是从 $E(p,q,r)$ 中任意选取的中心点。投影映射 π_Y 从 $\Theta_3(\partial_* Y)$ 到 Y 也可以类似地定义。

假设 X 是中心穷尽的，则存在一个莫尔斯控制函数 N 和一个常数 $K \geq 0$，使得对于任意 $x \in X$，都存在某个 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N)}$ 满足 $x \in E_K(p,q,r)$。令 $x' = \pi_X(p,q,r) \in E(p,q,r) = E_k(p,q,r)$，其中 $k \leq 1 + \delta_N$，这里 δ_N 是与莫尔斯控制函数 N 相关联的常数。因此我们有 $x, x' \in E_{K_1}(p,q,r)$，其中 $K_1 = \max\{K, 1+\delta_N\}$。由引理 3.1，存在一个仅依赖于 N 和 K 的常数 $L \geq 0$，使得 $d_X(x,x') \leq L$。这意味着，对于任意 $x \in X$，

$$\pi_X^{-1}(B(x,L)) \cap \partial_* X^{(3,N)} \neq \emptyset,$$

其中，$B(x,L)$ 表示在 X 中以 x 为中心、半径为 L 的闭球。

由于 $f : \partial_* X \to \partial_* Y$ 是两个莫尔斯边界之间的同胚，我们有集合 $\pi_Y(f(\pi_X^{-1}(B(x,L)) \cap \partial_* X^{(3,N)}))$ 在 Y 中非空。

现在我们按如下方式定义映射 Φ_f，使其成为 f 到 X 的延拓：

$$\Phi_f : X \to Y,$$

其中，对于每个 $x \in X$，$\Phi_f(x) = y$，而 y 是从集合中任意选取的一个点

$$\pi_Y(f(\pi_X^{-1}(B(x,L)) \cap \partial_* X^{(3,N)})).$$

注意，Φ_f 的定义取决于：

- 逆像映射 π_X^{-1} 和投影映射 π_Y 中点的选取，
- 莫尔斯控制函数 N、常数 L 和同胚 f。

等式 $\Phi_f(x) = y$ 等价于存在三元组 $(p,q,r) \in \partial_* X^{(3,N)}$，使得

$$d_X(\pi_X(p,q,r), x) \leq L \quad \text{and} \quad \pi_Y(f(p), f(q), f(r)) = y. \tag{8}$$

6.2 有界性命题

我们先陈述一个命题（最初见于 [26]的命题4.1），它在我们的论证中起着关键作用；其证明仅依赖于同胚 f 的性质。我们将其改写为适用于当前情形的形式如下：

命题 6.1. 设 X, Y 是两个适当测地度量空间，并假设 X 是中心穷尽的。设 $f : \partial_* X \to \partial_* Y$ 是一个拟对称、双 H ¨older 或强拟共形同胚。那么对于任意莫尔斯控制函数 N_1，存在一个函数 $\eta_{N_1} : (0,\infty) \to (0,\infty)$，使得对于所有 (p,q,r)、$(p',q',r') \in \partial_* X^{(3,N_1)}$，

$$d_X\big(\pi_X(p,q,r), \pi_X(p',q',r')\big) \leq \theta \implies$$
$$d_Y\big(\pi_Y(f(p),f(q),f(r)), \pi_Y(f(p'),f(q'),f(r'))\big) \leq \eta_{N_1}(\theta).$$

固定构造 Φ_f 时所用的莫尔斯控制函数 N 和常数 L。将它们与命题 6.1 结合，我们得到关于延拓映射的以下有界性结果：

命题 6.2. 对任意 $t \geq 0$，存在一个常数 $D = D(t, N, L, f)$，使得对于所有满足 $d_X(x_1, x_2) \leq t$ 的 $x_1, x_2 \in X$，我们有

$$d_Y(\Phi_f(x_1), \Phi_f(x_2)) \leq D.$$

证明. 对于 $i = 1,2$，选择三元组 $(p_i, q_i, r_i) \in \pi_X^{-1}(B(x_i, L)) \cap \partial_* X^{(3,N)}$（根据 Φ_f 的构造，该集合非空），使得

$$\pi_Y(f(p_i), f(q_i), f(r_i)) = \Phi_f(x_i).$$

根据公式（8），对于 $i = 1, 2$，我们有 $d_X(x_i, \pi_X(p_i, q_i, r_i)) \leq L$。在 X 中应用三角不等式，得到

$$d_X\big(\pi_X(p_1, q_1, r_1), \pi_X(p_2, q_2, r_2)\big) \leq d_X(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{2} d_X\big(x_i, \pi_X(p_i, q_i, r_i)\big) \leq t + 2L.$$

由于 (p_1, q_1, r_1)，$(p_2, q_2, r_2) \in \partial_* X^{(3,N)}$，由命题 6.1（取 $N_1 = N$ 和 $\theta = t + 2L$）可得 s

$$d_Y\big(\pi_Y(f(p_1), f(q_1), f(r_1)), \pi_Y(f(p_2), f(q_2), f(r_2))\big) \leq \eta_N(t + 2L).$$

根据 Φ_f的定义，由此可得

$$d_Y(\Phi_f(x_1), \Phi_f(x_2)) \leq D,$$

whe其中 $D = \eta_N(t + 2L)$（从而 D仅依赖于 t、 N、 L和 f，如所要求） . □

当同胚 f 与 f^{-1} 为2-稳定且拟M¨比乌斯时，前述命题的有效性已在 [8] 中建立，随后一节中的断言自动成立。尽管映射 π_X 与该工作中的构造略有不同，但由此产生的差异可以忽略。因此，只需考虑其余情形。

6.3 定理 1.4的证明

证明。设 L 与 N 分别表示在 Φ_f的构造中所用的固定常数与莫尔斯控制函数。由于 Y 也是中心穷尽的，我们对 f^{-1}复制相同的构造：用 $\Phi_{f^{-1}}$表示由 f^{-1}的延拓在 Y上诱导的映射。具体而言，存在常数 $L' \geq 0$ 与莫尔斯控制函数 N'，使得

$$\Phi_{f^{-1}} : Y \to X,$$

其中，对于任意 $y \in Y$，我们令 $\Phi_{f^{-1}}(y) = x$，其中 x 是从非空集合中任意选取的点

$$\pi_X(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(B(y, L')) \cap \partial_* Y^{(3,N')})).$$

根据命题 6.2，并沿用 [26], 中定理 4.3 的方法，我们立即得到如下线性有界性：

• 存在常数 $A = \eta_N(1 + 2L) > 0$（仅依赖于 N、L 和 f），使得对所有 x_1、$x_2 \in X$，

$$d_Y(\Phi_f(x_1), \Phi_f(x_2)) \leq Ad_X(x_1, x_2) + A.$$

• 类似地，存在一个常数 $A' > 0$（仅取决于 N'、L' 和 f^{-1}），使得对所有 y_1、$y_2 \in Y$，

$$d_X(\Phi_{f^{-1}}(y_1), \Phi_{f^{-1}}(y_2)) \leq A'd_Y(y_1, y_2) + A'.$$

现在我们证明 Φ_f 和 $\Phi_{f^{-1}}$ 互为拟逆。令 $y \in Y$，设 $x = \Phi_{f^{-1}}(y)$ 和 $y_1 = \Phi_f(x)$。选取三元组

$$(p_1, q_1, r_1) \in \pi_X^{-1}(B(x, L)) \cap \partial_* X^{(3,N)} \quad \text{and} \quad (f(p), f(q), f(r)) \in \pi_Y^{-1}(B(y, L')) \cap \partial_* Y^{(3,N')}$$

使得

$$\pi_Y(f(p_1), f(q_1), f(r_1)) = y_1 \quad \text{and} \quad \pi_X(p, q, r) = x.$$

定义 $y_0 = \pi_Y(f(p)\ f(q)\ f(r))$ 以及 $x_1 = \pi_X(p_1, q_1, r_1)$。根据构造，我们有

$$d_Y(y, y_0) \leq L' \quad \text{and} \quad d_X(x, x_1) \leq L.$$

断言：$(p, q, r) \in \partial_* X^{(3,N_1)}$ 对于某个莫尔斯控制函数 $N_1 = N_1(f^{-1}, N')$。

我们将此命题的证明留到论证末尾。假设该命题成立，令$N_2 = \max\{N_1, N\}$；则 (p, q, r)、$(p_1, q_1, r_1) \in \partial_* X^{(3,N_2)}$。由命题 6.1，得

$$d_Y(y_0, y_1) \leq \eta_{N_2}(L).$$

在 Y 中应用三角不等式，可得：

$$d_Y(y, y_1) \leq d_Y(y, y_0) + d_Y(y_0, y_1) \leq L' + \eta_{N_2}(L).$$

因此，存在常数 $L_1 = L' + \eta_{N_2}(L)$（仅取决于 N、N'、f、f^{-1}、L 和 L'），使得对任意 $y \in Y$，

$$d_Y(y, \Phi_f(\Phi_{f^{-1}}(y))) \leq L_1.$$

通过对称的论证，$d_X(x, \Phi_{f^{-1}}(\Phi_f(x)))$ 对所有 $x \in X$ 均一致有界。因此，Φ_f 和 $\Phi_{f^{-1}}$ 是拟等距映射。

Φ_f 在莫尔斯边界上诱导出 f 这一事实，直接由 [26]中的定理 4.3 的证明可得。

命题的证明 根据拟共形、拟对称和双赫尔德同胚的定义，映射 f^{-1} 是相对于莫尔斯控制函数 N' 的基三角形稳定映射（参见 [26] 中的定义 3.4）。

由于 $(f(p)\ f(q)\ f(r)) \in \partial_* Y^{(3,N')}$ 且 $y_1 \in E(f(p)\ f(q)\ f(r))$，[26] 中的引理 3.2给出$f(p)\ f(q)\ f(r) \in \partial Y^{(M)y_1}$，其中某个莫尔斯控制函数为 $M = M(N')$。

对于这个莫尔斯控制函数 M，f^{-1} 的基三角形稳定性意味着存在一个莫尔斯控制函数 $M_1 = M_1(N', M)$，使得对于三元组 $(f(p)\ f(q)\ f(r))$（它位于 $\partial_* Y^{(3,N')}$ 中）以及点 $x = \Phi_{f^{-1}}(y) \in E(p, q, r)$，$y_1 \in E(f(p)\ f(q)\ f(r))$，我们有

$$f^{-1}(\partial Y_{y_1}^{(M)}) \subset \partial X_x^{(M_1)}.$$

因此， $p,q,r \in \partial X^{(M_1)_x}$。由引理 2.11，存在一个莫尔斯控制函数 $M_2 = M_2(M_1)$，使得 $p,q,r \in \partial_*^{M_2} X_x$。测地线 $[x,p]$, $[x,q]$, $[x,r]$ 是 M_2-莫尔斯的；由引理 2.5，所有双无限测地线 $[p,q]$、$[p,r]$ 和 $[q,r]$ 都是 N_1-莫尔斯的，其中 N_1 仅取决于 M_2。

由于 M_2 仅取决于 M_1，而后者又仅取决于 N'、M 和 f^{-1}（其中 M 仅取决于 N'），我们得出结论：N_1 仅取决于 f^{-1} 和 N'。这一结论的成立关键依赖于 f^{-1} 的基三角形稳定性和 Y 的中心穷尽性，从而完成了该断言的证明。

□

参考文献

[1] A. F. Beardon与Ch. Pommerenke，平面域的Poincar´e度量，J. London Math. Soc. (2) 18 (1978)，第3期，475–483. MR 518232[2] Christopher J. Bishop与Peter W. Jones，豪斯多夫维数与克莱因群，《数学学报》179 (1997)，第1期，1–39. MR 1484767[3] M. Bonk与O. Schramm，格罗莫夫双曲空间的嵌入，《几何与泛函分析》10 (2000)，第2期，266–306. MR 1771428[4] Marc Bourdon，边界共形结构与g´eod´esique流（CAT(−1)空间），《数学教学》(2) 41 (1995)，第1–2期，63–102. MR 1341941[5] Martin R. Bridson与Andr´e Haefliger，非正曲率度量空间，数学科学基础丛书 [数学科学基本原理], 第319卷，施普林格出版社，柏林，1999. MR 1744486[6] Richard D. Canary，Poincar´e度量与瑟斯顿定理的共形版本，Duke Math. J. 64 (1991)，第2期，349–359. MR 1136380[7] Christopher H. Cashen与John M. Mackay，群的收缩边界上的可度量化拓扑，Trans. Amer. Math. Soc. 372 (2019)，第3期，1555–1600. MR 3976570[8] Ruth Charney、Matthew Cordes与Devin Murray，莫尔斯边界的拟莫比乌斯同胚，《伦敦数学会通报》51 (2019)，第3期，501–515. MR 3964503[9] Ruth Charney、Matthew Cordes与Alessandro Sisto，某些莫尔斯边界的完整拓扑描述，《群、几何与动力学》17 (2023)，第1期，157–184. MR 4563334[10] Ruth Charney与Harold Sultan，CAT(0)空间的收缩边界，《拓扑学杂志》8 (2015)，第1期，93–117. MR 3339446[11] Matthew Cordes，完备测地度量空间的莫尔斯边界，《群、几何与动力学》11 (2017)，第4期，1281–1306. MR 3737283[12] Matthew Cordes与Matthew Gentry Durham，有限生成群之子群的边界凸余紧性与稳定性，《国际数学研究通知》(2019)，第6期，1699–1724. MR 3932592[13] Matthew Cordes、Matthieu Dussaule与Ilya Gekhtman，莫尔斯边界到马丁边界的嵌入，《代数与几何拓扑》22 (2022)，第3期，1217–1253. MR 4474783[14] Matthew Cordes与David Hume，稳定性与莫尔斯边界，《伦敦数学会杂志》(2) 95 (2017)，第3期，963–988. MR 3664526[15]Matthew Cordes与Ivan Levcovitz，考克斯特群莫尔斯边界的连通性，arXiv预印本 arXiv:2503.14085，2025.[16] Matthew Cordes、Jacob Russell、Davide Spriano与Abdul Zalloum，莫尔斯测地线的正则性与稳定子群的增长，《拓扑学杂志》15 (2022)，第3期，1217–1247.[17] ´E. Ghys与P. de la Harpe（编），d'apr`es Mikhael Gromov的双曲群，《进展丛书》

数学，第83卷，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990年，1988年在伯尔尼举行的瑞士双曲群研讨会论文. MR 1086648[18] Marius Graeber、Annette Karrer、Nir Lazarovich与Emily Stark，直角Coxeter群莫尔斯边界中出人意料的圆，Topology Appl. 294 (2021)，论文编号107645，3. MR 4234246[19] M. Gromov，双曲群，群论论文集，Math. Sci. Res. Inst. Publ.，第8卷，Springer，纽约，1987年，第75–263页. MR 919829[20] Suzhen Han与Qing Liu，稳定子群的增长率间隙，arXiv预印本 arXiv:2412.11244，2024年.[21] Juha Heinonen与Steffen Rohde，Koenigs函数、拟圆与BMO，Duke Math. J. 78 (1995)，第2期，301–313. MR 1333502[22] Merlin Incerti-Medici，莫尔斯边界上拓扑的比较与拟等距不变性，Geom. Dedicata 212 (2021)，153–176. MR 4251668[23] P. J¨arvi与M. Vuorinen，一致完美集与拟正规映射，J. London Math. Soc. (2) 54 (1996)，第3期，515–529. MR 1413895[24] Hao Liang与Qingshan Zhou，格罗莫夫双曲空间的边界刚性，Geom. Dedicata 218 (2024)，第5期，论文编号94，23. MR 4795029[25] Qing Liu，莫尔斯边界上的动力学，Geom. Dedicata 214 (2021)，1–20. MR 4308266[26] ———，莫尔斯边界上的映射，Conform. Geom. Dyn. 26 (2022)，67–96. MR 4467305[27] Paul MacManus、Raimo N¨akki与Bruce Palka，复平面中的拟共形双齐性紧空间，Proc. London Math. Soc. (3) 78 (1999)，第1期，215–240. MR 1658172[28] Alvaro Mart´ınez-P´erez与Jos´e M. Rodr´ıguez，Gromov双曲流形与图的Cheeger等周常数，Commun. Contemp. Math. 20 (2018)，第5期，1750050，33. MR 3833900[29] C. McMullen，Teichm ¨uller空间上的迭代，Invent. Math. 99 (1990年)，第2期，425–454. MR 1031909[30] Curtis T. McMullen，Siegel圆盘的自相似性与Julia集的豪斯多夫维数，《数学学报》180 (1998)，第2期，247–292. MR 1638776[31] Sarah C. Mousley与Jacob Russell，分层双曲群由其莫尔斯边界决定，Geom. Dedicata 202 (2019)，45–67. MR 4001807[32] Devin Murray，余紧CAT(0)空间收缩边界的拓扑与动力学，Pacific J. Math. 299 (2019)，第1期，89–116. MR 3947271[33] Piotr W. Nowak与Guoliang Yu，大尺度几何，EMS数学教材，欧洲数学会（EMS），Z¨urich，2012. MR 2986138[34] D. Osin，无轴双曲群，Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016)，第2期，851–888. MR 3430352[35] Fr´ed´eric Paulin，双曲群由其边界d´etermin´e，J. London Math. Soc. (2) 54 (1996)，第1期，50–74. MR 1395067[36] Ch. Pommerenke，一致完美集与Poincar´e度量，Arch. Math. (Basel) 32 (1979)，第2期，192–199. MR 534933[37] Yulan Qing与Kasra Rafi，次线性Morse边界 I：CAT(0)空间，Adv. Math. 404 (2022)，论文编号108442，51. MR 4423805[38] Yulan Qing、Kasra Rafi与Giulio Tiozzo，次线性Morse边界，II：适当测地空间，Geom. Topol. 28 (2024年)，第4期，1829–1889. MR 4777703[39] Jacob Russell、Davide Spriano与Hung Cong Tran，莫尔斯拟测地线的局部到整体性质，Math. Z. 300 (2022)，第2期，1557–1602. MR 4363788[40] Vladimir Shchur，Morse引理的定量版本与固定理想边界的拟等距，J. Funct. Anal. 264 (2013)，第3期，815–836. MR 3003738

[41] AlessandroSisto，双曲嵌入子群的拟凸性，Math. Z. **283** (2016)，第3–4期，649–658。MR 3519976[42] Toshiyuki Sugawa，克莱因群极限集的一致完美性，Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001)，第9期，3603–3615。MR 1837250[43] ———，一致完美集——其分析和几何方面，S¯ugaku **53** (2001)，第4期，387–402。MR 1869018[44] Tim Susse，随机直角考克斯特群的莫尔斯子群与边界，Geom. Dedi- cata **217** (2023)，第2期，论文编号15，共15页。MR 4523870[45] Hung Cong Tran，论强拟凸子群，Geom. Topol. **23** (2019)，第3期，1173–1235。MR 3956891[46] P. Tukia 和 J. V¨ais¨al¨a，度量空间的拟对称嵌入，芬兰科学院数学辑 A I **5** (1980)，第1期，97–114。MR 595180[47] Matti Vuorinen，关于拟共形映射最大膨胀率的一点说明，美国数学会会刊 **92** (1984)，第4期，505–508。MR 760934[48] Stefanie Zbinden，具有有限边群的群图的莫尔斯边界，群论杂志**26** (2023)，第5期，969–1002。MR 4634721[49] ———，具有和不具有σ紧莫尔斯边界的小消去群，arXiv预印本 arXiv:2307.13325，2023年。[50] ———，3-流形群的莫尔斯边界，Trans. Amer. Math. Soc. **377** (2024)，第10期，7175–7228。MR 4855334 湖南大学数学学院，中华人民共和国湖南省长沙市，410082 电子邮箱：hansz@hnu.edu.cn 南开大学数学科学学院与LPMC，中华人民共和国天津市，300071 电子邮箱：qingliu@nankai.edu.cn