# 非凸集值优化的过程型拉格朗日乘子

Fernando García-Castaño* Miguel Ángel Melguizo-Padial†

2026年2月9日

arXiv:2602.06186v1 [math.OC] 5 Feb 2026

**摘要**

我们针对满足 Lipschitz 型正则条件的非凸集值优化问题，建立了一种拉格朗日乘子理论。不同于依赖连续线性泛函的经典方法，我们引入闭凸过程作为广义拉格朗日乘子；这类集值映射的图构成闭凸锥。该几何框架将凸分析中的基本分离原理推广到既不假设凸性、也不假设可微性的情形。

我们的主要结果在可验证的结构条件下证明了乘子过程的存在性：参考点处的利普希茨连续性、序锥存在有界基，以及确保最优值正常孤立的非退化假设。我们证明，每个这样的过程都保持全局最优性，即原问题中的非支配点（分别为极小点）在通过该过程对约束进行惩罚而得到的增广问题中，仍然是非支配点（分别为极小点）。

对于标量优化，我们建立了乘子过程与下半连续次线性函数之间的一一对应，从而在无需额外约束品性条件的情况下得到精确罚公式。一个说明性例子表明，序锥之核的非空性虽然是充分的，但并非必要假设，并且该性质在常见的巴拿赫空间中成立。

作为应用，我们说明该抽象框架如何自然地应用于集值向量均衡问题：其中均衡条件被嵌入为约束，而乘子过程则编码可容许比较方向。一个显式例子在具体的无限维情形中说明了这一构造。

我们的结果为非凸优化中的全局最优性条件提供了严谨的几何基础，补充了经典理论，并带来了新的结构性见解，或可为未来的算法发展提供参考。

**关键词：**拉格朗日乘子，集值优化，凸过程，非凸优化，利普希茨连续性，向量均衡，全局最优性**MSC 2020：**46N10, 90C26, 90C29, 90C33, 90C46, 90C48

*阿利坎特大学数学系，圣维森特-德尔拉斯佩奇公路 s/n，03690 圣维森特-德尔拉斯佩奇，阿利坎特，西班牙。电子邮箱：fernando.gc@ua.es

†阿利坎特大学数学系。电子邮箱：ma.mp@ua.es

# 1 引言

拉格朗日乘子的经典理论传统上分为两大框架：全局理论适用于带不等式约束的凸优化问题，局部理论适用于带等式约束和/或不等式约束的可微问题。尽管数学背景各不相同，这两种理论的基本原理实质上相同。在每种情况下，都需要存在一个连续线性泛函——它要么支撑可行集，要么与适当的水平集和约束边界相切；参见[16]。

当凸性或可微性假设不成立时，人们或许会认为，只要存在适当的连续线性泛函，经典理论仍然可以施行。然而，恰恰在无法找到此类泛函或此类泛函不存在的情形下，经典的拉格朗日乘子框架便会失效。这一局限自然引出了一个问题：我们能否通过以更一般的几何对象取代线性泛函，将拉格朗日乘子理论所依据的几何原理拓展到非凸和不可微情形?

本文建立了一种拉格朗日乘子理论，以闭凸过程取代连续线性泛函。这一新方法使我们能够处理缺乏凸性或可微性的问题，更重要的是，还能处理无法确定连续线性泛函的情形，从而补充并拓展经典理论。其关键见解在于，通过过程（即借助锥）逼近函数图像时，与使用超平面进行逼近相比，所需的技术条件更少。尽管基于过程的理论施加的结构限制较少，但它在以下意义上是完备的：即使对于非凸和不可微问题，只要满足可验证的几何条件，拉格朗日乘子总是存在。

## 1.1 研究动机与主要贡献

对于凸问题或可微问题，经典拉格朗日理论要求存在一个超平面支撑目标函数的图。相比之下，我们的框架采用闭凸过程——其图构成闭凸锥的集值映射——作为广义乘子。这一几何视角带来了若干关键优势。首先，基于过程的方法将适用范围扩展到涉及集值映射的优化问题，在利普希茨型正则条件下，无需目标函数或约束函数具有凸性或可微性。其次，我们将凸分析中的基本分离原理推广到非凸情形，为深入理解全局最优结构提供了严谨的理论基础，其作用与最优性条件在凸优化中的成熟作用相呼应。第三，我们给出了具体且可验证的条件——包括在某点的利普希茨连续性、序锥具有有界基以及非退化假设——以确保拉格朗日乘子过程的存在；这些条件在许多经典的有序巴拿赫空间中均成立。最后，我们展示了这一抽象框架如何自然地应用于集值向量均衡问题：在这类问题中，均衡条件被嵌入参数优化框架，所得乘子则编码了可容许

比较方向。

这一几何视角揭示了非凸问题的新结构性洞见，并奠定了数学基础，有望为未来算法方法的发展提供指引；这与经典凸最优性理论（例如，参见 [19, 15, 14]）数十年来对计算方法设计的影响相似（例如，参见 [17, 6, 18, 4, 5]）。

## 1.2 论文结构

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍赋范空间中关于锥、过程和集值映射的必要记号与预备结果。第3节提出参数化集值优化问题的一般拉格朗日乘子框架。我们将拉格朗日乘子定义为闭凸过程，并陈述发展本理论所依据的主要结构性假设（假设 1）。核心结果定理3.5证明，每个满足这些几何条件的过程都可充当拉格朗日乘子，并在增广问题中保持极小性或非支配性。我们将理论专门应用于标量情形（$Y = \mathbb{R}$），并建立乘子过程与下半连续次线性函数之间的一一对应关系（命题3.11和定理 3.13）。此外，我们还给出了本理论的单值版本（定理 3.14）。两个示例说明了相应序锥的核条件所起的作用及其适用范围。

第4 节旨在验证在利普希茨型正则性以及序锥的结构条件下的一般假设。主要结果定理4.9给出了可验证的条件——复合映射在原点处的利普希茨连续性、序锥存在有界基，以及一个非退化条件——这些条件保证可容许拉格朗日乘子族非空。我们构建了涉及锥扩张和分离论证的技术工具，最终得到定理4.15 （标量情形）和定理4.17（单值情形），证明在最小正则性假设下，通过精确罚和显式构造的乘子可以恢复最优值。

在第5节中，我们展示抽象理论如何应用于集合值向量均衡问题。这类问题已在文献中得到广泛研究；例如，参见专著 [15, 14] 及其中的参考文献。通过将均衡条件嵌入为约束，我们在基于过程的拉格朗日框架内重新表述向量均衡问题，并将由此得到的乘子过程解释为一种几何对象，用以编码可容许的比较方向和约束相互作用。中的一个显式无限维例子展示了乘子过程在这一均衡情形下的构造及其具体作用，从而以变分最优性的视角，为均衡条件提供统一的几何解释。

## 1.3 与先前工作的关系

过程在对偶理论中的应用源于 Rockafellar 关于共轭对偶和集值映射微积分的研究 [19]。Aubin 和 Frankowska 系统研究了将过程视为具有锥图的集值映射这一概念 [3], ，并建立了关于线性过程及其在变分分析中作用的全面理论。我们的

贡献通过在非凸集值优化中引入作为拉格朗日乘子的过程，拓展了这些思想，从而提供了一种真正推广的经典乘子理论，而不依赖于凸性或可微性。

在凸集值优化的背景下，作者此前利用尖过程构建了一个拉格朗日对偶框架 [12]。本研究完全去除了凸性假设，并引入了基于锥扩张和点处利普希茨正则性的新几何分离论证，这对于处理非凸情形至关重要。

## 2 预备知识与记号

设 $Y$和 $Z$为赋范空间，其拓扑对偶分别为 $Y^*$和 $Z^*$。对于 $A \subset Y$，我们分别用 cl($A$)、int($A$)、core($A$)、bd($A$)、 $A^c$、co($A$) 和 cone($A$) 表示 $A$的闭包、内部、核、边界、补集、凸包和锥包；在上下文明确时，可以省略括号。我们用 $\|\cdot\|$ 表示 $Y$上的范数，用 $\|\cdot\|_*$ 表示 $Y^*$上的对偶范数，并用 $0_Y$ 表示 $Y$的原点。设 $B_Y := \{y \in Y\colon \|y\| \le 1\}$ 和 $B_Y^\circ := \{y \in Y\colon \|y\| < 1\}$ 分别为闭单位球和开单位球，且 $S_Y := \{y \in Y\colon \|y\| = 1\}$ 为单位球面。对于 $y \in Y$和$r > 0$，令 $B(y, r) := \{y' \in Y\colon \|y' - y\| \le r\}$和 $B^\circ(y, r) := \{y' \in Y\colon \|y' - y\| < r\}$。回顾一下，集合 $A \subset Y$的核定义为

$$\operatorname{core}(A) := \{\, a \in A : \forall x \in Y,\ \exists \delta > 0 \text{ such that } a + [0, \delta]x \subset A \,\}.$$

我们以通常的方式考虑 $Y$中两个子集的和，并约定 $A + \varnothing = \varnothing + A = \varnothing$ 对每个子集 $A \subset Y$均成立。

若非空子集 $K \subset Y$满足：对所有 $\alpha \in \mathbb{R}_+$均有 $\alpha K \subset K$，则称其为<style id='2'>锥，其中 $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集。若锥 $K \subset Y$满足 $\{0_Y\} \subsetneq K \subsetneq Y$，则称其为<style id='8'>非平凡。除非另有说明，本文中的所有锥均假设为非平凡锥。若锥 $K \subset Y$满足 $K \cap (-K) = \{0_Y\}$，则称其为<style id='12'>尖的；若满足 int($K$) $\neq \varnothing$，则称其为<style id='17'>实心。

若凸锥 $K \subset Y$的非空凸子集 $B$ 满足 $0_Y \notin$ cl($B$)，并且对每个 $y \in K \setminus \{0_Y\}$ 都存在唯一的 $\lambda_y > 0$ 和 $b_y \in B$ 使得 $y = \lambda_y b_y$，则称其为 $K$ 的<style id='3'>基。

给定一个锥 $K \subset Y$，其对偶锥 定义为

$$K^* := \{f \in Y^*\colon f(y) \ge 0 \text{ for all } y \in K\},$$

而 $K^*$ 的 拟相对内部定义为

$$K^\# := \{f \in Y^*\colon f(y) > 0 \text{ for all } y \in K \setminus \{0_Y\}\}.$$

已知，凸锥 $C \subset Y$有基当且仅当 $C^\# \neq \varnothing$，而后者蕴含 $C$是尖的。特别地，对于每个 $f \in C^\#$和 $\lambda > 0$，集合 $B := \{x \in C\colon f(x) = \lambda\}$是 $C$ 的一个基（参见例如 [2, 定理 1.47]）。

若存在 $K$ 的一个基 $B$，使得 $B$是 $Y$的有界子集，则称凸锥 $K$ 具有有界基。已知， $K$ 具有有界基当且仅当 $0_Y$ 是 $K$ 的凹陷点（参见 [8, 9, 11]，其中有关于可凹陷性和优化的更多信息）。

A ma映射 $p\colon Y \to \mathbb{R}$ 称为次线性，如果它是正齐次且次可加的 e,

也就是说，对于所有 $x$，$y \in Y$和 $\lambda \geq 0$,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

定义在拓扑空间 $Y$ 上的映射 $f : Y \to \mathbb{R}$，若满足以下条件，则称其在点 $y_0 \in Y$ 处是下半连续的:

$$\liminf_{y \to y_0} f(y) \geq f(y_0),$$

若映射在 $Y$的每个点处都下半连续，则称其在 $Y$ 上是下半连续的。

给定集值映射 $F$: $Z \rightrightarrows Y$，我们将 $F$ 与其图等同，其定义为

$$\mathrm{Gph}(F) := \{(z, y) \in Z \times Y : y \in F(z)\}.$$

$F$的定义域 定义为 $\mathrm{Dom}(F) := \{z \in Z : F(z) \neq \varnothing\}$，而 $F$的像 定义为 $\mathrm{Im}(F) := \bigcup_{z \in \mathrm{Dom}(F)} F(z)$。对于任意集合 $A \subset \mathrm{Dom}(F)$，我们将 $A$在 $F$下的像记为$F(A) := \bigcup_{a \in A} F(a)$。

若集值映射 $\Delta : Z \rightrightarrows Y$的图 $\mathrm{Graph}(\Delta)$ 是一个锥，则称其为过程。若过程 $\Delta$ 的图 $\mathrm{Graph}(\Delta)$ 是凸的（分别为闭的、尖的），则称该过程是凸的（分别为闭的、尖的）；若 $\mathrm{Dom}(\Delta) = Z$，则称其为正常；若 $Y = \mathbb{R}$，则称其为实值；若存在一个锥 $K \subset Y$，使得对于每个 $z \in \mathrm{Dom}(\Delta)$，都有 $\Delta(z) = K$，则称其为常值。我们用 $P(Z, Y)$ 表示从 $Z$到 $Y$的所有正常闭凸过程 $\Delta$ 构成的集合。根据 [3, 定义 2.1.3], ，过程 $\Delta \in P(Z, Y)$ 的范数等于

$$\|\Delta\| = \sup_{z \in Z} \inf_{y \in \Delta(z)} \frac{\|y\|}{\|z\|} = \sup_{z \in Z} \frac{d(0_Y, \Delta(z))}{\|z\|} = \sup_{z \in B_Z} \inf_{y \in \Delta(z)} \|y\| = \sup_{z \in S_Z} d(0_Y, \Delta(z)). \tag{1}$$

设 $Y_+ \subset Y$ 为一个凸锥。对于任意的 $y_1, y_2 \in Y$，当且仅当$y_2 - y_1 \in Y_+$时，我们记作 $y_1 \leq y_2$ 。于是， $\leq$ 在 $Y$上定义了一个自反且传递的关系（即预序），而锥$Y_+$ 称为 $Y$上的序锥。若点 $y_0 \in Y$ 不被集合$A \subset Y$支配，记作 $y_0 \in \mathrm{ND}(A \mid Y_+)$，则 $A \cap (y_0 - Y_+) \subset y_0 + Y_+$。若点 $y_0 \in Y$是集合 $A \subset Y$的极小点，记作 $y_0 \in \mathrm{Min}(A \mid Y_+)$，则 $y_0 \in \mathrm{ND}(A \mid Y_+)$ 且 $y_0 \in A$。当序锥 $Y_+$ 从上下文中显而易见时，我们分别简记为 $y_0 \in \mathrm{ND}(A)$ 和 $y_0 \in \mathrm{Min}(A)$。

如果 $Y_+$ 是尖的，那么关系 $\leq$ 成为一种序，并且 $y_0 \in \mathrm{Min}(A)$ 当且仅当$A \cap (y_0 - Y_+) = \{y_0\}$。注意，在带有通常序的实数轴上，极小点会成为最小值，而属于某个集合闭包的任意非支配点都会成为该集合的下确界。

设 $K \subset Y$ 是一个锥。如果对于所有满足$y_1 \in y_2 + K$（分别地， $y_1 \in y_2 + (K \setminus \{0_Y\})$）的 $y_1, y_2 \in Y$，都有 $p(y_1) \geq p(y_2)$（分别地， $p(y_1) > p(y_2)$），则称泛函 $p : Y \to \mathbb{R}$ 是 $K$-单调的（分别地，严格 $K$-单调的）。

## 3 优化问题与一般拉格朗日对偶框架

本节介绍所研究的参数化集值优化问题，并构建主要的理论框架。我们将拉格朗日乘子定义为一个闭

凸过程，并陈述使我们的理论得以成立的关键几何假设（假设 1），并证明基本乘子定理（定理 3.5）。随后，我们将这些结果专门应用于标量情形，明确建立其与次线性惩罚函数之间的联系。

下文中，我们考虑三个赋范空间 $X$、$Y$ 和 $Z$。空间 $Y$ 配备了一个非平凡序锥 $Y_+ \subset Y$。我们关注以下参数化集值优化问题族：

$$\text{Minimize } F(x) \quad \text{subject to } x \in \Omega,\ z \in G(x), \quad (P(z)),\ z \in U,$$

其中，$F : \Omega \rightrightarrows Y$ 和 $G : \Omega \rightrightarrows Z$ 是集值映射，$U \subset Z$ 表示原点 $0_Z$ 的一个开邻域。我们定义集值映射

$$V : U \rightrightarrows Y, \quad V(z) := F \circ G^{-1}(z) = F(\{x \in \Omega : z \in G(x)\}) = \bigcup_{\substack{x \in \Omega \\ z \in G(x)}} F(x).$$

不难证明等式

$$\text{Gph(V)} = \bigcup_{\substack{z \in U \\ x \in \Omega \cap G^{-1}(z)}} (G(x) \times F(x)),$$

其中我们采用以下约定

$$\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing \times \varnothing = \varnothing, \quad \text{for every set } A.$$

我们始终假设

$$V(z) \neq \varnothing \quad \text{for every } z \in U, \tag{2}$$

因此，$V$ 的定义域与 $U$ 一致。

**注3.1.** 该规划问题

$$\text{Minimize } F(x) \quad \text{subject to } x \in \Omega,\ G(x) \cap (z - Z_+) \neq \varnothing, \quad (P'(z)),\ z \in U$$

其中 $Z_+ \subset Z$ 是一个非平凡序锥，是文献中常见的标准表述；例如，在我们先前的工作 [12] 中，我们在凸性假设下研究了此类问题的拉格朗日对偶理论。然而，在本研究中，不要求凸性。

此外，通过用集值映射 $G + Z_+$替换 $G$，可以将 $(P'(z))$ 表示为 $(P(z))$ 的形式，其中 $G + Z_+$定义为 $(G + Z_+)(x) := G(x) + Z_+$。事实上，$G(x) \cap (z - Z_+) \neq \varnothing$ 当且仅当$z \in G(x) + Z_+$。

最后，虽然（$P'$（$z$））明确依赖于 $Z$的序锥 $Z_+$，但表述（$P$（$z$））并不要求 $Z$ 是有序空间。这带来了概念上的优势，因为我们的框架能够处理一般赋范空间中的集值约束，而这些空间不必赋有序结构。

现在，我们将上述非支配点和极小点的概念具体化到向量优化问题（$P$（$z$））的情形中。在此背景下，相关集合是值集 $V$（$z$），我们引入以下术语。

**定义 3.2.** 令 $z \in U \subset Z$，并考虑相应的规划问题 $(P(z))$。若点 $y_z \in Y$，则称其为

(i) $(P(z))$ 的非支配点，记作 $y_z \in \mathrm{ND}(P(z))$，若 $y_z$ 不被集合 $V(z)$ 中的点支配；(ii) $(P(z))$ 的极小点，记作 $y_z \in \mathrm{Min}(P(z))$，若其不被支配且属于 $V(z)$。

与极小 点不同，非支配点不一定能在可行解处取得 .

我们方法的关键步骤是将拉格朗日乘子的概念从经典线性情形推广到闭凸过程框架。这使我们能够刻画这里所考虑的非凸背景下的对偶性质。下面的定义将形式化说明在我们的设定中拉格朗日乘子的含义。

**定义 3.3.** 令 $y_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$。若一个正常闭凸过程 $\Delta\colon Z \rightrightarrows Y$ 是 $\mathrm{ND}(P(0_Z))$ 在 $y_0$ 处的拉格朗日乘子，则 $y_0$ 是该规划问题的非支配点

$$\mathrm{Min}\ \ F(x) + \Delta(G(x))\ \ \text{such that}\ \ x \in \Omega. \qquad (P[\Delta])$$

以下假设为我们的框架提供了发展拉格朗日理论所需的结构条件，因此发挥着核心作用。

**假设1.** 给定规划问题族 $(P(z))$，其中 $z \in U \subset Z$，且 $y_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$，假设存在过程 $\Delta \in P(Z, Y)$，使得

(a) 核$(\mathrm{Gph}(\Delta)) \neq \varnothing$。

(b) $Y_+ \subseteq \Delta(0_Z)$ 和 $(-Y_+) \cap \Delta(0_Z) \subseteq Y_+$。

(c) $\mathrm{Gph}(-\Delta) \cap [\mathrm{Gph}(V) - (0, y_0)] \subseteq \{0_{Z\times Y}\}$。

从几何上看，条件(a)要求过程 $\Delta$ 的图足够丰富，即具有非空的代数内点。这可以防止 $\Delta$ 过于“单薄”，并确保其拥有足够多的方向来发挥乘子的作用。条件(b)要求 $\Delta$ 与序锥 $Y_+$相容：$0_Z$ 经 $\Delta$ 映射后的像必须包含所有非负方向，而它与反向锥的交集则仅限于已属于 $Y_+$的方向。最后，条件(c)体现了 $-\Delta$ 的图与平移了$(0,\ y_0)$的 $V$ 的图之间的严格分离性质。事实上，$-\Delta$ 的图与 $V$的图经$(0,\ y_0)$平移后所得的集合完全分离，至多只在原点处相交。换言之，$V$ 经过 $y_0$ 的非平凡方向无法穿入 $-\Delta$的图。这种几何分离确保 $-\Delta$ 发挥真正的支撑结构作用，在点 $y_0$ 处界定与 $V$ 相关的可行域，并防止除平凡交集以外的任何重叠，直至

原点。这些要求共同构成了下文所发展的拉格朗日框架的几何基础。

为使论述更加简洁，并强调过程所发挥的核心作用$\Delta$ 满足假设1，将它们汇集为一个集合会很方便。

**定义3.4**。 我们用 $\Gamma_{y_0}$ 表示满足假设 $\Delta \in P(Z,\ Y)$ 中条件$(a)$–$(c)$的所有过程的集合。1。等价地，

$$\Gamma_{y_0} := \{\Delta \in P(Z,Y) \mid \Delta \text{ verifies (a)–(c) in Assumption 1}\}.$$

下一个结果确立了集合 $\Gamma_{y_0}$ 在我们的拉格朗日对偶框架中的基础作用。它在假设 1 的抽象条件与对偶优化问题 $(P[\Delta])$之间建立了具体联系。特别是，该定理保证，原问题中的 $y_0$ 极小性或非支配性在相应的对偶构造下得以保持。

**定理 3.5**。 令 $y_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$ 并假设 $\Gamma_{y_0} \neq \varnothing$。那么，每个 $\Delta \in \Gamma_{y_0}$ 都是 $(P(0_Z))$ 在 $y_0$处的拉格朗日乘子；也就是说， $y_0$ 是该规划问题的非支配点

$$Minimize\ F(x) + \Delta(G(x)) \quad subject\ to\ x \in \Omega. \tag{$P[\Delta]$}$$

此外，若 $y_0$ 是$(P(0_Z))$ 的极小点（即，若对某个可行解 $x_0$，有 $y_0 \in F(x_0)$），那么 $y_0$ 也是$(P[\Delta])$ 的极小点（在 $x_0$处取得），并且相容条件

$$\Delta(G(x_0)) \cap (-Y_+) \subseteq Y_+ \tag{3}$$

成立。

**注3.6**。 在上述定理的构造中，凸过程 $\Delta$充当可行点与改进方向之间的分离工具。从这个意义上说， $\Delta$ 发挥着与经典标量凸情形中的连续线性泛函相同的结构性作用，通过分离原理来表达可行性和最优性；例如，参见 [16, 第8.4节，定理 1]。

为了证明定理 3.5，我们将借助以下分离结果。该结果结合了局部凸空间中凸锥的拓扑特性和代数特性，证明存在一个泛函，能够将锥内元素与锥外元素严格分离。这一工具对于构造拉格朗日乘子至关重要。

**定理 3.7.** 设 $Y$ 为一个局部凸空间，且 $K \subset Y$ 为一个闭凸锥，其核$(K) \neq \varnothing$。那么存在一个 $K$-单调次线性泛函 $p : Y \to \mathbb{R}$，使得

$$p(x) \leq 0 < p(y), \quad for\ all\ x \in -K\ and\ y \notin -K.$$

证明。 我们用 $\tau$ 表示 $Y$上的原局部凸拓扑，用 $\tau_c$ 表示 $Y$上的凸核拓扑，即由定义在 $Y$上的所有半范数组成的族所生成的拓扑。于是， $\tau_c$ 是 $Y$上的最强局部凸拓扑，因此锥 $K$ 是 $\tau_c$-闭的，而集合 $Y \setminus(-K)$ 是 $\tau_c$-开的（关于该主题的全面研究，请读者参阅 [15, 第 6.3] 节

拓扑 $\tau_c$）。因此，由 [15, 命题 6.3.1(iii)], 可知，$\mathrm{core}(K) = \mathrm{int}_{\tau_c}(K)$。现在将 [13, 推论 2.1] 应用于集合 $A := Y \setminus (-K)$ 和锥 $K$，便可得到一个 $\tau_c$-连续次线性泛函 $p : Y \to \mathbb{R}$，它严格地 $\mathrm{int}_{\tau_c}(K)$-单调，并且满足

$$p(x) \leq 0 < p(y), \quad \text{for all } x \in -K \text{ and } y \notin -K.$$

最后，应用 [15,引理 2.4], ，我们得出 $p$ 是 $K$-单调的。 □

定理 3.5 的证明。 首先假设 $y_0 = 0_Y$。然后，我们假设 $0_Y \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$，这等价于

$$V(0_Z) \cap (-Y_+) \subset Y_+,$$

并固定某个 $\Delta \in \Gamma_{y_0}$。我们旨在证明

$$\left( \bigcup_{x \in \Omega} (F(x) + \Delta(G(x))) \right) \cap (-Y_+) \subset Y_+. \tag{4}$$

任取 $x \in \Omega$，其中 $z \in G(x)$ 且 $y_1 \in F(x)$， $y_2 \in \Delta(z)$。定义 $y := y_1 + y_2$。那么，$y \in V(z) + \Delta(z)$。注意到

$$(z, y_2) \in \mathrm{Gph}(\Delta) \Leftrightarrow (z, -y_2) \in \mathrm{Gph}(-\Delta) \Leftrightarrow (-z, y_2) \in -\mathrm{Gph}(-\Delta).$$

令 $K := -$图$(-\Delta)$。根据假设 1， $-K =$ 图$(-\Delta)$ 是一个具有非空核的闭凸锥， 图$(V) \setminus \{0_{Z\times Y}\} \subset (Z \times Y) \setminus$ 图$(-\Delta)$，且后一个集合是开集。于是，将定理 3.7应用于 $K$ 可确保存在一个 $K$-单调次线性泛函 $p : Z \times Y \to \mathbb{R}$ 使得:

$$p(z, y) > 0 \quad \text{for all } (z, y) \in \mathrm{Gph}(V) \setminus \{0_{Z\times Y}\}, \tag{5}$$

and

$$p(z', y') \leq 0 \quad \text{for all } (z', y') \in \mathrm{Gph}(-\Delta). \tag{6}$$

现在考虑两种情况:

**情况 1:** $(z, y_1) \neq 0_{Z\times Y}$。由于 $(-z, y_2) \in K$ 且 $p$ 在 $K$上是单调的，因此得到

$$p(0_Z, y_1 + y_2) = p\big((z, y_1) + (-z, y_2)\big) \geq p(z, y_1) > 0,$$

其中，最后一个不等式由 (5) 得出。因此，$(0_Z, y_1 + y_2) \notin$ 图$(-\Delta)$，这意味着 $y = y_1 + y_2 \notin -\Delta(0_Z)$。由假设 1 (b) 的第一个包含关系可得 $y \notin -Y_+$，即

$$y \notin \left( \bigcup_{x \in \Omega} (F(x) + \Delta(G(x))) \right) \cap (-Y_+).$$

**情形 2:** 若 $(z, y_1) = 0_{Z\times Y}$，则 $z = 0_Z$ 且 $y_1 = 0_Y$，因此 $y = y_2 \in \Delta(0_Z)$。若

$$y \in \left( \bigcup_{x \in \Omega} (F(x) + \Delta(G(x))) \right) \cap (-Y_+),$$

则假设 1 (b) 的第二个包含关系蕴含 $y \in Y_+$。至此，(4) 的证明完成。

为证明该陈述的最后一部分，假设存在 $x_0 \in \Omega$，使得 $0_Y \in F(x_0)$ 且 $0_Z \in G(x_0)$。我们断言，$0_Y \in F(x_0) + \Delta(G(x_0))$。事实上，由于 $(0_Z,\ 0_Y) \in$图$(\Delta)$，我们有 $0_Y \in \Delta(0_Z)$。然后，由于 $0_Z \in G(x_0)$，可得 $0_Y \in \Delta(G(x_0))$，从而 $0_Y \in F(x_0) + \Delta(G(x_0))$。

最后，我们证明包含关系 (3)。取 $u \in \Delta(G(x_0)) \cap(-Y_+)$。由于 $0_Y$是 $(P[\Delta])$ 在 $x_0$ 处取得的极小点，我们有 $0_Y \in F(x_0)$，并且 $(F(x_0) + \Delta(G(x_0))) \cap(-Y_+) \subset Y_+$。因此，显然有 $u \in Y_+$。

最后，考虑情形 $y_0 \neq 0_Y$。于是，我们有：

$$
\begin{aligned}
y_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z)) \ &\Leftrightarrow\ V(0_Z) \cap (y_0 - Y_+) \subset y_0 + Y_+ \ \Leftrightarrow\ (V(0_Z) - y_0) \cap (-Y_+) \subset Y_+ \\
&\Leftrightarrow \left( \bigcup_{\substack{x\in\Omega \\ 0_Z \in G(x)}} (F(x) - y_0) \right) \cap (-Y_+) \subset Y_+ \\
&\overset{(*)}{\Rightarrow} \left( \bigcup_{x\in\Omega} (F(x) - y_0 + \Delta(G(x))) \right) \cap (-Y_+) \subset Y_+ \\
&\Leftrightarrow \left( \bigcup_{x\in\Omega} (F(x) + \Delta(G(x))) \right) \cap (y_0 - Y_+) \subset y_0 + Y_+ \\
&\Rightarrow y_0 \text{ is a nondominated point of } (P[\Delta]),
\end{aligned}
$$

其中，蕴含关系 $(*)$ 可由情形 $y_0 = 0_Y$ 的证明推出，只需将 $F(x)$ 替换为 $F(x)-y_0$。对于该命题的最后一部分，假设对于某个可行解 $x_0$，有 $y_0 \in F(x_0)$。那么，$0_Y \in F(x_0) - y_0$，根据情形 $y_0 = 0_Y$ 的证明，我们得出 $0_Y$ 是该问题的极小点

$$
\text{Minimize } F(x) - y_0 + \Delta(G(x)) \text{ subject to } x \in \Omega,
$$

这意味着 $y_0$ 是$(P[\Delta])$的极小点。将情形 $y_0 = 0_Y$ 下对 (3) 的证明稍作调整，即可得出一般情形下的结论。 □

我们给出两个例子。第一个例子是在有限维空间中的，它说明了定理3.5的结论。第二个例子设在空间 $\ell^2$中，表明即使假设3.5的条件(a)不成立，定理1 的结论仍可能成立。因此，在本文建立的框架下，该条件是拉格朗日乘子过程存在的充分条件，但不是必要条件。

**例3.8**。设 $X = Y = \mathbb{R}^2$ 和 $Z = \mathbb{R}$，其序锥为 $Y_+ = \mathbb{R}^2_+$。考虑可行集

$$
\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_2 \geq 0\},
$$

并定义映射

$$F(x_1,x_2) := \{(x_1^2+x_2^2,\ x_2^2+x_1x_2)\}, \qquad G(x_1,x_2) := \{x_1\}.$$

对于 $z=0$，有

$$G^{-1}(0) = \{(0,x_2) : 0 \le x_2 \le 1\}.$$

点 $x_0=(0,0)$ 满足 $F(x_0)=\{0_Y\}$，而对所有 $x \in G^{-1}(0) \setminus \{x_0\}$，有 $F(x) \subset Y_+ \setminus \{0_Y\}$。因此 $(0,0)$ 是 $(P(0))$ 的一个极小值。

定义过程 $\Delta : Z \rightrightarrows Y$ 为

$$\Delta(z) := \{y \in \mathbb{R}^2 :\ y_1 \ge |z|,\ y_2 \ge |z|\}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

则 $\Delta \in P(Z,Y)$ 且核(图$(\Delta)$) $\neq \varnothing$。此外，

$$F(x_0) + \Delta(G(x_0)) = Y_+,$$

而对每个 $x \in \Omega \setminus \{x_0\}$，$(0,0) \notin F(x) + \Delta(G(x))$。因此，$x_0$ 也是惩罚问题 $(P[\Delta])$ 的一个极小解。

**例3.9.** 设 $X=Y=Z:=\ell^2$，由正锥定序

$$Y_+ := \{y \in \ell^2 : y_i \ge 0\ \forall i \in \mathbb{N}\},$$

其中核$(Y_+)=\varnothing$。令

$$\Omega := \{x \in \ell^2 : \|x\|_{\ell^2} \le 1\},$$

并定义

$$F(x) := \{(x_i^2)_{i\in\mathbb{N}}\} + Y_+, \qquad G(x) := \{(x_i^3)_{i\in\mathbb{N}}\}.$$

固定 $z=0_{\ell^2}$。由于

$$G^{-1}(0_{\ell^2}) = \{x \in \Omega : x_i^3 = 0\ \forall i\} = \{0_{\ell^2}\},$$

我们得到

$$F \circ G^{-1}(0_{\ell^2}) = F(0_{\ell^2}) = Y_+,$$

因此 $0_{\ell^2}$ 是参数问题（$P(0)$）的极小解。

定义乘子映射 $\Delta : Z \rightrightarrows Y$ 为

$$\Delta(z) := \{y \in \ell^2 : y_i \ge \|z\|_{\ell^2}\ \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

其图

$$\mathrm{Gph}(\Delta) = \{(z,y) \in \ell^2 \times \ell^2 : y_i \ge \|z\|_{\ell^2}\ \forall i\}$$

是一个闭凸锥，因为 $\ell^2$ 上的范数连续、凸且正齐次。因此，$\Delta$ 是一个凸过程。

对于任意 $x \in \Omega$，利用对所有 $z \in \ell^2$均成立的 $\Delta(z) \subset Y_+$，我们有

$$F(x) + \Delta(G(x)) = \{(x_i^2)_{i\in\mathbb{N}}\} + Y_+.$$

特别是，

$$F(0_{\ell^2}) + \Delta(G(0_{\ell^2})) = Y_+.$$

若 $x \neq 0_{\ell^2}$，则 $(x_i^2)_{i\in\mathbb{N}} \in Y_+ \setminus \{0\}$，因此

$$(F(x) + \Delta(G(x))) \cap (-Y_+) \subset \{0_{\ell^2}\},$$

这表明惩罚问题以 $0_{\ell^2}$ 为极小解。

最后，由于对所有 $z \in \ell^2$， $\Delta(z) \subset Y_+$，我们有

$$\operatorname{core}(\Delta(z)) = \varnothing \quad \text{and hence} \quad \operatorname{core}(\operatorname{Gph}(\Delta)) = \varnothing.$$

因此，定理 3.5 的结论在这一无限维情形下仍然成立，尽管内部性条件不成立，精确罚仍然成立。

在本节余下部分，我们聚焦于特殊情形 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$。在这种情形下，实数轴的结构使得可以用次线性函数重新表述假设 1 ，从而得到一个简洁得多的表达式。这里得到的结果自然补充了经典的凸泛函全局优化定理，例如 [16, 第 7, 8]章中的结果。

接下来，我们证明 $\Gamma_{y_0} \subset P(Z, \mathbb{R})$中的每个元素——与我们的拉格朗日框架相关——都可以与一个下半连续次线性函数对应，从而给出更透明的对偶表示。在此背景下，假设1中的三个条件可归结为一个条件——类似于条件(c)——并用这些次线性函数来表述。相应的族记为 $\mathcal{S}_{r_0}$ ，定义如下。

**定义 3.10.** 假设 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$，且令 $r_0 \in \mathbb{R}$。我们用 $\mathcal{S}_{r_0}$ 表示满足下述条件的所有下半连续次线性函数 $\varphi\colon Z \to \mathbb{R}$ 组成的集合：对每个 $z \in Z \setminus \{0_Z\}$，

$$-\varphi(z) < r - r_0 \quad \text{for all } r \in F(G^{-1}(z)). \tag{7}$$

等价地，

$$\mathcal{S}_{r_0} := \Big\{ \varphi : Z \to \mathbb{R} \;\Big|\; \begin{array}{l} \varphi \text{ is sublinear and lower semicontinuous,} \\ \operatorname{dom}(\varphi) = Z, \\ \text{and } \varphi \text{ satisfies (7) for all } z \in Z \setminus \{0_Z\} \end{array} \Big\}.$$

现在，我们建立 $\mathcal{S}_{r_0}$ 与 $\Gamma_{r_0}$之间的一一对应关系，说明满足假设1 的过程也可以等价地用次线性函数来描述。

**命题 ion 3.11.** 假设 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$。考虑以下规划问题族 $(P(z$ $))$

其中 $z \in U \subset Z$，并令 $r_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$。考虑映射

$$\Upsilon : \mathcal{S}_{r_0} \longrightarrow \Gamma_{r_0},$$

它将每个次线性函数 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$ 对应到过程 $\Upsilon(\varphi) \in P(Z, \mathbb{R})$，其定义为

$$\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)) := \mathrm{epi}(\varphi). \tag{8}$$

于是，以下结论成立。

*(i)* 映射 $\Upsilon$ 良定义；也就是说，对于每个 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$，都有 $\Upsilon(\varphi) \in \Gamma_{r_0}$。

*(ii)* 映射 $\Upsilon$是双射。

*(iii)* 若 $\|\Upsilon(\varphi)\| < +\infty$ （例如，当 $Z$ 是巴拿赫空间时），则 $\mathrm{int}(\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi))) \neq \varnothing$。

证明。(i) 令 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$。我们将通过验证过程 $\Upsilon(\varphi)$ 满足假设1中的条件(a)–(c)，证明它属于 $\Gamma_{r_0}$。由于 $\mathrm{dom}(\varphi) = Z$，显然 $\mathrm{dom}(\Upsilon(\varphi)) = Z$。一方面，命题2.3] 指出，次线性泛函 $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ 下半连续，当且仅当相应的过程 $\Upsilon(\varphi)$具有闭图。回顾一下，当对每个 $x \in \mathrm{dom}\,\Delta$， $\Delta(x)$ 都是闭集时，称过程 $\Delta$取闭值。注意，具有闭图的过程必然取闭值，因为每个纤维 $\{x\} \times \Delta(x)$ 都是 $\Delta$ 的闭图与闭集 $\{x\} \times \mathbb{R}$的交集。另一方面，由于 $\varphi$ 是次线性的，它是凸的，因此根据命题2.1]，$\mathrm{epi}(\varphi)$ 是凸的 [7, 。由此可得， $\Upsilon(\varphi)$ 是一个实值、正常、凸且取闭值的过程。此外，命题1.3] 证明了，每个取闭值的实值正常凸过程 $\Delta : Z \rightrightarrows \mathbb{R}$ 都是正的，即 $\Upsilon(\varphi)(0_Z) = \mathbb{R}_+$，当且仅当存在一个次线性映射 $\varphi : Z \to \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{Gph}(\Delta) = \mathrm{epi}(\varphi)$。因此， $\Upsilon(\varphi) \in P(Z, \mathbb{R})$，且 $\Upsilon(\varphi)(0_Z) = \mathbb{R}_+$。接下来，我们验证 $\Upsilon(\varphi)$ 满足假设1的条件(a)–(c)。条件(a)是 $\mathrm{core}(\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi))) \neq \varnothing$，我们将证明 $(0_Z, 2) \in \mathrm{core}(\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)))$：对于每个 $(\bar{z}, \bar{r}) \in Z \times \mathbb{R}$，存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$(0_Z, 2) + \zeta(\bar{z}, \bar{r}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)),$$

对于每个 $0 \leq \zeta \leq \varepsilon$。为此，固定一个任意的 $(\bar{z}, \bar{r}) \in Z \times \mathbb{R}$。选择 $r_{\bar{z}} \geq \max\{\varphi(\bar{z}) 1\}$，并令 $\tau_{\bar{z}} := 1/r_{\bar{z}} \in (0, 1]$。显然，$(\bar{z}, r_{\bar{z}}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)) = \mathrm{epi}(\varphi)$。我们声称

$$(t\bar{z}, s) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)), \quad \text{for every } 1 \leq s \leq 3,\ 0 < t \leq \tau_{\bar{z}}. \tag{9}$$

事实上，给定任意 $0 < t \leq \tau_{\bar{z}}$，由于 $\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi))$ 是一个锥，我们有 $(t\bar{z}, tr_{\bar{z}}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi))$。此外，由于 $\Upsilon(\varphi)$ 是一个正的过程，且 $s - tr_{\bar{z}} \geq 0$，因此 $(0_Z, s - tr_{\bar{z}}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi))$。由凸性可得

$$(t\bar{z}, s) = (t\bar{z}, tr_{\bar{z}}) + (0_Z, s - tr_{\bar{z}}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)) + \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)) \subset \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)),$$

对每个 $1 \leq s \leq 3$，这就证明了（9）。

现在取足够小的 $0 < \varepsilon \leq \tau_{\bar{z}}$，使得对所有 $0 \leq \zeta \leq \varepsilon$都有 $-1 \leq \zeta\bar{r} \leq 1$。因此，对所有此类 $\zeta$，都有$1 \leq 2 + \zeta\bar{r} \leq 3$。于是，

$$(0_Z, 2) + \zeta(\bar{z}, \bar{r}) = (\zeta\bar{z}, 2 + \zeta\bar{r}) \in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)), \quad \text{for every } 0 \leq \zeta \leq \varepsilon.$$

因此，假设1 中的条件(a)成立。接下来验证条件(b)。由于 $\Upsilon(\varphi)(0_Z) = \mathbb{R}_+$，我们有

$$Y_+ = \mathbb{R}_+ = \Upsilon(\varphi)(0_Z), \qquad (-Y_+) \cap \Upsilon(\varphi)(0_Z) = \{0\} \subset \mathbb{R}_+,$$

因此，条件(b)也成立。

最后，我们检查条件(c)。反设

$$(\bar{z}, \bar{r}) \in \mathrm{Gph}(-\Upsilon(\varphi)) \cap [\mathrm{Gph}(V) - (0_Z, r_0)], \qquad (\bar{z}, \bar{r}) \neq (0_Z, 0).$$

则存在点 $z' \in Z$ 和 $r' \in F(G^{-1}(z'))$，使得

$$(\bar{z}, \bar{r}) = (z', r' - r_0) \in \mathrm{Gph}(-\Upsilon(\varphi)) = \{(z, r) \in Z \times \mathbb{R} : -\varphi(z) \geq r\}.$$

因此，$-\varphi(z') \geq r' - r_0$，这与(7)矛盾，除非 $z' = 0_Z$。若 $z' = 0_Z$，则 $r' \in V(0_Z)$，且由于 $\varphi(0_Z) = 0$，可得 $r' \geq r_0$。然而，由于 $r_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$，可知 $r_0 \leq r'$，从而 $r' = r_0$，这意味着 $(\bar{z}, \bar{r}) = (0_Z, 0)$，矛盾。因此，不存在这样的$(\bar{z}, \bar{r})$，假设1中的条件(c)得证。

因此，我们得出 $\Upsilon(\varphi) \in \Gamma_{r_0}$；故 $\Upsilon$ 是良定义的。

(ii) 显然，$\Upsilon$ 是单射，因为对于任意 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_{r_0}$，

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{epi}(\varphi_1) = \mathrm{epi}(\varphi_2).$$

接下来，我们证明 $\Upsilon$ 是满射。为此，我们假设 $\Delta \in \Gamma_{r_0}$，即 $\Delta \in P(Z, \mathbb{R})$ 满足假设1，其中 $r_0$ 起到 $y_0$的作用。我们首先断言 $\Delta$ 是正的，即 $\Delta(0_Z) = \mathbb{R}_+$。事实上，由假设1中的条件(b)，我们有 $\mathbb{R}_+ \subset \Delta(0_Z)$，且最后一个集合是一个锥。因此，要么 $\Delta(0_Z) = \mathbb{R}_+$，要么 $\Delta(0_Z) = \mathbb{R}$。后一种情况不可能，因为条件(b)保证

$$(-\mathbb{R}_+) \cap \Delta(0_Z) \subset \mathbb{R}_+.$$

事实上，若 $\Delta(0_Z) = \mathbb{R}$，则 $(-\mathbb{R}_+) \cap \Delta(0_Z) = -\mathbb{R}_+$，而上述包含关系将推出 $-\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}_+$，这是错误的。因此，$\Delta(0_Z) = \mathbb{R}_+$。现在，再由 [1, 命题1.3] 和 [7, 命题2.3]，存在一个下半连续次线性映射 $\varphi\colon Z \to \mathbb{R}$，使得图$(\Delta)$ =上图$(\varphi)$。我们将通过证明 $\varphi$ 满足 (7) 来验证 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$。取定 $z \in Z \setminus \{0_Z\}$ 和任意的$r \in F(G^{-1}(z))$。回顾 $V := F \circ G^{-1}$，我们有 $(z, r) \in$ 图$(V)$。由假设1中的条件(c)可知

$$(z,\, r - r_0) \notin \mathrm{Gph}(-\Delta).$$

由于图$(\Delta)$ =上图$(\varphi) = \{(z, t) \in Z \times \mathbb{R} :\ \varphi(z) \leq t\}$，我们有

$$\mathrm{Gph}(-\Delta) = \{(z, s) \in Z \times \mathbb{R} : (z, -s) \in \mathrm{Gph}(\Delta)\} =$$

$$\{(z,s)\in Z\times\mathbb{R}:\varphi(z)\le -s\}=\{(z,s)\in Z\times\mathbb{R}:-\varphi(z)\ge s\}.$$

因此，$(z,r-r_0)\notin$图$(-\Delta)$等价于

$$-\varphi(z)<r-r_0,$$

这正是（7）。

（iii）假设 $\|\Upsilon(\varphi)\|<+\infty$。我们将通过证明存在 $\varepsilon>0$ 使得，来说明 $(0_Z,2)\in$int(图$(\Upsilon(\varphi))$)

$$(0_Z,2)+\zeta(\bar z,\bar r)\in \mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)),$$

对每个 $0\le\zeta\le\varepsilon$ 以及 $(\bar z,\bar r)\in B_Z\times[-1,1]$,

我们首先断言

$$\|\Upsilon(\varphi)\|=\sup_{z\in S_Z}\varphi(z). \tag{10}$$

事实上，由（1）可得

$$\|\Upsilon(\varphi)\|=\sup_{z\in B_Z}\inf\{|y|\colon y\in\Upsilon(\varphi)(z)\}.$$

由于图$(\Upsilon(\varphi))$ =上图$(\varphi)$，因此

$$\|\Upsilon(\varphi)\|=\sup_{z\in B_Z}\inf\{|y|\colon \varphi(z)\le y\}=\sup_{z\in B_Z}\{\max\{\varphi(z),0\}\}=\sup_{z\in B_Z}\varphi(z).$$

为论证最后一个等式，注意到若 $\varphi(z)<0$，则由 $\varphi$ 的次线性，我们有$0<-\varphi(z)\le\varphi(-z)$, 其中 $-z\in B_Z$。这就证明了该断言。

现在，定义

$$r:=\max\{\|\Upsilon(\varphi)\|,1\},\qquad \varepsilon:=\frac{1}{r}\in(0,1]. \tag{11}$$

固定一个任意的 $(\bar z,\bar r)\in B_Z\times[-1,1]$。于是，由 (10)，我们有 $r\ge\varphi(\bar z)$，这意味着 $(\bar z,r)\in$图$(\Upsilon(\varphi))$。重复第 (ii) 部分中用于得到公式 (9) 的论证，我们推出，对每一个 $1\le s\le 3$ 和 $0<t\le\varepsilon$，$(t\bar z,s)\in$图$(\Upsilon(\varphi))$。此外，由于对所有$0\le\zeta\le\varepsilon$都有 $-1\le\zeta\bar r\le 1$，重复 (ii) 的最后论证可得

$$(0_Z,2)+\zeta(\bar z,\bar r)=(\zeta\bar z,2+\zeta\bar r)\in\mathrm{Gph}(\Upsilon(\varphi)),\quad \text{for all } 0\le\zeta\le\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon$不依赖于 $(\bar z,\ \bar r)\in B_Z\times[-1,1]$的具体选择，证明至此完成。最后请注意，根据 [3, 定理 2.2.6], ，如果 $Z$ 是巴拿赫空间，那么 $\|\Upsilon(\varphi)\|<+\infty$。 □

**注 3.12.** 请注意，在前面的证明中，我们已经证明了对每个$\Delta\in\Gamma_{r_0}$都有 $\Delta(0_Z)=\mathbb{R}_+$。

**定理 3.13.** 假设 $Y=\mathbb{R}$ 和 $Y_+=\mathbb{R}_+$。令

$$r_0:=\inf\{F(x):x\in\Omega,\ 0_Z\in G(x)\},$$

假设 $r_0\in\mathbb{R}$且 $\mathcal{S}_{r_0}\neq\varnothing$。那么，每个 $\varphi\in\mathcal{S}_{r_0}$都是 （$P$（$0_Z$）） 的拉格朗日乘子

在 $r_0$处；也就是说， $r_0$ 是该规划问题的下确界

$$Minimize\ F(x)+\varphi(G(x)) \quad subject\ to\ x\in\Omega. \tag{$P[\varphi]$}$$

此外，如果 $r_0$是$(P(0_Z))$的最小值（即，如果对于某个可行解$x_0$，有 $r_0\in F(x_0)$），那么 $r_0$ 也是$(P[\varphi])$ 的极小点（在 $x_0$处达到），并且

$$\varphi(z)\geq 0 \quad for\ every\ z\in G(x_0). \tag{12}$$

证明。由于 $\varphi\in\mathcal{S}_{r_0}\neq\varnothing$，命题 3.11 保证 $\Upsilon(\varphi)\in\Gamma_{r_0}\neq\varnothing$。令 $\Delta:=\Upsilon(\varphi)$，于是 $\Delta(z)=\varphi(z)+\mathbb{R}_+$ 且图$(\Delta)$ = 上图$(\varphi)$。根据定理 3.5， $r_0$ 是以下规划问题的非支配点

$$\text{Minimize } F(x)+\Delta(G(x)) \quad \text{subject to } x\in\Omega. \tag{$P[\Delta]$}$$

此外， $r_0$是$(P(0_Z))$的最小值（即， $r_0\in F(x_0)$对于某个可行 $x_0$），定理 3.5 可推出，$r_0$ 也是$(P[\Delta])$的最小值，在 $x_0$处达到，并且

$$\Delta(G(x_0))\cap(-\mathbb{R}_+)\subseteq\mathbb{R}_+. \tag{13}$$

由于 $Y=\mathbb{R}$ 和 $Y_+=\mathbb{R}_+$，极小性与极小等价，并且（13）显然蕴含 $\Delta(G(x_0))\subset\mathbb{R}_+$。由于 $\mathrm{Gph}(\varphi)\subset\mathrm{Gph}(\Delta)$，我们 deduce （12）成立。

现在证明 $r_0$ 是（$P[\varphi]$）的下确界。定义集合

$$A:=\bigcup_{\substack{x\in\Omega\\ 0_Z\in G(x)}}F(x),\quad B:=\bigcup_{x\in\Omega}\big(F(x)+\Delta(G(x))\big),\quad C:=\bigcup_{x\in\Omega}\big(F(x)+\varphi(G(x))\big).$$

于是 $r_0$ =是 $A$ 的下确界，我们旨在证明 $r_0$ =是 $C$的下确界。由于 ND$(A)$由 $A$ 的下界组成，因此 $r_0$ ∈属于 ND$(A)$，根据定理 3.5， $r_0$ ∈ 属于 ND$(B)$。由注 3.12，$0\in\Delta(0_Z)=\mathbb{R}_+$，这意味着 $A\subset B$，从而 $r_0$ =是 $B$ 的下确界。此外，Gph$(\varphi)\subset$ Gph$(\Delta)$意味着$C\subset B$，因而 $B\leq$ 的下确界是 $C$ 的下确界。反之，由于 $\Delta(z)=\varphi(z)+\mathbb{R}_+$，对每个 $b\in B$ 都存在$c\in C$ 使得 $c\leq b$，从而 $C\leq$ 的下确界是 $B$的下确界。因此， $B=$ 的下确界是 $C$ 的下确界，进而 $r_0=$是 $C$的下确界。

最后，如果 $r_0=\min A$，定理 3.5 意味着 $r_0=\min B$。根据前面的论证， $r_0=\inf C$；此外， $r_0\in C$，否则就会存在 $c\in C$ 满足 $c<r_0$，这与$r_0=\min B$ 矛盾，因为 $C\subset B$。

□

现在考虑 $Y=\mathbb{R}$ 和 $Y_+=\mathbb{R}_+$ 的情形，假设问题（$P(z)$) 中涉及的两个映射$F$ 和 $G$ 都是单值函数。在这种情况下，我们得到如下参数优化问题族:

$$\text{Minimize } f(x) \quad \text{subject to } x\in\Omega,\ z=g(x), \quad (P(z)),\ z\in U,$$

其中， $f:\Omega\to\mathbb{R}$ 和 $g:\Omega\to Z$ 是常规的点到点映射， $U\subset Z$ 表示原点 $0_Z$的一个开邻域。我们定义集值函数

$$V:U\rightrightarrows\mathbb{R},\quad V(z):=\{f(x):x\in\Omega,\ g(x)=z\}.$$

下面的定理将定理 3.13 推广到单值情形，并在非凸框架下形式化了拉格朗日乘子法所依据的基于分离的原理。按照 [16, 第 8.4 节的术语，定理 1], 此处以一个下半连续次线性泛函取代支撑超平面；该泛函的存在保证了无需任何附加假设即可对约束进行精确罚。

**定理 3.14**。 假设 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$。令

$$r_0 := \inf\{f(x) : x \in \Omega,\ g(x) = 0_Z\}.$$

假设 $r_0 \in \mathbb{R}$，且存在一个下半连续的次线性映射 $\varphi :\ Z \to \mathbb{R}$，满足

$$-\varphi(g(x)) < f(x) - r_0 \quad \textit{for all } x \in \Omega \textit{ with } g(x) \neq 0_Z.$$

*Then*

$$r_0 = \inf\{f(x) + \varphi(g(x)) : x \in \Omega\}. \tag{$P[\varphi]$}$$

此外，若对于某个可行的 $x_0 \in \Omega$，有 $r_0 = f(x_0)$（即 $g(x_0) = 0_Z$），则 $x_0$ 也使$(P[\varphi])$达到最小值，并且

$$\varphi(g(x_0)) = 0.$$

证明从更一般定理的证明可直接推出，故从略。

# 4 利普希茨与锥正则条件下对一般假设的验证

本节给出确保拉格朗日乘子过程存在的具体条件。第 3 节在抽象几何假设下建立了一般理论；本节则确定可验证的假设——涉及利普希茨连续性和有界基——以保证这些假设成立。主要结果定理4.9给出了 $\Gamma_{y_0}$非空性的充分条件，并推导出标量情形和单值情形下的显式罚函数形式。具体而言，要求复合集值映射 $V = F \circ G^{-1}$ 在原点处是利普希茨的，从而确保参考点附近变动的统一控制；要求序锥 $Y_+$ 具有有界基，这一性质对于所涉及的分离论证至关重要；并要求 $y_0$ 相对于锥的一个 $\delta$-扰动满足非退化条件，以保证 $y_0$ 在 $V(0_Z)$中适当地孤立。

为此，我们首先介绍表述定理 4.9所需的术语。具体而言，我们首先回顾锥扰动（或膨胀）的概念，该概念在表述关于参考点的非退化条件时发挥着核心作用 $y_0$。对于任意 $y \in Y$和 $A \subset Y$，定义 $y$ 到 $A$ 的距离为

$$d(y, A) := \inf\{\|y - a\| : a \in A\}.$$

给定一个锥 $C \subset Y$和 $0 < \varepsilon < 1$，令

$$S_C := S_Y \cap C, \qquad S_{(C,\varepsilon)} := \{y \in Y : d(y, C \cap S_Y) \leq \varepsilon\}.$$

Then

$$S_{(C,\varepsilon)} = \mathrm{cl}((S_Y \cap C) + \varepsilon B_Y),$$

因此，任意 $y \in S_{(C,\varepsilon)}$ 都可以表示为

$$y = \lim_{n\to\infty} (y_n + z_n), \tag{14}$$

对于某些序列 $y_n \in C \cap S_Y$和 $z_n \in \varepsilon B_Y$。此外，给定 $C$的一个有界基 $B$，我们定义

$$\sigma_B := \sup_{b\in B} \|b\| > 0, \qquad \delta_B := \inf_{b\in B} \|b\| > 0.$$

**定义 4.1.** 设 $Y$ 是一个赋范空间， $C \subset Y$ 是一个锥。我们定义：

(i) 对于 $0 < \varepsilon < 1$，锥

$$C_\varepsilon := \mathrm{cone}(S_{(C,\varepsilon)})$$

是 $C$的 $\varepsilon$-锥邻域。

(ii) 若 $C$ 是凸的，且 $B$ 是 $C$的一个基，则对于 $0 < \varepsilon < \min\{1, \delta_B\}$，我们定义

$$B_\varepsilon := \{y \in Y : d(y, B) \le \varepsilon\}, \qquad C_{(B,\varepsilon)} := \mathrm{cone}(B_\varepsilon),$$

称为与 $C$ 相关联的 Henig 膨胀锥（通过基 $B$）。

**引理 4.2.** 设 $X$ 是一个赋范空间， $C \subset X$ 是一个锥。若 $B$ 是 $C$的有界基，则存在 $\varepsilon' > 0$，使得对于每个 $0 < \varepsilon < \varepsilon'$，*Henig* 膨胀锥 $C_{(B,\varepsilon)}$ 都有一个有界基。

证明。 由于 $B$ 是 $C$的有界基，根据 [2, 定理 1。47] 存在 $f \in C^\#$ 和 $\varepsilon' > 0$ 使得

$$B = \{x \in C : f(x) = \varepsilon'\}.$$

固定 $0 < \varepsilon < \varepsilon'$，并令 $B_\varepsilon := \mathrm{cl}(B + \varepsilon B_X)$。集合 $B_\varepsilon$是凸的、有界的，且不包含$0_X$。事实上，若 $x = \lim_n(y_n + \varepsilon b_n)$，其中 $y_n \in B$且 $b_n \in B_X$，则 $\|y_n + \varepsilon b_n\| \ge \|y_n\| - \|\varepsilon b_n\| \ge \varepsilon' - \varepsilon > 0$。因此 $\|x\| > 0$

根据 Hahn–Banach 定理，存在 $g \in X^*$ 和 $\gamma > 0$ 使得

$$g(0) = 0 < \gamma < \inf_{B_\varepsilon} g.$$

定义

$$B' := \{x \in C_{(B,\varepsilon)} : g(x) = \gamma\}.$$

我们首先证明 $B'$ 有界。若 $x \in B'$，则对于某些 $y \in B_\varepsilon$ 和 $\mu > 0$，有 $x = \mu y$，因 ce

$$\gamma = g(x) = \mu g(y) \quad \Rightarrow \quad 0 < \mu < \frac{\gamma}{\gamma} = 1.$$

由于 $B_\varepsilon$ 有界，因此 $B'$ 也有界。

现在我们证明 $B'$ 确实是 $C_{(B,\varepsilon)}$的一个基。根据 [2, 定理 1。47], 只需验证，对于所有 $g(x) > 0$ 。若 $x \in C_{(B,\varepsilon)} \setminus \{0\}$，且 $x = \lambda y$ 满足 $\lambda > 0$ 并且 $y \in B_\varepsilon$，则

$$g(x) = \lambda g(y) > \lambda\gamma > 0.$$

因此， $B'$ 是 $C_{(B,\varepsilon)}$的有界基。 □

我们引入以下术语。对于每个 $\varepsilon > 0$，令

$$C_\varepsilon^\circ := \operatorname{cone}\big((S_Y \cap C) + \varepsilon B_Y\big).$$

The 下一个引理总结了这些膨胀锥的性质，后文将用到。 r.

**引理 4.3.** 设 $Y$ 为赋范空间， $C \subset Y$ 为锥，且 $\varepsilon, \mu \in (0,1)$。以下结论成立：

*(i)* 若 $D \subset Y$ 是另一个锥，且 $C \subset D$，则 $C_\varepsilon^\circ \subset D_\varepsilon^\circ$。

*(ii)* $\operatorname{cl} C_\varepsilon^\circ = C_\varepsilon$。

*(iii)* $(C_\varepsilon^\circ)_\mu^\circ \subset C_{\varepsilon+(1+\varepsilon)\mu}^\circ \subset C_{\varepsilon+2\mu}^\circ$。

*(iv)* 如果 $\varepsilon < \mu$，则 $C_\varepsilon \subset C_\mu^\circ$。

*(v)* 如果 $\varepsilon < \mu < \frac{1}{3}$，则 $(C_\varepsilon)_\mu \subset C_{3\mu}^\circ$。

*(vi)* $(C_\mu)_{\frac{\mu}{4}} \subset (C_{\frac{\mu}{4}})_{\frac{\mu}{3}} \subset C_\mu^\circ$。

证明。 (i) 由于 $C \cap S_Y \subset D \cap S_Y$，添加 $\varepsilon B_Y$保持包含关系，取锥包得到 s

$$C_\varepsilon^\circ = \operatorname{cone}(C \cap S_Y + \varepsilon B_Y) \subset \operatorname{cone}(D \cap S_Y + \varepsilon B_Y) = D_\varepsilon^\circ.$$

(ii) 由于 $0 < \varepsilon < 1$、 [14, ，引理 2.1.43(iii)] 适用，并得到

$$\operatorname{cl} C_\varepsilon^\circ = \operatorname{cone}\big(\operatorname{cl}((S_Y \cap C) + \varepsilon B_Y)\big) = C_\varepsilon.$$

(iii) 设 $x \in (C_\varepsilon^\circ)_\mu^\circ$。如果 $x = 0_Y$，则结论显然成立。否则，写成

$$x = t(u + \mu v), \qquad u = s(w + \varepsilon b),$$

其中 $t$， $s > 0, w \in C \cap S_Y$以及 $b$， $v \in B_Y$。于是

$$x = ts\Big(w + \varepsilon b + \frac{\mu}{s} v\Big).$$

由 $\|u\| = 1$ 和 $u = s\,(w + \varepsilon b)$ ，可得

$$\frac{1}{s} = \|w + \varepsilon b\| \le 1 + \varepsilon.$$

因此

$$x \in \operatorname{cone}\Big((C \cap S_Y) + (\varepsilon + (1+\varepsilon)\mu) B_Y\Big) = C_{\varepsilon+(1+\varepsilon)\mu}^\circ.$$

包含关系 $C^\circ_{\varepsilon+(1+\varepsilon)\mu} \subset C^\circ_{\varepsilon+2\mu}$ 可直接由 $(1+\varepsilon)\,\mu \le 2\mu$ 得出。
**(iv)** 设 $x \in C_\varepsilon =$ 锥$(S_{(C,\varepsilon)})$。若 $x = 0_Y$，则无需证明。因此，我们假设 $x \neq 0_Y$。于是存在 $t > 0$ 和 $y \in S_{(C,\varepsilon)}$，使得 $x = ty$。令 $\delta := d(y,\ C \cap S_Y)$。根据 $S_{(C,\varepsilon)}$ 的定义，有 $\delta \le \varepsilon < \mu$。

选取一个序列 $(z_n) \subset C \cap S_Y$，满足 $\|y - z_n\| \to \delta$。那么，对于某个 $n_0$,

$$\|y - z_{n_0}\| < \mu,$$

因此 $y \in C \cap S_Y + \mu B_Y$，从而 $x \in C^\circ_\mu$。
**(v)** 由于 $\varepsilon < \mu$，由第 **(iv)** 部分可得 $C_\varepsilon \subset C^\circ_\mu$。现在应用 **(i)** 和 **(iii)**,

$$(C_\varepsilon)^\circ_\mu \subset (C^\circ_\mu)^\circ_\mu \subset C^\circ_{3\mu}.$$

取闭包并利用 **(ii)** 可得

$$(C_\varepsilon)_\mu = \mathrm{cl}\,(C_\varepsilon)^\circ_\mu \subset \mathrm{cl}\, C^\circ_{3\mu} = C_{3\mu}.$$

需要注意的是，在最后一个等式中，假设 $3\mu < 1$ 对于正确应用 **(ii)** 是必不可少的。

(vi) 第一个包含关系显然，第二个则是 **(v)** 的直接推论 . □

为表述定理 4.9所需的正则性假设，我们引入集值映射的逐点利普希茨连续性概念。该概念便于控制映射相对于固定参考点的取值，并将在下文的变分论证中发挥关键作用。在介绍点处的利普希茨行为概念之前，我们先回顾集值映射利普希茨连续性的经典定义；这一概念在文献中已得到充分确立。

**定义 4.4** ([15, 定义 3.3.11(i)]). 设 $X$ 和 $Y$ 为赋范空间，$U \subset X$ 为非空集合。若存在常值 $L \ge 0$ 使得下式成立，则称集值映射 $F\colon U \rightrightarrows Y$ 是利普希茨连续的（在 $U$ 上）

$$F(x) \subset F(u) + L\|x - u\|\, B_Y, \qquad \forall\, x, u \in U.$$

所有此类常值 $L$ 的下确界称为 $F$ 在 $U$ 上的精确 Lipschitz 界，并记为 $L_F \ge 0$。

现在我们介绍一种新的、较弱的局部化概念，即在特定点处的利普希茨行为；该概念将在后续论证中发挥作用。

**定义 4.5**。设 $X$ 和 $Y$ 为赋范空间，且设 $U \subset X$。若集值映射 $F\colon U \rightrightarrows Y$ 满足：存在常值 $L \ge 0$，使得其在 $\bar{x} \in U$ 处具有利普希茨性质，则称其在 $\bar{x} \in U$ 处是利普希茨的，并且

$$F(w) \subset F(\bar{x}) + L\|w - \bar{z}\|\, B_Y, \qquad \forall w \in U.$$

所有此类常值 $L$ 的下确界称为 $F$ 在 $\bar{x}$ 处的精确利普希茨界，并记为$L_{F,\bar{x}} \ge 0$。

上述概念弱于集值映射在 $\bar{x} \in U$ 附近为利普希茨的概念，如 [15, 定义 3.3.11(ii)]中所定义的那样。事实上，在我们的定义中，参考集$F(\bar{x})$是固定的，并且对 $w \in U$而言，值 $F(w)$被视为$F(\bar{x})$依照由常值$L_{F,\bar{x}}$所确定的线性增长率而得到的一致受控变差。这一较弱的概念对我们的目的已经足够，因为后续论证只需要相对于一个固定参考点（通常为 $0_Z$）对 $F$ 的值进行一致控制。特别地，对于任意的 $z_1, z_2 \in U$，无需比较 $F(z_1)$与 $F(z_2)$。这使得我们能够在更温和的正则性假设下开展工作，同时仍然获得所需的变分性质与最优性性质。

在下面的例子中，我们说明本文引入的局部利普希茨连续性概念与文献中此前研究的两种利普希茨型概念之间的关系。

**例 4.6.** 设 $X = Y = \mathbb{R}, U = \mathbb{R}$，并定义集值映射 $F, G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$，使得

$$F(x) := \{y \in \mathbb{R} : y \geq x^2\}, \qquad G(x) := \{y \in \mathbb{R} : y \geq x^3\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

那么， $F$ 在 0 处是利普希茨的，但按照 [15, 定义 3.3.11(ii)]的意义，它在 0 附近并非利普希茨的。此外， $G$ 在任何点 $x \in \mathbb{R}$ 处都不是利普希茨的。

下面的引理给出了一个充分条件，确保两个集值映射的复合在给定点处是利普希茨的，并明确估计了相应的利普希茨常值。

**引理 4.7.** 设 $X, Y, Z$ 为赋范空间，且 $U \subset Z$ 和 $V \subset X$。假设 $F_1 : U \rightrightarrows X$在某个 $z \in U$ 处是利普希茨的，其中 $F_1(U) \subset V$，并且 $F_2 : V \rightrightarrows Y$在每个点 $x \in F_1(z)$处都是利普希茨的。此外，假设

$$L_{F_2, F_1(z)} := \sup\{ L_{F_2,x} : x \in F_1(z) \} < +\infty.$$

（例如，若 $F_1$ 是单值的，或若 $F_2$ 在 $V$上利普希茨连续，则$L_{F_2,F_1(z)}$ 的有限性是自动成立的。）

于是，复合 $F_2 \circ F_1$ 在 $z$处是利普希茨的，其利普希茨常数可明确表示为

$$L_{F_2 \circ F_1,\, z} \leq L_{F_2,F_1(z)}\, L_{F_1,z}. \tag{15}$$

证明。 固定 $z \in U$。我们首先证明存在一个常值 $L \geq 0$，使得

$$F_2(F_1(z')) \subset F_2(F_1(z)) + L\|z' - z\|\, B_Y, \qquad \forall z' \in U.$$

任取 $z' \in U$，并取 $y' \in F_2(F_1(z'))$。则存在 $x' \in F_1(z')$，使得$y' \in F_2(x')$。固定任意 $L_1 > L_{F_1,z}$。根据 $F_1$ 在 $z$处的利普希茨性质，我们有

$$F_1(z') \subset F_1(z) + L_1\|z' - z\|\, B_X, \qquad \forall z' \in U,$$

因此存在满足条件的 $x \in F_1(z)$

$$\|x' - x\| \leq L_1\|z' - z\|.$$

现在任取 $L_2 > L_{F_2,\ F_1(z)}$。由于 $F_2$ 在 $x \in F_1(z)$ 处是利普希茨的，且 $L_2 > L_{F_2,\ x}$，因此

$$F_2(x') \subset F_2(x) + L_2\|x' - x\|\, B_Y, \qquad \forall x' \in V.$$

因此，存在 $y \in F_2(x)$，使得

$$\|y' - y\| \le L_2\|x' - x\| \le L_2L_1\|z' - z\|.$$

由于 $L_1$ 和 $L_2$ 仅依赖于 $z$，我们得到

$$F_2(F_1(z')) \subset F_2(F_1(z)) + L_1L_2\|z' - z\|\, B_Y, \qquad \forall z' \in U,$$

因此 $F_2 \circ F_1$ 在 $z$ 处是利普希茨的。

此外，前述包含关系意味着

$$L_{F_2\circ F_1,\,z} \le \inf\{\, L_1L_2 : L_1 > L_{F_1,z},\ L_2 > L_{F_2,F_1(z)}\,\}.$$

由于

$$\inf\{\, L_1 : L_1 > L_{F_1,z}\} = L_{F_1,z} \quad \text{and} \quad \inf\{\, L_2 : L_2 > L_{F_2,F_1(z)}\,\} = L_{F_2,F_1(z)},$$

我们得出结论：

$$L_{F_2\circ F_1,\,z} \le L_{F_2,F_1(z)}\, L_{F_1,z}.$$

证明至此完成。 □

**注释 4.8.** 一般而言，不等式（15）不能替换为等式。事实上，考虑函数 $f$、$g$： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义如下

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 1, \\ 0, & x \ne 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2, & x = 2, \\ 0, & x \ne 2. \end{cases}$$

这两个函数在 0 处均为利普希茨函数，且最小利普希茨常数为 1。然而，复合函数 $g \circ f$ 是常值零函数，因此其在 0 处的最小利普希茨常数为 0。

现在我们给出本节的主要结果。

**定理 4.9.** 设 $y_0 \in \mathrm{ND}(P(0_Z))$ 并假设：

*(a)* 集值映射 $V$： $U \rightrightarrows Y$， $V(z)$: $= F \circ G^{-1}(z)$ 在 $0_Z \in U$ 处是利普希茨的。

*(b)* 锥 $Y_+$ 具有有界基。

*(c)* 存在 $0 < \delta < 1$ 使得

$$V(0) \cap [y_0 - (Y_+)_\delta] \subset \{y_0\}.$$

于是 $\Gamma_{y_0} \ne \varnothing$；也就是说，存在 $\Delta \in P(Z, Y)$，它是$(P(0_Z))$ 在

$y_0$；这意味着 $y_0$ 是该规划问题的非支配点

$$Minimize\ F(x)+\Delta(G(x)) \quad subject\ to\ x\in\Omega. \tag{$P[\Delta]$}$$

此外，若 $y_0$ 是（$P$（$0_Z$））的极小点（即，若对某个可行解 $x_0$ 有 $y_0\in F$（$x_0$）），则 $y_0$ 也是（$P[\Delta]$）的极小点（在 $x_0$ 处取得），并且

$$\Delta(G(x_0))\cap(-Y_+)=\{0_Y\}. \tag{16}$$

定理4.9的证明由假设 (a)–(c) 下 $\Gamma_{y_0}$ 的非空性推出。事实上，根据定理3.5，结论成立，因为（16）由（3）以及 $Y_+$是尖的这一事实推出（根据定理4.9中的断言 (b)）。因此，只要证明以下结果，定理4.9 便得证。

**命题 4.10.** 设 $y_0\in\mathrm{ND}(P$（$0_Z$））并假设：

*(a)* 集值映射 $V$：$U\rightrightarrows Y$，$V$（$z$）：$=F\circ G^{-1}$（$z$）在 $0_Z\in U$ 处是利普希茨的 .

*(b)* 锥 $Y_+$ 有一个有界基。

*(c)* 存在 $0<\delta<1$ 使得

$$V(0)\cap\big(y_0-(Y_+)_\delta\big)\subset\{y_0\}.$$

则 $\Gamma_{y_0}\neq\varnothing$。

接下来，我们给出一些技术性结果，这些结果将有助于证明命题 4.10。

**引理 4.11**。 设 $C\subset Y$ 是一个具有有界基的锥，$A\subset Y$ 是一个非空集合，并且$L>0$。假设存在 $\bar{y}\in Y$ 和 $0<\delta<1$ 使得

$$[A-\bar{y}]\cap[-C_\delta]\subset\{0_Y\}. \tag{17}$$

则存在 $C$ 的一个有界基 $B$，使得

$$d(-\lambda b,A-\bar{y})\geq 2L\lambda, \qquad for\ all\ b\in B,\ \lambda>0. \tag{18}$$

证明。 选取 $B_1$ $C$ 的一个有界基。那么集合 $B_2:=\frac{1}{\delta_{B_1}}B_1$也是 $C$ 的一个基，并且对于每个 $b\in B_2$ 都有 $\|b\|\geq 1$。因此，对于每个 $b\in B_2$，我们有

$$\frac{1}{\|b\|}B_Y(b,\delta)=B_Y\left(\frac{b}{\|b\|},\frac{\delta}{\|b\|}\right)\subseteq B_Y\left(\frac{b}{\|b\|},\delta\right)\subseteq(S_Y\cap C)+\delta B_Y$$

因此

$$B_Y(b,\delta)\subset C_\delta\setminus\{0_Y\} \tag{19}$$

对每个 $b\in B_2$ 均成立。

$$\frac{2L}{\delta}B_Y(b,\delta)\subset C_\delta\setminus\{0_Y\}$$

然后，对每个 $b \in B_2$，我们得到

$$C_\delta \setminus \{0_Y\} \supset \frac{2L}{\delta} B_Y(b, \delta) = B_Y\left(\frac{2L}{\delta} b, \frac{2L}{\delta}\delta\right) = B_Y\left(\frac{2L}{\delta} b, 2L\right)$$

现在，由于 $(A - \bar{y}) \cap [-C_\delta] \subset \{0_Y\}$，我们得到

$$B_Y\left(-\frac{2L}{\delta} b, 2L\right) \cap (A - \bar{y}) = \varnothing. \tag{20}$$

最后，取 $B := \frac{2L}{\delta} B_2$ 我们得到了所需的基，并由 (20) 得到 tha t

$$B_Y(-b, 2L) \cap (A - \bar{y}) = \varnothing$$

对任意 $b \in B$。现在，同样由于 $C_\delta$ 是一个锥，对任意 $\lambda > 0$，我们有

$$B_Y(\lambda b, 2L\lambda) \subset C_\delta \setminus \{0_Y\}$$

并且由于

$$-C_\delta \cap (A - \bar{y}) \subset \{0_Y\}$$

我们得到

$$B_Y(-\lambda b, 2L\lambda) \cap (A - \bar{y}) = \varnothing$$

对每个 $b \in B$ 和 $\lambda > 0$。我们通过注意到显然可以验证所得的基 $B$ 是有界的，从而完成证明。

□

**命题 4.12.** 设 $C \subset Y$ 是一个具有有界基的凸锥，$H : Z \rightrightarrows Y$ 是一个在 $0_Z$处利普希茨的集值映射，并设 $\bar{y} \in Y$。假设存在 $0 < \delta < 1$ 使得

$$[H(0_Z) - \bar{y}] \cap (-C_\delta) \subset \{0_Y\}. \tag{21}$$

则以下断言成立：

*(i)* 存在 $C$ 的一个有界基 $B$，使得集值映射 $\Delta: Z \rightrightarrows Y$ 定义 *by*

$$\mathrm{Gph}(\Delta) := \mathrm{cl\ cone}(B_Z \times B), \tag{22}$$

属于 $P(Z, Y)$ 且

$$\mathrm{Gph}(-\Delta) \cap \big(\mathrm{Gph}(H) - (0_Z, \bar{y})\big) \subset \{0_{Z\times Y}\}. \tag{23}$$

***(ii)*** 集值映射 $\Delta$ 还满足：

*(a)* $C \subset \Delta(0_Z)$.

*(b)* $(-C) \cap \Delta(0_Z) = \{0_Y\}$.

*(c)* $\|\Delta\| < \infty$.

*(d) If* $\mathrm{core}(C) \neq \varnothing$, *then* $\mathrm{core}(\mathrm{Gph}(\Delta)) \neq \varnothing$.

证明。 (i) 为简化记号，我们定义集值映射

$$H_{\bar{y}}(z) := H(z) - \bar{y}, \quad \forall z \in Z.$$

因此，

$$\mathrm{Gph}(H_{\bar{y}}) = \mathrm{Gph}(H) - (0, \bar{y}).$$

存在一个常值 $L > 0$ 使得 $H$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的，常数为 $L$。那么，映射 $H_{\bar{y}}$ 在 $0_Z$ 处也满足利普希茨条件，且常数相同 $L$。现在，由（21）和引理 4.11，存在 $B$ 的一个有界基 $C$ 使得

$$d(-\lambda b, H_{\bar{y}}(0_Z)) \geq 2L\lambda, \quad \forall b \in B, \forall \lambda > 0. \tag{24}$$

现在，利用公式（22）定义集值映射 $\Delta: Z \rightrightarrows Y$。根据构造，$\Delta$ 是闭的。由于$B_Z \times B$ 是凸的（因为 $B_Z$ 和 $B$ 都是凸的），因此 $\Delta$ 也是凸的。此外，$\mathrm{dom}(\Delta) = Z$，因为 $\pi_1(B_Z \times B) = B_Z$，其中 $\pi_1$ 表示到 $Z$上的投影。为证明 $\Delta$ 是尖的，首先注意到 $0_{Z\times Y} \notin \mathrm{cl}(B_Z \times B)$且 $\mathrm{cl}(B_Z \times B)$有界。于是，由 [14,引理2.1.43],

$$\mathrm{Gph}(\Delta) = \mathrm{cl\ cone}(B_Z \times B) = \mathrm{cone}\big(\mathrm{cl}(B_Z \times B)\big).$$

因此，图(Δ)是一个有良基锥（见 [14, 定义 2.1.42]），并且根据该定义之后的评注，每一个有良基锥都是尖的。因此，图(Δ)是尖的。

现在我们验证（23）。由

$$\mathrm{Gph}(-\Delta) = \mathrm{cl\ cone}(B_Z \times (-B)), \tag{25}$$

只需证明

$$\Big(\mathrm{cl\ cone}(B_Z \times (-B)) \setminus \{0_{Z\times Y}\}\Big) \cap \big(\mathrm{Gph}(H) - (0_Z, \bar{y})\big) = \varnothing. \tag{26}$$

首先取 $(\hat{z}, \hat{y}) \in$ 锥$(B_Z \times (-B)) \setminus \{0_{Z\times Y}\}$。则 $(\hat{z}, \hat{y}) = \lambda(z', -b')$，其中存在 $(z', -b') \in B_Z \times(-B)$ 以及 $\lambda > 0$。利用 (24) 和 $\|z'\| \leq 1$,

$$d(\hat{y}, H_{\bar{y}}(0_Z)) = d(-\lambda b', H_{\bar{y}}(0_Z)) \geq 2L\lambda \geq 2L\lambda\|z'\| = 2L\|\hat{z}\|.$$

因此，

$$\hat{y} \notin H_{\bar{y}}(0_Z) + \tfrac{3}{2}L\|\hat{z}\|\, B_Y. \tag{27}$$

由范数的连续性，（27）对所有 $(\hat{z}, \hat{y}) \in$ cl 锥$(B_Z \times (-B)) \setminus \{0_{Z\times Y}\}$也成立。

现在取 $(\hat{z}, \hat{y}) \in$ 图$(H)$–$(0_Z, \bar{y}) =$ 图$(H_{\bar{y}})$。由于 $H_{\bar{y}}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的，且常值为 $L$,

$$\hat{y} \in H_{\bar{y}}(\hat{z}) \subset H_{\bar{y}}(0_Z) + L\|\hat{z}\|\, B_Y \subset H_{\bar{y}}(0_Z) + \tfrac{3}{2}L\|\hat{z}\|\, B_Y.$$

这与（27）矛盾，从而证明了（26）。

(ii) (a) 由于

$$\{0_Z\} \times B \subset \mathrm{cl\ cone}(B_Z \times B) = \mathrm{Gph}(\Delta), \tag{28}$$

我们得到

$$\operatorname{cone}(\{0_Z\} \times B) = \{0_Z\} \times \operatorname{cone}(B) \subset \operatorname{Gph}(\Delta).$$

因此，

$$C = \operatorname{cone}(B) \subset \Delta(0_Z).$$

(b) 根据断言 (i)，锥 $\operatorname{Gph}(\Delta) \subset Z \times Y$ 是尖的。特别地，$\Delta(0_Z) \subset Y$ 也是尖的，这意味着

$$(-\Delta(0_Z)) \cap \Delta(0_Z) = \{0_Y\}.$$

因此，

$$(-C) \cap \Delta(0_Z) \subset (-\Delta(0_Z)) \cap \Delta(0_Z) = \{0_Y\}.$$

(c) 根据 (28)，对每个 $z \in S_Z$，都有 $B \subset \Delta(z)$。于是，利用 (1)，

$$\|\Delta\| = \sup_{z \in S_Z} d(0_Y, \Delta(z)) \leq \inf_{b \in B} \|b\| < \infty.$$

(d) 现在，我们来验证 $\operatorname{core}(\operatorname{Gph}(\Delta)) \neq \varnothing$。取定某个 $\bar{y} \in \operatorname{core}(C)$。由于 $B$ 是$C$的一个基，存在 $\bar{y}_b \in B$ 和 $\lambda_{\bar{y}} > 0$，使得 $\bar{y} = \lambda_{\bar{y}} \bar{y}_b$。显然，$\bar{y}_b \in \operatorname{core}(C)$。我们旨在证明 $(0_Z, \bar{y}_b) \in \operatorname{core}(\operatorname{Gph}(\Delta))$。回顾第 [15, 6.3] 节，每个实线性空间 $X$ 都可以赋予核凸拓扑 $\tau_c(X)$，这是满足对每个凸集 $A \subset X$都有 $\operatorname{int}_{\tau_c}(A) = \operatorname{core}(A)$ 的最强局部凸拓扑。因此，只需找到 $\mathcal{V} \in \tau_c(Z \times Y)$，使得 $(0_Z, \bar{y}_b) \in \mathcal{V} \subset \operatorname{cone}(B_X \times B)$。根据 [15, 命题 6.3.1 (iii)], , 取一个凸集 $\mathcal{U} \in \tau_c(Y)$，使得$\bar{y}_b \in \mathcal{U} \subset C$。取定 $0 < \alpha < \frac{\delta_B}{2}$。由于根据 [15, 命题 2.3.2 (iii)], , $\operatorname{int} B_Y(\bar{y}_b, \alpha) = \operatorname{core}(B_Y(\bar{y}_b, \alpha)) \in \tau_c(Y)$，定义

$$\mathcal{U}' := \mathcal{U} \cap \operatorname{core}(B_Y(\bar{y}_b, \alpha)).$$

T当 $\bar{y}_b \in \mathcal{U}' \subset C$、$\mathcal{U}' \in \tau_c$ 和 $\mathcal{U}'$ 是凸的。对于每个 $y \in \mathcal{U}'$，我们有 $\|y\| > \frac{\delta_B}{2}$，因为 e

$$\|y\| = \|\bar{y}_b - (y - \bar{y}_b)\| \geq \|\bar{y}_b\| - \|y - \bar{y}_b\| > \delta_B - \frac{\delta_B}{2} = \frac{\delta_B}{2},$$

其中最后一个不等式用到了 $\|\bar{y}_b\| \geq \delta_B$ 和 $\|y - \bar{y}_b\| < \alpha < \frac{\delta_B}{2}$。对于每个 $y \in \mathcal{U}'$，将 $y = \lambda_y y_b$ 写成 $y_b \in B$ 和 $\lambda_y > 0$。于是 $\|y\| = \lambda_y \|y_b\|$，利用 $\frac{\delta_B}{2} < \|y\| \leq 2\sigma_B$ 和 $\delta_B \leq \|y_b\| \leq \sigma_B$，可得 $\lambda_y > \frac{\delta_B}{2\sigma_B}$。令 $M := \min\left\{1, \frac{\delta_B}{2\sigma_B}\right\} > 0$。根据 [15, 命题 2.3.2 (iii)、命题 6.3.2 (ii)],

$$(0_Z, \bar{y}_b) \in \operatorname{core}(B_Z(0_Z, M)) \times \mathcal{U}' = \operatorname{core}(B_Z(0_Z, M) \times \mathcal{U}') \in \tau_c(Z \times Y).$$

为完成证明，我们证明 $\operatorname{core}(B_Z(0_Z, M)) \times \mathcal{U}' \subset \operatorname{cone}(B_Z \times B)$。固定 $(z, y) \in \operatorname{core}(B_Z(0_Z, M)) \times \mathcal{U}'$。令 $y = \lambda_y y_b$，其中 $y_b \in B$ 且 $\lambda_y > \frac{\delta_B}{2\sigma_B}$。则 $(z, y) = \lambda_y(\frac{z}{\lambda_y}, y_b)$。由于 $\|z\| < M \leq \frac{\delta_B}{2\sigma_B} < \lambda_y$，我们有 $\left\|\frac{z}{\lambda_y}\right\| < 1$，因此 $(\frac{z}{\lambda_y}, y_b) \in B_Z \times B$，证明完毕。 □

命题 *4.10* 的证明。令 $\delta' := \delta/4$ 并取 $0 < \rho < \delta'$。由于 $Y_+$ 具有有界基，根据 [10,引理 3。11]存在 $B$ 的一个有界基 $Y_+$ 使得

$$(Y_+)_{(B,\nu)} \subset (Y_+)_{(B,\rho)} \subset (Y_+)_\rho \quad \text{for all } 0 < \nu \leq \rho.$$

令 $\mu := \rho/2$ 并令 $Y'_+ := (Y_+)^{(B,\mu)}$。由引理 4.2，不妨设 $Y'_+$ 具有有界基。于是 $Y'_+$ 是一个具有有界基的凸锥，并且

$$Y_+ \subset Y'_+ \subset (Y_+)_\rho, \qquad \operatorname{int}(Y'_+) = \operatorname{core}(Y'_+) \neq \varnothing.$$

利用这些包含关系和引理 4.3 (vi)，我们得到

$$Y_+ \subset Y'_+ \subset (Y'_+)_{\delta'} \subset ((Y_+)_\rho)_{\delta'} \subset ((Y_+)_{\frac{\delta}{4}})_{\frac{\delta}{4}} \subset (Y_+)_\delta.$$

根据该命题的假设，

$$[V(0) - y_0] \cap (-(Y_+)_\delta) = \{0_Y\}.$$

因此，利用上述包含关系，

$$[V(0) - y_0] \cap (-(Y'_+)_{\delta'}) = \{0_Y\}.$$

应用命题 4.12 于 $Y'_+$，$V = F \circ G^{-1}$，$y_0$ 和 $\delta'$，我们得到 $\Delta \in P(Z,\ Y)$ 使得

$$\operatorname{core}(\operatorname{Gph}(\Delta)) \neq \varnothing, \qquad \operatorname{Gph}(-\Delta) \cap [\operatorname{Gph}(V) - (0, y_0)] = \{0_{Z\times Y}\},$$

$$Y'_+ \subset \Delta(0_Z), \qquad (-Y'_+) \cap \Delta(0_Z) = \{0_Y\}.$$

最后，由于 $Y_+ \subset Y'_+$，也有

$$Y_+ \subset \Delta(0_Z), \qquad (-Y_+) \cap \Delta(0_Z) = \{0_Y\},$$

因此 $\Delta \in \Gamma_{y_0}$，从而 $\Gamma_{y_0} \neq \varnothing$。 □

根据刚才给出的命题证明中所采用论证的推论4.10 和4.12，我们可以提出以下注记，并将在后续结果的证明中加以运用。

**注 4.13**。 设 $C \subset Y$ 是一个具有有界基的凸锥 $B$，并按 $\Delta$: $Z \rightrightarrows Y$ 由（22）定义。那么 $\Delta \in P$（$Z$，$Y$）成立，且命题4.12 第（ii）部分中的断言（a）–（d）成立。此外，若 $\Delta$ 还满足条件（23），则可直接调整命题4.10 证明中的论证，以证明 $\Delta \in \Gamma_{y_0}$。

**注 4.14**。 根据闭图定理 [3, 定理 2.2。6] 和开映射定理 [3, 定理 2.2。1]，，若 $F$： $X \rightrightarrows Y$ 和 $G$： $X \rightrightarrows Z$ 是巴拿赫空间之间的闭凸过程，且 $\operatorname{Dom}(F) = X$ 和 $\operatorname{Im}(G) = Z$，则 $F$ 和 $G^{-1}$ 均为利普希茨连续。因此，它们的复合 $V := F \circ G^{-1}$ 也为利普希茨连续。特别地，$V$ 在 $0_Z$处是利普希茨的。

由于闭凸过程在集值分析中的作用类似于经典分析中的线性算子，因此涉及此类过程 $F$ 和 $G$ 的优化规划可视为线性规划的集值对应形式。鉴于前面的评述，在温和假设下，下一个定理自然属于这一框架。

我们再次考虑特别相关的情形 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$。

**定理 4.15.** 假设 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$。令

$$r_0 := \inf\{F(x) : x \in \Omega,\ 0_Z \in G(x)\},$$

并假设 $r_0 \in \mathbb{R}$。若集值映射 $V = F \circ G^{-1}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的——例如，当 $F$ 和 $G$ 是凸闭过程，$\mathrm{Dom}(F) = X$，$\mathrm{Im}(G) = Z$，且 $X$ 和 $Z$是巴拿赫空间时——则 $\mathcal{S}_{r_0} \neq \varnothing$。因此，每个 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$ 都是$(P(0_Z))$ 在 $r_0$处的拉格朗日乘子；也就是说，$r_0$ 是该规划问题的下确界

$$Minimize\ F(x) + \varphi(G(x)) \quad subject\ to\ x \in \Omega. \tag{$P[\varphi]$}$$

此外，若 $r_0$ 是$(P(0_Z))$ 的最小值（也就是说，若对于某个可行解$x_0$，$r_0 \in F(x_0)$），则 $r_0$ 也是$(P[\varphi])$ 的极小点（在 $x_0$处取得），并且

$$\varphi(z) \geq 0 \quad for\ every\ z \in G(x_0). \tag{29}$$

证明。 显然，定理 4.9的假设 (a) 和 (b) 均满足，因此我们只需验证 (c)。由于 $Y_+ = \mathbb{R}_+$，我们有 $(Y_+)_\delta = \mathbb{R}_+$ 对每个 $0 < \delta < 1$均成立。由于 $r_0 =$ 下确界 $V(0_Z)$，因此可得

$$V(0_Z) \cap [\, r_0 - (Y_+)_\delta \,] = V(0_Z) \cap (-\infty, r_0] \subset \{r_0\}.$$

因此，由定理 4.9，我们得到 $\Gamma_{r_0} \neq \varnothing$。然后，由命题 3.11，我们推得$\mathcal{S}_{r_0} \neq \varnothing$。最后，由定理 3.13，每个 $\varphi \in \mathcal{S}_{r_0}$ 都满足该定理的结论。 □

接下来，我们继续在框架 $Y = \mathbb{R}$ 和 $Y_+ = \mathbb{R}_+$下进行讨论，现在重点关注这样一种特殊情形：$F$和 $G$ 是单值映射，而非集值映射。在此设定下，我们分别用 $f$ 和 $g$表示它们。在建立相应结果之前，我们先陈述并证明一个技术引理。

**引理 4.16。** 设 $Z$ 是一个赋范空间，$B_Z = \{z \in Z : \|z\| \leq 1\}$，且 $\alpha > 0$。那么，

$$\mathrm{cone}(B_Z \times \{\alpha\}) = \{(x, r) \in Z \times \mathbb{R} : r \geq \alpha\|x\|\}.$$

证明。 根据定义

$$\mathrm{cone}(B_Z \times \{\alpha\}) = \{\lambda(x, \alpha) : \lambda \geq 0,\ x \in B_Z\}.$$

若 $(x,\ r) = \lambda(z,\ \alpha)$，且 $z \in B_Z$，则 $\|z\| \leq 1$，因此

$$\|x\| = \lambda\|z\| \leq \lambda = r/\alpha.$$

因此 $r \geq \alpha\|x\|$。反之，给定 $(x,\ r)$，其中 $r \geq \alpha\|x\|$，令 $\lambda = r/\alpha$；若 $x \neq 0$，则令 $z := x/\lambda$；于是 $\|z\| \leq 1$ 且 $(x,\ r) = \lambda(z,\ \alpha)$。对于 $x = 0$，取 $z = 0$。证明完成。

□

**定理 4.17**。令 $Y=\mathbb{R}$，$Y_+=\mathbb{R}_+$，并令

$$r_0:=\inf\{f(x):x\in\Omega,\ g(x)=0_Z\},$$

假设 $r_0\in\mathbb{R}$。设（可能是集值的）映射 $V=f\circ g^{-1}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的。那么，对于任意 $\mu>L_{V,\,0_Z}$，我们有

$$r_0=\inf\{f(x)+\mu\,\|g(x)\|:x\in\Omega\}. \tag{P[$\mu$]}$$

此外，如果 $r_0=f(x_0)$ 对某个可行的 $x_0\in\Omega$ 成立，那么 $x_0$ 也满足 $(P[\mu])$。

证明。由于因此 $Y_+=\mathbb{R}_+$，每个 $\mu>0$ 都是它的一个基。固定某个 $\mu>0$，并定义 $\Delta_\mu\colon Z\rightrightarrows\mathbb{R}$ 如下

$$\mathrm{Gph}(\Delta_\mu):=\mathrm{cone}(B_Z\times\{\mu\}).$$

根据备注 4.13，$\Delta_\mu\in P(Z,\ \mathbb{R})$以及命题 4.12 第二部分 (ii) 中的断言 (a)–(d) 均成立。

现在来检验 $\Delta_\mu$ 也满足条件 (23)，对于 $\mu$ 足够大时成立。特别地，我们将证明

$$\mathrm{Gph}(-\Delta_\mu)\cap\big(\mathrm{Gph}(f\circ g^{-1})-(0_Z,r_0)\big)\subset\{(0_Z,0)\}, \tag{30}$$

对每个 $\mu>L_{V,\,0_Z}$。事实上，令 $\mu>L_{V,\,0_Z}$。那么存在 $\gamma$ 使得 $L_{V,\,0_Z}\le\gamma<\mu$，并且对每个 $(z,\ r)\in\mathrm{Gph}(f\circ g^{-1})$，都存在 $s_0\in f\circ g^{-1}(0_Z)$ 和 $b\in[-1,1]$ 满足

$$r=s_0+\gamma\|z\|\,b\ge r_0-\gamma\|z\|.$$

由于 $\mu>\gamma$，可知 $r-r_0>-\mu\|z\|$。

由命题4.16，

$$\mathrm{Gph}(-\Delta_\mu)=\{(z,-r)\in Z\times\mathbb{R}:(z,r)\in\mathrm{Gph}(\Delta_\mu)\}=\{(z,r)\in Z\times\mathbb{R}:r\le-\mu\|z\|\}.$$

因此，对每个 $z\neq0_Z$ 和 $r\in f\circ g^{-1}(z)$，都有 $(z,\ r-r_0)\notin\mathrm{Gph}(-\Delta_\mu)$，由此可得（30）。因此，$\Delta_\mu\in\Gamma_{r_0}$。现在应用命题 3.11，特别是由（8）给出的 $\Upsilon$ 的定义。定义 $S_\mu:=\Upsilon^{-1}(\Delta_\mu)\in\mathcal{S}_{r_0}$。那么，对每个 $x\in Z$，$S_\mu(x)=\mu\|x\|$。因此，对每个 $\mu>L_{V,\,0_Z}$，次线性映射 $S_\mu$ 都属于 $\mathcal{S}_{r_0}$。

最后，定理 3.14表明

$$r_0=\inf\{f(x)+S_\mu(g(x)):x\in\Omega\}=\inf\{f(x)+\mu\|g(x)\|:x\in\Omega\},$$

对于每个 $\mu>L_{V,\,0_Z}$。如果 $x_0\in\Omega$ 满足 $g(x_0)=0_Z$ 且 $f(x_0)=r_0$，那么 $f(x_0)+\mu\|g(x_0)\|=r_0$，因此 $x_0$ 使 (P[$\mu$]) 达到最小值。 □

**推论 4.18**。令 $Y=\mathbb{R}$，$Y_+=\mathbb{R}_+$，并定义

$$r_0:=\inf\{f(x):x\in\Omega,\ g(x)=0_Z\},$$

假设 $r_0\in\mathbb{R}$。设以下条件之一成立：

*(a)* 映射 $f$ 和 $g^{-1}$ 均为利普希茨连续，常值分别为 $L_f$ 和 $L_{g^{-1}}$，且 $\mu > L_f L_{g^{-1}}$。

*(b)* 映射 $g^{-1}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的，$f$ 在每个点 $x \in \Omega \cap g^{-1}(0_Z)$ 处都是利普希茨的，此外，以下条件之一成立：

*(b1)* $L_{f,g^{-1}(0_Z)} := \sup\{L_{f,x} \colon x \in g^{-1}(0)\} < \infty$ 且 $\mu > L_{f,g^{-1}(0_Z)}\ L_{g^{-1},0_Z}$；
*(b2)* $f$ 是常数为 $L_f$ 的利普希茨连续映射，且 $\mu > L_f\, L_{g^{-1},0_Z}$。

*Then*

$$r_0 = \inf\{f(x) + \mu\|g(x)\| : x \in \Omega\}. \tag{P[$\mu$]}$$

此外，若对某个可行点 $x_0 \in \Omega$ 有 $r_0 = f(x_0)$，则 $x_0$ 也是 (P[$\mu$]) 的一个解。

证明。 在情形 (a) 中，复合映射 $f \circ g^{-1}$ 是利普希茨连续的，其利普希茨常数为 $L_f L_{g^{-1}}$。特别地，$f \circ g^{-1}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的，并满足

$$L_{f\circ g^{-1},0_Z} \le L_f L_{g^{-1}}.$$

因此，定理 4.17 适用，并得出所需结论。

在情形 (b) 中，引理 4.7 确保 $f \circ g^{-1}$ 在 $0_Z$ 处是利普希茨的，且其常值严格小于 $\mu$。因此，定理 4.17 再次适用，结论得证。 □

# 5 集值向量均衡问题的一个应用

在建立了抽象的拉格朗日乘子理论，并验证其在利普希茨条件下成立之后，我们现在展示该理论在向量均衡问题中的适用性。
向量均衡问题为向量优化、博弈论和变分分析中涌现的一大类模型提供了统一框架。其定义性特征是，依据结果空间中由凸锥诱导的偏序，对可行偏差进行比较。我们不着重于标量化技术，而是采用真正的集值和向量化视角，将均衡条件重新表述为像空间中的约束优化问题。

我们方法的核心思想是将均衡条件嵌入参数优化框架，并将由此得到的乘子解释为一种几何对象，用以编码可容许比较方向与约束相互作用。

**集值向量均衡表述。**

设 $X$ 和 $Y$ 为赋范空间，且 $Y_+ \subset Y$ 为在 $Y$ 上诱导偏序的闭凸锥。考虑一个集值双函数

$$\bar{F} : X \times X \rightrightarrows Y,$$

$\bar{}$在 $X \times X$ 的对角线上为单值，也就是说，对于每个 $x \in X$，$F(x,\ x)$ 都是单元素集。设 $\Sigma \subset X$ 是满足一致性条件的非空可行集

$$\bar{F}(x,x) = \{0_Y\} \quad \text{for all } x \in \Sigma,$$

该条件刻画了给定可行点处不存在偏差效应的情形。

相应的集值向量均衡问题 $(E)$旨在寻找一点 $x_0 \in \Sigma$，使得不存在任何容许偏差能够相对于 $Y_+$ 所诱导的序带来严格改进。

**定义 5.1.** 若 $0_Y$ 是集合中的极小元，则称点 $x_0 \in \Sigma$ 是 $(E)$ 的一个解

$$\bar{F}(x_0, \Sigma) := \bigcup_{x \in \Sigma} \bar{F}(x_0, x),$$

也就是说，若

$$\bar{F}(x_0, x) \cap \left(-Y_+\right) \subset Y_+, \quad \forall x \in \Sigma.$$

该条件体现了一种稳定性：在均衡点 $x_0$处，每个可行偏差所产生的结果相对于序锥 $Y_+$，要么被参考值 $0_Y$ 支配，要么与之不可比较。

**化为约束优化问题。** 为了将均衡问题 $(E)$ 与拉格朗日乘子框架联系起来，我们固定一个候选均衡点 $x_0 \in \Sigma$，并定义映射

$$F : X \rightrightarrows Y, \qquad F(x) := \bar{F}(x_0, x),$$

and

$$G : X \rightrightarrows Y, \qquad G(x) := \bar{F}(x, x).$$

一致性条件蕴含 $G(x_0) = \{0_Y\}$，因此 $x_0$ 对约束集值优化问题是可行的

$$\text{Minimize } F(x) \quad \text{subject to } x \in X,\ 0_Y \in G(x),$$

其形式恰为$(P(0_Y))$，这是前几节所研究的形式，其中 $Z = Y$。此外，由于 $x_0$ 是（E）的一个解，因此 $0_Y \in \mathrm{ND}(P(0_Y))$，因此，定理3.5 的假设在此情形下归结为条件 $\Gamma_{0_Y} \neq \varnothing$。

在这一重新表述中，均衡要求被编码为一个约束，而偏离映射 $F$ 则充当目标函数。

**乘子的存在与解释。** 以下结果是一般拉格朗日乘子理论的直接推论。

**定理5.2。** 设 $x_0 \in \Sigma$ 是均衡问题$(E)$的一个解，并定义 $F$ 和 $G$如上所述。假设定理*3.5* 的假设均成立。那么，存在一个凸过程 $\Delta \in P(Y, Y)$ 使得 $0_Y$是规划问题的一个极小点

$$\textit{Minimize } F(x) + \Delta(G(x)) \quad \textit{subject to } x \in \Omega. \qquad (P[\Delta_E])$$

此外，

$$\Delta(G(x_0)) \cap (-Y_+) \subseteq Y_+. \qquad (31)$$

下面的例子说明了定理5.2 在一个采用非标准序锥的无限维情形下的应用。

**例 5.3.** 设 $X$ 配备上确界范数，$Y$ 配备欧几里得范数。定义序锥

$$Y_+ := \Big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{\sqrt{2}}{2}\, y_1 \le y_2 \le \tfrac{\sqrt{3}}{2}\, y_1,\ y_1 \ge 0\Big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

w 其为闭且凸。令 $\Sigma := \{u \in X :\ u(0) = 0\}$ 并定义 $F\colon \Omega \times \Omega \to Y$b y

$$\bar{F}(u, v) := \Big(u(0)^2 + (v(0) - u(0))^2, \int_0^1 (u(s) - v(s))\, ds\Big).$$

均衡点。</style}对于，我们有 $(,\ u) = (0,\ 0)$，验证了一致性条件。令 $u_0 := 0 \in \Sigma$，对于任意 $v \in \Sigma$，我们得到 $\bar{F}(u_0,\ v) = (v(0)^2,\ -\int_0^1 v(s)\ ds) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$，这意味着 $F(u_0,\ \Sigma) \cap (-Y_+ \setminus \{0_Y\}) = \varnothing$。因此，$u_0$ 是 $(E)$ 的一个解。

乘子过程。定义 $F(v) := F(u_0,\ v)$ 和 $G(v) := F(v,\ v)$。考虑由以下给出的过程$\Delta :\ Y \rightrightarrows Y$

$$\Delta(z) := \Big\{y \in \mathbb{R}^2 : y_2 - \tfrac{\sqrt{2}}{2} y_1 \ge \|z\|,\ \tfrac{\sqrt{3}}{2} y_1 - y_2 \ge \|z\|,\ y_1 \ge 0\Big\}.$$

直接可验证，$\mathrm{Gph}(\Delta)$ 是一个闭凸锥，因为定义不等式在正数缩放和凸组合下保持成立，并且映射 $(z,\ y) \mapsto (y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 - \|z\|,\ \frac{\sqrt{3}}{2} y_1 - y_2 - \|z\|)$ 是连续的，而 $\mathrm{Gph}(\Delta)$ 是其关于 $[0, \infty) \times [0, +\infty)$ 的原像。

惩罚问题。对于任意 $v \in \Omega$，我们有 $F(v) + \Delta(G(v)) \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$。由于 $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \cap (-Y_+) = \{0_Y\}$，可知 $0_Y$ 是惩罚问题 $(P[\Delta_E])$ 的极小点。此外，$\Delta(G(u_0)) \cap (-Y_+) = \{0_Y\}$，从而验证了条件 (31)。

## 资金支持

作者获得了项目 PID2021-122126NB-C32 的资助，该项目由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 和 FEDER（欧洲建设之道）资助。

## 参考文献

[1] E.-A. Abreu, J. Etcheberry，凸过程的 Hahn–Banach 定理和 Banach–Steinhaus 定理，Period. Math. Hungar. 20 (1989) 289–297。[2] C.D. Aliprantis, R. Tourky，《Cones a nd Duality》，Graduate Studies in Mathematics，第 84 卷，美国数学会，普罗维登斯（罗得岛州），2007。[3] J.P. Aubin, H. Frankowska，《集值分析》，Systems & Control: Foundations & Applications，第 2 卷，Birkhäuser，波士顿（马萨诸塞州），1990。[4] H.H. Bauschke, P.L. Combettes，《希尔伯特空间中的凸分析与单调算子理论》，第 2 版，CMS Books in Mathematics，Springer，纽约，2017。[5] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato, J. Eckstein，通过交替方向乘子法进行分布式优化与统计学习，Found. Trends Mach. Learn. 3 (1) (2011) 1–122。

[6] S. Boyd, L. Vandenberghe，《凸优化》，剑桥大学出版社，剑桥，2004。[7] I. Ekeland, R. Temam，《凸分析与变分问题》，应用数学经典丛书，第 28 卷，工业与应用数学学会，费城（宾夕法尼亚州），1999（1974 年法文原版的英文译本）。[8] F. García-Castaño, M.A. Melguizo Padial, V. Montesinos，锥的几何及其若干应用，《数学分析与应用杂志》431 (2) (2015) 1178–1189。[9] F. García-Castaño, M.A. Melguizo Padial，关于可凹陷性及具有较大对偶的锥，《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志 A辑：数学》113 (3) (2019) 2679–2690。[10] F. García-Castaño, M.A. Melguizo-Padial，Henig 全局真有效点的存在性与稠密性定理，《优化》74 (10) (2024) 1–20。[11] F. García-Castaño, M.A. Melguizo Padial, G. Parzanese，局部凸空间中凸集的凹陷点与锥的弱性质（$\pi$），《西班牙皇家精确、物理与自然科学学会杂志 A辑：数学》115 (3) (2021) 110。[12] F. García-Castaño, M.A. Melguizo-Padial，通过尖过程研究集值凸规划中的拉格朗日乘子、对偶性与灵敏度，《优化理论与应用杂志》192 (3) (2022) 1052–1066。[13] C. Gerth, P. Weidner，非凸分离定理及其在向量优化中的若干应用，《优化理论与应用杂志》67 (2) (1990) 297–320。[14] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zˇalinescu，《偏序空间中的变分方法》，第 2 版，CMS/CAIMS 数学丛书，第 7 卷，Springer，尚，2023。[15] A.A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu，《集值优化：应用导论》，《向量优化》，Springer，柏林、海德堡，2015。[16] D.G. Luenberger，《向量空间方法优化》，威利决策与控制丛书，约翰·威立父子公司，纽约，1969。[17] Y. Nesterov, A. Nemirovski，《凸规划中的内点多项式算法》，工业与应用数学学会应用数学研究丛书，第 13 卷，工业与应用数学学会，费城（宾夕法尼亚州），1994。[18] N. Parikh, S. Boyd，近端算法，《优化基础与趋势》1 (3) (2014) 127–239。[19] R.T. Rockafellar，《凸分析》，普林斯顿数学丛书，第 28 卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1970。