arXiv:2602.06185v1 [math.AG] 5 Feb 2026

关于乔对应的几点说明

PABLO PELAEZ

Abstract. 我们在 Voevodsky 三角动机范畴的框架下，研究域上的 X, Y 光滑射影簇的分次乔环 $CH^*(X \times Y)$ 上的若干充分等价关系（按 Samuel 的意义）。

1. Introduction

1.1. </style>设 k 为代数闭基域， X 为 k 上的维数为 d的光滑射影簇。令 $CH^m(X)$ 表示 X 的余维为 m 的代数循环模有理等价所得的群， $1 \leq m \leq d$，并令 $CH^m_{\mathrm{alg}}(X) \subseteq CH^m(X)$ 表示与零代数等价的代数循环子群。我们将 Albanese 映射记为 alb_X ： $CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \to \mathrm{Alb}(X)(k)$。固定一个 k-有理点 $x_0 \in X(k)$，并考虑一个典范映射 $f\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$，使得$f(x_0) = 0 \in \mathrm{Alb}(X)(k)$。

设 $\Lambda \in CH^{d+n}(X \times Y)$ 为一个 Chow 对应，其中 Y 是一个维数为 d_Y 的光滑射影簇， $d_Y \geq n \geq 0$，并考虑以下阿贝尔群的同态:

$$\begin{aligned} \psi :& CH^{d_Y - n}(Y) \to \mathrm{Alb}(X)(k) \\ & \gamma \mapsto \mathrm{alb}_X(\Lambda(\gamma) - \deg(\Lambda(\gamma))[x_0]), \end{aligned}$$

其中 $\Lambda(\gamma) = p_{X*}(p_Y^*(\gamma) \cdot \Lambda) \in CH^d(X)$，其中 $p_X\colon X \times X \to X$、 $p_Y\colon X \times X \to Y$ 为投影。

我们注意到，将 ψ 限制到 $CH^{d_Y - n}{}_{\mathrm{alg}}(Y)$ 上，是 Lieberman [Lie68，第 1194], 页（3.2.7）意义下的由循环诱导的正则同态。值得注意的例子包括：在 $k = \mathbb{C}$ 且 A 为一个阿贝尔簇的情形，Weil 的 [Wei52，§IV.27] 阿贝尔 - 雅可比映射 ψ_n ： $CH^n_{\mathrm{alg}}(A) \to J^n_a(A)(\mathbb{C})$ [Lie68，命题 6.7，定理 6.5] 进入 Weil-Griffiths中间雅可比簇的代数部分 $J^n(A)$ [Wei52，§IV.24-26]，[Gri68，例 2.1，定理 2.54]。

我们的目标是在 Voevodsky 三角动机范畴 DM_k 的背景下，刻画那些使同态 ψ 为零的对应 $\Lambda \in CH^{d+n}(X \times Y)$。具体而言，我们给出一个判据：利用阿尔巴内塞簇 $\mathrm{Alb}(X)$ 的点函子 $\mathcal{A} \in DM_k$ 及其正交覆盖$\theta^{\mathcal{A}}_{-1}$： $bc_{\leq -1}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$（在 DM_k [Pel17], [GP22], 中），来判定那些使同态 ψ 恒为零的对应 Λ。此外，我们还证明，正交覆盖 $\theta^{\mathcal{A}}_{-1}$ 能够检测出属于$CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(X \times Y)$（平方等价于零（3.2.4））或属于 $CH^{d+n}_{H^{*2}}(X \times Y)$（H. Saito 滤子的第二步（3.2.5））的对应 Λ。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：14C15、14C25、19E15。
Key words and phrases. 充分等价关系、阿尔巴内塞映射、肖群、混合动机、正交滤过、正则同态、平方等价。1

本文结构如下：第 2 节确立记号，并汇集本文其余部分将用到的一些结果。第 3 节在 Voevodsky 三角动机范畴的背景下，讨论光滑射影簇上代数循环的充分等价关系。第 4 节证明主要结果（4.1.4），并说明正交滤过能够检测出平方等价于零的对应（4.3.1），或属于 H^{*2}（即 H. Saito 滤子的第二步）的对应（4.3.2）。

2. Preliminaries

在本节中，我们固定本文将在其余部分使用的记号，并回顾文献中一些后文所必需的结果。本节的结果并非原创。

2.1. 定义与记号。 我们考虑任意基域 k，并令Sch_k 为有限型 k-概形的范畴。若 X、 $Y \in Sch_k$，我们将用$X \times Y$表示 $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y$。设 π_X： $X \to$ Spec(k) 为 $X \in Sch_k$ 的结构态射， X(k) 为其 k-点集。给定 $x \in X(k)$，我们也将把 x : Spec(k) $\to X$记作 Sch_k 中相应的态射。

令 Sm_k 为 Sch_k 中由光滑 k-概形组成的全子范畴，并视其为带有 Nisnevich 拓扑的位点。我们将用 $SmProj_k$ 表示 Sm_k 中由光滑射影簇组成的全子范畴。当 $X \in SmProj_k$的维数为 d 且 $x \in X(k)$ 时，令 $[x] \in CH^d(X)$ 为与作为 X 的闭子概形的x 相关联的零循环。给定 $\alpha \in CH^d(X)$，我们将用 deg(α) $\in \mathbb{Z}$ 表示$\pi_{X*}(\alpha)$ $\in CH^0$(Spec(k)) $\cong \mathbb{Z}$。

我们将自由使用三角范畴的语言 [Nee01], [BBD82]。在三角范畴中，我们将用 $[1]$（分别用 $[-1]$）表示悬挂（分别为反悬挂）函子；对于 $n > 0$， $[1]$ （分别为 $[-1]$）的复合迭代n次记为 $[n]$ （分别为 $[-n]$）。如果 $n = 0$，则 $[0]$ 将是恒等函子。

在所考虑的所有范畴中，0 将表示零对象（如果其存在），而 $\cong$ 将表示一个映射（分别为一个函子）是同构（分别为范畴的等价）。

2.2. Voevodsky 动机三角范畴。令 Cor_k 为 k [SV00], [Sus17], 上的有限对应的 Suslin-Voevodsky 范畴，令 Shv^{tr}为带转移的 Nisnevich 层范畴（这是一个阿贝尔范畴[MVW06, 13.1]）。给定 $X \in Sm_k$，我们将用 $\mathbb{Z}_{tr}(X)$ 表示由 X [表示的带转移的 Nisnevich 层 MVW06, 2.8 和 6.2]。

我们将 $K(Shv^{tr})$ 记为 Shv^{tr} 上配备内射模型结构的无界链复形范畴 [Bek00, Prop. 3.13], , 并将其同伦范畴记为 $D(Shv^{tr})$。令 $K^{\mathbb{A}^1}(Shv^{tr})$ 为相对于映射集 $\{\mathbb{Z}_{tr}(X \times_k \mathbb{A}^1)[n] \to \mathbb{Z}_{tr}(X)[n] : X \in Sm_k$ 局部化后的 $K(Shv^{tr})$ 的左 Bousfield 局部化 [Hir03, 3.3]; 该映射集由投影 p： $X \times_k \mathbb{A}^1 \to X$ 诱导。Voevodsky 的有效动机三角范畴 DM_k^{eff} 是 $K^{\mathbb{A}^1}(Shv^{tr})$[Voe00] 的同伦范畴。

令 $T \in K^{\mathbb{A}^1}(Shv^{tr})$ 为链复形 $\mathbb{Z}_{tr}(\mathbb{G}_m)[1]$ [MVW06, 2.12], , 其中 $\mathbb{G}_m$ 是以 1 为基点的 k-概形 $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ 。考虑范畴 $Spt_T(Shv^{tr})$， 其对象是 $K^{\mathbb{A}^1}(Shv^{tr})$ 上的对称 T-谱，并赋予 [Hov01, 8.7 和 8.11], [Ayo07, Def. 4.3.29] 中定义的模型结构。Voevodsky 三角动机范畴 DM_k 是 $Spt_T(Shv^{tr})$ [Voe00] 的同伦范畴。

若 $X \in Sm_k$，令 $M(X)$ 为 $\mathbb{Z}_{tr}(X) \in D(Shv^{tr})$ 在 $\mathbb{A}^1$-局部化映射 $D(Shv^{tr}) \to DM_{有效k}$ 下的像。我们将记 $\Sigma^\infty: DM_k^{\mathrm{eff}} \to DM_k$ 为悬挂函子 [Hov01, 7.3], 这里我们滥用记号，简记 E 为 $\Sigma^\infty E$, $E \in DM_k^{\mathrm{eff}}$。

我们回顾一下，DM_k^{eff}和 DM_k 是张量三角范畴 [Ayo07，定理 4.3.76 和命题 4.3.77]，其单位对象为 $\mathbf{1} = M(\mathrm{Spec}(k))$。令 $E(1)$ 为 $E \otimes M(\mathbb{G}_m)[-1]$，$E \in DM_k$ 并递归定义 $E(n) = (E(n-1))(1)$，$n \geq 0$。我们注意到，函子 $DM_k \to DM_k$, $E \mapsto E(1)$ 是范畴等价 [Hov01，8.10],[Ayo07，定理 4.3.38]；令 $E \mapsto E(-1)$ 为其逆函子，并递归定义 $E(-n) = (E(-n+1))(-1)$，$n > 0$。按照约定，$E(0) = E$ 对 $E \in DM_k$成立。

2.3. Voevodsky 切片滤过。我们回顾，DM_k 是一个紧生成三角范畴 [Nee96, Def. 1.7]，并具有如下紧生成元集合[Ayo07, Thm. 4.5.67]:

$$\mathcal{G}_{DM_k} = \{M(X)(r) : X \in Sm_k; r \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.3.1}$$

设 $m \in \mathbb{Z}$，并考虑:

$$\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}(m) = \{M(X)(r) : X \in Sm_k; r \geq m\} \subseteq \mathcal{G}_{DM_k}. \tag{2.3.2}$$

2.3.3. 我们将 $DM_k^{\mathrm{eff}}(m)$ 定义为DM_k 中包含 $\mathcal{G}^{\mathrm{eff}}(m)$（2.3.2）且对任意（无限）余积封闭的最小全三角子范畴。切片滤过 [Voe02b], [Voe10b, p. 18], [HK06] 是 DM_k的如下三角子范畴塔:

$$\cdots \subseteq DM_k^{\mathrm{eff}}(m+1) \subseteq DM_k^{\mathrm{eff}}(m) \subseteq DM_k^{\mathrm{eff}}(m-1) \subseteq \cdots \tag{2.3.4}$$

我们注意到，包含 $i_m: DM_k^{\mathrm{eff}}(m) \to DM_k$ 具有一个右伴随 $r_m: DM_k \to DM_k^{\mathrm{eff}}(m)$，它同时也是一个三角函子 [Nee96, Thm. 4.1]。

切片滤过的（$m-1$）有效覆盖定义为 $f_m = i_m \circ r_m : DM_k \to DM_k$ [Voe02b], [Voe10b，第 18], [页 06]HK。我们将用 $\epsilon_m : f_m \to id$ 表示伴随（i_m，r_m）的余单位。

我们回顾一下，悬挂函子 $\Sigma^\infty: DM_k^{\mathrm{eff}} \to DM_k$ 在 $DM_{有效k}$与 $DM_k^{\mathrm{eff}}(0)$ [之间诱导出范畴等价（Voe10a，推论 4.10]）（若k的特征为 p且非完美，则有必要考虑 $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$系数[Sus17，推论 4.13、定理 4.12 和定理 5.1]）。

2.4. 正交滤过。令 $m \in \mathbb{Z}$。我们将用 $DM_k^{\perp}(m)$ 表示 DM_k 的由满足以下条件的对象 $E \in DM_k$ 构成的全子范畴：对每个 $G \in DM_{有效k}(m)$（2.3.3），都有：$\mathrm{Hom}_{DM_k}(G, E) = 0$。

2.4.1. 正交滤过 [Pel17, 3.2.1]（在 [Pel17, 3.2]中称为双有理）由以下 DM_k的三角子范畴塔构成:

$$\cdots \subseteq DM_k^{\perp}(m-1) \subseteq DM_k^{\perp}(m) \subseteq DM_k^{\perp}(m+1) \subseteq \cdots \tag{2.4.2}$$

2.4.3. 我们回顾一下，包含映射 $j_m\colon DM_k^{\perp}(m) \to DM_k$ 有一个右伴随$p_m\colon DM_k \to DM_k^{\perp}(m)$，它也是一个三角函子 [Nee96, Thm. 4.1],[Pel17, 3.2.2]。令 $bc_{\leq m} = j_{m+1}\circ p_{m+1}\colon DM_k \to DM_k$，其中 bc 表示双有理覆盖 [Pel17, 3.2]。该伴随的余单位 $\theta_m : bc_{\leq m} \to id$满足一个泛性质 [Pel17, 3.2.4], , 与包含映射(2.4.2)结合后诱导出一个典范自然变换 $bc_{\leq m} \to bc_{\leq m+1}$。

2.5. 我们将考虑 Voevodsky 的同伦 t-结构 $((DM_k^{\text{eff}})_{\geq 0}, (DM_{\text{eff}k})_{\leq 0})$，见 DM_k^{eff} [Voe00，第 11] 页。我们将对 t-结构[Ayo07, §2.1.3], [Ayo11, §1.3], 使用同调记号，并用 $\tau_{\geq m}, \tau_{\leq m}$ 表示截断函子，以及$\mathbf{h}_m = [-m](\tau_{\leq m}\circ\tau_{\geq m})$。我们将用 $\mathbf{HI}_k$ 表示 Sm_k上具转移的同伦不变 Nisnevich 层所构成的阿贝尔范畴，它是 DM_k^{eff}中同伦 t-结构的心。

2.5.1. 考虑一个阿贝尔簇 $A \in SmProj_k$。我们将用 $\mathcal{A} \in \mathbf{HI}_k$ 表示将 A 的点函子视为带转移的同伦不变 Nisnevich 层 [SS03, Lem. 3.2, Rmk. 3.3]。给定一个映射 $f\colon Y \to A$，属于 Sm_k，我们将用 $\mathcal{A}_f\colon M(Y) \to \mathcal{A}$表示 $DM_{\text{eff}k}$中的对象，它是 f 在同构$\Gamma(Y, \mathcal{A}) \cong$同态集$^{DM_k^{\text{eff}}}(M(Y) \mathcal{A})$ [下的像，见 Voe00, Prop. 3.1.9 和 3.2.3]。

2.5.2. 采用（2.5.1）中的记号和条件。假设基域 k是代数闭的，令 $\mathcal{F} \in \mathbf{HI}_k$（2.5），并考虑映射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{A}$ in $\mathbf{HI}_k$。众所周知 [HP25, 2.4.2]: $f = 0$ 当且仅当诱导映射$f_k = 0\colon \Gamma(\text{Spec}(k) \mathcal{F}) \to \Gamma(\text{Spec}(k) \mathcal{A})$。

3. Adequate equivalence relations and Voevodsky's motives

3.1. 设 $X, Y \in SmProj_k$的维数分别为 d, d_Y，且 $\Lambda \in CH^l(Y \times X)$。给定 $\gamma \in CH^m(Y)$，记 $\Lambda(\gamma) \in CH^n(X)$、$n = l+m-d_Y$，表示 $p_{X*}(p_Y^*(\gamma)\cdot\Lambda)$，其中 $p_X\colon Y \times X \to X$、$p_Y\colon Y \times X \to Y$为投影。

我们将把同构 [Voe02a], $Z \in Sm_k$:

$$\text{Hom}_{DM_k}(M(Z), \mathbf{1}(m)[2m]) \cong CH^m(Z), \tag{3.1.1}$$

视为一种等同。

3.1.2. 给定 $\alpha \in CH^m(Z)$, $Z \in Sm_k$，我们也将记 $\alpha\colon M(Z) \to \mathbf{1}(m)[2m]$为 DM_k 中与 (3.1.1) 下的 α 对应的映射。

3.1.3. 采用 (3.1) 中的记号和条件。考虑 $\Lambda\colon M(Y) \otimes M(X) \to \mathbf{1}(l)[2l]$，它属于 DM_k，见 (3.1.2)。对偶化 $M(Y)$ [Voe00, Thm. 4.3.7], [BV08, Prop. 6.7.1 和 §6.7.3]，我们得到 DM_k 中的以下映射:

$$\Lambda_Y : M(X) \longrightarrow M(Y)(-d_Y + l)[-2d_Y + 2l]$$

3.2. 充分等价关系。 $SmProj_k$ [上代数循环的充分等价关系 E 1], Sam60, §1], 由子群 [Sai92, Prop. 1.2.1],[Jan00, Lem 1.3]组成:

$$\{CH_E^n(X) \subseteq CH^n(X) : X \in SmProj_k, n \geq 0\}$$

使得对于每个 $\Lambda \in CH^l(Y \times X)$; $X, Y \in SmProj_k$，以及每个 $\gamma \in CH_E^m(Y)$:$\Lambda(\gamma) \in CH_E^n(X)$ (3.1)。

3.2.1. 沿用 (3.1) 和 (3.1.1)-(3.1.3) 中的记号与条件。考虑映射 $h : M \to \mathbf{1}$ in DM_k。于是，通过将 $CH^n_{E_h}(X)$ 定义为由 h: 诱导的映射的像，我们得到一个充分等价关系 E_h(3.2):

$$_1h_*: \text{同态集}_{DM_k}(M(X)(-n)[-2n], M) \to \text{同态集}_{DM_k}(M(X)(-n)[-2n], \mathbf{1}) \cong CH^n(X)$$

其中同构 (1) 由伴随性及 (3.1.1) 得出， [Voe02a]。

事实上，设 $\gamma \in CH^m_{E_h}(Y)$、 $\Lambda \in CH^l(Y \times X)$、 $n = l + m - d_Y$，并考虑 $\beta = \Lambda_Y(-n)[-2n]: M(X)(-n)[-2n] \to M(Y)(-m)[-2m]$于 DM_k(3.1.3) 中。因此， $\gamma(-m)[-2m]: M(Y)(-m)[-2m] \to \mathbf{1}$ (3.1.2) 位于 h_*的像中，故 $\gamma(-m)[-2m] \circ \beta: M(X)(-n)[-2n] \to \mathbf{1}$ 亦位于 h_*的像中。然后，结合 Lieberman 引理 [Ful98，命题 16.1.1]与 [Voe00，命题 2.1.4，定理 3.2.6]，我们得出：在同构同态集$_{DM_k}(M(X)(-n)[-2n], \mathbf{1}) \cong CH^n(X)$ 下， $\Lambda(\gamma)$ (3.1) 对应于 $\gamma(-m)[-2m] \circ \beta$，从而该断言成立。

3.2.2. 反过来，给定 $SmProj_k$ 上代数循环的充分等价关系 E (3.2)，存在一个（不唯一的）映射 $h: M \to \mathbf{1}$ in DM_k，使得$E_h = E$ (3.2.1)。

事实上，令:

$$M = \bigoplus_{X \in SmProj_k} \bigoplus_{\alpha \in CH^n_E(X), n \geq 0} M(X)(-n)[-2n]$$

并考虑由 $\alpha(-n)[-2n]: M(X)(-n)[-2n] \to \mathbf{1}$, (3.1.2) 在 M 的每个直和项上诱导的映射 $h: M \to \mathbf{1}$ in DM_k。

3.2.3. 考虑正交滤过中由余单位 θ_{-1} (2.4.3)给出的 DM_k 中的映射:

$$\theta^{\mathbf{1}}_{-1} : bc_{\leq -1}(\mathbf{1}) \to \mathbf{1}$$

于是，由 [Pel17, 5.3.6], [PR25, 2.5.12] 可得， $SmProj_k$ 上代数循环的等价关系 $E_{\theta^{\mathbf{1}}_{-1}}$ (3.2.1)就是数值等价 [Sam60, 2.3]。

3.2.4. 等价关系的乘积 [Sai92, 1.3]. 采用（3.1）中的记号和条件。设 E, E' 是 $SmProj_k$ 上的代数循环的充分等价关系（3.2）。 E 和 E' 的乘积 $E * E'$是如下定义的充分等价关系： $\alpha \in CH^n_{E*E'}(X)$，当且仅当存在 $Y \in SmProj_k$ 和 $\beta_i \in CH^{n_i}_E(Y \times X)$、 $\gamma_i \in CH^{m_i}_{E'}(Y \times X)$、 $i = 1, \ldots, r$； $n = n_i + m_i - d_Y$，使得 $\alpha = \sum_i p_{X*}(\beta_i \cdot \gamma_i)$， [Sai92, 注1.6.1]。

令 $E = \text{alg}$表示$SmProj_k$ 上的代数循环之间由代数等价 [Sam60, 2.2]所定义的充分等价关系。于是，根据 [Sai92, 例1.9],alg^{*l}, $l \geq 2$是Samuel的 l-立方等价关系 [Sam60, 2.4]。

3.2.5. *H. Saito* 滤子 [Sai92, 例 1.8]. 采用 (3.1) 中的记号和条件。设 H 是定义在 $SmProj_k$ 上、取值于 [的 Weil 上同调理论 [Kle68, 1.2] ，并具有循环类映射 $\text{cl}_X: CH^n(X) \to H^{2n}(X)$， $n \geq 0$。我们稍微滥用一下记号，也用 H 表示由同调等价 [Kle68, 命题 1.2.3]给出的充分等价关系。也就是说， $CH^n_H(X) \subseteq CH^n(X)$ 定义为循环类映射 cl_X 的核。

我们考虑充分等价关系 (3.2.4) 的乘积 H^{*l}, $l \geq 1$。由此，我们得到肖群的一个递降滤过：

$$\ldots \subseteq CH^n_{H^{*l+1}}(X) \subseteq CH^n_{H^{*l}}(X) \subseteq \ldots \subseteq CH^n_H(X), \tag{3.2.6}$$

滤过 (3.2.6) 特别值得关注，因为它是 Bloch-Beilinson 滤过的一个自然候选 [Jan00, 定理 4.1]。

3.2.7. 正则同态。采用 (2.5.1) 的记号与条件。此外，我们假定基域 k 是代数闭的。设 $X \in SmProj_k$的维数为 d， $A \in SmProj_k$ 为一个阿贝尔簇，且 $1 \leq n \leq d$。群同态 ψ： $CH^n_{\mathrm{alg}}(X) \to A(k)$ 是正则 [Sam60，第 477], 页，如果对每一个 $Y \in SmProj_k$，$\Lambda \in CH^n(Y \times X)$， $y_0 \in Y(k)$；存在一个映射 $\psi_{\Lambda,\ y_0}$： $Y \to A$ 于 Sm_k 中，使得对 $y \in Y(k)$：$\psi_{\Lambda,\ y_0}(y) = \psi(\Lambda([y] - [y_0]))$ (3.1)。

令 alb_X： $CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \to \mathrm{Alb}(X)(k)$ 为阿尔巴内塞映射。由阿尔巴内塞映射的自然性可知，它是一个正则同态。

考虑一个正则同态 ψ: $CH^n_{\mathrm{alg}}(X) \to A(k)$，其中 A 是维数为 d_A 的阿贝尔簇。若存在 $\Lambda \in CH^{d+d_A-n}(X \times A)$ 和一个整数 $r \geq 1$，使得对每个 $\alpha \in CH^n_{\mathrm{alg}}(X)$，都有 $r\psi(\alpha) = \mathrm{alb}_A(\Lambda(\alpha)) \in A(k)$，(3.1)，则称 ψ 为由循环诱导 [Lie68，第 1194], 页。

4. The orthogonal filtration for the functor of points of an abelian variety

4.1. 采用 (2.5.1) 中的记号和条件。此外，我们假设基域 k 是代数闭的。令 $X \in SmProj_k$ 为维数 d 的阿贝尔簇， $x_0 \in X(k)$，且 f： $X \to A = \mathrm{Alb}(X)$ 是到阿尔巴内塞簇中的典范映射，使得 $f(x_0) = 0$。该映射由 (2.5.1) 中的一个态射分类：

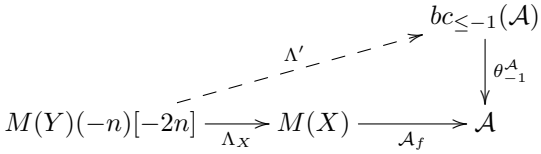
$$\mathcal{A}_f : M(X) \to \mathcal{A} \tag{4.1.1}$$

令 $\Lambda \in CH^{d+n}(Y \times X)$, $Y \in SmProj_k$ 维数为 d_Y, $d_Y \geq n \geq 0$。考虑Λ：$M(Y) \otimes M(X) \to \mathbf{1}(d+n)[2d+2n]$属于 DM_k，(3.1.2)。根据 Voe00，定理 4.3.7], [、BV08，命题 6.7.1 和 §6.7.3] ，对偶化 $M(X)$ [，我们得到 DM_k 中的以下映射：

$$\Lambda_X : M(Y)(-n)[-2n] \to M(X) \tag{4.1.2}$$

结合 (4.1.1)、(4.1.2) 以及正交滤过中的余单位 θ_{-1} (2.4.3)，我们得到 DM_k 中下图的实线箭头：

(4.1.3)



定理 4.1.4. 在(4.1)和(4.1.1)-(4.1.3)的记号与条件下，存在映射 Λ'： $M(Y)(-n)[-2n] \to bc_{\leq -1}(\mathcal{A})$ 属于 DM_k，使得(4.1.3)可交换，当且仅当满足以下条件：

4.1.5. 对于每个 $\gamma \in CH^{d_Y-n}(Y)$: $\mathrm{alb}_X(\Lambda(\gamma) - \deg(\Lambda(\gamma))[x_0]) = 0 \in \mathrm{Alb}(X)(k)$。

证明。 根据 [Pel17，5.3.2], 存在使 (4.1.3) 可交换的 Λ'，等价于下列复合在 DM_k (2.3) 中为零:

$$\begin{array}{ccccc} f_0(M(Y)(-n)[-2n]) & & & & \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_0} & \searrow^{0} & & & \\ M(Y)(-n)[-2n] & \xrightarrow[\Lambda_X]{} & M(X) & \xrightarrow[\mathcal{A}_f]{} & \mathcal{A} \end{array}$$

由 (4.2.12) 即得结论。 □

4.2. 沿用 (4.1.4) 中的记号和条件。我们将用 $\mathbf{hom}^{\mathrm{eff}}$ 表示 DM_k^{eff} 中的内部 Hom 函子。

4.2.1. 我们注意到，对于每个 $Z \in Sm_k$, $r \in Z$:

$$\mathrm{Hom}_{DM_k^{\mathrm{eff}}}(M(Z)[r], \mathbf{hom}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{1}(n)[2n], M(Y))) \cong CH^{d-n}(Y \times Z, r)$$

右侧的群是 Bloch高阶Chow群 [Blo86]。事实上，由伴随性以及结合 Poincaŕe 对偶性 [Voe00，定理 4.3.7]，[BV08，命题 6.7.1 和 §6.7.3] 与 [Voe02a]，即可得出这一结论。因此，我们得到，对于 $r < 0$: $\mathbf{h}_r(\mathbf{hom}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{1}(n)[2n], M(Y))) = 0 \in \mathbf{HI}_k$(2.5)。于是:

$$\mathbf{hom}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{1}(n)[2n], M(Y)) \in (DM_k^{\mathrm{eff}})_{\geq 0}. \tag{4.2.2}$$

4.2.3. 我们断言 $f_0(M(Y)(-n)[-2n]) \in (DM_{\text{有效}k})_{\geq 0}$(2.5)。事实上，结合[Voe10b，引理 5.9], [HK06，命题 1.1] 与 [Pel17，3.3.3(2)]，我们可推出:

$$f_0(M(Y)(-n)[-2n]) \cong f_n(M(Y))(-n)[-2n] \cong \mathbf{hom}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{1}(n)[2n], M(Y)),$$

因此，该断言由 (4.2.2) 得出。

由此，我们得到 (2.5) 中如下 distinguished三角:

$$\tau_{\geq 1}E \xrightarrow{t_1} f_0(M(Y)(-n)[-2n]) = E \cong \tau_{\geq 0}E \xrightarrow{\sigma_0} \mathbf{h}_0 E. \tag{4.2.4}$$

现在，回忆一下，$\mathcal{A}$是 X的阿尔巴内塞簇的点函子，因此，$\mathcal{A} \in \mathbf{HI}_k$(2.5)，从而我们得出 $\mathrm{Hom}^{DM_k^{\mathrm{eff}}}(\tau_{\geq 1}E, \mathcal{A}) = 0 = \mathrm{Hom}^{DM_k^{\mathrm{eff}}}(\tau_{\geq 1}E[1], \mathcal{A})$，(4.2.4)。

因此，存在唯一的映射 e，使得下图在 DM_k中交换 (4.1.3)、(4.2.4):

$$\begin{array}{ccccc} f_0(M(Y)(-n)[-2n]) = E & & \xrightarrow{\sigma_0} & & \mathbf{h}_0 E \\ \downarrow{\scriptstyle \epsilon_0} & & & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ M(Y)(-n)[-2n] & \xrightarrow[\Lambda_X]{} & M(X) & \xrightarrow[\mathcal{A}_f]{} & \mathcal{A} \end{array} \tag{4.2.5}$$

由此我们推得:

4.2.6. $\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X \circ \epsilon_0 = 0$ 当且仅当 $e = 0$。

此外，一方面，结合 Lieberman 引理 [Ful98, 命题 16.1.1]与 [Voe00, 命题 2.1.4、定理 3.2.6], ，我们得出 Λ_X (4.2.5) 诱导出如下阿贝尔群映射：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, M(Y)(-n)[-2n]) & \xrightarrow{\Lambda_{X*}} & \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, M(X)) \\ \wr|| & & \wr|| \\ CH^{d_Y - n}(Y) & & CH^d(X) \\ \gamma & \longmapsto & \Lambda(\gamma) \end{array} \tag{4.2.7}$$

另一方面，我们断言 $\mathcal{A}_f$ (4.2.5) 诱导出如下阿贝尔群映射 (3.2.7)、(4.1)：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, M(X)) & \xrightarrow{\mathcal{A}_{f*}} & \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, \mathcal{A}) \\ \wr|| & & \wr|| \\ CH^d(X) & & \mathrm{Alb}(X)(k) \\ \alpha & \longmapsto & \mathrm{alb}_X(\alpha - \deg(\alpha)[x_0]) \end{array} \tag{4.2.8}$$

事实上，根据构造， $\mathcal{A}_f \in$ 同态集$^{DM_k^{\mathrm{eff}}}(M(X)\ \mathcal{A}) \cong \Gamma(X,\ \mathcal{A})$ (2.5.1) 刻画了典范映射 $f\colon X \to \mathrm{Alb}(X)$，使得 $f(x_0) = 0$ (4.1)，这意味着 $\mathcal{A}_{f*}$ (4.2.8) 在 $CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \subseteq CH^d(X)$ 上的限制由阿尔巴内塞映射 $\mathrm{alb}_X : CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \to \mathrm{Alb}(X)(k)$ 给出，且 $\mathcal{A}_{f*}(\mathbb{Z}[x_0]) = 0$。于是，断言 (4.2.8) 可由分解 $CH^d(X) \cong CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \oplus \mathbb{Z}$, $\alpha \mapsto (\alpha - \deg(\alpha)[x_0],\ \deg(\alpha))$ 得出。

4.2.9. 因此，结合 (4.2.7) 和 (4.2.8)，我们得出复合映射 $\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X$ (4.2.5) 诱导出如下阿贝尔群之间的映射：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, M(Y)(-n)[-2n]) & \xrightarrow{(\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X)_*} & \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, \mathcal{A}) \\ \wr|| & & \wr|| \\ CH^{d_Y - n}(Y) & & \mathrm{Alb}(X)(k) \\ \gamma & \longmapsto & \mathrm{alb}_X(\Lambda(\gamma) - \deg(\Lambda(\gamma))[x_0]) \end{array} \tag{4.2.10}$$

注 4.2.11。 将 (4.2.5) 的底行与 (4.2.10) 结合，我们得到一个由循环诱导的正则同态 (3.2.7) 的动机表示。

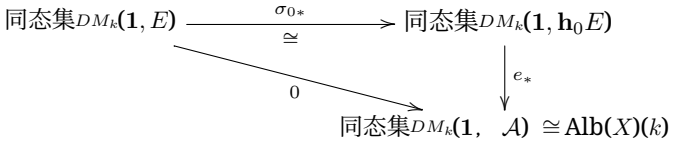
命题 4.2.12. 采用$(4.1.4)$、(4.2)和$(4.2.1)$-$(4.2.10)$中的记号和条件。那么 $\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X \circ \epsilon_0 = 0\,(4.2.5)$ 当且仅当诱导映射$(\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X)_* = 0(4.2.10)$。

证明。 $(\Rightarrow)$：由余单位 ϵ_0 的泛性质： $f_0 \to id$ [Pel17, 3.3.1], ，我们推得诱导映射

$$\epsilon_{0*} : \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, f_0(M(Y)(-n)[-2n])) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{DM_k}(\mathbf{1}, M(Y)(-n)[-2n])$$

是一个同构，因为 $\mathbf{1} \in DM_{\text{有效}k}$。因此，我们得出结论：$(\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X)_* = 0$(4.2.10)，因为 $\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X \circ \epsilon_0 = 0$。

(⇐)：由于 (4.2.5) 可交换，且 $(\mathcal{A}_f \circ \Lambda_X)_* = 0$ (4.2.10)，我们推得以下阿贝尔群之间的映射复合为零：



其中 $E = f_0(M(Y)(-n)[-2n])$ (4.2.5)。现在我们注意到 σ_{0*} 是一个同构，因为 (4.2.4) 是 DM_k^{eff} 中的一个 distinguished三角，且 Spec(k) 对 Nisnevich 拓扑而言是一个点 (2.5)。因此可得 $e_* = 0$；结合 [Voe00, 命题 3.1.9 和 3.2.3] 与 (2.5.2)，我们推得 $e = 0$ (4.2.5)。然后结论由 (4.2.6) 得出。□

4.3. 沿用 (4.1) 中的记号和条件。我们将用 $T(X) \subseteq CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$ 表示 X 的阿尔巴内塞核，即阿尔巴内塞映射 $\mathrm{alb}_X : CH^d_{\mathrm{alg}}(X) \to$Alb$(X)(k)$ 的核。

定理 4.3.1. 采用(4.1)和(4.1.1)-(4.1.3)中的记号和条件。此外，我们假设 $\Lambda \in CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(Y \times X)$ (3.2.4)。那么，存在一个映射Λ'：$M(Y)(-n)[-2n] \to bc_{\leq -1}(\mathcal{A})$ 属于 DM_k，使得(4.1.3) 交换。

证明. 由 (4.1.4)，只需证明 (4.1.5) 成立。考虑 $\gamma \in CH^{d_Y - n}(Y)$。由于 $\Lambda \in CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(Y \times X)$，我们得出 $\Lambda(\gamma) \in CH^d{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(X) \subseteq CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$ (3.2.6)，因此 deg$(\Lambda(\gamma)) = 0$。

因此，只需证明 $\Lambda(\gamma) \in T(X)$ (4.3)，即 X 的阿尔巴内塞核；这由 [Sam60, p. 479, Prop. 11] 得出，因为 $\Lambda(\gamma) \in CH^d{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(X)$。□

如果我们限定在 $k = \mathbb{C}$ 的情形，那么可以加强 (4.3.1)：

定理 4.3.2. 采用(4.1)和(4.1.1)-(4.1.3)中的记号和条件。此外，假设 $\Lambda \in CH^{d+n}_{H^{*2}}(Y \times X)$ (3.2.5)-(3.2.6) 且 $k = \mathbb{C}$。那么，存在映射 Λ'：$M(Y)(-n)[-2n] \to bc_{\leq -1}(\mathcal{A})$，取值于 DM_k，使得(4.1.3) 交换。

证明. 由 (4.1.4)，只需证明 (4.1.5) 成立。考虑 $\gamma \in CH^{d_Y - n}(Y)$。由于 $\Lambda \in CH^{d+n}_{H^{*2}}(Y \times X)$，我们得出 $\Lambda(\gamma) \in CH^d_{H^{*2}}(X) \subseteq CH^d_H(X)$ (3.2.6)。现在回忆一下，对于零循环，代数等价、同调等价和数值等价彼此一致，因此我们推得 deg$(\Lambda(\gamma)) = 0$，且 $\Lambda(\gamma) \in CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$。因此，只需证明 $\Lambda(\gamma) \in T(X)$ (4.3)，即 X 的阿尔巴内塞核；这由 [Sai92, 注 6.2] 得出，因为 $\Lambda(\gamma) \in CH^d_{H^{*2}}(X) \cap CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$。□

注记 4.3.3. (4.3.1) 中的条件 $\Lambda \in CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}^{*2}}(Y \times X)$ 在下述意义下是精确的：存在 $\Lambda \in CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}}(Y \times X)$，使得 (4.3.1) 不成立。具体而言，考虑 $\alpha \in CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$，使得 $\mathrm{alb}_X(\alpha) \in$ Alb$(X)(k)$ 为非挠元，且 $\beta \in CH^n(Y)$ 不数值等价于零，即存在$\gamma_0 \in CH^{d_Y - n}(Y)$ 使得 deg$(\beta \cdot \gamma_0) \neq 0$。我们断言，对外积 $\Lambda = \beta \otimes \alpha \in CH^{d+n}{}_{\mathrm{alg}}(Y \times X)$，(4.3.1) 不成立。

事实上，由投影公式：$\Lambda(\gamma_0) =$ deg$(\beta \cdot \gamma_0)\alpha$，因此，deg$(\Lambda(\gamma_0)) =deg(\beta \cdot \gamma_0) \cdot$deg$(\alpha) = 0$，因为 $\alpha \in CH^d_{\mathrm{alg}}(X)$。于是，$\mathrm{alb}_X(\Lambda(\gamma_0) -deg(\Lambda(\gamma_0))[x_0]) =\mathrm{alb}_X(\Lambda(\gamma_0)) =deg(\beta \cdot \gamma_0) \cdot \mathrm{alb}_X(\alpha)$，这是 Alb$(X)(k)$ 中的一个非零元素，这由

对 α 的选取可知。因此，条件 (4.1.5) 不成立，所以由 (4.1.4) 可知，(4.3.1) 也不成立。

References

[Ayo07] Joseph Ayoub, *Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. II*, 《高阶范畴与动机》（），六页（）。MR2438151[Ayo11] , *The n-motivic t-structures for n = 0 1 and 2*, 《高阶范畴与动机》，《Adv. Math.》（），第 – 号。MR[BBD82] A. A. Be˘ilinson、J. Bernstein 和 P. Deligne, *Faisceaux pervers*, 《奇异空间上的分析与拓扑》I（吕米尼，1981 1982, 5 171 751966），第 – 页。MR Bek [00] *Sheafifiable homotopy model categories*, Tibor Beke, 《模型范畴》，《Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.》129（2000），第3号，447–475。MR1780498（2001i:18015）[Blo86] Spencer Bloch, *Algebraic cycles and higher K-theory*, 《代数循环的高阶运算》，《Adv. in Math.》（），第 – 号。MR[BV08] Alexander Beilinson 和 Vadim Vologodsky, *A DG guide to Voevodsky's motives*, 《导出代数几何中的周期》，《Geom. Funct. Anal.》17（2008），第6号，1709–1787。MR2399083[Ful98] William Fulton, *Intersection theory*, 《交叉理论》，第二版，数学及其边界领域成果。第三辑。现代数学综述丛书 [《数学成果及相关领域》。第三辑。现代数学综述丛书], 第2卷，施普林格出版社，柏林，1998年。MR1644323（99d:14003）[GP22] Cesar Galindo 和 Pablo Pelaez, *On the convergence of the orthogonal spectral sequence*, 《稳定同伦范畴中的模型结构》，《同调、同伦及其应用》（），第 – 号。MR 4486247 [68] Gri Phillip A. Griffiths, *Periods of integrals on algebraic manifolds. II. Local study of the period mapping*, 《单值性定理》，《Amer. J. Math.》（），– 。MR[03] *Model categories and their localizations*, Hir Philip S. Hirschhorn, 《模型范畴中的局部化》，数学综述与专著丛书，第99卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2003年。MR1944041（2003j:18018）[HK06] Annette Huber 和 Bruno Kahn, *The slice filtration and mixed Tate motives*, 《混合动机的实现》，《Compos. Math.》 **142** 2006 4, 907 936 2249535（），第 – 号。MR Hov Mark Hovey, 《谱空间与稳定同伦范畴》，《J. Pure Appl. Algebra》165（2001），第1号，63–127。MR1860878（2002j:55006）[01] *Spectra and symmetric spectra in general model categories*, HP25] Ivan Hernandez 和 Pablo Pelaez, *Regular homomorphisms and mixed motives*, 《∞-范畴中的动机》，arXiv 电子预印本（2025年9月），arXiv:2509.15920，即将在《圣彼得堡数学杂志》发表，见2509.15920。[Jan00] Uwe Jannsen, 《代数循环的算术与几何》（班夫，AB, 1998 2000, 225 260 1744947），第 – 页。MR Kle S. L. [68] *Algebraic cycles and the Weil conjectures*, Kleiman, 《关于概形上同调的十篇讲义》，1968年，第359–386页。MR0292838（45 #1920）[Lie68] David I. Lieberman, *Higher Picard varieties*, 《关于代数簇的等价关系》，《Amer. J. Math.》90（1968），1165–1199。MR238857[MVW06] Carlo Mazza、Vladimir Voevodsky 和 Charles Weibel, *Lecture notes on motivic cohomology*, 《动机上同调理论》，克莱数学专著，第[卷，美国数学会，普罗维登斯，RI，2006年。MR2242284（2007e:14035）[Nee01] Amnon Neeman, *Triangulated categories*, 《三角范畴》，数学研究讲义丛书，第148卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，NJ，2001年。MR1812507（2001k:18010）[Nee96] *The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability*, 《三角范畴中的局部化》，《J. Amer. Math. Soc.》（），第 – 号。MR（c:）[Pel17] Pablo Pelaez, *Mixed motives and motivic birational covers*, 《稳定模型范畴中的局部化》，《J. Pure Appl. Algebra》221（2017），第7号，1699–1716。MR3614974[PR25] Pablo Pelaez 和 Araceli Reyes, *Incidence equivalence and the Bloch-Beilinson filtration*, 《动机上同调中的计算》（），见 https://arxiv.org/abs/2501.19147。[Sai92] Hiroshi Saito, *Generalization of Abel's theorem and some finiteness property of zero-cycles on surfaces*, 《动机范畴中的纯性》，《Compositio Math.》（），第 – 号。MR 1189891 [60] *Relations d'équivalence en géométrie algébrique*, Sam Pierre Samuel, 《代数几何中的同调》，《国际数学家大会论文集》1958，1960年，第470–487页。MR116010

[SS03] Michael Spieß 和 Tam

´ *On the Albanese map for smooth quasi-projective* as Szamuely，《动机上同调与阿贝尔簇》，《Math. Ann.》（），第 **325** 2003 17 1, 1 1957261 – 号。MR Sus Andrei Suslin，《代数循环与K理论》，《Ann. K-Theory》**2** 2，277 2017 302 3590347（），第 – 号。MR[SV00] Andrei Suslin 和 Vladimir Voevodsky， *Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients*，《代数循环的算术与几何》（班夫，AB，1998），2000年，第117–189页。MR1744945（2001g:14031）[Voe00] Vladimir Voevodsky， *Triangulated categories of motives over a field*，《循环、转移与动机同调理论》，2000年，第188–238页。MR1764202[Voe02a] *Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic* **7** 2002 351 355 1883180 2003 14021 ，《动机的同伦不变性》，《Int. Math. Res. Not.》（），– 。MR（ c: ）[Voe02b] ， *Open problems in the motivic stable homotopy theory. I*，《动机、对数多项式与霍奇理论，第一部分》（加利福尼亚州欧文，1998），2002年，第3–34页。MR1977582（2005e:14030）[Voe10a] ， *Cancellation theorem*，《动机的范畴与同伦不变性》，《Doc. Math.》**Extra volume: Andrei A. Suslin sixti- eth birthday** （2010），671–685。MR2804268（2012d:14035）[Voe10b] ， *Motives over simplicial schemes*，《动机与转移》，《J. K-Theory》**5** （2010），第1号，1–38。MR2600283[Wei52] Andr´e Weil， *On Picard varieties*，《代数几何中的黎曼猜想》，《Amer. J. Math.》**74** （1952），865–894。MR50330

Chebyshev Laboratory, St. Petersburg State University, 14th Line V. O., 29B, Saint Petersburg 199178 Russia*Email address*: pablo.pelaez@gmail.com