有理数域上秩三克雷莫纳群的有限子群

A. V. ZAITSEV

摘要。我们给出了有理数域上秩三克雷莫纳群有限子群阶的一个显式界 $\mathbb{Q}$。

arXiv:2602.06162v1 [math.AG] 5 Feb 2026

目录

1. 引言 1 2. 线性群的界 2 3. G-底空间维数为正的莫里纤维空间 7 4. 非Gorenstein Fano 三维簇 10 5. Gorenstein Fano 三维簇 附录 A. 伽罗瓦理论 22 参考文献 41

1. 引言

我们的出发点是一个著名的闵可夫斯基定理，它提出了一个锐利的乘法界，限制有理数域上一般线性群的有限子群的阶。更确切地说，有如下定理。

定理 1.1 （[18, 闵可夫斯基定理]）。设 $n \geqslant 1$ 为整数， p 为素数。定义

$$M(n,p) = \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \dots$$

则：

（1）若 G 是一般线性群$_n$（$\mathbb{Q}$）的有限子群，则 ν_p（$|G|$） $\leqslant M$（n,p），其中 ν_p 是 p-进赋值。

（2）存在一个有限的 p-子群 G，它是一般线性群$_n$（$\mathbb{Q}$）的子群，且 ν_p（$|G|$） $= M$（n,p）。

特别地，若我们用 $\mathcal{P}$ 表示所有素数构成的集合，那么对于一般线性群$_n$（$\mathbb{Q}$）的任意有限子群 G，有

$$|G| \leqslant \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{M(n,p)}.$$

1905年，舒尔在其论文 [30]中将这一定理的第一部分推广到任意数域的情形。一百年后，Serre证明了关于约化群的带有显式界的类似定理（见 [32, 定理 5]），而且对我们而言更有趣的是，他还证明了关于小域上秩二克雷莫纳群的类似结果，特别是关于$\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$的结果，见 [31, 定理2.4] （回顾一下，域 K 上秩为 n 的克雷莫纳群$\mathrm{Cr}_n(K)$是射影空间 $\mathbb{P}^n_K$的双有理自同构群）。此外，在后一篇论文中，Serre提出了一系列相关问题，特别是：在更高维中，有限子群的阶是否存在类似的界（或其他某种界）？ 这个问题

由普罗霍罗夫和什拉莫夫在 [27] 中于更一般的情形下给出了肯定回答，但他们的界不再是显式的。

定理 1.2 (见 [27, 定理 1.4])。 设 K 是 $\mathbb{Q}$上的有限生成域。设 X 是 K上的簇。那么，X在 K 上的双有理自同构群 $\mathrm{Bir}(X)$ 的有限子群有界。

沿着这一方向，一个自然的问题是寻找一些明确且有效的界；从 $\mathbf{Cr}_3(\mathbb{Q})$入手也很自然。请注意，关于 $\mathbf{Cr}_2(\mathbb{Q})$的有限子群的阶的非乘法型上界的结果最近才在 [1] 中得到，而且所得上界是紧的。

定理 1.3 ([1, 定理 1.1])。 设 G 是 $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$的有限子群。那么 $|G| \leqslant 432$。此外，$\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$ 中存在一个阶为432的有限子群。

本文给出了 $\mathbf{Cr}_3(\mathbb{Q})$的一个明确上界，即以下定理成立。

定理 1.4。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一个 3 维簇，具有一个 $\mathbb{Q}$-点，且 $X = X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ 有理连通。设 $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 24\,103\,053\,950\,976\,000 < 10^{17}.$$

特别地，这适用于 $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{Q})$的有限子群。

这个界似乎远非最优。例如，我们所知的 $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{Q})$ 的最大有限子群是 $(D_{12} \times D_{12} \times D_{12}) \rtimes \mathfrak{S}_3$。它忠实作用于 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$，并包含 10368 个元素。此外，若能处理 Fano 三维簇的某个特定情形，则这个界还可以缩小 10^5, 倍，见注记 5.26 和定理 5.27。

本文的安排如下。在第 2 节，我们说明为何要给 一般线性群$_n$ 和 射影线性群$_n$ （对于 一般线性群$_n$ 的情形，不仅是在 $\mathbb{Q}$上，也是在数域上）有限子群的阶数设界，并回顾经典结果、证明辅助命题。第 3 节，我们对底空间维数为正的莫里纤维空间自同构群的有限子群阶数设界。第 4 节，我们对终端非 Gorenstein Fano 三维簇上的奇点数设界，并在命题 4.5中对作用于此类簇的有限子群阶数设界。第 5节，我们在命题 5.15 和 5.24 中对作用于终端 Gorenstein Fano 三维簇的有限群阶数设界，并证明定理 1.4。附录 A 包含本文的技术部分，专门讨论如何对次数不超过 15的数域不变量设界。

我们将使用以下记号。用 μ_n 表示阶为 n的循环群。用 D_{2n}表示阶为 $2n$的二面体群。用 ξ_n 表示阶为 n的本原单位根，特别地， ξ_4 表示虚数单位。用 ν_p 表示 p-进赋值。用 φ 表示欧拉函数。用K 表示域 K的代数闭包。若 $K \subset L$ 是一个域扩张，且 X 是定义在 K上的簇，则用 X_L 表示 X 到 L的标量扩张，并用 X表示 X 到 K的标量扩张。簇 X 在点 P 处的扎里斯基切空间记作 $T_P X$。用 $\mathbf{Pic}(X)$ 表示簇 X的 Picard 群。用 $\mathbf{Cl}(X)$ 表示簇 X的魏尔除子类群。用 $\mathcal{P}$ 表示所有素数构成的集合。

致谢。 我要感谢我的导师 Constantin Shramov 提出这个问题、与我进行有益的讨论，并始终关注这项工作。此外，我还要感谢 Mikhail Panov 在 LaTeX 方面给予的帮助。

2. 线性群的界

既然我们讨论的是克雷莫纳群的有限子群，那么显然，尤其应当考察所有有理 Fano

簇的自同构群的有限子群。若牢记极小模型纲领，与 Fano簇的联系便更加显而易见，不过我们将在后续章节中看到这一点。无论如何，我们必须给 Fano簇的自同构群中的有限子群的阶设定一个界。

若给定有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 Fano 簇 X，并希望界定 Aut(X) 的有限子群，首先可以考虑通过反典范系的某个次数，将 X 等变嵌入到某个射影空间 $\mathbb{P}^d_{\mathbb{Q}}$ 中，并利用 $\mathrm{PGL}_{d+1}(\mathbb{Q})$ 的界。当然，当 number d 不太大时，这一策略效果很好。在某些情况下，由此得到的界足以满足我们的需要。这正是研究射影线性群的有限子群之界的动机。

研究作用在簇上的有限群的另一种可能策略，是使用以下标准定理（证明参见例如 [37, 定理 2.7]），并应用 一般线性群$_n$ 的界。

定理 2.1。 设 X 是特征为 0 的域 K 上的不可约代数簇。设 G 是一个有限群，它忠实地作用在 X 上，并固定一个 K-点 P。那么自然同态

$$d : G \to \mathrm{GL}(T_P X)$$

是单射。

当然，要应用这个定理，我们需要一个固定的有理点，而这种情况几乎从不发生。不过，对于奇点为孤立点的奇异簇，通过考虑基域的扩张并转而考察一个子群，可以得到一个固定的有理点，这对我们的目的已经足够。这正是我们研究一般线性群（不仅是在 $\mathbb{Q}$ 上，也是在数域上）的有限子群之界的动机。

为了找到这些界，我们应用舒尔定理和 Serre 定理。不过，在表述这些定理之前，我们应当回顾分圆不变量 m 和 t 的定义。本文中所研究的所有域都具有特征零，因此我们在这一一般性下给出所有定义和结论。

定义 2.2。 ([31, §1]) 设 K 是一个特征为 0 的域，$p \neq 2$ 是一个素数。设 ξ_n 是一个 n次本原单位根，那么我们定义

- $t_p = t_p(K) = [K(\xi_p) : K]$;
- $t_2 = t_2(K) = [K(\xi_4) : K]$;
- $m_p = m_p(K) = \sup\{n \mid \xi_{p^n} \in K(\xi_p)\}$;
- $m_2 = m_2(K) = \sup\{n \mid \xi_{2^n} \in K\}$，若 $\xi_4 \in K$;
- $m_2 = m_2(K) = \sup\{n \mid \xi_{2^n} + \xi_{2^n}^{-1} \in K\}$，若 $\xi_4 \notin K$。

注记 2.3. 在论文 [32], Serre 给出了看似不同的分圆不变量定义，但正如他本人所提到的，它们与定义 2.2中的定义等价。此外，值得注意的是 $m_2 \geqslant 2$ 对于任意 K。

此外，引入以下不变量会很方便。

定义 2.4. 设 K 为一个特征为 0 的域。设 p为一个素数，则我们定义

- $\nu^{\mathrm{sch}}_{p,n} = \nu^{\mathrm{sch}}_{p,n}(K) = m_p \left\lfloor \frac{n}{t_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{pt_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2 t_p} \right\rfloor + \ldots$, if $p \neq 2$;
- $\nu^{\mathrm{sch}}_{p,n} = \nu^{\mathrm{sch}}_{p,n}(K) = m_2 n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots$, if $p = 2$ and $\xi_4 \in K$;
- $\nu^{\mathrm{sch}}_{p,n} = \nu^{\mathrm{sch}}_{p,n}(K) = n + m_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots$, if $p = 2$ and $\xi_4 \notin K$;
- $\nu^{\mathrm{se}}_{p,n} = \nu^{\mathrm{se}}_{p,n}(K) = m_p \left\lfloor \frac{n-1}{\varphi(t_p)} \right\rfloor + \nu_p((n-1)!)$.

此外，我们定义

$$\nu^{\mathrm{sch}}_n = \nu^{\mathrm{sch}}_n(K) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu^{\mathrm{sch}}_{p,n}}, \ \nu^{\mathrm{se}}_n = \nu^{\mathrm{se}}_n(K) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu^{\mathrm{se}}_{p,n}}.$$

现在，为了对有限子群的阶给出界，这些有限子群属于 一般线性群$_n$，让我们回顾舒尔定理，该定理出自 [30]，但采用 Serre 的表述。

定理 2.5 (参见 [32, 定理 2′])。 设 K 为一个数域， p 为一个素数， n 为一个正整数。则对于任意有限子群 $G \subset$ 一般线性群$_n(K)$，有

$$\nu_p(|G|) \leqslant \nu_{p,n}^{\mathrm{sch}}.$$

注 2.6. 定理 2.5 给出的界在 $p = 2$ 属于某些类型的域时可以略微改进。然而，在我们的方法中很难识别这些类型，因此我们仅限于所述的界。

定理2.5 给出了 一般线性群$_n$的有限子群阶的一个显然界。

推论 2.7. 设 K 为一个数域。则对于任意有限子群 $G \subset$一般线性群$_n(K)$，有

$$|G| \leqslant \nu_n^{\mathrm{sch}}.$$

以下推论对于应用很重要。

推论 2.8. 设 K 为一个次数为 $d \leqslant 7$的数域。设 $G \subset$一般线性群$_4(K)$ 为一个有限子群。则

$$|G| \leqslant 1\,132\,185\,600 < 10^{10}.$$

证明。由推论 2.7 可得 $|G| \leqslant \nu_4^{\mathrm{sch}}$结论由命题 A.2得出。 □

推论 2.9。设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。设 $G \subset$一般线性群$_4(K)$ 是一个有限子群。则

$$|G| \leqslant 87\,091\,200 < 10^8.$$

证明。 由推论 2.7 可得 $|G| \leqslant \nu_4^{\mathrm{sch}}$结论由引理 A.31得出。 □

推论 2.10。设 K 是次数为 $d \leqslant 15$ 的数域。设 $G \subset$ 一般线性群$_3(K)$ 是一个有限子群。则

$$|G| \leqslant 240\,045\,120 < 10^9.$$

证明。由推论 2.7 可得 $|G| \leqslant \nu_3^{\mathrm{sch}}$结论由命题 A.3得出。 □

推论 2.11. 设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。设 $G \subset$ 一般线性群$_3(K)$ 为有限子群。则

$$|G| \leqslant 2\,903\,040 < 10^7.$$

证明。 由推论 2.7 我们有 $|G| \leqslant \nu_3^{\mathrm{sch}}$，结论由引理 A.32。 □

注记 2.12. 注意，推论 2.8 与 2.10 中的界需要大量技术性工作，该工作在附录 A 中完成，而推论2.9与2.11中的界相当粗略，但对我们的目的而言已经足够。

为处理射影线性群$_n$，我们使用下述关于特征 0 的约化群的塞尔定理。

定理2.13 ([32, 定理 5]). 设 K 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限生成域。设 Γ 是 K 上秩为 r 、外尔群为 W 的连通约化群。

设 $G \subset \Gamma$ 为有限子群， p 为素数。则

$$\nu_p(|G|) \leqslant m_p \left\lfloor \frac{r}{\varphi(t_p)} \right\rfloor + \nu_p(W).$$

推论 2.14。 设 K 为一个数域， p为一个素数， n为一个正整数。则对任意有限子群 $G \subset$ 射影线性群$_n(K)$，都有

$$\nu_p(|G|) \leqslant \nu_{p,n}^{\mathrm{se}}.$$

证明。 由于 射影线性群$_n(K)$ 是秩为 $n-1$ 且外尔群同构于 $\mathfrak{S}_{n-1}$的约化群，因此该推论可由定义 2.4 和定理 2.13立即得出。 □

推论2.14给出了 射影线性群$_n$ 的有限子群阶的一个显然界。

推论 2.15。 设 K 是一个数域。那么，对于任意有限子群 $G \subset$ 射影线性群$_n(K)$，有

$$|G| \leqslant \nu_n^{\mathrm{se}}.$$

在 $\mathbb{Q}$ 推论 2.15中给出了显式界。我们来计算 射影线性群$_5(\mathbb{Q})$的这些界，后续应用中会用到。

推论 2.16。 设 $G \subset$射影线性群$_5(\mathbb{Q})$ 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 87\,178\,291\,200 < 10^{11}.$$

下面两个推论对于应用也很重要。

推论 2.17。 设 K 是一个次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。设 $G \subset$射影线性群$_3(K)$ 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 2\,620\,800 < 10^7.$$

证明。 由推论 2.15 可得 $|G| \leqslant \nu_3^{\mathrm{se}}$，结论由引理 A.33得出。 □

推论 2.18。 设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。设 $G \subset$射影线性群$_4(K)$ 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 943\,488\,000 < 10^9.$$

证明。 由推论 2.15 可得 $|G| \leqslant \nu_4^{\mathrm{se}}$，结论由引理 A.34得出。 □

对于较小的秩，我们需要以下众所周知的结果。

引理 2.19。 设 $G \subset$ 一般线性群$_2(\mathbb{Q})$ 是一个有限子群。那么 $|G| \leqslant 12$。

证明。 根据伯恩赛德定理，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ 的每个有限子群都与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 的某个有限子群共轭，见 [4]。因此，群 G 嵌入 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$，并由 [20, 第 IX 章第 §14] 节可得 $|G| \leqslant 12$。□

命题 2.20 ([3, 命题1。1])**.** 设 K 是特征0 的域，且 ξ_m 是一个本原 m次单位根。

(1) 射影线性群$_2(K)$ 包含 μ_m 和 D_{2m}，当且仅当 K 包含 $\xi_m + \xi_m^{-1}$(特别地，总是包含 D_6、D_8 和 D_{12})；(2) 射影线性群$_2(K)$ 包含 $\mathfrak{A}_4$ 和 $\mathfrak{S}_4$，当且仅当 -1 是 K 中两个平方数之和；(3) 射影线性群 $_2(K)$ 包含 $\mathfrak{A}_5$，当且仅当 -1 是 K 中两个平方数之和，且 K 包含 $\sqrt{5}$。

推论 2.21。射影线性群$_2(\mathbb{Q})$ 的所有有限子群为： μ_2, μ_3, μ_4, μ_6, D_4, D_6, D_8和 D_{12}。特别地，它们的阶不超过12。

此外，还需要用到以下几个简单引理。

引理 2.22。 设 ξ_n 是一个本原的 n次单位根，其中 $n > 2$。那么

$$[\mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{\varphi(n)}{2},$$

其中， φ是欧拉函数。

证明。考虑域塔

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1}) \subset \mathbb{Q}(\xi_n).$$

众所周知，$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$。下面证明，$[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})] = 2$。首先，这些域并不相同，因为 $\mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})$同构于 $\mathbb{R}$的一个子域，而 $\mathbb{Q}(\xi_n)$则不是。其次，ξ_n 是多项式 $x^2 - (\xi_n + \xi_n^{-1})x + 1$ 的一个根，其次数为 2。也就是说，扩张的次数等于 2。

最后，我们得到

$$[\mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1}) : \mathbb{Q}] = \frac{[\mathbb{Q}(\xi_m) : \mathbb{Q}]}{[\mathbb{Q}(\xi_n) : \mathbb{Q}(\xi_n + \xi_n^{-1})]} = \frac{\varphi(n)}{2}.$$

□

引理 2.23。设 $\mathbb{Q} \subset K$ 是一个次数至多为2的域扩张。设 $G \subset$ 射影线性群$_2(K)$ 是一个有限子群。则 $|G| \leqslant 24$。

证明。存在一个有理数 d，使得 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$。由命题 2.20 可知，G 或者是循环群，或者是二面体群，或者同构于 $\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{S}_4$ 或 $\mathfrak{A}_5$。注意，G 不可能同构于 $\mathfrak{A}_5$。事实上，假设 G 同构于 $\mathfrak{A}_5$，则 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$应包含 $\sqrt{5}$，并且根据命题 2.20，-1应能在 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$中分解为两个平方数之和。第一个条件意味着 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$与 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$相同，这与第二个条件矛盾。

若 G 同构于 $\mathfrak{A}_4$ 或 $\mathfrak{S}_4$，则 $|G| \leqslant 24$。若 G 同构于 μ_m 或 D_{2m}，则 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 包含 $\xi_m + \xi_m^{-1}$。于是我们有 $[\mathbb{Q}(\xi_m + \xi_m^{-1}) : \mathbb{Q}] \leqslant 2$。应用引理 2.22 可得不等式 $\varphi(m) \leqslant 4$，这意味着 $m \leqslant 12$ 和 $|G| \leqslant 24$。□

推论 2.24。设 G 是 自同构群(C)的有限子群，其中 C 是定义在 $\mathbb{Q}$上的光滑圆锥曲线。则 $|G| \leqslant 24$。

证明。由于圆锥曲线 C 在 $\mathbb{P}^1$ 的二次扩张上同构于 $\mathbb{Q}$，因此 G 是射影线性群$_2(K)$的子群，其中 $\mathbb{Q} \subset K$ 是次数为 2的扩张。因此，根据引理 2.23，我们有 $|G| \leqslant 24$□

引理 2.25. 设 $\mathbb{Q} \subset K$ 是次数至多为 d 的域扩张。设 n 是满足性质 $\varphi(n) \leqslant 2d$ 的最大整数。设 $G \subset$ 射影线性群$_2(K)$ 是一个有限子群。则 $|G| \leqslant \max\{60, 2n\}$。

证明。根据命题 2.20，我们知道 G 要么是循环群，要么是二面体群，要么与 $\mathfrak{A}_4$、$\mathfrak{S}_4$ 或 $\mathfrak{A}_5$ 同构。在最后三种情况下，我们有 $|G| \leqslant 60$。如果 G 与 μ_m 或 D_{2m} 同构，那么根据命题 2.20，域 K 包含一个元素 $\xi_m + \xi_m^{-1}$，且有不等式 $[\mathbb{Q}(\xi_m + \xi_m^{-1}) : \mathbb{Q}] \leqslant d$。应用引理 2.22，得到 $\varphi(m) \leqslant 2d$，这意味着 $m \leqslant n$ 和 $|G| \leqslant 2n$。□

引理 2.26。设 $\mathbb{Q} \subset L$ 是次数至多为 d 的域扩张。设 $G \subset$射影线性群$_2(L)$ 是一个有限子群。那么

(1) $|G| \leqslant 60$ 若 $d = 4$;(2)
$|G| \leqslant 84$ 若 $d = 6$;(3)
$|G| \leqslant 180$ 若 $d = 12$;(4)
$|G| \leqslant 420$ 若 $d = 24$。

证明。注意到 $\max\{n \mid \varphi(n) \leqslant 8\} = 30$，$\max\{n \mid \varphi(n) \leqslant 12\} = 42$，$\max\{n \mid \varphi(n) \leqslant 24\} = 90$ 以及 $\max\{n \mid \varphi(n) \leqslant 48\} = 210$。现在由引理2.25可得结论。□

引理 2.27. 设 $\mathbb{Q} \subset L$ 是次数至多为 6 的域扩张。设 C 是 L上的一条圆锥曲线。设 $G \subset$ 自同构群(C) 是一个有限子群。那么 $|G| \leqslant 180$。

证明. 圆锥曲线 C 在 $\mathbb{P}^1$ 的某个二次扩张上同构于 L。因此， G 是射影线性群$_2(K)$的一个有限子群，其中 $\mathbb{Q} \subset K$ 的次数至多为12。应用引理 2.26，得到 $|G| \leqslant 180$。 □

引理 2.28. 设 $\mathbb{Q} \subset L$ 是次数至多为 6的域扩张。设 $G \subset$ 一般线性群$_2(L)$ 是一个有限子群。那么 $|G| \leqslant 1512$。

证明。 若将 G 在标准投影到 $\mathrm{PGL}_2(L)$下的像记为 $\overline{G}$，则存在一个短正合列

$$0 \to \mu_l \to G \to \overline{G} \to 1,$$

其中 $\mu_l \subset L^\times$。在 $L^\times$ 中，本原根的最大次数为 18，因此 $|\mu_l| \leqslant 18$。此外，应用引理 2.26，可得 $|\overline{G}| \leqslant 84$。最后，我们有

$$|G| = |\mu_r| \cdot |\overline{G}| \leqslant 1512.$$

□

3. G-莫里纤维空间，其底空间维数为正

本节中，我们给出忠实作用于圆锥丛和德尔佩佐纤维化的有限子群阶的精确界。首先，让我们固定记号并回顾一些定义。

从现在起，除非另有说明， G 始终表示一个有限群。若 G作用于一个簇 X上，则称 X 为 G-簇（除非另有说明，均假设作用是忠实的）。两个 G-簇之间的态射均假设为 G-等变的。 $G\mathbb{Q}$-阶乘簇是指满足如下条件的 G-簇：其任意 G-不变 Weil 除子都是 $\mathbb{Q}$-Cartier 的。若光滑 G曲面 S 满足：从 S 到正规曲面的任意 G-等变双有理态射都是同构，或者等价地， G-不变皮卡数 $\rho(S)^G$ 等于 1，则称 S 为 G-极小的。

设 X 是一个终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘三维簇。回顾一下， G-等变态射

$$f : X \to \mathcal{B}$$

称为 *G-Mori 纤维空间*，如果

(1) $\mathcal{B}$ 是正规簇，且 $\dim \mathcal{B} < \dim X$；(2) f 的纤维连通；(3) 反典范类 $-K_X$ 是 f-丰沛的；(4) 相对 G-不变量皮卡数 $\rho(X/\mathcal{B})^G$ 等于 1。

如果 $\mathcal{B}$ 是一个点，那么 $-K_X$ 是丰沛的，并且称 X 为一个具有 $\rho(X)^G = 1$ 的 $G\mathbb{Q}$-Fano 三维簇。
如果 $\mathcal{B}$ 是一条曲线，那么 f 的一般纤维是一个德尔佩佐曲面；此时称 X 为一个 $G\mathbb{Q}$-德尔佩佐纤维化。
如果 $\mathcal{B}$ 是一个曲面，那么 f 的一般纤维是一条圆锥曲线；此时称 X 为一个 $G\mathbb{Q}$-圆锥丛。

对于每个具有连通纤维 $X \to \mathcal{B}$ 的满射 G-等变态射，我们都关联一个群的正合列

$$1 \to G_F \to G \to G_B \to 1,$$

其中 G_B 是 $\mathrm{Aut}(\mathcal{B})$ 中的有限子群，且 G_F 作用于 X 并保持纤维不变。下述引理在某些情况下提供了一种考察群 G_F 的替代方法.

引理 3.1。 设 X 是特征0域 K 上的光滑射影 G簇。设

$$f : X \to \mathcal{B}$$

是一个具有连通纤维的 G-等变态射。那么存在一个光滑纤维 Y，使得 $G_F \subset$ 自同构群(Y)。此外，如果 K-点在 X 中稠密，则可选择使 Y 包含一个 K-点。

证明。 首先，考虑开子集 $V \subset \mathcal{B}$，在该子集上纤维光滑（这样的 V 存在，因为一般点上的纤维是光滑的，因此我们可以应用 [9, 命题 17.7。8]），并将其原像记为 X_V。其次，对每个元素 $g \in G$，关联闭子集 $Z_g \subset X$，该子集由 g作用下的不动点组成。考虑由以下公式给出的开子集 $U \subset X_V$：

$$U = X_V \setminus \bigcup_{g \in G} Z_g$$

并将与 U 相交的任意纤维记为 Y。根据 U 的构造， Y 是光滑的，且 $G_F \subset$ 自同构群(Y)。如果 K 点在 X 中稠密，我们可以找到 K 点 $P \in U$，并取经过 P 的纤维 Y。□

由于我们是在代数闭域之外的域上进行研究，下面的沙特莱定理很有用。

定理 3.2 (例如参见 [7, 定理 5.1。3])。 设 X 是域 K 上维数为 n 的 *Severi–Brauer*簇。那么，当且仅当 X 含有一个 K 点时， X 与 $\mathbb{P}^n_K$ 同构。

现在，我们对作用于具有有理点的几何有理曲面上的有限子群的阶进行界定。特别地，我们需要界定所有德尔佩佐曲面的自同构群的有限子群的阶。但在证明一般情形之前，让我们先写出关于6次德尔佩佐曲面和 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$的引理。

引理 3.3 ([1, 引理 6.12])。 设 $G \subset$ 射影线性群$_3(\mathbb{Q})$ 是一个有限子群。则 $|G| \leqslant 24$。

引理 3.4 ([1, 引理 4.1，引理 4.2])。 设 X 是一个在 $\mathbb{Q}$上的*6*次德尔佩佐曲面。设 $G \subset$ 自同构群(X) 是一个有限子群。则 $|G| \leqslant 432$。此外，存在一个有理*del Pezzo*曲面 S，使得其群自同构群(S) 包含一个阶为432的有限子群。

下面的引理可由 [1], 的结果推出，但为了自包含性，我们仍将其证明。此外，对于 [1]中的某些德尔佩佐曲面，需要假设有理性，而我们这里只假设存在一个 $\mathbb{Q}$-点。

引理 3.5. 设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、具有一个 $\mathbb{Q}$-点的德尔佩佐曲面，且 $G \subset$自同构群(X) 是一个有限子群。那么 $|G| \leqslant 432$。

证明。 我们根据曲面的次数 d，逐一讨论各种情况。

设 $d = 9$。在这种情况下， X 是一个包含 $\mathbb{Q}$-点的 Severi–Brauer曲面。根据定理 3.2，我们得到 X 同构于 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$。根据引理 3.3，我们得到 $|G| \leqslant 24$。

设 $d = 8$。有两种情况：X 同构于在一点处爆破 $\mathbb{P}^2$ 所得的曲面，或者 X 同构于一个光滑二次曲面。在前一种情况下，存在一个 G-等变的爆破下降到 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$，并且我们可以像 9 次的情形那样得到 $|G| \leqslant 24$ 。由定理 2.1，我们有 $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$，并由引理 2.19 得到 $|G| \leqslant 12$ 。在后一种情况下，由于 X 包含一个 $\mathbb{Q}$-点，它同构于 $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ 或 Weil 标量限制 $R_{L/\mathbb{Q}}(\mathbb{P}^1_L)$，其中 $\mathbb{Q} \subset L$ 是一个二次扩张（参见引理 7.3]）。在前一种情况下，自同构群同构于 $(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}) \times \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})) \rtimes \mu_2$，根据推论 2.21，其最大有限子群有 288 个元素。在后一种情况下，自同构群同构于 $\mathrm{PGL}_2(L) \rtimes \mu_2$ ，根据引理 2.23，其最大有限子群的阶不超过 48。因此，在这种情况下，我们有 $|G| \leqslant 288$。

设 $d=7$。存在一个 G-等变的收缩到 $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$，并且我们可以像 9 次的情形那样得到 $|G|\leqslant 24$。

令 $d=6$。根据引理 3.4 可得 $|G|\leqslant 432$。
令 $d=5$。根据 [5, 定理 8.5。6] 可得自同构群$(\overline{X})\simeq \mathfrak{S}_5$，因此 $|G|\leqslant 120$.
令 $d=4$。根据 [5, 定理 8.6。6] 可得自同构群$(X)\simeq \mu_2^4\rtimes\Gamma$，其中 $|\Gamma|\leqslant 10$，因此 $|G|\leqslant 160$。

令 $d=3$。根据 [35, 定理 3] 可得 |自同构群$(X)|\leqslant 120$，因此 $|G|\leqslant 120$.
令 $d=2$。 [5, 表 8.9] 表明 |自同构群$(X)|\leqslant 336$，因此 $|G|\leqslant 33$ 6.
令 $d=1$。此时， $\mathbb{Q}$-点位于 X 上，且在所有自同构下均保持不变；具体而言，它是完全线性系 $|-K_X|$中所有除子的交点。因此， G 由定理一般线性群$_2(\mathbb{Q})$ 2.1可嵌入 $|G|\leqslant 12$ ，由引理2.19可得。□

下面的引理给出了我们在曲面情形下所需的最一般情形。

引理 3.6。设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的正规射影几何有理曲面，且具有一个 $\mathbb{Q}$-点。设 $G\subset$ 自同构群(X) 是一个有限子群。那么 $|G|\leqslant 432$。

证明。取 G-等变奇点消解，根据朗–西村定理（例如参见 [21,定理 3.6.11]），得到一个光滑几何有理的 G曲面 S ，其上有一个 $\mathbb{Q}$-点。此外，对群 G的作用应用极小模型纲领，可假设 S 要么是一个 G-极小德尔佩佐曲面，要么具有圆锥丛结构 $\pi: S\to B$，且 $G\subset$ 自同构群(S, π)，参见 [12, 定理 1G]。注意，在后一种情形下，曲线 B 是几何有理的并包含一个 $\mathbb{Q}$-点，因为 S 包含一个 $\mathbb{Q}$-点。因此，我们有一个同构 $B\simeq\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$。

若 S 是德尔佩佐曲面，那么根据引理 3.5，我们有 $|G|\leqslant 432$。若 S 具有圆锥丛结构，那么我们有一个标准正合列

$$1\to G_F\to G\to G_B\to 1,$$

其中 G_B 是 $\mathrm{Aut}(B)\simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q})$中的有限子群，而 G_F 是光滑圆锥曲线自同构群的有限子群（见引理 3.1）。应用推论 2.21 和推论 2.24 ，我们得到不等式 $|G_B|\leqslant 12$ 和 $|G_F|\leqslant 24$，由此可推出不等式 $|G|\leqslant 288$。□

本节最后一个引理适用于有理三维簇的情形，这类三维簇具有一个以正维底空间为底空间的 $G\mathbb{Q}$-Mori 纤维空间结构。

引理 3.7。设 G是有限群， X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、带有终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘奇点的有理三维簇，并具有如下结构之一： $G\mathbb{Q}$-圆锥丛或 $G\mathbb{Q}$-德尔佩佐纤维化 f： $X\to\mathcal{B}$。则 $|G|\leqslant 5184$，且此界是锐的。

证明。 注意到， $\mathbb{Q}$点在 X上稠密，因为 X 是有理的。考虑一个标准的短正合列

$$1\to G_F\to G\to G_B\to 1.$$

若 f 是圆锥丛，则 $\mathcal{B}$ 是正规射影几何有理连通曲面，因此也是几何有理曲面，并且有一个 $\mathbb{Q}$-点。此外，我们有 $G_B\subset$自同构群$(\mathcal{B})$以及 $G_F\subset$ 射影线性群$_2(\mathbb{Q})$ 由引理 3.1。应用引理3.6 和推论2.21，我们得到 $|G|\leqslant 5184$。

若 f 是一个德尔佩佐纤维化，那么 $\mathcal{B}$ 就是一条带有 $\mathbb{Q}$-点的光滑射影几何有理曲线，这意味着 $\mathcal{B}\simeq\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$。此外，我们有 $G_B\subset$ 射影线性群$_2(\mathbb{Q})$以及 $G_F\subset$ 自同构群(Y)，其中 Y 是一个带有 $\mathbb{Q}$-点的光滑德尔佩佐曲面，由引理3.1得知。再次应用引理3.6 和推论2.21 ，我们得到 $|G|\leqslant 5184$。

接下来，我们要给出一个三维簇，其自同构群中包含一个阶为5148 的有限子群。为此，取引理3.4 中的德尔佩佐曲面 S ，并令 $X = S \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$。由于 S 是有理的， X 也有理，并且同时具有圆锥丛和德尔佩佐纤维化这两种结构。根据引理3.4，存在一个有限子群 $H \subset$自同构群(S) ，其中含有432 个元素。因此，自同构群(X) 包含一个同构于 $H \times D_{12}$的子群，其中含有5148 个元素。□

4. 非 Gorenstein Fano 三维簇

从现在起，我们将估计作用于 $G\mathbb{Q}$-阶乘终端 Fano 三维簇上的有限群的阶。回顾一下，Fano 簇是反典范类丰沛的射影簇。若一个簇的典范类是 Cartier 除子，则称其为 Gorenstein。本节中，我们将估计终端非 Gorenstein Fano 三维簇上奇点的数量，并估计作用于此类簇上的有限群的阶。

我们先指出，终端三维簇的奇点都是孤立点。特别地，这类三维簇上的奇点只有有限个。我们从以下引理开始。

引理 4.1. 设 X 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个簇，使得X 有 d 个奇点。设 P是 X上的一个奇点，且 $G \subset$ 自同构群(X) 是一个有限子群。那么，存在域扩张 $\mathbb{Q} \subset K$ ，使得 $[K : \mathbb{Q}] \leqslant d$ ，并且 P 是一个 K-点。此外，存在子群 $G_\bullet \subset G$ ，使得 $[G\colon G_\bullet] \leqslant d$ ，且 $G_\bullet$ 作用于 X_K 并固定 P，因此嵌入一般线性群$(T_P X_K)$。

证明。Gal$(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ 群作用于$\overline{X}$ 的奇点。记 H 为 P 的稳定子，则 H 是一个开（因而也是闭）子群，其指标至多为 d。令 $K = (\overline{\mathbb{Q}})^H$，则 $\mathbb{Q} \subset K$ 是次数至多为 d 的有限扩张，见 [39,定理 0BML] ，且 P 是一个 K-点。若将 G 视为 Aut(X_K) 的有限子群，则 G 作用于奇异的 K-点，我们记 $G_\bullet$ 为 P 的稳定子。显然，我们有 $[G : G_\bullet] \leqslant d$，并且 P 在 $G_\bullet$ 对 X_K 的作用下保持不变。此外，依据定理 2.1， $G_\bullet$ 嵌入于 GL$(T_P X_K)$ 中。□

请注意，当奇点数量较少时，引理 4.1 的结果对我们来说更令人满意（例如，若 X 上只有一个奇点，则引理 4.1 给出了整个给定有限子群在 $\mathbb{Q}$ 上的一个表示）。因此，确定 Fano 三维簇上奇点数量的上界对我们很重要。为此，我们使用 [29] 中的轨形黎曼–罗赫定理。回顾一下，簇 X 上奇点 P 的指标，是满足以下条件的最小正整数 r ：rK_X 在 P 处是 Cartier。

定理 4.2 ([29, 推论 10.3])。 设 X 是代数闭域上的具有典范奇点的射影三维簇，并令

$$B_X = \{P_\alpha \in X_\alpha \ of \ index \ r_\alpha\}$$

为 X 和 K_X 的篮子，其含义见 [29,定理 10.2(3)]。则

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{1}{24}(-K_X) \cdot c_2(X) + \frac{1}{24} \sum_{P_\alpha \in B_X} \left(r_\alpha - \frac{1}{r_\alpha} \right).$$

推论 4.3。 设 X 是一个终端非戈伦斯坦 *Fano* 三维簇。设 N 为 X上的奇点数目。则有 $N \leqslant 15$。此处，如果 X上没有循环商奇点，则 $N \leqslant 7$。

证明。 由于 X 是 Fano，我们有 $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$，由 Kawamata–Viehweg定理及 $-K_X \cdot \overline{c_2}(X) > 0$（见 [14]）。于是定理 4.2 给出如下不等式

$$\frac{3}{2}N \leqslant \sum \left(r_j - \frac{1}{r_j} \right) < 24,$$

这意味着 $N \leqslant 15$。若 X 上没有循环商奇点，则每个点的每个篮子都至少包含两个点（可以通过将 Mori 分类定理 [29, §6 中的方程变形来验证，Theorem（S. Mori）]），事实上我们有 $N \leqslant 7$。 □

在给定的奇异三维簇不含循环商奇点的情形下，需要用到以下引理。

引理 4.4。 设 K 是特征为0的域。设 X 是定义在 K 上的终端三维簇，且 $P \in X$ 是一个指标为 r 的奇异 K-点。设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个固定 P 的有限子群。那么存在一个短正合列

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

其中 $G \subset$ 一般线性群$_4(K)$。此外，若 P 是一个循环商奇点，则 $G \subset$一般线性群$_3(K)$。

证明。 将 X 替换为一个更小的 G-不变邻域 U 后，我们可以假设 $rK_U \sim 0$。考虑来自 [29, 命题 3.6] 的一指标覆盖 $\pi\colon W \to U$。那么 $Q = \pi^{-1}(P)$ 是一个指标为 1 的终端 K-点。因此，根据 [29, 推论 3.12(i)]，Q 是一个超曲面奇点。此外，若 P 是一个循环奇点，则 W 在 Q 处光滑。根据 W 的构造，每个元素 $g \in G$ 都有 r 个提升属于 Aut(W)。因此，我们有一个正合列

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

其中 $G \subset$ 自同构群(W)，其固定 Q。由定理2.1 我们有 $G \subset$ 一般线性群$_4(K)$ 在一般情形下，以及 $G \subset$一般线性群$_3(K)$ 若 Q 光滑。□

假设给定一个有限群 G，它作用在一个终端非Gorenstein的 $G\mathbb{Q}$-阶乘Fano三维簇 X上。在此情形下，我们的策略是过渡到一个小指标子群，它作用在 X 上并固定一个奇异 K-点，其中 $\mathbb{Q} \subset K$ 是一个小次数扩张。

命题 4.5。 设 G 为一个有限群。设 X 为 $\mathbb{Q}$上的终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘非*Gorenstein Fano*三维簇。则

$$|G| \leqslant 3\,962\,649\,600 < 10^{10}.$$

证明。 用 N 表示X上的奇点个数。若 X上没有循环商奇点，则 $N \leqslant 7$ 由推论4.3。再由引理4.1，存在域扩张 $\mathbb{Q} \subset K$，其次数为 $d \leqslant 7$，以及子群 $G_\bullet \subset G$，其指标为 $i \leqslant 7$，使得 X_K 包含一个奇异 K-点 P，且 $G_\bullet$ 作用在 X_K 上并固定 P。因此，应用引理4.4，我们得到一个正合列

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G}_\bullet \to G_\bullet \to 1,$$

其中 $r \geqslant 2$ 是 P 的指标，且 $G_\bullet \subset$ 一般线性群$_4(K)$。现在，应用推论 2.8，我们得到 $|G_\bullet| \leqslant 1\,132\,185\,600$，这意味着

$$|G| \leqslant \frac{i}{r} \cdot 1\,132\,185\,600 \leqslant \frac{7}{2} \cdot 1\,132\,185\,600 = 3\,962\,649\,600 < 10^{10}.$$

若存在一个循环奇点 P，则根据引理4.1，存在一个域扩张 $\mathbb{Q} \subset K$，其次数为 $d \leqslant 15$，以及一个子群 $G_\bullet \subset G$，其指标为 $i \leqslant 15$，使得 P 是一个 K-点，且 $G_\bullet$作用于 X_K 并固定 P。再次应用引理 4.4，我们得到一个正合列

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G}_\bullet \to G_\bullet \to 1,$$

˜其中 $r \geqslant 2$是 P 的指标，且 $G_\bullet \subset$ 一般线性群$_3(K)$。现在应用推论2.10 ，我们得到 $|\tilde{G}_\bullet| \leqslant 240\,045\,120 < 10^9$，这意味着

$$|G| \leqslant \frac{i}{r} \cdot 240\,045\,120 \leqslant \frac{15}{2} \cdot 240\,045\,120 = 1\,800\,338\,400 < 10^{10}.$$

□

5. Gorenstein Fano 三维簇

本节给出作用于终端 Gorenstein Fano 三维簇上的有限群的阶的界，并证明定理 1.4。下面简要回顾一些重要不变量的定义，并固定记号。

设 X 是一个维数为 n 的 Gorenstein Fano 簇。X 的指标 $\iota(X)$ 是满足等式 $-K_X = iD$ 的最大整数 i，其中 D 是某个 Cartier 除子类。满足等式 $-K_X = \iota(X) \cdot H$ 的 Cartier 除子类 H 唯一确定，称为基本类。数 $d(X) = H^n$ 称为 X 的次数，数 $g(X) = \frac{1}{2}H^n + 1$ 称为亏格。

注 5.1。若 X 是特征为 0 的非代数闭域 K 上的 Gorenstein 簇，则显然 $\iota(X)$ 整除 $\iota(X)$，但这两个数原则上可能不同。然而，若 X 含有一个 K-点，则 $\iota(X) = \iota(X)$。为此，考虑如下群的正合列（见 [8, 习题 3.3.5(iii)]）：

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)} \to \mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(K(X))$$

并注意到，最后一个同态有一个截面，因为 X 含有一个 K-点。特别地，最后一个同态是单射，因此我们有一个同构

$$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)},$$

这意味着 $\iota(X) = \iota(X)$、$d(X) = d(X)$以及 $g(X) = g(X)$。

此外，在处理含有有理点的簇时，我们将默认这些等式成立，而不再另行引用。

Gorenstein 情形的主要优势在于存在平滑化。

定理 5.2 ([19, 定理 11], [11, 定理 1。4], [15, 命题 2。5])**.** 设 X 是 $\mathbb{C}$上的一个具有 N 个奇点的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇。则存在一个平滑化，即一个平坦射影态射

$$f : \mathfrak{X} \to B \ni 0$$

使得一般纤维 $\mathfrak{X}_b$ 光滑，且中心纤维 X_0 同构于 X。此外，$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{Pic}(\mathfrak{X}_b)$，$\iota(X) = \iota(\mathfrak{X}_b)$，$g(X) = g(\mathfrak{X}_b)$ 以及 $d(X) = d(\mathfrak{X}_b)$。此外还存在一个界

$$N \leqslant 21 - \frac{1}{2}\chi_{\mathrm{top}}(\mathfrak{X}_b) = 20 - \rho(\mathfrak{X}_b) + h^{1,2}(\mathfrak{X}_b).$$

下面的定理给出了三维簇的若干族，它们在应用于我们的问题时颇有意义。

定理 5.3 （参见 [25, 定理 6。6]）。设 K 是一个特征为 0的域。设 X 是定义在 K 上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇，满足 $\rho(X) > 1$。设 G 和 G' 是两个有限群，分别通过第一因子和第二因子作用于 $X = X \otimes_K K$。若 $\mathrm{Cl}(X)^{G \times G'} \simeq \mathbb{Z}$，则 X 属于表 1中的 8个族。

注记 5.4. 在 [25] 族(1.2.3) 的光滑三维簇与表 1中的描述不同，但它们属于同一个族。

编号		值				X 的描述
[25]	[13], [38]	ρ	ι	g	$h^{1,2}$	
(1.2.1)	2-6	2	1	7	9	令 $Z_6 \subset \mathbb{P}^8$ 为塞格雷嵌入的像 令 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$，并令 $Y_6 \subset \mathbb{P}^9$ 为其上的射影锥 Z_6。那么，X 是 Y_6 与一个超平面的交 以及一个二次曲面的交。
(1.2.2)	2-12	2	1	11	3	X 是三个双次数为 (1，1) 的除子的交 在 $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ 中。
(1.2.3)	2-21	2	1	15	0	a) X 光滑，且同构于对一个 光滑二次曲面 $Q \subset \mathbb{P}^4$ 沿一条扭四次曲线爆破所得的簇； b) X 是奇异的，且同构于对一个 二次锥 $Q' \subset \mathbb{P}^4$ 爆破所得的簇，其中心是两条 不经过顶点且彼此 横截相交的圆锥曲线之并。
(1.2.4)	2-32	2	2	25	0	$X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$，一个双次数为 (1，1) 的光滑除子。
(1.2.5)	3-1	3	1	7	8	X 是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的二重覆盖，其分歧轨迹 是 $\lvert -K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} \rvert$ 的一个成员。
(1.2.6)	3-13	3	1	16	0	X 是三次数为 (0，1，1) 的除子的交， (1，0，1)、(1，1，0) 在 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 中。
(1.2.7)	3-27	3	2	25	0	$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。
(1.2.8)	4-1	4	1	13	1	$X \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 是一个多重次数为 $(1, 1, 1, 1)$.

表 1. 终端 Gorenstein Fano 三维簇的族 X，其中 $\rho(X) > 1$.

以下引理适用于亏格较小的三维簇。

引理 5.5. 设 k 是特征为 0 的域。设 X 是定义在 k 上的 *Gorenstein* 簇，使得由反典范线性系给出的映射 $\Phi_{|-K_X|}$ 是正则的，且次数为 d。设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个子群。那么 G 有一个到 一般线性群$(H^0(X, -K_X)^\vee)$ 的表示，其核的阶至多为 $d!$。特别地，若 $-K_X$ 是非常丰沛的，则 G 嵌入到 一般线性群$(H^0(X, -K_X)^\vee)$ 中。

证明。 记 X^{sm} 为 X 的光滑轨迹。那么群 G 在线性作用于 X^{sm} 上的一个向量场空间上，从而给出一个群同态 $\alpha\colon G \to \mathrm{GL}(H^0(X, -K_X))$，因此也给出一个群同态 $\alpha^\vee\colon G \to \mathrm{GL}(H^0(X, -K_X)^\vee)$。只需证明 $|\ker \alpha^\vee| \leqslant d$ 的阶至多为 !

将 $\Phi_{|-K_X|}$ 的像记为 Y。由于映射 $\Phi_{|-K_X|}$ 是 G-等变的，因此我们得到一个群的短正合列

$$1 \to G' \to G \to G_Y \to 1,$$

其中，G_Y 忠实作用于 Y，而 G' 在各纤维中置换点。由于 G 是有限的，存在一条位于k 上方的纤维，使得 G' 忠实作用于该纤维；也就是说，存在一个从 G'到对称群 $\mathfrak{S}_d$ 的嵌入，且 $|G'| \leqslant d!$ 。注意，来自 $|\ker \alpha^\vee|$ 的元素在 Y上平凡作用。事实上，若有一个元素 $g \in G$ 满足 $\alpha^\vee(g) = \mathrm{id}$，那么与自然投影复合后，

$$p : \mathrm{GL}(H^0(X, -K_X)^\vee) \to \mathrm{PGL}(H^0(X, -K_X)^\vee)$$

我们得到等式 $(p\circ\alpha^\vee)\ (g)\ =\mathrm{id}$，特别是 $g=\ (p\circ\alpha^\vee)\ (g)\ |_Y=\mathrm{id}$。因此，我们有核 $\alpha^\vee\subset G'$，且 $|\text{核 }\alpha^\vee|\leqslant d!$ 。□

引理 5.6. 设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇，且满足 $g(X)\ =7$。设 $G\subset$自同构群(X) 是一个有限子群。那么

$$|G|\leqslant 5\,573\,836\,800<10^{10}.$$

证明。 我们有 $\dim\ H^0(X,-K_X)\ =g(X)\ +2=9.$于是考虑反典范映射

$$\Phi_{|-K_X|}:X\dashrightarrow\mathbb{P}^8.$$

若 $\mathrm{Bs}|-K_X|\neq\varnothing$，根据 [13, 命题 2.4。1]，有两种可能。或者 $\mathrm{Bs}|-K_X|$由一个奇异有理点 P组成，或者 $\mathrm{Bs}|-K_X|$是一条光滑圆锥曲线 C。在前一种情况下，群 G 固定点 P，因此 $|G|\leqslant 5760$ 由定理 2.1 和定理 1.1。在后一种情况下，存在一个短正合列

$$1\to G'\to G\to G''\to 1,$$

其中 G' 在 C 上的作用是平凡的，且 $G''\subset\mathrm{Aut}(C)$。由推论 2.24 可知 $|G''|\leqslant 24$，因此只需对 G' 的阶给出界。考虑一个阶为 2 的域扩张 $\mathbb{Q}\subset K$，使得 C_K 是有理的，并在 $C_K\setminus\mathrm{Sing}(X)$ 中选取一个 K-点 Q。则 Q 被 G'固定，并且由定理 2.1 可知 $G'\subset\mathrm{GL}_3(K)$。因此，由推论 2.11，$|G'|\leqslant 2\,903\,040$，并且

$$|G|=|G''|\cdot|G'|\leqslant 24\cdot 2\,903\,040=69\,672\,960<10^8.$$

若 $\mathrm{Bs}|-K_X|=\varnothing$，则 $\Phi_{|-K_X|}$ 的次数为 1 或 2，根据 [13, 命题 2.1。15]因此，根据引理 5.5 群 G 在 $H^0(X,-K_X)\simeq\mathbb{Q}^9$ 上有一个核的阶至多为 2的表示。因此，

$$|G|\leqslant 2\cdot 2^{16}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7=5\,573\,836\,800<10^{10}$$

根据定理 1.1。□

在 接下来的 8 个引理中，我们给出表中各类簇的有限子群的界 1.

引理 5.7。 设 $\mathbb{Q}\subset K$ 是次数至多为4 的域扩张（可能是 $K=\mathbb{Q}$）。设 X 是定义在 K 上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇，满足 $X\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。设 $G\subset\mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限子群。那么

$$|G|\leqslant 444\,528\,000<10^9.$$

证明。 X 的莫里锥包含三条极端射线，分别对应于 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 上的三个 $\mathbb{P}^1$-丛结构。群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 作用于这些极端射线，记该作用的核为 $H\subset\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$。那么 H 的指标至多为 6，不变域 $L=(\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 $4\cdot 6=24$，且 $\rho(X_K)\ =3$。此外，每个极端收缩都定义在 L 上。考虑其中一个

$$f:X_L\to X',$$

对应于一条射线 R。那么 X' 是定义在 L 上的一条曲面，具有 $\rho(X')\ =2$，并包含一个 L-点，使得 $X'\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。根据 [34, 引理 7。3]我们有 $X'\simeq\mathbb{P}^1_L\times\mathbb{P}^1_L$。此外，群 G 也作用于莫里锥上。若记 $G'\subset G$ 为稳定子 R，则 $[G:\ G']\leqslant 3$ 并且 f 是 G'-等变的。由引理3.1 可得一个短正合列

$$1\to G'_F\to G'\to G'_B\to 1,$$

其中 $G'_F\subset$ 射影线性群$_2(L)$ 且 $G'_B\subset$(射影线性群$_2(L)\ \times$ 射影线性群$_2(L))\ \rtimes\mu_2$。那么 $|G'_F|\leqslant 420$和 $|G'_B|\leqslant 420\cdot 420\cdot 2=352\,800$ 根据引理 2.26也都成立。最后，

$$|G|=[G:G']\cdot|G'|\leqslant 3\cdot 420\cdot 352\,800=444\,528\,000<10^9.$$

□

引理 5.8。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇，具有一个 $\mathbb{Q}$ 点，且 X 同构于 $\overline{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3}$ 中三个双次数为 (1,1) 的除子的交。设 $G \subset$自同构群(X) 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 1\,886\,976\,000 < 10^{10}.$$

证明。X 的莫里锥包含两条极端射线，分别对应于收缩到 $\mathbb{P}^3$ 的除子收缩。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 作用于这些极端射线，记该作用的核为 $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$。于是 H 的指标至多为 2，且不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 2。此外，每个极端收缩都定义在 K 上。考虑其中之一

$$f : X_K \to X',$$

它对应于射线 R。于是 X' 是一个带有 K-点的 Severi–Brauer 三维簇。由定理 3.2，可得 X' 同构于 $\mathbb{P}^3_K$。此外，群 G 也作用于莫里锥。若记 $G' \subset G$ 为 R的稳定子，则 $[G : G'] \leqslant 2$，收缩 f是 G'-等变的，且 $G' \subset$ 射影线性群$_4(K)$。于是 $|G'| \leqslant 943\,488\,000$ 由推论 2.18 及

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'| \leqslant 1\,886\,976\,000 < 10^{10}.$$

□

引理 5.9。设 X 是 $\mathbb{Q}$ 上的光滑 *Fano* 三维簇，具有一个 $\mathbb{Q}$-点，且 X 同构于 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 中的一个双次数为$(1,\ 1)$ 的除子。设 $G \subset$ 自同构群(X) 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 125\,798\,400 < 10^9.$$

证明。X 的莫里锥包含两条极端射线，分别对应于两个以 $\mathbb{P}^2$为底的 $\mathbb{P}^1$-丛结构。伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$作用于这些极端射线，记 $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$为此作用的核。那么 H 的指标至多为 2，且不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$上的次数至多为 2。此外，每个极端收缩都定义在 K上。考虑其中一个

$$f : X_K \to X',$$

对应于一条射线 R。那么 X' 是一个带有 K-点的 Severi–Brauer曲面。由定理 3.2，可得 X' 同构于 $\mathbb{P}^2_K$。此外，群 G 也作用于莫里锥。若记 $G' \subset G$ 为 R的稳定子，则 $[G : G'] \leqslant 2$，且收缩 f 是 G'-等变的。由引理3.1，存在一个短正合列

$$1 \to G'_F \to G' \to G'_B \to 1,$$

其中 $G'_F \subset$ 射影线性群$_2(K)$ 以及 $G'_B \subset$ 射影线性群$_3(K)$。那么 $|G'_F| \leqslant 24$ 由引理 2.23 以及

$$|G'_B| \leqslant 2\,620\,800 < 10^7$$

由推论 2.17。最终的界为

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'| \leqslant 2 \cdot 24 \cdot 2\,620\,800 = 125\,798\,400 < 10^9.$$

□

引理 5.10。设 $\mathbb{Q} \subset K$ 是次数至多为 3 （可能为 $K = \mathbb{Q}$）的域扩张。设 W 是定义在 K 上、带有一个 K-点的不可约射影三维簇，且 $W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 是双次数为 $(1,\ 1)$ 的除子。设 $C \subset W$ 是 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 中一条双次数为 $(2,\ 2)$ 的曲线。设 $G \subset$ 自同构群(W) 是保持曲线 C 的有限子群。那么

$$|G| \leqslant 21\,337\,344 < 10^8.$$

证明。 记 W 的莫里锥中对应于到 $\mathbb{P}^2$ 的投影的射线为 R_1 和 R_2。群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$ 作用于这些射线上，记射线 R_1 的稳定子为 $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/K)$。于是 H 的指标至多为 2，且不变域 $L = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 $2 \cdot 3 = 6$。此外，极端收缩

$$f : W_L \to W'$$

对应于 R_1 定义在 L上。那么 X' 是一个带有一个 L点的 Severi–Brauer 曲面。由定理 3.2，我们得到 X' 同构于$\mathbb{P}^2_L$。此外，群 G也作用于莫里锥，并且若记 $G' \subset G$ 为 R的稳定子，则 $[G : G'] \leqslant 2$ 且压缩 f 是 G'-等变的。

由于 W 的双次数为$(1, 1)$，因此 f 的一般纤维同构于 $\mathbb{P}^1$。因此，由引理 3.1 可得一个短正合列

$$1 \to G'_F \to G' \to G'_{\mathbb{P}^2} \to 1,$$

其中 $G'_F \subset \mathrm{PGL}_2(L)$，且 $G'_{\mathbb{P}^2}$ 作用在 $\mathbb{P}^2_L$ 上并保持 $f(C)$。由引理 2.26 可立即得出 $|G'_F| \leqslant 84$。由于曲线 C的次数为 (2, 2)，因此 $f(C) \subset \mathbb{P}^2_L$或者是圆锥曲线，或者是直线。若 $f(C)$是光滑圆锥曲线，则 $G'_{\mathbb{P}^2} \subset \mathrm{Aut}(f(C))$，并且由引理 2.27 得 $|G'_{\mathbb{P}^2}| \leqslant 180$。因此，

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'_F| \cdot |G'_{\mathbb{P}^2}| \leqslant 2 \cdot 84 \cdot 180 = 30\,240 < 10^5.$$

若 $f(C)$是奇异圆锥曲线，则 $f(C)$只包含一个奇点 P。因此，P 是一个 L-点，且被 $G'_{\mathbb{P}^2}$固定。由定理2.1 可得 $G'_{\mathbb{P}^2} \subset$ 一般线性群$_2(L)$，并由引理$|G'_{\mathbb{P}^2}| \leqslant 1512$ 2.28 以及

$$|G| = [G : G'] \cdot |G_F| \cdot |G'_{\mathbb{P}^2}| \leqslant 2 \cdot 84 \cdot 1512 = 254\,016 < 10^6.$$

若 $f(C)$ 是一条直线，则存在一个短正合列

$$1 \to G'' \to G'_{\mathbb{P}^2} \to G'_{\mathbb{P}^1} \to 1,$$

其中$G'_{\mathbb{P}^1} \subset$ 射影线性群$_2(L)$ 且 G'' 在 $f(C)$上平凡作用。由引理2.26 可得$|G'_{\mathbb{P}^1}| \leqslant 84$。此外，群 G'' 固定了由 L-点构成的整条直线，特别是，G'' 嵌入到一般线性群$_2(L)$ 由定理 2.1 以及 $|G''| \leqslant 1512$ 由引理2.28。因此，$|G'_{\mathbb{P}^2}| = |G''| \cdot |G'_{\mathbb{P}^1}| \leqslant 127\,008$以及

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'_F| \cdot |G'_{\mathbb{P}^2}| \leqslant 2 \cdot 84 \cdot 127\,008 = 21\,337\,344 < 10^8.$$

□

引理 5.11。 设 X 是一个具有 $\mathbb{Q}$点的 *Gorenstein* 三维簇，且 X 同构于 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$中由三次数分别为$(0, 1, 1)$、$(1, 0, 1)$、$(1, 1, 0)$ 的三个除子的交。设 $G \subset$自同构群(X) 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 64\,012\,032 < 10^8.$$

证明。 三维簇 X 有三个除子收缩，它们是 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 到 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$的三个投影的限制。将与这些收缩对应的 X的莫里锥的射线记为 R_1、R_2 和 R_3。群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$作用于这些射线，将射线 R_1的稳定子记为 $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$。于是 H 的指标至多为 3，且不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$上的次数至多为 3。此外，极端收缩

$$f : X_K \to W$$

对应于 R_1 定义在 K上。这里，$W \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ 是一个双次数为 (1，1) 的除子。此外，若将 f 的例外除子的像记为 C，则 C 的双次数为 (2，2)。群 G 也作用于莫里锥上，若将 $G' \subset G$ 记为

的稳定子，则： $G'] \leqslant 3$，收缩 f 是 G'-等变的，并且 $G' \subset \mathrm{Aut}(W)$ 是保持 C不变的有限子群。然后 $|G'| \leqslant 21\,337\,344$ 根据引理 5.10 以及

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'| \leqslant 3 \cdot 21\,337\,344 = 64\,012\,032 < 10^8.$$

□

引理 5.12. 设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的光滑 *Fano* 三维簇，且 X 同构于将二次曲面$Q \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{Q}}$ 沿扭四次曲线 C爆破所得的簇。设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限子群。那么 $|G| \leqslant 120$.

证明. X 的莫里锥包含两条极端射线，其中一条对应于引理中提到的爆破，将这条射线记为 R。群 Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$作用于这些极端射线，将作用的核记为 $H \subset$Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$。于是 H 的指标至多为 2，不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 2，且 $\rho(X_K) = 2$。因此，每个极端收缩都定义在 K上。考虑其中一个

$$f : X_K \to X' \subset \mathbb{P}^4_K,$$

它对应于一条射线 R。群 G 也作用于莫里锥；若将 R的稳定子记为 $G' \subset G$，则 $[G : G'] \leqslant 2$，态射 f 是 G'- 等变的，并且$G' \subset$Aut(X')。

由于 f 是 G'-等变的，故群 G' 固定一条曲线 C'，该曲线是某个例外除子的像。此外，$G' \subset$自同构群(C')。事实上，考虑一列嵌入

$$C' \hookrightarrow X' \hookrightarrow \mathbb{P}^4_K.$$

过渡到代数闭包后，我们得到一列嵌入

$$C \hookrightarrow Q \hookrightarrow \mathbb{P}^4_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

假设存在一个元素 $g \in G'$，它在 C' 上平凡地作用。然后把 g 与其在 自同构群(Q)中的像等同，我们得到一个二次曲面的自同构，它在扭四次曲线 C上平凡地作用。但随后 g 延拓为一个自同构 $\tilde{g}$，即 $\mathbb{P}^4_{\overline{\mathbb{Q}}}$上的自同构，并固定一条扭四次曲线。因此， $\tilde{g}$ 是恒等自同构，且 g 是恒等自同构。现在，考虑一个二次扩张 $K \subset K'$ 使得 $C'_{K'} \simeq \mathbb{P}^1_{K'}$，我们可以假设 $G' \subset$射影线性群$_2(K')$，进而有 $|G'| \leqslant 60$，此结论由引理 2.26得到。最后，

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'| \leqslant 120.$$

□

引理 5.13. 设 X 是 $\mathbb{Q}$ 上的一个三维簇，使得 X 同构于在 $\overline{\mathbb{P}^4}$ 中对一个二次锥进行爆破所得的簇，爆破中心是两条不经过顶点且彼此横截相交的圆锥曲线之并。设 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 174\,182\,400 < 10^9.$$

证明. X 上有两个奇点 P_1 和 P_2，满足 dim $T_{P_1}X =$ dim $T_{P_2}X = \overline{4}$。其中一个是被爆破锥的顶点的原像，另一个位于圆锥曲线交点上方的例外除子上。群 Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 作用于这些点，记 $H \subset$Gal$(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 为此作用的核。那么 H 的指标至多为 2，不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 2，并且这两个奇点都在 K 上定义。

群 G 也作用于这些点。若定义 G' 为此作用的核，则 G' 作用于 X_K 并固定 P_1。由定理 2.1，群 G' 嵌入到 一般线性群$_4(K)$中，并且 $|G| \leqslant 87\,091\,200$ 由推论 2.9可得。最后，我们有

$$|G| = [G : G'] \cdot |G'| \leqslant 2 \cdot 87\,091\,200 = 174\,182\,400 < 10^9.$$

□

引理 5.14。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇，且具有一个 $\mathbb{Q}$-点，使得 X 同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的一个多重次数为(1、1、1、1)的除子。设 $G \subset$自同构群(X) 是一个有限子群。那么

$$|G| \leqslant 1\,778\,112\,000 < 10^{10}.$$

证明。三维簇 X 有四个除子收缩，它们是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的四个投影的限制。将这些收缩所对应的莫里锥的射线记为 R_1、R_2、R_3 和 R_4。群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 作用在这些射线上，记 $H \subset \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 为射线 R_1 的稳定子。于是 H 的指标至多为 4，且不变域 $K = (\mathbb{Q})^H$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的次数至多为 4。此外，极端收缩

$$f : X_K \to X'$$

对应于 R_1 定义在 K上。此处 X' 如引理 5.7中所述。群 G 也作用在莫里锥上，若将 $G' \subset G$ 记为 R_1 的稳定子，则 $[G : G'] \leqslant 4$，收缩 f 是 G'- 等变的，且 $G' \subset$ 自同构群(X')。于是 $|G'| \leqslant 444\,528\,000$ 由引理 5.7以及

$$|G| = [G : G'] \cdot [G'] \leqslant 4 \cdot 444\,528\,000 = 1\,778\,112\,000 < 10^{10}.$$

□

现在我们能够证明满足 $\rho(X) > 1$ 的三维簇的一般情形。

命题 5.15. 设 G 是一个有限群。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上、具有一个 $\mathbb{Q}$-点的终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘 *Gorenstein Fano* 三维簇，并且满足 $\rho(X) > 1$ 和 $\overline{\rho}(X)^G = 1$。那么

$$|G| \leqslant 5\,573\,836\,800 < 10^{10}.$$

证明。由于 X 是 $G\mathbb{Q}$-阶乘的，且 $\rho(X)^G = 1$，因此 $\mathrm{Cl}(X)^G \simeq \mathbb{Z}$。考虑 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 在 $\mathrm{Cl}(X)$ 上的作用，并将该作用的核记为 H。那么 H 是一个有限指数的正规开（因而也是闭）子群。令 $K = (\mathbb{Q})^H$，那么 $\mathbb{Q} \subset K$ 是一个有限伽罗瓦扩张（见 [39, 定理 0BML]），且 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ 在 X 上的作用可通过有限群 $G' = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 的忠实作用分解。由于 $\mathrm{Cl}(X)^G \simeq \mathbb{Z}$，因此我们有 $\mathrm{Cl}(X)^{G \times G'} \simeq \mathbb{Z}$。所以，根据定理 5.3，我们知道 X 属于表 1 中的 8 个族之一。

如果 X 属于族 (1.2.1) 或 (1.2.5)，那么 $g(X) = 7$，且我们有

$$|G| \leqslant 5\,573\,836\,800 < 10^{10}$$

由引理 5.6。若 X 属于其他 6个族，则我们有

$$|G| \leqslant 1\,886\,976\,000 < 10^{10}$$

在族 (1.2.2) 的情形下，由引理 5.8；在族 (1.2.3) 的奇异情形下，由引理 5.13；在族 (1.2.3) 的光滑情形下，由引理 5.12；在族 (1.2.4) 的情形下，由引理 5.9；在族 (1.2.6) 的情形下，由引理 5.11；在族 (1.2.7) 的情形下，由引理 5.7；在族 (1.2.8) 的情形下，由引理 5.14。□

现在，我们来讨论皮卡秩在 $\mathbb{Q}$ 上等于 1 的三维簇。以下三个引理处理次数或亏格较大的三维簇情形。

引理 5.16. 设 G 是一个有限群。设 Y 是一个终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘 *Gorenstein Fano* 三维簇，其指标为2，次数为5，定义在 $\mathbb{Q}$上。则 $|G| \leqslant 24$。

证明。由定理 [24, Theorem 1.7] 可知，三维簇 Y 是光滑的，因此 Y 上的直线的希尔伯特概形由 [16, 定理 1.1.1]与 $\mathbb{P}^2$ 同构。因此， Y 上的直线的希尔伯特概形是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的 Severi–Brauer曲面 S_1 ，并且根据 [16,引理 4.2.1]， G 是 Aut(S_1)的一个子群。若 S_1 非平凡，则根据 [36, 定理 1.3], 有 $|G| \leqslant 3$ ；若 S_1 平凡，则由引理 3.3 可得 $|G| \leqslant 24$ 。□

引理 5.17. 设 G 是一个有限群。设 X 是一个终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘 *Gorenstein Fano* 三维簇，其指标为1 ，亏格为12 ，定义在 $\mathbb{Q}$上。那么 $|G| \leqslant 5760$。

证明。由 [23, 定理 1.3] 可知，三维簇 X 要么是光滑的，要么仅含有一个奇点 P，且该点是一个普通二重点。在前一种情形下， X 上的圆锥曲线希尔伯特概形由 [16, 定理 1.1.1]可知与 $\mathbb{P}^2$ 同构。因此， X 上的圆锥曲线希尔伯特概形是定义在 $\mathbb{Q}$上的 Severi–Brauer曲面 S_2 ，并且由[16,引理 4.3.4] 可知， G 是 Aut(S_2) 的一个子群。若 S_2 非平凡，则由 [36, 定理 1.3], 可知 $|G| \leqslant 3$ ；若 S_2 平凡，则由引理 3.3 可知 $|G| \leqslant 24$ 。在后一种情形下，点 P 定义在 $\mathbb{Q}$上，且群 G 作用于 X 并固定 P。因此，由定理 2.1 可知， G 嵌入 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{Q})$，并且由定理 1.1 可知 $|G| \leqslant 5760$ 。□

注记 5.18. 引理5.16和5.17中的 Severi–Barauer曲面实际上都是平凡的。为此，注意到曲面上存在一条曲线 Γ ，其次数为4 ，它定义在 S_2 上 $\mathbb{Q}$，对应于 X上的退化圆锥曲线。因此，$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ 的正生成类定义在 $\mathbb{Q}$ 上，并给出一个同构 $S_2 \simeq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$。由同构 S_1 的存在性可知 $S_1 \simeq S_2$是平凡的，参见 [16, 命题 B.4。1]

引理5.19。 设 G 是一个有限群。设 X 是一个终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘 *Gorenstein Fano* 三维簇，其指标为2，次数为4 ，定义在 $\mathbb{Q}$上。那么

$$|G| \leqslant 1\,902\,071\,808 < 10^{10}.$$

证明。 三维簇 X 至多含有6 个奇点，参见 [2, §2，命题 3]。由引理4.1 可知，存在一个 $\mathbb{Q} \subset K$ 次数至多为6 的域扩张，以及一个 $G_\bullet \subset G$指标至多为6 的子群 $G_\bullet \subset$一般线性群$_4(K)$。由推论2.8 可得

$$|G_\bullet| \leqslant 317\,011\,968 < 10^9$$

and

$$|G| = [G : G_\bullet] \cdot |G_\bullet| \leqslant 6 \cdot 317\,011\,968 = 1\,902\,071\,808 < 10^{10}.$$

□

为处理$\mathbb{Q}$上其余皮卡秩为1的三维簇，我们主要使用由基本线性系给出的嵌入，但情况并非总是如此。下述命题给出了基本类并非非常丰的皮卡秩为1的Gorenstein Fano三维簇的自同构群的有限子群的信息。

命题 5.20 （见 [33, 定理 0.6], [33, 推论 0.8], [10, 定理 1.1], [22,定理 1.4]）。 设 X 为代数闭域上满足 $\rho(X) = 1$的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇。假设基本类 H 并非非常丰，则下列可能性之一成立：

(i) $\iota(X) = 2$ 且 $d(X) = 1$; *(ii)* $\iota(X) = 2$ 且 $d(X) = 2$; *(iii)* $\iota(X) = 1$ 且 $g(X) = 2$; *(iv)* $\iota(X) = 1$， $g(X) = 3$，且 X 是三维二次曲面的二重覆盖。

命题 5.21 （参见 [28, 命题 6.1。1]）。 设 K 是特征为0的域。设 X是定义在 K 上的一个 *Gorenstein Fano* 三维簇，且有一个 K-点。假设以下情形之一成立

(i) $\iota(X)=2$ 且 $d(X)=1$; (ii) $\iota(X)=2$ 且 $d(X)=2$; (iii) $\iota(X)=1$ 且 $g(X)=2$; (iv) $\iota(X)=1$, $g(X)=3$, 且 X 是一个三维二次曲面的二重覆盖。

设 $G\subset \mathrm{Aut}(X)$ 是一个有限群。那么存在某个正整数 r，使得有一个中心扩张

$$1\to\mu_r\to\tilde{G}\to G\to 1$$

，使得在情形(i)中有一个嵌入 $G\subset \mathrm{GL}_3(K)$ $\times K^\times$，在情形(ii)和(iii)中有一个嵌入 $G\subset \mathrm{GL}_4(K)$，而在情形(iv)中有一个嵌入 $G\subset \mathrm{GL}_5(K)$。

注 5.22。在论文 [28] 命题 5.21 是针对代数闭域陈述的。然而，要使其中给出的证明成立，只需要求类 H 定义在 K 上；在我们的设定中这确实如此，因为 X 含有一个 K-点。

The 下面的引理描述了大指标的终端 Gorenstein Fano 三维簇 .

引理 5.23 (参见 [13, 定理 3.1。14])。设 X 是代数闭域上的终端 *Gorenstein Fano* 三维簇。

(1) </style]若 $(X)=4$，则 $X\simeq\mathbb{P}^3$; (2) 若 $\iota(X)=3$，则 $X\simeq Q\subset\mathbb{P}^4$，其中 Q 是光滑二次曲面或以光滑2维二次曲面为底的锥。

这使我们得以完成对满足 $\rho(X)=1$ 的三维簇情形的讨论。

命题 5.24. 设 G为一个有限群。设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘 *Gorenstein Fano* 三维簇，且具有一个 $\mathbb{Q}$-点，并满足 $\rho(X)=1$。那么

$$|G|\leqslant 24\,103\,053\,950\,976\,000<10^{17}.$$

此外，若我们不属于情形 $\iota(X)=1$、$g(X)=10$，那么

$$|G|\leqslant 735\,746\,457\,600<10^{12}.$$

证明。首先请注意，根据定理 5.2，终端 Gorenstein Fano 三维簇的指数、次数和亏格与光滑情形的指数、次数和亏格相同。

假设 $\iota(X)=4$。那么 X 同构于 $\mathbb{P}^3$，由引理 5.23可知。因此，X是一个具有 $\mathbb{Q}$-点的 Severi–Brauer 三维簇，它同构于 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$，根据定理3.2以及 $G\subset$ 射影线性群$_4(\mathbb{Q})$。由推论 2.16 可得 $|G|\leqslant 362\,880$.

假设 $\iota(X)=3$。那么 X 根据引理5.23，它要么同构于一个光滑的3维二次曲面，要么同构于一个以光滑的2维二次曲面为底的锥。在前一种情况下，由于 X 包含一个 $\mathbb{Q}$-点，因此 X 同构于一个光滑的有理3维二次曲面，特别地 $G\subset$射影线性群$_5(\mathbb{Q})$。由推论2.16 可得

$$|G|\leqslant 87\,178\,291\,200<10^{11}.$$

在后一种情况下，X 的唯一奇点定义在 $\mathbb{Q}$ 上，且 G 作用于 X并固定该点。应用定理 2.1，我们得到一个嵌入 $G\subset$ 一般线性群$_4(\mathbb{Q})$。由定理1.1 可得 $|G|\leqslant 5\,760$。

假设 $\iota(X)=2$。如果 $d(X)=5$，那么由引理5.16可得。如果 $d(X)=4$，那么我们有

$$|G|\leqslant 1\,902\,071\,808<10^{10}$$

根据引理 5.19。若 $d(X)=3$，则根据命题 5.20 基本类非常丰，因此映射 $\Phi_{|-\frac{1}{2}K_X|}$是一个 G-等变嵌入到 $\mathbb{P}^4$并且

$$|G|\leqslant 87\,178\,291\,200<10^{11}$$

根据推论2.16。

如果 $d(X) = 1$ 或2，那么根据命题5.21 存在一个中心扩张

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

~其中 $G \subset$ 一般线性群$_3(\mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}^\times$ 在情形 $d(X) = 1$ 下，以及 $G \subset$ 一般线性群$_4(\mathbb{Q})$ 在情形 $d(X) = 2$。~应用定理 1.1 ，我们在前一种情形下得到一个界 $|G| \leqslant |G| \leqslant 96$ ，在后一种情形下得到一个~界 $|G| \leqslant |G| \leqslant 5\,760$ 。

设 $\iota(X) = 1$。若 $-K_X$ 是非常丰的，则由引理 $(g+2)$- 维表示 G 在 $H^0(X, -K_X)^\vee$ 中忠实，5.5。若 $g(X) \leqslant 9$，则

$$|G| \leqslant 2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 735\,746\,457\,600 < 10^{12}$$

根据定理 1.1。若 $g(X) = 10$，则

$$|G| \leqslant 2^{22} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 24\,103\,053\,950\,976\,000 < 10^{17}$$

根据定理1.1。若 $g(X) = 12$，则 $|G| \leqslant 5760$ 根据引理 5.17。若 $-K_X$ 不是非常丰的，则根据命题 5.20 ，我们处于以下两种情形之一：要么是 $g(X) = 2$，要么是 $g(X) = 3$ 且 X 是一个三维二次曲面的二重覆盖。在前一种情形下，根据命题5.21 ，存在一个中心扩张

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

~其中 $G \subset$ 一般线性群$_4(\mathbb{Q})$。于是 $|G| \leqslant |G| \leqslant 5\,760$ 由定理 1.1。在后一种情况下，由命题 5.21 可知存在一个中心扩张

$$1 \to \mu_r \to \tilde{G} \to G \to 1,$$

~其中 $G \subset$ 一般线性群$_5(\mathbb{Q})$。于是 $|G| \leqslant |G| \leqslant 11\,520$ 由定理 1.1。 □

注 5.25。 请注意，我们在引理 5.19中使用的论证，也可结合定理 5.2给出的奇点数界用于所有 Gorenstein Fano 三维簇。不过，事实证明，这种方法得到的界比文中给出的界更差。

注 5.26。 命题 1 指标且亏格为 10 的三维簇的界，由命题 5.24 给出，似乎过大。我们认为应该有办法得到更小的界。实际上，如果 X 是 $\mathbb{Q}$-阶乘的，那么我们可以得到一个更小的界；具体而言，此时 X至多有 2个奇点，这由 [26, 定理 13]得出；我们再对一个奇点的切空间上的作用应用标准论证即可。但我们不知道 $\mathbb{Q}$的 X -阶乘性$\mathbb{Q}$是否总是成立，也不知道如何处理非 -factorial one.

现在一切准备就绪，可以证明主要定理了。

证明（定理1.4的）。我们可以假设 X 是射影的。将 G的作用正规化，并取 G-等变奇点消解后，可以假设 G 是光滑有理三维簇的自同构群的一个子群 X （见 [6, 引理3。5]）。应用~等变极小模型纲领，可得一个终端 $G\mathbb{Q}$-阶乘三维簇 X ，其结构为一个 G-莫里纤维空间，即有以下三种可能情形：

~(1) X 具有 $G\mathbb{Q}$-德尔佩佐纤维化结构；~(2) X 具有 $G\mathbb{Q}$-圆锥丛结构；~(3) X 是一个 $G\mathbb{Q}$-Fano 三维簇。

第一种和第二种情形由引理3.7处理，因此有 $|G| \leqslant 5148$。~第三种情形在 X 为非Gorenstein时，由命题4.5得出；在 X 为Gorenstein时，则由命题5.15~和5.24得出。□

考虑到注记 5.26 我们来证明以下辅助定理，它可视为迈向改进定理 1.4.

定理 5.27. 设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一个3维簇，具有一个 $\mathbb{Q}$-点，并且 X是有理连通的。设 $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ 是一个有限子群。假设对于任意有限群 G，若存在定义在 $\mathbb{Q}$上的终端 $G\mathbb{Q}$-阶 *Gorenstein Fano* 三维簇 X，具有一个 $\mathbb{Q}$-点，且满足 $\rho(X) = 1$、$\iota(X) = 1$ 以及 $g(X) = 10$，则有 $|G| \leqslant M$。那么

$$|G| \leqslant \max\{735\,746\,457\,600, M\}.$$

特别地，这适用于$\mathrm{Cr}_3(\mathbb{Q})$的有限子群。

证明。 证明与定理 1.4的证明完全相同，唯一的区别是在 X 为 Gorenstein 的情形下，我们结合定理条件中的限制应用命题 5.24 。□

附录 A. 伽罗瓦理论

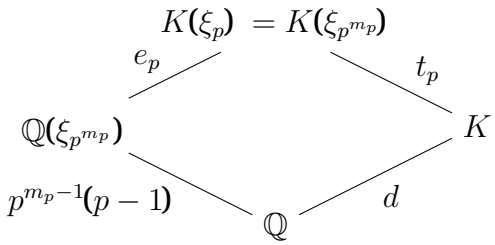
本节将为推论2.8、2.10、2.17和 2.18做一些技术性预备工作。特别地，在某些情况下，我们会给出定理 2.5 和推论 2.14中出现的数的界。为阐述本节的主要目标，我们先回顾并固定记号。

设给定一个数域 K，其在 $\mathbb{Q}$上的次数为 d。首先，对每个素数 p，我们关联分圆不变量 t_p 和 m_p，它们定义于定义 2.2中。为方便起见，我们在此重述该定义：

- $t_p = t_p(K) = [K(\xi_p) : K]$;
- $t_2 = t_2(K) = [K(\xi_4) : K]$;
- $m_p = m_p(K) =$上确界$\{n \mid \xi_{p^n} \in K(\xi_p)\}$;
- $m_2 = m_2(K) =\sup\{n \mid \xi_{2^n} \in K\}$，如果 $\xi_4 \in K$;
- $m_2 = m_2(K) = \sup\{n \mid \xi_{2^n} + \xi_{2^n}^{-1} \in K\}$，如果 $\xi_4 \notin K$。

此外，对于每个素数 $p > 2$，我们关联一个正整数 $e_p = [K(\xi_p) : \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})]$。

将这些不变量纳入下图中会比较方便



注 A.1. 由该图可知，针对素数 $p > 2$引入的数之间存在显然的关系：

$$p^{m_p-1}(p-1) \cdot e_p = d \cdot t_p.$$

我们将直接使用这个方程。

此外，对于任意素数 p 和任意正整数 n，我们定义舒尔值和 Serre 值 $\nu_{p\,n}^{\mathrm{sch}}$、$\nu_p^{\mathrm{sch}}$、$\nu_{p\,,n}^{\mathrm{se}}$ 以及 ν_p^{se}，其定义见定义 2.4。为方便起见，我们在此重述该定义（请注意，$\mathcal{P}$ 表示所有素数构成的集合）：

- $\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} = \nu_{p,n}^{\mathrm{sch}}(K) = m_p \left\lfloor \frac{n}{t_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{pt_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2 t_p} \right\rfloor + \ldots$, if $p \neq 2$;
- $\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} = \nu_{p,n}^{\mathrm{sch}}(K) = m_2 n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots$, if $p = 2$ and $\xi_4 \in K$;
- $\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} = \nu_{p,n}^{\mathrm{sch}}(K) = n + m_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots$, if $p = 2$ and $\xi_4 \notin K$;
- $\nu_{p,n}^{\mathrm{se}} = \nu_{p,n}^{\mathrm{se}}(K) = m_p \left\lfloor \frac{n-1}{\varphi(t_p)} \right\rfloor + \nu_p((n-1)!)$;
- $\nu_n^{\mathrm{sch}} = \nu_n^{\mathrm{sch}}(K) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}}}$;

- $\nu_n^{\mathrm{se}} = \nu_n^{\mathrm{se}}(K) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\nu_{p,n}^{\mathrm{se}}}$.

本节的两个主要目标是证明以下命题。

命题 A.2. 设 K 是一个次数为 $d \leqslant 7$ 的数域。那么

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 1\,132\,185\,600 < 10^{10}.$$

命题 A.3. 设 K 是一个次数为 $d \leqslant 15$ 的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 240\,045\,120 < 10^{9}.$$

以下两个标准引理很有用。

引理 A.4（例如参见 [17, 第 6 章，定理 1。12]）。设 $F \subset K$ 是一个有限伽罗瓦扩张，且 $F \subset L$ 是一个任意域扩张。若 KL 是 K 与 L的复合域，则

$$[KL : L] = [K : K \cap L].$$

推论 A.5. 设 $K \subset L$ 是一个数域扩张，且 n 是一个正整数。那么 $\nu_n^{\mathrm{sch}}(K) \leqslant \nu_n^{\mathrm{sch}}(L)$。

证明。 只需证明，对于任意素数 p ，都有 $t_p(K) \geqslant$和 $m_p(K) \leqslant m_p(L)$。这可直接由定义和引理 A.4得出。 $t_p(L)$ □

引理 A.6（例如参见 [17, 第 6 章，推论 3.2]）。设 n 和 m 为两个互素整数。那么 $\mathbb{Q}(\xi_n) \cap \mathbb{Q}(\xi_m) = \mathbb{Q}$。

下面的引理给出了舒尔值的乘法界。当然，这个界远不适用于我们的目的，但它有一些优点：它仅取决于域的次数，而且容易计算。

引理 A.7. 设 K 是一个次数为 d的数域。设 p 是一个素数，且 n是一个正整数。那么

(1) 若 $p \geqslant 3$，则有

$$\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} \leqslant B_{n,d,p} = (\nu_p(d)+1)\left\lfloor \frac{n}{\frac{p-1}{\gcd(p-1,d)}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots;$$

(2) 若 $p = 2$，则有

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}} \leqslant B_{n,d,2} = n(\nu_2(d)+1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots, \ \textit{if } d \textit{ is even};$$

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}} \leqslant B_{n,d,2} = n + 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \ldots, \ \textit{if } d \textit{ is odd}.$$

证明。 考虑 $p \geqslant 3$的情形。根据定义，我们有

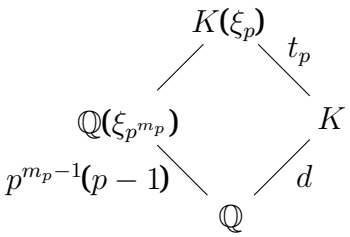
$$\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} = m_p \left\lfloor \frac{n}{t_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{pt_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2 t_p} \right\rfloor + \ldots$$

正如我们所记得的，不变量 m_p 和 t_p 取决于域 K，但我们希望将这个值的界限制为仅取决于次数 d。由于 $t_p \geqslant 1$，我们可以写出如下界

$$\nu_{p,n}^{\mathrm{sch}} \leqslant m_p \left\lfloor \frac{n}{t_p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \ldots,$$

其中，除第一项外的所有加项都不取决于 K。接下来只需将第一项的界限制为仅取决于 d的值。

由图可知



that t_p is divisible by

$$\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p^{m_p-1}(p-1),d)}=\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{p^{\min(m_p-1,\nu_p(d))}\gcd(p-1,d)}=\frac{p^{\max(0,m_p-\nu_p(d)-1)}(p-1)}{\gcd(p-1,d)},$$

这意味着

$$m_p\left\lfloor\frac{n}{t_p}\right\rfloor\leqslant m_p\left\lfloor\frac{n}{p^{\max(0,m_p-\nu_p(d)-1)}\cdot\frac{p-1}{\gcd(p-1,d)}}\right\rfloor.$$

对于 $m_p\leqslant\nu_p(d)+1$，我们有 $p^{\max(0,m_p-\nu_{p(d)-1})}=1$，显然

$$m_p\left\lfloor\frac{n}{t_p}\right\rfloor\leqslant m_p\left\lfloor\frac{n}{\frac{p-1}{\gcd(p-1,d)}}\right\rfloor\leqslant(\nu_p(d)+1)\left\lfloor\frac{n}{\frac{p-1}{\gcd(p-1,d)}}\right\rfloor.$$

对于 $m_p>\nu_p(d)+1$，同一不等式可通过对数值 $m_p-\nu_p(d)-1$进行归纳得到，由此证明了断言（1）。

考虑情形 $p=2$。如果 $\xi_4\in K$，那么我们有

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}}=m_2n+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor+\dots$$

此外，根据定义2.2 存在一个域塔

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\xi_{2^{m_2}})\subset K$$

这意味着不等式 $m_2-1\leqslant\nu_2(d)$，以及一个界

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}}\leqslant n(\nu_2(d)+1)+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor+\dots \tag{A.1}$$

如果 $\xi_4\notin K$，那么我们有

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}}=n+m_2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor+\dots$$

再次，根据定义 2.2 存在域塔

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}(\xi_{2^{m_2}}+\xi_{2^{m_2}}^{-1})\subset K$$

这意味着不等式 $m_2-2\leqslant\nu_2(d)$，以及一个界

$$\nu_{2,n}^{\mathrm{sch}}\leqslant n+(\nu_2(d)+2)\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{2^2}\right\rfloor+\dots \tag{A.2}$$

还需指出，若 d为偶数，则界（A.1）比界（A.2）更差；而若 d 为奇数，则反之。这就证明了断言 (2)。□

注 A.8. 假设我们处于引理A.7的设定中。若令

$$B_{n,d}=\prod_{p\in\mathcal{P}}p^{B_{n,d,p}},$$

那么，根据引理 $\nu_n^{\mathrm{sch}}\leqslant B_{n,\ d}$，显然有一个界A.7。

d	$B_{3,d}$
1	$2^5 \cdot 3^2 = 288$
2	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 362\,880 < 10^6$
3	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 = 6048$
4	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 943\,488\,000 < 10^9$
5	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 11 = 3168$
6	$2^7 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19 = 118\,582\,289\,280 < 10^{12}$
7	$2^5 \cdot 3^2 = 288$
8	$2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 = 128\,314\,368\,000 < 10^{12}$
9	$2^5 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19 = 344\,736 < 10^6$
10	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 31 = 74\,863\,958\,400 < 10^{11}$
11	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 23 = 6624$
12	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \cdot 19 \cdot 37 = 148\,299\,010\,973\,568\,000 < 10^{18}$
13	$2^5 \cdot 3^2 = 288$
14	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 29 \cdot 43 = 3\,167\,579\,520 < 10^{10}$
15	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 = 2\,062\,368 < 10^7$

表 2. 仅取决于数域次数的 ν_3^{sch}界。

d	$B_{4,d}$
1	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 = 69\,120 < 10^5$
2	$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 87\,091\,200 < 10^8$
3	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 = 396\,264\,960 < 10^9$
4	$2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 = 7\,698\,862\,080\,000 < 10^{13}$
5	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 = 41\,817\,600 < 10^8$
6	$2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 19 = 7\,769\,511\,593\,625\,600 < 10^{16}$
7	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 29 = 2\,004\,480 < 10^7$

表 3. 仅取决于数域次数的 ν_4^{sch}界。

对于 $n = 3$ 和 $n = 4$ 这两种情况，我们将这些界列入表 2 和 3，以便后续应用。

虽然注记 A.8 给出了一个“乘法型”界，但我们希望得到一个更强的“加法型”界。我们将分别改进秩 3 和4的界。不过，在此之前，我们先证明两个引理，它们建立了对应于不同素数的不变量之间的联系 m_2， t_q和 e_p。

引理 A.9。 设 $p > 2$ 为素数， K 为数域。则

(1) $m_2 \leqslant \nu_2(e_p) + 1$ 若 $\xi_4 \in K$ （特别是， e_p 为偶数）；

(2) $m_2 \leqslant \nu_2(e_p) + 2$ 若 $\xi_4 \notin K$。

证明。 若 $\xi_4 \in K$，则存在一个域塔

$$\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}}) \subset \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}}, \xi_{2^{m_2}}) \subset K(\xi_p),$$

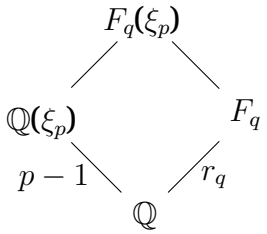
这表明 e_p 可被 2^{m_2-1}整除，换言之， $m_2 - 1 \leqslant \nu_2(e_p)$，由此证明了断言 (1)。若 $\xi_4 \notin K$，则存在一个域塔

$$\mathbb{Q}(\xi_p) \subset \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}}, \xi_{2^{m_2}} + \xi_{2^{m_2}}^{-1}) \subset K(\xi_p),$$

这表明 e_p 可被 2^{m_2-2}整除，换言之， $m_2 - 2 \leqslant \nu_2(e_p)$，由此证明了断言(2)。□

引理 A.10. 设 p、 $q > 2$ 为两个不同的素数，且 $\mathbb{Q} \subset K$ 是次数为 d的扩张。则 $t_q \geqslant \frac{q-1}{\text{最大公约数}(q-1,d,e_p)}$。

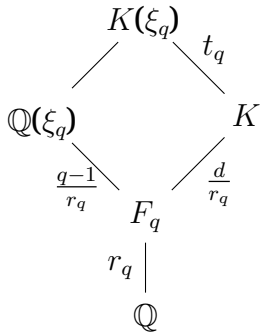
证明。 记 $F_q = \mathbb{Q}(\xi_q) \cap K$和 $r_q = [F_q : \mathbb{Q}]$。显然，我们有 $r_q \mid d$且 $r_q \mid (q-1)$。下面证明 r_q 也整除 e_p 。由于 F_q 是 $\mathbb{Q}(\xi_q)$的一个子域，因此它是 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦扩张；此外，根据引理 $F_q \cap \mathbb{Q}(\xi_p) = \mathbb{Q}$ A.6。接下来考虑一个图



根据引理 A.4 ，我们有 $[F_q(\xi_p) : \mathbb{Q}(\xi_p)] = r_q$，以及以下域塔

$$\mathbb{Q}(\xi_p) \subset F_q(\xi_p) \subset K(\xi_p)$$

这表明 r_q整除 e_p。因此， r_q整除 $\gcd(q-1,\ d,\ e_p)$。现在考虑另一个图



再次，由引理 A.4 可得

$$t_q = \frac{q-1}{r_q} \geqslant \frac{q-1}{\gcd(q-1,d,e_p)}.$$

□

让我们非正式地讨论一下前述引理。如果我们找到一个不变量 e_p较小的素数 $p > 2$，那么引理 A.9 和引理A.10 表明，值 ν_n^{sch}中其他素数的出现会受到障碍（因为对于素数 $q > 2$，如果 t_q 更大，则$\nu_{q^{,\ n}}^{\text{sch}}$ 更小；而如果 m_2 更小，则$\nu_{2^{,\ n}}^{\text{sch}}$ 更小）。

秩 3。
以下引理处理特殊域的情形。

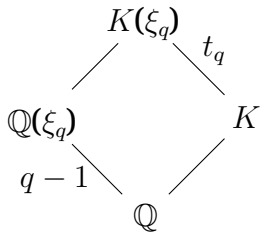
引理 A.11。 设 $p > 2$ 是一个素数， k 是一个正整数。设 K是 $\mathbb{Q}$（ξ_{4p^k}）的子域。

(1) 若 $p \geqslant 5$，则 $\nu_3^{\text{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot p^{k\left\lfloor \frac{3}{t_p} \right\rfloor}$；
(2) 若 $p = 3$，则 $\nu_3^{\text{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3^{k\left\lfloor \frac{3}{t_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{t_3} \right\rfloor}$。

证明。 我们来证明 $p \geqslant 5$ 这一情形，另一种情形完全类似。立即注意到，我们有

$$\nu_{p,3}^{\text{sch}} = m_p \left\lfloor \frac{3}{t_p} \right\rfloor \leqslant k \left\lfloor \frac{3}{t_p} \right\rfloor.$$

对于素数 $q \neq p$， $q > 2$ 我们有 $\mathbb{Q}(\xi_q) \cap K = \mathbb{Q}$ 根据引理 A.6。接着考虑图



B引理 A.4 我们有等式 $t_q = q - 1$，由此可推出 $\nu_{q\,3}^{\mathrm{sch}}$ 的等式，：

(1) 若 $q \geqslant 5$，则 $\nu_{q,\,3}^{\mathrm{sch}} = 0$;

(2) 若 $q = 3$，则 $\nu_{q,\,3}^{\mathrm{sch}} = m_3$。

此外，显然 $m_3 = 1$，因为 $K(\xi_3)$ 不包含 $m \geqslant 2$ 的元素 ξ_{3^m}。因此，我们有 $\nu_{3,\,3}^{\mathrm{sch}} = 1$。

若 K 包含 ξ_4，则有 $\nu_{2,\,3}^{\mathrm{sch}} = 1+3m_2$。此外，显然 $m_2 = 2$，因为 $\mathbb{Q}(\xi_{4p^k})$ 不包含 $m \geqslant 3$ 的元素 ξ_{2^m}，这意味着$\nu_{2,\,3}^{\mathrm{sch}} = 7$。若 K 不包含 ξ_4，则 $\nu_{2,\,3}^{\mathrm{sch}} = 5$，最后我们得到一个不等式

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot p^{k\left\lfloor \frac{3}{t_p} \right\rfloor}.$$

正如我们提到的，另一种情形完全类似。 □

由于表 2 中最差的界对应于次数 12，我们先讨论这种情形。下面的引理或多或少是引理 A.24的直接推论，同时也初步展示了不变量的影响 e_p。

引理 A.12。 设 K 是一个次数为12的数域。假设以下条件之一成立：

(1) 存在一个素数 $p > 2$，使得 $e_p = 1$;

(2) $\xi_4 \in K$，并且存在一个素数 $p > 2$，使得 $e_p = 2$。

Then

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 843\,648 < 10^6.$$

证明。如果第一个条件成立，则 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。如果第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是由域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 添加 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K \subset \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情形下，应用引理 A.11 可得一个界，该界取决于 p 的实际值。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K\colon \mathbb{Q}] = 12$，我们看到能够得到的最差界对应于情形 $p = 13$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot 13^3 = 843\,648 < 10^6.$$

□

下面的引理给出了存在满足 $e_p = 2$ 的素数 p 时的界。

引理 A.13. 设 K 是一个次数为 12 的数域。假设存在一个素数 $p > 2$，使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 240\,045\,120 < 10^9.$$

证明。 若存在另一个素数 $q > 2$ 满足 $e_q = 1$，则由引理 A.12即可得证。因此，我们可以假设对于任意其他素数 $q > 2$ 都有 $e_q \geqslant 2$。若 $\xi_4 \in K$，则

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 843\,648 < 10^6$$

由引理 A.12。若 $\xi_4 \notin K$，则由引理 A.9 可得 $m_2 \leqslant 3$，并且由引理 A.10 可知，对于任意不同于 $q > 2$ 的素数 p 都有

$$t_q \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于除 p和$\nu_{2,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 6$之外的任意 $q > 7$，我们都有$\nu_{q,3}^{\mathrm{sch}} = 0$。下面求小奇素数的界。

如果 $q = 7$ 不等于 p，那么等式

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 12 \cdot t_7$$

表明 $m_7 = 1$, $t_7 \geqslant 3$ 或 $m_7 \geqslant 2$, $t_7 \geqslant 7$。在这两种情况下，我们都有界$\nu_{7,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$。如果 $q = 5$ 不等于 p，那么等式

$$5^{m_5-1} \cdot 4 \cdot e_5 = 12 \cdot t_5$$

表明 $m_5 = 1$, $t_5 \geqslant 2$ 或 $m_5 \geqslant 2$, $t_5 \geqslant 5$。在这两种情况下，我们都有$\nu_{5,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$。如果 $q = 3$不等于 p，那么同样的分析无法给出比引理A.7更好的界，即我们有$\nu_{3,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 7$。

剩下的就是估计 $\nu_{p\,3,}^{\mathrm{sch}}$。界由以下标准等式给出：

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot 2 = 12 \cdot t_p.$$

注意，这个等式的限制性很强。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然对于某些素数 $p > 2$, 这个等式无法成立。通过直接计算可得以下界：

(1) $\nu_{p,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$，若 $p = 13$, 19；(2) $\nu_{p,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 3$, 若 $p = 7$；(3) $\nu_{p,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 7$，若 $p = 3$；(4) 对于 $p > 2$ 的所有其他可能取值，$\nu_{p,\,3}^{\mathrm{sch}} = 0$。

综合这些估计，我们得到依赖于 p 实际取值的界。我们得到的最坏情况对应于 $p = 7$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^3 = 240\,045\,120 < 10^9.$$

□

现在，我们可以对次数为 12 的情形下的界作最后的改进。

引理 A.14。设 K 是一个次数为 12 的数域。则

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 240\,045\,120 < 10^9.$$

证明。如果存在一个素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 1$，那么我们有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 843\,648 < 10^6$$

根据引理 A.12，如果存在一个素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 2$，那么我们有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 240\,045\,120 < 10^9$$

b根据引理 A.13。那么假设对于任意素数 $p > 2$，我们都有 $e_p \geqslant$ 3.

立即注意到，我们有 $\nu_{2,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 10$ 根据引理 A.7。对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot e_p = 12 \cdot t_p. \tag{A.3}$$

根据表2，我们只关注以下素数：3、5、7、13、19 和 37。代入这些素数并求解方程，可得 $t_{37}, t_{19} > 3$，这意味着 $\nu_{37,\,3}^{\mathrm{sch}} = \nu_{19,\,3}^{\mathrm{sch}} = 0$。

假设 se 得到 $\nu_{13}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \neq 0$，那么我们有 $t_{13} \leqslant 3$。在此条件下，唯一的解 of

$$13^{m_{13}-1} \cdot 12 \cdot e_{13} = 12 \cdot t_{13}$$

是 $m_{13} = 1, e_{13} = t_7 = 3$。特别地，我们有 $\nu_{13}^{\mathrm{sch}},_3 \leqslant 1$。应用引理 A.9，我们发现 $\xi_4 \notin K$ （因为 e_{13} 是奇数）且 $m_2 \leqslant 2$。因此，$\nu_2^{\mathrm{sch}},_3 \leqslant 5$。对 $p = 13$ 应用引理 A.10，我们得到不等式 $t_7 \geqslant 2, t_5 \geqslant 4$，以及 $t_3 \geqslant 2.$。特别地，我们有 $\nu_5^{\mathrm{sch}},_3 = 0$。对素数 3 和 7 求解 (A.3)，得到一个界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 = 6048.$$

进一步，假设 $\nu_{13}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0.$

假设 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \neq 0$，则我们有 $t_7 \leqslant 3$。在此条件下，方程有两个解

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 12 \cdot t_7.$$

我们有 $m_7 = 1$。此外，我们有 $e_7 = 4$， $t_7 = 2$ 或 $e_7 = 6$， $t_7 = 3$。在两种情况下，我们都有$\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$。在前一种情况下，对素数3 和5 求解一个界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 = 72\,576\,000 < 10^8.$$

在后一种情形中，应用引理 A.10于 $p = 7$ ，我们得到不等式 $t_5 \geqslant 2$。求解（A.3）关于素数 3与 5 ，我们得到一个界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,903\,040 < 10^7.$$

进一步，假设 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0.$

在所有假设下，我们已有界 $\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3$ ，这由注记 A.8 与表 2给出。让我们降低 3 在此界中的幂。考虑 A.3 对于 $p = 3$:

$$3^{m_3-1} \cdot 2 \cdot e_3 = 12 \cdot t_3.$$

由于 $e_3 \geqslant 3$，故对所有解我们有 $\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 4$。由此得到界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3 = 10\,368\,000 < 10^8$$

从而该引理得证。 □

现在我们还需证明次数为 8、10 和 14 的类似引理。

引理 A.15. 设 K 是一个次数为8的数域。假设以下条件之一成立:

(1) 存在一个素数 $p > 2$ ，使得 $e_p = 1$; (2) $\xi_4 \in K$ ，且存在一个素数 $p > 2$ ，使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 48\,000 < 10^5.$$

证明. 若第一个条件成立，则 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。若第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是在域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 上添入 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K \subset \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情况下，应用引理 A.11 可得到一个依赖于 p 实际取值的界。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K : \mathbb{Q}] = 8$ ，我们看到所能得到的最差界对应于以下情况 $p = 5$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot 5^3 = 48\,000 < 10^5.$$

□

引理 A.16。 设 K 是一个次数为 10 的数域。假设以下条件之一成立:

(1) 存在一个素数 $p > 2$ 使得 $e_p = 1$;

(2) $\xi_4 \in K$ 并且存在一个素数 $p > 2$ 使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 511\,104 < 10^6.$$

证明。若第一个条件成立，则 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。若第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是通过在域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 中添加 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K \subset \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情况下，应用引理 A.11 可得到一个界，该界取决于 p 的实际取值。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K:\mathbb{Q}] = 10$，我们看到能够得到的最差界对应于以下情形 $p = 11$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot 11^3 = 511\,104 < 10^6.$$

□

引理 A.17。 设 K 是次数为14的数域。假设以下条件之一成立:

(1) 存在一个素数 $p > 2$，使得 $e_p = 1$; (2) $\xi_4 \in K$ 且存在一个素数 $p > 2$，使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 48\,000 < 10^5.$$

证明。如果第一个条件成立，则 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。如果第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是由域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 添加 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p) = \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K \subset \mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情况下，应用引理 A.11，我们都得到一个取决于 p 实际值的界。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K:\mathbb{Q}] = 14$，我们看到，所能得到的最差界对应于情形 $p = 5$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3 \cdot 5^3 = 48\,000 < 10^5.$$

□

引理 A.18。 设 K 是一个次数为8的数域。假设存在一个素数 $p > 2$ 使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 4\,536\,000 < 10^7.$$

证明。 如果存在另一个素数 $q > 2$ 满足 $e_q = 1$，则由引理 $q > 2$ A.15可得结论。因此，我们可以假设，对于任意其他素数 $q > 2$ 都有 $e_q \geqslant 2$。如果 $\xi_4 \in K$，则

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 48\,000 < 10^5$$

由引理 A.15可知，若 $\xi_4 \notin K$，则由引理 A.9 可得 $m_2 \leqslant 3$，并且由引理 A.10 可知，对于任意不等于 $q > 2$ 的素数 p，有

$$t_q \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于任意不等于 p 且不等于 ν_2^{sch} 的 $q > 7$，我们有 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,3} = 0_{,3} \leqslant 6$。下面求小奇素数的界。

若 $q = 7$ 不等于 p，则等式

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 8 \cdot t_7$$

表明 $m_7 = 1$、$t_7 \geqslant 3$ 或 $m_7 \geqslant 2$、$t_7 \geqslant 21$。在这两种情况下，我们都有一个界 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,3} \leqslant 1$。如果 $q = 5$ 不同于 p，那么等式

$$5^{m_5-1} \cdot 4 \cdot e_5 = 8 \cdot t_5$$

表明 $m_5 = 1$， $t_5 \geqslant 2$ （正如我们之前提到的）或 $m_5 \geqslant 2$， $t_5 \geqslant 5$。在这两种情况下，我们都有 $\nu_5^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$。如果 $q = 3$ 不同于 p，那么同样的分析无法给出比引理 A.7 更好的界，即我们有 $\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 4$。

剩下的任务是估计 $\nu_{p\,3,}^{\mathrm{sch}}$。其界来自标准等式：

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot 2 = 8 \cdot t_p.$$

注意，这个等式限制性很强。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然当某些素数 $p > 2$取值时，这个等式无法成立。经过直接计算可得以下界：

(1) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$，若 $p = 13$；(2) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 3$，若 $p = 5$；
(3) 对于 $p > 2$的所有其他可能取值，$\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0$。

综合所有这些估计，我们得到依赖于 p实际取值的界。我们得到的最差界对应于情形 $p = 5$：

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 = 4\,536\,000 < 10^7.$$

□

引理 A.19。 设 K 是一个次数为10的数域。假设存在一个素数 $p > 2$ 使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 1\,995\,840 < 10^7.$$

证明。 如果存在另一个素数 $q > 2$ 使得 $e_q = 1$，那么由引理 A.16即可得证。因此，我们可以假设对于任意其他素数 $q > 2$，都有 $e_q \geqslant 2$。若 $\xi_4 \in K$，则

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 511\,104 < 10^6$$

根据引理A.16。如果 $\xi_4 \notin K$，那么根据引理A.9 我们有 $m_2 \leqslant 3$，并且根据引理A.10 对于任意不等于 p 的素数 $q > 2$，我们有

$$t_q \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于任意不等于 p和ν_2^{sch}的 $q > 7$ $_3 \leqslant 6$，我们有 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0$。下面我们来求小奇素数的界。

如果 $q = 7$ 不等于 p，那么等式

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 10 \cdot t_7$$

表明 $m_7 = 1$、 $t_7 \geqslant 3$ 或 $m_7 \geqslant 2$、 $t_7 \geqslant 21$。在这两种情况下，我们都有一个界$\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$。如果 $q = 5$ 不等于 p，那么等式

$$5^{m_5-1} \cdot 4 \cdot e_5 = 10 \cdot t_5$$

表明 $m_5 = 1$ 和 $t_5 \geqslant 2$ 或 $m_5 \geqslant 2$ 和 $t_5 \geqslant 10$。在这两种情况下，我们有$\nu_5^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$。如果 $q = 3$ 不等于 p，那么相同的分析无法得到比引理A.7更好的界，即我们有$\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 4$。

还需估计 $\nu_{p\,3,}^{\mathrm{sch}}$。界来自标准等式：

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot 2 = 10 \cdot t_p.$$

注意，这个等式具有很强的限制性。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然对于某些素数 $p > 2$，这个等式无法成立。直接计算可得以下界：

(1) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} \leqslant 1$，若 $p = 11$；(2) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0$，适用于 $p > 2$ 的所有其他可能取值。

汇总所有这些估计，我们得到依赖于 p 实际取值的界。我们能得到的最差界对应于情形 $p = 11$:

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1\,995\,840 < 10^7.$$

□

引理 A.20。 设 K 是一个次数为 14 的数域。假设存在一个素数 $p > 2$ 使得 $e_p = 2$。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 181\,440 < 10^6.$$

证明。 若存在另一个素数 $q > 2$ 满足 $e_q = 1$，则由引理 A.17即可得证。因此，我们可以假设，对于任意其他素数 $q > 2$ 都有 $e_q \geqslant 2$。若 $\xi_4 \in K$，则

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 48\,000 < 10^5$$

由引理 A.17。若 $\xi_4 \notin K$，则由引理 A.9 可得 $m_2 \leqslant 3$，并由引理 A.10 可知，对于任意素数 $q > 2$ （除 p 外）都有

$$t_q \geqslant \frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于任意 $q > 7$ （除 p 和 ν_2^{sch} 外），都有 $\nu_{q,\,3}^{\mathrm{sch}} = 0_{\,3} \leqslant 6$。我们来求小奇素数的界。

若 $q = 7$ 不等于 p，则等式

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 14 \cdot t_7$$

表明 $m_7 = 1$、 $t_7 \geqslant 3$ 或 $m_7 \geqslant 2$、 $t_7 \geqslant 6$ （记住，我们假设 $e_7 \geqslant 2$）。在这两种情况下，都有一个界 $\nu_{7,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$。若 $q = 5$ 不等于 p，则等式

$$5^{m_5-1} \cdot 4 \cdot e_5 = 14 \cdot t_5$$

这表明 $m_5 = 1, t_5 \geqslant 2$ 或 $m_5 \geqslant 2, t_5 \geqslant 10$。在这两种情况下，我们都有 $\nu_{5,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$。如果 $q = 3$不等于 p，那么同样的分析无法得出优于引理A.7中的界，即我们有 $\nu_{3,\,3}^{\mathrm{sch}} \leqslant 4$。

剩下的任务是估计 $\nu_{p\,3,}^{\mathrm{sch}}$。其界由标准等式给出:

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot 2 = 14 \cdot t_p.$$

注意，这个等式的限制性很强。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然对于某些素数 $p > 2$，这个等式无法成立。直接计算可得，对于 p 的所有可能取值，都有 $\nu_{p,\,3}^{\mathrm{sch}} = 0$，并且我们有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 181\,440 < 10^6.$$

□

在下面三个引理中，我们并不追求尽可能好的界；只要所得到的界不超过引理 A.14中的界即可。

引理 A.21. 设 K 是次数为 8 的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 23\,224\,320 < 10^8.$$

证明。 若存在素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 1$，则有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 48\,000 < 10^5$$

由引理 A.15。若存在素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 2$，则有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 4\,536\,000 < 10^7$$

b引理 A.18。那么，假设对任意素数 $p > 2$ 都有 $e_p \geqslant$ 3.

对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p-1}\cdot(p-1)\cdot e_p = 8\cdot t_p. \tag{A.4}$$

由于表2 我们只需关注以下素数：3、5、7、13 和17。代入这些素数并求解方程，可得 $t_{17},\ t_{13}>3$，这意味着$\nu_{17,3}^{\mathrm{sch}}=\nu_{13,3}^{\mathrm{sch}}=0$。特别地，由注记 $\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^{13}\cdot 3^4\cdot 5^3\cdot 7$ A.8 和表2 ，我们已经得到一个界2。下面降低此界中5 的幂。考虑A.4 对于 $p=5$:

$$5^{m_5-1}\cdot 4\cdot e_5 = 8\cdot t_5.$$

由于 $e_5\geqslant 3$，因此对于所有解，我们都有 $\nu_{5,3}^{\mathrm{sch}}\leqslant 1$。这给出了如下界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^{13}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7 = 23\,224\,320 < 10^8$$

引理得证。 □

引理A.22。 设 K 是一个次数为10的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 19\,958\,400 < 10^8.$$

证明。 若存在素数 $p>2$ 满足 $e_p=1$，则有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 511\,104 < 10^6$$

由引理A.16。若存在素数 $p>2$ 满足 $e_p=2$，则有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 1\,995\,840 < 10^7$$

根据引理A.18。因此，设对任意素数 $p>2$ ，都有 $e_p\geqslant 3$。对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p-1}\cdot(p-1)\cdot e_p = 10\cdot t_p. \tag{A.5}$$

根据表2 我们只需考虑以下素数：3、5、7、11 和31。将这些素数代入并求解该方程，可得 $t_{31}>3$，这意味着$\nu_{31,3}^{\mathrm{sch}}=0$。特别地，由注记A.8 和表2，我们已经得到一个界 $\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11^3$。下面降低该界中11 的幂。考虑A.5 对于 $p=11$:

$$11^{m_{11}-1}\cdot 10\cdot e_{11} = 10\cdot t_{11}.$$

由于 $e_{11}\geqslant 3$，因此对所有解都有 $\nu_{11,3}^{\mathrm{sch}}\leqslant 1$。由此得到界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^7\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 = 19\,958\,400 < 10^8$$

引理得证。 □

引理A.23。设 K 是一个次数为14的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 2\,540\,160 < 10^7.$$

证明。如果存在一个素数 $p>2$ 满足 $e_p=1$，那么我们有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 48\,000 < 10^5$$

根据引理 A.17。如果存在一个素数 $p>2$ 满足 $e_p=2$，那么我们有

$$\nu_3^{\mathrm{sch}}\leqslant 181\,440 < 10^6$$

by 引理 A.18。那么，假设对于任意素数 $p>2$ ，我们都有 $e_p\geqslant$ 3.

对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p-1}\cdot(p-1)\cdot e_p = 14\cdot t_p. \tag{A.6}$$

由于表2 ，我们只关注素数：3、5、7、29 和 43。将这些素数代入方程并求解，可得 $t_{41}, t_{29} > 3$，这意味着 $\nu_{41}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = \nu_{29}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 3} = 0$。因此，我们得到一个界

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 = 2\,540\,160 < 10^7$$

根据注记A.8 和表 2。 □

现在一切准备就绪，可以证明命题 A.3

证明（命题 A.3）。对于 $d = 12$ ，结论由引理 A.14 得出。对于 $d = 1$、2、3、5、7、9、11、13、15，结论由注记 A.8 和表 2 得出。对于 $d = 4$ ，结论由推论 A.5 应用于扩张 $K \subset K(\sqrt[3]{2})$，再结合引理 A.14 得出。对于 $d = 6$，注意 K 不可能同时包含 $\sqrt{2}$ 和 ξ_4 ，因此，结论由推论 A.5 应用于扩张 $K \subset K(\sqrt{2})$或 $K \subset K(\xi_4)$，再结合引理 A.14 得出。对于 $d = 8$、10、14，结论由引理 A.21、A.22 和 A.23 得出。□

秩 4。

下面的引理处理特殊域的情形。

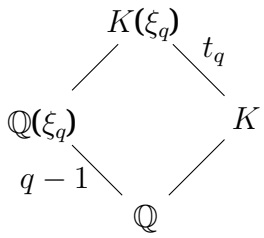
引理 A.24. 设 $p > 2$ 是一个素数， k 是一个正整数。设 K 是 $\mathbb{Q}(\xi_{4p^k})$ 的一个子域。

(1) 若 $p > 5$，则 $\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot p^{k\left\lfloor \frac{4}{t_p} \right\rfloor}$；
(2) 若 $p = 5$，则 $\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5^{k\left\lfloor \frac{4}{t_5} \right\rfloor}$；
(3) 若 $p = 3$，则 $\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 5 \cdot 3^{k\left\lfloor \frac{4}{t_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{3t_3} \right\rfloor}$。

证明。 我们来证明 $p \geqslant 5$ 的情形，其他情形完全类似。立即注意到，我们有

$$\nu_{p,4}^{\mathrm{sch}} = m_p \left\lfloor \frac{4}{t_p} \right\rfloor \leqslant k \left\lfloor \frac{4}{t_p} \right\rfloor.$$

对于素数 $q \neq p$， $q > 2$ 我们有 $\mathbb{Q}(\xi_q) \cap K = \mathbb{Q}$ 根据引理 A.6。接下来考虑图



By 由引理 A.4 可得等式 $t_q = q - 1$，这意味着关于 $\nu_{q\,4,}^{\mathrm{sch}}$ 的不等式：

(1) 若 $q > 5$，则 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 0$;
(2) 若 $q = 5$，则 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = m_5$;
(3) 若 $q = 3$，则 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 2m_3$。

此外，显然 $m_5 = m_3 = 1$，因为 $K(\xi_5)$ 不包含适用于 $m \geqslant 2$ 的元素 ξ_{5^m}，而 $K(\xi_3)$ 不包含适用于 $m \geqslant 2$ 的元素 ξ_{3^m}。因此，我们有 $\nu_5^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 1$ 以及 $\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 2$。

若 K 包含 ξ_4，则有 $\nu_2^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 3{+}4m_2$。此外，显然 $m_2 = 2$，因为 $\mathbb{Q}(\xi_{4p^k})$不包含 ξ_{2^m} 对应的元素，其中 $m \geqslant 3$，这意味着 $\nu_2^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 11$。若 K 不包含 ξ_4，则 $\nu_2^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 9$，最终我们得到一个不等式

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot p^{k\left\lfloor \frac{4}{t_p} \right\rfloor}.$$

正如我们所提到的，其他情形完全类似。 □

下面的引理或多或少都是引理 A.24的直接推论，但它们也初步展示了不变量 e_p 所产生的影响。

引理 A.25。 设 K 是一个次数为 6 的数域。假设以下条件之一成立：

(1) 存在一个素数 $p>2$，使得 $e_p=1$；(2) $\xi_4\in K$，且存在一个素数 $p>2$，使得 $e_p=2$。则

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 221\,276\,160<10^9.$$

证明。如果第一个条件成立，则 $K(\xi_p)=\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。如果第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是通过向域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 添加 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p)=\mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K\subset\mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情况下，应用引理 A.24，我们得到一个取决于 p 实际值的界。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K:\ \mathbb{Q}]=6$ 我们看到，所能得到的最差界对应于以下情况 $p=7$:

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^{11}\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^4=221\,276\,160<10^9.$$

□

引理 A.26。 设 K 是一个次数为4的数域。假设以下条件之一成立：

（1）存在素数 $p>2$，使得 $e_p=1$；（2） $\xi_4\in K$，并且存在素数 $p>2$，使得 $e_p=2$。则

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 11\,520\,000<10^8.$$

证明。如果第一个条件成立，则 $K(\xi_p)=\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$。如果第二个条件成立，则域 $K(\xi_p)$ 是通过向域 $\mathbb{Q}(\xi_{p^{m_p}})$ 添加 ξ_4 得到的，这意味着 $K(\xi_p)=\mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$ 且 $K\subset\mathbb{Q}(\xi_{4p^{m_p}})$。在这两种情况下，应用引理 A.24，我们得到一个取决于 p 实际值的界。遍历 p 的所有取值，并记住 $[K:\ \mathbb{Q}]=4$ 我们看到，所能得到的最差界对应于以下情况 $p=5$:

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^4=11\,520\,000<10^8.$$

□

引理 A.27. 设 K 是次数为6的数域。假设存在一个素数 $p>2$，使得 $e_p=2$。那么

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 1\,132\,185\,600<10^{10}.$$

证明. 若存在另一个素数 $q>2$ 满足 $e_q=1$，则由引理A.25可得结论。因此，我们可以假设，对于任意其他素数 $q>2$，都有 $e_q\geqslant 2$。若 $\xi_4\in K$，则

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 221\,276\,160<10^9$$

由引理A.25。若 $\xi_4\notin K$，则由引理A.9 可得 $m_2\leqslant 3$，并由引理A.10 可知，对任意不等于 p 的素数 $q>2$，都有

$$t_q\geqslant\frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于除 p 和 $\nu_{2,\ 4}^{\mathrm{sch}}\leqslant 11$ 之外的任意 $q>7$，我们有 $\nu_{q,\ 4}^{\mathrm{sch}}=0$。下面求小奇素数的界。

如果 $q=7$ 不等于 p，那么等式

$$7^{m_7-1}\cdot 6\cdot e_7 = 6\cdot t_7$$

表明 $m_7=1, t_7\geqslant 3$ （如前所述）或 $m_7\geqslant 2, t_7\geqslant 14$。在这两种情况下，我们都有一个界 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 1$。如果 $q=5$ 不同于 p，那么等式

$$5^{m_5-1}\cdot 4\cdot e_5 = 6\cdot t_5$$

表明 $m_5=1, t_5\geqslant 2$ 或 $m_5\geqslant 2, t_5\geqslant 10$。在这两种情况下，我们有 $\nu_5^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 2$。如果 $q=3$ 不同于 p，那么等式

$$3^{m_3-1}\cdot 2\cdot e_3 = 6\cdot t_3$$

表明 $m_3=1, t_3=1$ 或 $m_3=2, t_3\geqslant 2$ 或 $m_3\geqslant 3, t_3\geqslant 6$。在所有情况下，我们都有 $\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 5$。

剩下的就是估计 $\nu_{p\,4,}^{\mathrm{sch}}{}_{}$。而这个界来自标准等式：

$$p^{m_p-1}\cdot(p-1)\cdot 2 = 6\cdot t_p.$$

注意，这个等式的限制性很强。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然对于某些素数 $p>2$，这个等式无法成立。直接计算可得以下界：

(1) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 1$，若 $p=13$；(2) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 2$，若 $p=7$；(3) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 5$，若 $p=3$；(4) 对于 $p>2$的所有其他可能取值，$\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}=0$。

综合这些估计，我们得到依赖于 p实际取值的界。我们能得到的最宽松界对应于情形 $p=13$:

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13 = 1\,132\,185\,600 < 10^{10}.$$

□

引理 A.28. 设 K 是一个次数为4的数域。假设存在一个素数 $p>2$，使得 $e_p=2$。那么

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 87\,091\,200 < 10^8.$$

证明. 若存在另一个素数 $q>2$ 满足 $e_q=1$，则由引理 A.26即可得证。因此，我们可以假设对于任意其他素数 $q>2$，都有 $e_q\geqslant 2$。若 $\xi_4\in K$，则

$$\nu_4^{\mathrm{sch}}\leqslant 11\,520\,000 < 10^8$$

由引理 A.26可知，若 $\xi_4\notin K$，则由引理 A.9 可得 $m_2\leqslant 3$，并且由引理 A.10 可知，对于任意不等于 $q>2$ 的素数 p，有

$$t_q\geqslant \frac{q-1}{2}.$$

特别地，对于任意不等于 p 和 ν_2^{sch} 的 $q>7$，都有 $\nu_q^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}=0_{\,,\,4}\leqslant 11$。下面来求小奇素数的界。

若 $q=7$ 不等于 p，则等式

$$7^{m_7-1}\cdot 6\cdot e_7 = 4\cdot t_7$$

表明 $m_7=1$、$t_7\geqslant 3$ 或 $m_7\geqslant 2$、$t_7\geqslant 21$。在这两种情况下，我们都有 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\,4}\leqslant 1$。如果 $q=5$不是 p，那么等式

$$5^{m_5-1}\cdot 4\cdot e_5 = 4\cdot t_5$$

表明 $m_5 = 1$， $t_5 \geqslant 2$ 或 $m_5 \geqslant 2$， $t_5 \geqslant 10$。在这两种情况下，我们都有 $\nu_5^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 2$。如果 $q = 3$ 不是 p，那么相同的分析无法提供优于引理 A.7 的界，也就是说，我们有 $\nu_3^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 5$。

剩下的工作是估计 $\nu_{p\,4,}^{\mathrm{sch}}$。界由标准等式给出：

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot 2 = 4 \cdot t_p.$$

注意，这个等式有很强的限制。由于 m_p 和 t_p 是正整数，显然当某些素数 $p > 2$ 取值时，这个等式无法成立。直接计算可得以下界：

(1) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 1$，若 $p = 7$；(2) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 2$，若 $p = 5$；(3) $\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 5$，若 $p = 3$；(4) 对于 $p > 2$ 的所有其他可能取值，$\nu_p^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 0$。

汇总所有这些估计，我们得到依赖于 p 实际取值的界。我们能得到的最差界对应于以下情形：$p = 7$、5 或 3：

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 87\,091\,200 < 10^8.$$

□

Now 现在我们可以进一步改进次数为 6 和 4 时的界 .

引理 A.29。 设 K 是一个次数为6的数域。则

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 1\,132\,185\,600 < 10^{10}.$$

证明。 如果存在素数 $p > 2$ 且满足 $e_p = 1$，那么我们有

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 221\,276\,160 < 10^9$$

b由引理 A.25。如果存在素数 $p > 2$ 且满足 $e_p = 2$，那么我们有 e

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 1\,132\,185\,600 < 10^{10}$$

由引理 A.27。因此，假设对于任意素数 $p > 2$，我们都有 $e_p \geqslant 3$。

显然，我们有 $\nu_2^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 11$ 由引理 A.7。对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p-1} \cdot (p-1) \cdot e_p = 6 \cdot t_p. \tag{A.7}$$

根据表3，我们只需关注以下素数：3、5、7、13 和 19。将这些素数代入方程并求解，可得 $t_{19}, t_{13} > 4$，这意味着 $\nu_{19}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = \nu_{13}^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 0$。

假设 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \neq 0$，那么我们有 $t_7 \leqslant 4$。因此，存在两个解

$$7^{m_7-1} \cdot 6 \cdot e_7 = 6 \cdot t_7.$$

或者 $m_7 = 1$ 和 $e_7 = t_7 = 3$，或者 $m_7 = 1$和 $e_7 = t_7 = 4$。两种情况下，我们都有 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 1$。在前一种情况下，对 A.9 应用引理 $p = 7$，我们得到 $\xi_4 \notin K$（因为 e_7 是奇数）以及 $m_2 \leqslant 2$。因此，我们有 $\nu_2^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} \leqslant 9$。此外，对 A.10 应用引理 $p = 7$，我们得到不等式 $t_5 \geqslant 4$。对素数 A.73 和 5 求解（，得到一个界

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^9 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 = 4\,354\,560 < 10^7.$$

在后一种情况下，应用引理 A.10，我们得到不等式 $t_5 \geqslant 2$。对素数 A.73 和 5求解（），得到一个界

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 = 87\,091\,200 < 10^8.$$

进一步，假设 $\nu_7^{\mathrm{sch}}{}_{,\ 4} = 0.$

在上述所有假设下，我们已经得到了一个界

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5^2 = 1\,007\,769\,600 < 10^{10}$$

根据引理 A.7 引理得证。 □

引理 A.30. 设 K 是次数为4的数域。那么

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 87\,091\,200 < 10^8.$$

证明。 若存在素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 1$，则有

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 11\,520\,000 < 10^8$$

根据引理 A.26。若存在素数 $p > 2$ 满足 $e_p = 2$，则有

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 87\,091\,200 < 10^8$$

根据引理 A.28。于是设对于任意素数 $p > 2$ 都有 $e_p \geqslant 3$。

注意到 $\nu_{2,\ 4}^{\mathrm{sch}} \leqslant 15$ 根据引理 A.7。对于奇素数，考虑标准方程

$$p^{m_p - 1} \cdot (p-1) \cdot e_p = 4 \cdot t_p. \tag{A.8}$$

由于表 3 ，我们只需关注素数：3、5、7、13 和 17。代入这些素数并求解方程，我们得到 t_{17}，t_{13} $t_7 > 4$，这意味着 $\nu_{17,\ 4}^{\mathrm{sch}} = \nu_{13,\ 4}^{\mathrm{sch}} = \nu_{7,\ 4}^{\mathrm{sch}} = 0$。因此，根据引理 $\nu_4^{sch} \leqslant 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^4$，我们已经得到一个界 A.7。让我们减小该界中 5 的幂。考虑 A.8 ，其中 $p = 5$:

$$5^{m_5 - 1} \cdot 4 \cdot e_5 = 4 \cdot t_5.$$

由于 $e_5 \geqslant 3$，因此对于所有解，我们都有 $\nu_{5,\ 4}^{\mathrm{sch}} \leqslant 1$。这给出了界

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5 = 39\,813\,120 < 10^8$$

于是引理得证。 □

现在一切准备就绪，可以证明命题 A.2

证明 （命题 A.2的）。对于 $d = 6$ 和 $d = 4$ ，结论由引理 A.29 和引理 A.30得到。对于 $d = 1$、2、5、7，结论由注记 A.8 和表 3得到。对于 $d = 3$，结论由将推论 A.5 应用于扩张 $K \subset K(\sqrt{2})$ 以及引理 A.29得到。□

此外，我们还需要以下粗略界。

引理 A.31。 设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。那么

$$\nu_4^{\mathrm{sch}} \leqslant 87\,091\,200 < 10^8.$$

证明。 结果由注记 A.8 和表 3得出。 □

引理 A.32。 设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{sch}} \leqslant 2\,903\,040 < 10^7.$$

证明。 结果由注记 A.8 和表 2得出。 □

最后，我们需要以下关于 ν^{se} 的界。

引理 A.33. 设 K 是次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。那么

$$\nu_3^{\mathrm{se}} \leqslant 2\,620\,800 < 10^7.$$

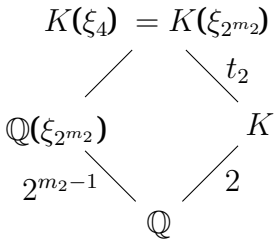
证明 . 为方便起见，我们先写出公式:

$$\nu_{p,3}^{\mathrm{se}} = m_p \left\lfloor \frac{2}{\varphi(t_p)} \right\rfloor + \nu_p(2). \tag{A.9}$$

若 $d = 1$ 我们知道不变量 m_p 和 t_p 的实际值，通过直接计算可得等式:

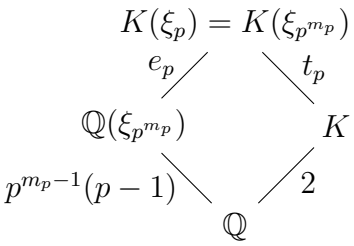
$$\nu_3^{\mathrm{se}} = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 10\,080.$$

考虑 $d = 2$ 的情形。对于 $p = 2$ ，我们有一个图



由于 $t_2 = 1$ 或 2，那么 $\varphi(t_2) = 1$，并且由图可知， $m_2 - 1 \leqslant \nu_2(2t_2)$。此外， $\nu_2(2t_2) \leqslant 2$，这意味着不等式 $m_2 \leqslant 3$ 且我们有 $\nu_{2,\ 3}^{\mathrm{se}} \leqslant 7$ 根据（A.9）。

对于每个素数 $p > 2$ ，考虑一个标准图



由此可知， t_p 可被整除

$$\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p^{m_p-1}(p-1), 2)} = \frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}$$

and

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}\right).$$

如果 $p \geqslant 17$ 或 $p = 11$，那么数 p^{m_p-1} ~~$(p-1)$ 最大~~公约数$(p-1,\ 2)$ 要么等于 5，要么大于 6，这意味着

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}\right) > 2$$

并且我们有$\nu_{p,\ 3}^{\mathrm{se}} = 0$ 根据(A.9)。

如果 $p = 5$，7或13，那么我们有 $\nu_p(2) = 0$。如果 $m_p \geqslant 2$，那么 t_p 可被 p整除，这意味着不等式 $\varphi(t_p) \geqslant \varphi(p) > 2$ 以及$\nu_{p,\ 3}^{\mathrm{se}} = 0$ 根据(A.9)。因此，假设 $m_p = 1$，我们有一个不等式

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p-1}{\gcd(p-1, 2)}\right),$$

这保证了对于 $p = 7$ 或 13， $\varphi(t_p) \geqslant 2$ 。将其代入(A.9)，我们得到不等式$\nu_{13,\ 3}^{\mathrm{se}} \leqslant 1$, $\nu_{7,\ 3}^{\mathrm{se}} \leqslant 1$ 和$\nu_{5,\ 3}^{\mathrm{se}} \leqslant 2$。

若 $p = 3$，则 $\nu_3(2) = 0$。我们来考虑 m_3 的所有可能取值。若 $m_3 \geqslant 3$，则 t_3 能被 9 整除，这意味着不等式 $\varphi(t_3) \geqslant \varphi(9) = 6$ ，并且 $\nu_{3,3}^{\mathrm{se}} = 0$ ，根据 (A.9)。若 $m_3 = 2$，则 t_3 能被 3 整除，这意味着不等式 $\varphi(t_3) \geqslant \varphi(3) = 2$ ，并且 $\nu_{3,3}^{\mathrm{se}} \leqslant 2$

根据 (A.9)。若 $m_3 = 1$，则显然有 $\nu_{3,\,3}^{\mathrm{se}} \leqslant 2$ 根据 (A.9)。因此，在所有情况下都有界 $\nu_{3,\,3}^{\mathrm{se}} \leqslant 2$。

最后，我们有

$$\nu_3^{\mathrm{se}} \leqslant 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 = 2\,620\,800 < 10^7.$$

□

引理 A.34。 设 K 是一个次数为 $d \leqslant 2$ 的数域。那么

$$\nu_4^{\mathrm{se}} \leqslant 943\,488\,000 < 10^9.$$

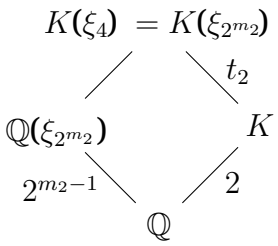
证明。 为方便起见，我们写下公式：

$$\nu_{p,4}^{\mathrm{se}} = m_p \left\lfloor \frac{3}{\varphi(t_p)} \right\rfloor + \nu_p(6). \tag{A.10}$$

若 $d = 1$ 我们知道不变量 m_p 和 t_p 的实际值，经过直接计算可得等式：

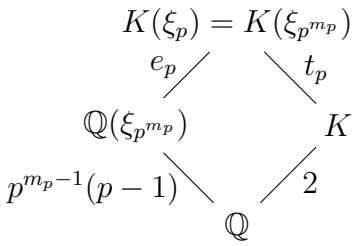
$$\nu_4^{\mathrm{se}} = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 362\,880.$$

考虑情形 $d = 2$。对于 $p = 2$，我们有一个图



由于 $t_2 = 1$ 或 2，因此 $\varphi(t_2) = 1$，并且由图可知 $m_2 - 1 \leqslant \nu_2(2t_2)$。此外， $\nu_2(2t_2) \leqslant 2$，这意味着不等式 $m_2 \leqslant 3$，并且有 $\nu_{2,\,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 10$ 根据（A.10）。

对每个素数 $p > 2$，考虑一个标准图



由此可知， t_p 可被

$$\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p^{m_p-1}(p-1), 2)} = \frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}$$

and

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}\right).$$

若 $p \geqslant 17$ 或 $p = 11$，则数 p^{m_p-1} ~~$(p-1)$ 最大公约数$(p-1,\ 2)$~~ 等于 5 或大于 6，这意味着

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p^{m_p-1}(p-1)}{\gcd(p-1, 2)}\right) > 3$$

并且我们有 $\nu_{p,\,4}^{\mathrm{se}} = 0$ 由（A.10）。

如果 $p = 5$、7 或 13，则我们有 $\nu_p(6) = 0$。如果 $m_p \geqslant 2$，则 t_p 可被 p 整除，从而推出不等式 $\varphi(t_p) \geqslant \varphi(p) > 3$ 以及 $\nu_{p,4}^{\mathrm{se}} = 0$ 由（A.10）。因此，假设 $m_p = 1$，我们有不等式

$$\varphi(t_p) \geqslant \varphi\left(\frac{p-1}{\gcd(p-1,2)}\right),$$

这保证了对于 $p = 7$ 或 13，$\varphi(t_p) \geqslant 2$。将其代入 (A.10)，可得不等式 $\nu_{13,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 1$, $\nu_{7,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 1$ 和 $\nu_{5,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 3$。

若 $p = 3$，则 $\nu_3(6) = 1$。我们来考察 m_3 的所有可能取值。若 $m_3 \geqslant 3$，则 t_3 可被 9 整除，这意味着不等式 $\varphi(t_3) \geqslant \varphi(9) = 6$，并且根据 (A.10) 有 $\nu_{3,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 1$。若 $m_3 = 2$，则 t_3 可被 3 整除，这意味着不等式 $\varphi(t_3) \geqslant \varphi(3) = 2$，并且根据 (A.10) 有 $\nu_{3,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 3$。若 $m_3 = 1$，则显然根据 (A.10) 有 $\nu_{3,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 4$。因此，所有情况下都有一个界 $\nu_{3,4}^{\mathrm{se}} \leqslant 4$。

最后，我们得到

$$\nu_3^{\mathrm{se}} \leqslant 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 943\,488\,000 < 10^9.$$

□

参考文献

[1]A. Abouelsaad. 有理数域上克雷莫纳群的最大阶有限子群。arXiv:2501.18551 (2025).[2] A. Avilov. 可表示为两个二次曲面之交的三维簇的自同构。《数学文集》, 207 (2016), no. 3, 315–330.[3] A. Beauville. 射影线性群$_2(K)$的有限子群。《当代数学》, 522 (2010), 23–29.[4] W. Burnside. 线性代换群中系数的算术性质（第三篇）。《伦敦数学会会刊》, s2-7 (1909), no. 1, 8–13.[5] I. Dolgachev. 经典代数几何：现代观点。—剑桥：剑桥大学出版社，2012.[6] I. Dolgachev, V. Iskovskikh. 平面克雷莫纳群的有限子群。载于《代数、算术与几何：为纪念 Yu. I. Manin 而作》，第 I 卷。《数学规划》，269 (2009), 443–548.[7] P. Gille, T. Szamuely. 中心单代数与伽罗瓦上同调，第 2 版。—剑桥：剑桥大学出版社，2017.[8] S. Gorchinskiy, C. Shramov. 非分歧布劳尔群及其应用。《数学专著译丛》，2015.[9] A. Grothendieck. ´代´数几´何´学´原理：IV. ´概´形与概形´态射的局部研究，第四¨部分。《IH´ÉS 数学出版物》, 32 (1967), 5–361.[10] P. Jahnke, I. Radloff. 反典范系有基点的 Gorenstein Fano 三维簇。《组合数学》, 142 (2006), no. 2, 422–432.[11] P. Jahnke, I. Radloff. 终端 Fano 三维簇及其平滑化。《数学杂志》, 269 (2011), no. 3–4, 1129–1136.[12] V. Iskovskikh. 任意域上有理曲面的极小模型。《苏联数学—消息》, 14 (1980), no. 1, 17–39.[13] V. A. Iskovskikh, Yu. Prokhorov. Fano 簇。《代数几何 V》，《数学百科全书》丛书第 47 卷。施普林格，柏林，1999.[14] Y. Kawamata. Q-法诺三维簇的有界性。《当代数学》, 131 (1992), no. 3, 439–445.[15] A. Kuznetsov, Y. Prokhorov. 皮卡数为 1 的单节点法诺三维簇。《消息：数学》, 89 (2025), no. 3, 495–594.[16] A. Kuznetsov, Y. Prokhorov, C. Shramov. Fano 三维簇的直线与圆锥曲线希尔伯特概形及自同构群。《日本数学杂志》, 13 (2018), no. 1, 109–185[17] S. Lang. 代数。《数学研究生教材》, 211; 0072-5285，施普林格科学与商业媒体纽约，+2002.[18] H. Minkowski. 关于正定二次型理论。《纯粹与应用数学杂志》, 101 (1887), 196–202.[19] Y. Namikawa. 法诺三维簇的平滑化。《代数几何杂志》, 6(1997), no. 2, 307–324.

[20] N. Newman. 积分矩阵。《纯粹与应用数学》, 45 (1972), Academic Press, 纽约-伦敦。[21] B. Poonen. 簇上的有理点。《数学研究生教程》, 186 (2017), 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯。[22] V. Przhiyalkovskij, I. Chel'tsov, and K. Shramov. 双曲与三角 Fano 三维簇。数学汇报, 69(2005), no. 2, 365–421.[23] Y. Prokhorov. 亏格 12 的奇异 Fano 三维簇。《数学文集》, 207 (2016), no. 7, 983–1009.[24] Y. Prokhorov. G-Fano 三维簇，I。《先进几何学》, 13 (2013) no. 3, 389–418.[25] Y. Prokhorov. G-Fano 三维簇，II。《先进几何学》, 13 (2013) no. 3, 419–434.[26] Y. Prokhorov. 关于 G-Fano 三维簇。俄罗斯科学院数学系列汇报, 79 (2015) no. 4, 159–174.[27] Y. Prokhorov, C. Shramov. 双有理自映射群的 Jordan 性质。《组合数学》, 150 (2014), no. 12, 2054–2072.[28] Y. Prokhorov, C. Shramov. 秩 3 克雷莫纳群的 Jordan 常数。《莫斯科数学杂志》, 17 (2017), no. 3, 457–509.[29] M.Reid. 典范奇点入门指南。载于《1985 年鲍登代数几何会议》。《纯粹数学研讨会论文集》, 46 (1987), 345–414.[30] I. Schur. 关于一类线性代换有限群，柏林普鲁士科学院会议录 (1905), 77–91.[31] J.-P. Serre. 任意域上秩 2 克雷莫纳群有限子群阶的 Minkowski 型界。《莫斯科数学杂志》. 9 (2009), no. 1, 183–198.[32] J.-P. Serre. 有限子群阶的界 $G(k)$。《群表示论》。EPFL Press, 洛桑 (2007).[33] K.-H. Shin. 具有典范奇点的三维 Fano 簇。《东京数学杂志》, 12 (1989), no.2, 375–385 [34] C. Shramov, V. Vologodsky. 无点曲面的自同构。arXiv:1807.06477 (2018).[35] A. Vikulova. 最对称的光滑三次曲面。《数学文集》, 216 (2025), no. 2, 168–209.[36] A. Vikulova. 有理数域上 Severi–Brauer 曲面的双有理自同构群。《国际数学研究通知》, 2024 (2024), no. 24, 14638–14654.[37] A. Zaitsev. 特征零域上秩 2 克雷莫纳群的 Jordan 常数。《国际数学研究通知》, 2025 (2025), no. 6.[38] Fanography. https://www.fanography.info[39] Stacks 项目。https://stacks.math.columbia.edu

俄罗斯莫斯科119048乌萨切娃街6号，高等经济学院国立研究型大学代数几何实验室电子邮箱地址：alvlzaitsev1@gmail.com