arXiv:2602.06188v1 [math.LO] 5 Feb 2026

关于 P-LONKA 和与正则化簇的若干代数性质

S. BONZIO 和 G. ZECCHINI

Abstract. P-lonka 和是一种通用构造，可为正则化簇中的代数提供结构描述，其实例涵盖 Clifford 半群以及许多逻辑代数，包括对合双半格、博赫瓦尔代数和某些剩余结构。对于不含常元的多元类型，次直不可约代数、子簇格和自由代数等性质已得到充分理解；但涉及零元运算的一般情形仍鲜有探索。本文将这些结果推广到含常元的代数类型，并对正则化簇的子簇格中的分裂提出了新的见解。此外，我们完整刻画了 P-lonka 和的同余，并证明该构造保持满射满同态和单射单同态。

1. 引言

P-lonka 和在 20 世纪 60 年代末由 Jerzy P-lonka 提出 [25], ，是普遍代数中最重要的工具之一，可用于分解代数并刻画由正则恒等式定义的簇。从历史上看，这一构造起源于半群理论，最初是为表示 Clifford 半群而发展起来的。对半群理论研究者而言，这一构造通常称为群的强半格。近年来，P-lonka 和的适用范围已远超其最初领域，并在非经典逻辑研究中得到重要应用，为变量包含逻辑提供了自然的代数框架 [9]。此外，这一构造的应用也日益超出正则（化）簇理论的范围；事实证明，它在该领域十分有用 [33], ，并已拓展至剩余结构 [4, 6] 以及其他由非经典逻辑衍生 [11]、并与变量包含逻辑相关的代数类 [8, 9, 10]。

给定一个簇 $\mathcal{V}$，其正则化 $R(\mathcal{V})$ 定义为满足 $\mathcal{V}$ 所满足的全部正则恒等式（即等式两边出现相同变量的恒等式）的簇。在附加一些温和假设的情况下，可以证明 $R(\mathcal{V})$ 中的每个代数都是（或可表示为）代数的 P-lonka 和（取自半格直系），其中代数属于 $\mathcal{V}$。这些假设是： $\mathcal{V}$ 为强非正则（即 $\mathcal{V} \models x \cdot y \approx x$，其中 $x \cdot y$ 是某个可由项定义的运算）；这一性质为大多数已知的非正则簇所具备；并且其为多元型（即 $\mathcal{V}$ 的语言至少包含一个元数严格大于一的运算）。多年来，关于 P-lonka 和及正则化簇的若干基本代数性质已得到确立。这些性质包括次直不可约代数的刻画 [23], 、正则化簇的子簇格的描述 [16], ，以及自由代数的构造 [32]。此外，Pastijn 的工作 [24] 通过构造 P-lonka 和，为理解同余扩张性质（CEP）和 amalgamation 性质（AP）的保持性提供了关键见解。然而，仔细审视现有文献便会发现一个显著局限：尽管 P-lonka 和的构造已推广至（可能）包含常元的代数 [30], ，但绝大多数这些结果仅针对不含常元的多元代数语言得到了证明。本文旨在从若干新方向拓展 P-lonka 和及正则（化）簇的结构理论。本文的主要贡献有四项，具体着重于：

(1) 扩展至可能含有常元的代数类型。我们将关于次直不可约代数、子簇格以及自由代数描述的已知结果推广至可能含有常元的代数类型。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 03C05,08B15, 08B20.*Key words and phrases.* P-龙卡和、正则化簇、子簇格、分裂、自由代数、同余、满同态的满射性。

(2) 子簇格中的分裂。我们提出了关于正则化簇 $R(\mathcal{V})$ 的子簇格中分裂对的全新结果（其中 $\mathcal{V}$ 为强非正则）。尽管这项研究对 $R(\mathcal{V})$ 本身具有价值，我们还表明，它也会影响 $\mathcal{V}$ 的子簇格中的分裂。(3) 同余的描述。我们完整描述了 P-lonka 和的同余，解决了 [9] 中列出的一个未决问题。(4)（某些）范畴性质的保持。我们证明，满态射的满射性和单态射的单射性在 P-lonka 和的构造下得以保持，因此会从（强非正则）簇 $\mathcal{V}$ 传递到其正则化 $R(\mathcal{V})$。

本文结构如下。第2节汇集了关于 P-lonka 和正则（化）簇的必要预备知识，特别关注代数类型包含常元时所需的调整。第3节致力于研究正则化簇的子簇格，并刻画其中的次直不可约代数。在这里，我们将经典结果推广到一般情形，即代数可能包含零元运算。第4节考察正则化簇的子簇格中的分裂。第5节全面描述正则化簇中的自由代数。特别是，我们展示了如何将 Romanowska [32]的刻画推广到自由代数的情形，并考虑签名中包含常元的情况。第6节通过说明 P-lonka 和的同余如何由被加项的同余及底层半格构成，来探讨如何刻画 P-lonka 和的同余。作为主要结果的应用，我们还专设两个小节讨论生成同余和因子同余。最后，在第7节中，我们证明满同态的满射性和单态射的单射性这两项性质在 P-lonka 和的构造下得以保持，因此也从强非正则簇 $\mathcal{V}$ 传递到其正则化 $R(\mathcal{V})$。

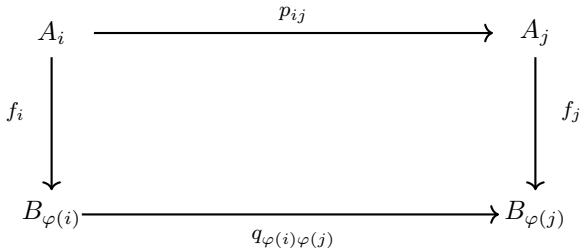
2. Preliminaries

我们假设读 者对普遍代数有一定了解（标准参考文献见 [1, 12]）。

全文中，我们假设代数定义在任意的多元（代数）语言中，其型为 τ（因此至少包含一个元数严格大于 1 的运算符号），并且可能包含常元符号；如非必要，不特别提及 τ。对于假设其型不包含常元符号的情形，我们会明确说明。

相似代数的半格直系是一个三元组 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq) \{p_{ij}\}_{i\leq j})$，由一个（并）半格$\mathbf{I} = (I, \leq)$（其具有最小元 i_0[1]，且并为 $\vee$）、一个由相似代数组成的族 $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$（其论域两两不交），以及一个同态族 $\{p_{ij}\}_{i\leq j}$ 构成；每个 $i \leq j \in I$对应一个同态，并满足p_{ii} 是恒等映射，且当 $i \leq j \leq k$ 时有 $p_{ik} = p_{jk} \circ p_{ij}$。

给定两个代数的半格直系 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq) \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 和 $\mathbb{B} = (\{\mathbf{B}_j\}_{j\in J}, (J, \leq) \{q_{kl}\}_{k\leq l})$，从 $\mathbb{A}$ 到 $\mathbb{B}$的态射是一个对 $\langle\varphi, \{f_i\}_{i\in I}\rangle$，其中 $\varphi\colon I \to J$是半格同态，且对每个 $i \in I$， $f_i\colon A_i \to B_{\varphi(i)}$ 是同态，并且对每个i， $j \in I, i \leq^I j$，下图交换。



采用上述态射概念，半格正向系统构成一个范畴（参见例如 [9]）。

[1]在处理含有常元的类型时，最小元的存在是必要的；在没有常元的情况下，这一要求可以放宽。

给定任意代数半格直系 $\mathbb{A}=(\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I},(I,\leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$，可以定义一个新的代数 A，其论域为（不相交）并集 $A=\bigcup_{i\in I}A_i$，其 n元运算（其中 $n\geq 1$）定义为 $g^{\mathbf{A}}(a_1,\dots a_n):=g^{\mathbf{A}_j}(p_{i_1j}(a_1)\dots,p_{i_nj}(a_n))$，其中 $a_1\in A_{i_1},\dots,a_n\in A_{i_n}$且 $j=i_1\vee\cdots\vee i_n$；若型中包含常元，则每个常元都与其在 $\mathbf{A}_{i_0}$中的解释等同，即 $c^{\mathbf{A}}:=c^{\mathbf{A}_{i_0}}$（对每个常元符号 $c\in\tau$）。这个新代数 A（有时记作 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$）称为该系统中代数的 P-lonka 和，以纪念 J. P-lonka；他受群的强半格结构启发，最早在《普遍代数》 [25, 26, 27, 30, 31]中引入了这一构造。

判断给定的任意代数 **A** 能否分解为某个（由代数组成的）半格直系上的 P-lonka 和，与代数 **A**上是否存在一种特殊运算有关，这种运算称为分割函数。具体而言，函数 $\odot\colon A^2\to A$ 是代数**A** 上的分割函数，如果对所有 $a,b,c\in A$, $a_1,...,a_n\in A$，以及任意元数为 $n\geqslant 1$ 的运算 g和任意常量运算c，以下条件均成立。

(PF1) $a\odot a=a$, (PF2) $a\odot(b\odot c)=(a\odot b)\odot c$, (PF3) $a\odot(b\odot c)=a\odot(c\odot b)$, (PF4) $g(a_1,\dots,a_n)\odot b=g(a_1\odot b,\dots,a_n\odot b)$, (PF5) $b\odot g(a_1,\dots,a_n)=b\odot a_1\odot_{\dots}\odot a_n$, (PF6) $a\odot c^{\mathbf{A}}=a$.

以下给出了 P-lonka 和与分割函数之间的联系。

定理 1 (P-lonka 分解定理)。 设 **A** 是型为 τ 、带有分割函数 $\odot$的代数。以下条件成立：

(1) A 可划分为 $\{A_i\}_{i\in I}$，其中任意两个元素 a、$b\in A$ 属于同一个分支 A_i当且仅当

$$a=a\odot b\ and\ b=b\odot a.$$

(2) $\leq$ 上由下式给出的关系 I

$$i\leq j\quad if\ and\ only\ if\ there\ exist\ a\in A_i,b\in A_j\ s.t.\ b\odot a=b$$

是一个偏序，且 $\langle I、\leq\rangle$ 是一个半格。

(3) 对于所有满足 $i\leq j$和 $b\in A_j$的 i、$j\in I$，由 $x\mapsto p_{ij}:=(x)=x\odot b$定义的映射 $p_{ij}\colon A_i\to A_j$是一个同态。(4) $\mathbb{A}=\langle\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}、\langle I、\leq\rangle、\{p_{ij}\colon i\leq j\}\rangle$是一个代数直系系统，使得 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})=\mathbf{A}$。

我们回顾一下，当**A**是一个不包含常元符号的型中的代数时，定理 1 还可以进一步加强，即每个代数 $\mathbf{A}_i$（在系统 $\mathbb{A}$ 中）都是$\mathbf{A}=\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$的子代数（见 [25]）。此外，[25, Th. II] 还证明了：(i) 代数**A** 的每一种 P-lonka 和表示 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$，都可以从**A**上的某个适当的分割函数 $\odot$ 出发得到；(ii)：（在给定代数上的）分割函数与 P-lonka 和表示之间存在一一对应关系。

我们有时将半格正向系统（或 P-lonka 和）中的代数$\mathbf{A}_i$ 和同态 $\{p_{ij}:\ i\leq j\}$ 分别称为纤维 和过渡态射。

回顾一下，簇 是一个在子代数、同态像和积的构造下封闭的代数类；根据著名的 Birkhoff 定理，这等价于它是一个等式类。

恒等式 $\varphi\approx\psi$ （在任意代数语言中）若满足：分别出现在 φ 和 ψ 中的变量集合相同，即 $Var(\varphi)=Var(\psi)$，则称为正则恒等式。不满足正则性的恒等式称为非正则恒等式。P-lonka 和 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 的构造（基于代数的半格直系系统 $\mathbb{A}$ 的非平凡半格直系）满足 $\mathbb{A}$ 中任意代数所满足的所有正则恒等式，并使其他任何恒等式失效（见 [25, Th. I]）。若一个簇 $\mathcal{V}$ 仅满足正则恒等式，则称其为正则簇；非正则的簇称为非正则簇。正则簇的例子包括半群、幺半群和半格（以及许多其他簇，后文将会看到）。在非正则簇中，我们将特别关注由下述恒等式定义的那些簇。

定义 1. 簇 $\mathcal{V}$（型为 τ）是强非正则 的，如果存在一个项可定义的（τ）公式 $f(x,y)$（其中 x,y确实出现），使得 $\mathcal{V}\models f(x,y)\approx x$。

强不规则簇的例子比比皆是（而要举出一个并非强非正则的非正则簇的例子则很困难），并且包括群簇、环、格、任何具有格（或群）归约的簇，以及同余模簇（见 [2]）。

给定一个强不规则簇 $\mathcal{V}$，我们用 $R(\mathcal{V})$ 表示正则化 $\mathcal{V}$，也就是说，满足且仅满足在 $\mathcal{V}$中成立的正则恒等式的簇。正则化 $R(\mathcal{V})$ 通常称为正则化簇。有趣的是，正则化簇与 P-lonka 和之间彼此关联。

定理 2. [31, 定理 7.1] 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。那么以下事实等价：
(1) $\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$；(2) $\mathbf{A} = \mathcal{P}_t(\mathbb{A})$，其中 $\mathbb{A}$ 是 $\mathcal{V}$ 中代数的半格直系。

前一定理的内容可以推广到范畴，表述为：（代数）范畴$R(\mathcal{V})$ 等价于 $\mathcal{V}$ 中代数的半格有向系统范畴（见 [9, 第 3] 章）。

一些正则化簇已得到广泛研究：下面回顾其中的一些。

例 1。 *Clifford* 半群 簇是群簇的正则化（这由定理 2 以及 Clifford 半群作为群的强半格这一众所周知的结构刻画可得，例如参见 [14, 20]）。在 Clifford 半群中，项函数 $f(x, y) := x \cdot y \cdot y^{-1}$ 起着分割函数的作用。

例 2。 布尔代数簇的正则化（例如参见 [30]）也称为对合双半格，并且已结合（弱）克林逻辑得到广泛研究（见 [9, 5]）。在对合双半格中，吸收律的左端，即 $f(x, y) := x \vee (x \wedge y)$（或$f(x, y) := x \wedge (x \vee y)$），起着分割函数的作用。

例 3. 斜括号 $\mathbf{G} = (G, \cdot, \circ, ^{-1}, ', e)$ 是一种型为 $(2, 2, 1, 1, 0)$ 的代数，其（项）约化 $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ 和 $(G, \circ, ', e)$ 是群，并满足（正则）恒等式 $x \circ (y \cdot z) \approx (x \circ y) \cdot x^{-1} \cdot (x \circ z)$。
显然，斜抱构成一个强非正则簇（具有两个群约化）。其正则化最近在 [13]（另见 [34]）中以对偶弱括号之名被引入并研究；对偶弱括号（本质上）定义为型为 $(2, 2, 1, 1)$ 的代数 $\mathbf{S} = (S, \cdot, \circ, ^{-1}, ')$，其中 $(S, \cdot, ^{-1})$ 和 $(S, \circ, ')$ 是 Clifford 半群 [2]，并满足定义斜括号的恒等式以及（附加恒等式） $x \cdot x^{-1} \approx x \circ x'$。在对偶弱括号中，项 $x \cdot y \cdot y^{-1}$ 和 $x \circ y \circ y'$ 重合，从而得到相同的分割函数（见例 1）。

3. Subvarieties and subdirectly irreducible members of a regular(ized) variety

本节将说明，[16]中给出的正则化簇（强非正则簇的正则化）的子簇格描述，同样适用于定义在包含常元符号的语言上的簇（见定理 5）。为了证明主要结果，我们首先需要引入一种半格式分解。这种分解由 [28] 引入，比 P-lonka 和更一般，适用于非正则簇的正则化——但一般不适用于强非正则簇的正则化（见定理 3）。

定义 2. 设 τ 是带常元的代数类型，$\tilde{\tau}$ 表示元数~非零的运算符号集合。代数$\mathbf{A}$ 的全非零元约化 是代数$\mathbf{A}$，其论域 A 与$\mathbf{A}$ 相同，运算~由 $f^{\mathbf{A}} = f^{\mathbf{A}}$定义，对每个 $f \in \tilde{\tau}$均如此。

定义 3. 代数 $\mathbf{A}$ 是一个子代数半格 $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$，若 $(I, \leq)$ 是一个带最小元的半格i_0，并且 $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in I}$ 是一个由两两不交的代数组成的族，满足：
(1) $A = \bigcup A_i$;$i \in I$~(2) $\mathbf{A}_{i_0} \leq \mathbf{A}$ 和$\mathbf{A}_i \leq \mathbf{A}$，对每个 $i \in I \setminus \{i_0\}$；(3) 对每个元数为 $n \geq 1$ 的运算 f，$f^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{A}_{i_1 \vee ... \vee i_n}$，其中 $a_1 \in A_{i_1}, ..., a_n \in A_{i_n}$，并且对型中的每个常元 c，$c^{\mathbf{A}} \in A_{i_0}$。

[2]对偶弱括号的定义实际上更简单，只要求（其约化结构）$(S, \cdot, ^{-1})$ 是 Clifford，而 $(S, \circ, ')$ 只需是一个逆半群；在其他附加恒等式的条件下，即可推出后者也是 Clifford。

注意，每个可分解为 P-隆卡和的代数（见定理 1）也是子代数半格，尽管反过来一般并不成立。尽管如此，子代数半格仍满足一些与 P-隆卡和相同的性质。

如果半格 $(I, \leq)$ 是非平凡的，即包含多个元素，我们就称子代数半格 $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$ 是非平凡的。以下结果的证明从略，因为它们与不含常元的语言情形完全相同。

引理 1。 [16, 引理 1] 设 $\mathbf{A}$ 是子代数半格 $\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}$，且 $t = t(x_1, ..., x_n)$ 是一个 n 元项（在$\mathbf{A}$的代数语言中）。那么对任意 $a_1 \in A_{i_1}, ..., a_n \in A_{i_n}$, $t^{\mathbf{A}}(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{A}_i$，其中$i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$。

引理 2。子代数半格是非平凡的，当且仅当它仅满足正则恒等式（在一个固定的变量集合中）。

定理 3。 [30, 定理 4] 设 $\mathcal{V}$ 是一个（型为 τ 的）非正则簇，且 $\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$。那么 $\mathbf{A}$ 是子代数半格。特别地，若型 τ 包含常元，则 $\mathbf{A}_{i_0} \in \mathcal{V}$。

给定一个簇 $\mathcal{V}$，我们用 $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ 表示其子簇格（用 $L(\mathcal{V})$ 表示其论域），并用 $\preccurlyeq$表示 $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ 中的覆盖关系。

注 1。对于 $\mathcal{V}$ 一个簇，我们有 $\mathcal{V} \in \mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$。此外，对于 $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ 满足 $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ 的 $\mathcal{V}$ 子簇，有 $R(\mathcal{V}_1) \subseteq R(\mathcal{V}_2)$。

对于不含常元的情形，以下结果本质上是作为 [16, 定理 1 和定理 2] 得到证明的；为便于阅读，我们将其列出。

Theo注 4。 设 $\mathcal{V}$ 是一个语言中（可能）含有常元符号的簇。那么 :

(1) 若 $\mathcal{V}$ 是非正则的，则对每个 $\mathcal{W} \in L(\mathcal{V})$, $\mathcal{W} \preccurlyeq R(\mathcal{W})$ 都属于 $\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$; (2) 若 $\mathcal{V}$ 是强非正则的，则由 h 定义的映射 $\mathcal{W} \mapsto R(\mathcal{W})$ 是 $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ 的一个嵌入 i n $\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$。

证明。(1) 设 $\mathcal{V}$ 是非正则的，因此存在一个非正则恒等式 $p \approx q$（涉及 $\mathcal{V}$的语言中的某个无限变量集 X），使得 $\mathcal{V} \models p \approx q$，因此对于任意 $\mathcal{W} \in L(\mathcal{V})$，都有 $\mathcal{W} \models p \approx q$，也就是说，每个 $\mathcal{W} \in L(\mathcal{V})$ 也是非正则的，从而 $\mathcal{W} \subsetneq R(\mathcal{V})$。设 $\mathcal{W}' \in L(R(\mathcal{V}))$，使得 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}' \subseteq R(\mathcal{W})$：我们要证明两个包含关系中至少有一个不是严格的。分两种情况讨论：

若 • $\mathcal{W}'$ 是正则的，则根据注记 1 $R(\mathcal{W}) \subseteq R(\mathcal{W}') \subseteq R(R(W)) = R(\mathcal{W})$，因此 $\mathcal{W}' = R(\mathcal{W}') = R(\mathcal{W})$。

• $\mathcal{W}'$ 是非正则的。根据 [12, 定理 11.4]，存在一个自由代数$\mathbf{U}$，使得 $\mathcal{W}' = HSP(\mathbf{U})$，因此$\mathbf{U} \in \mathcal{W}' \subseteq R(\mathcal{W}') \subseteq R(\mathcal{W})$，所以$\mathbf{U} \in R(\mathcal{W})$。由于 $\mathcal{W}$ 是非正则的，根据定理 3，我们有$\mathbf{U}$ 是子代数半格 $\{\mathbf{U}_i\}_{i\in I}$，且 $\mathbf{U}_{i_0} \in \mathcal{W}$（其中 i_0 是$\mathbf{I}$中的最小元）。但是$\mathbf{U} \in \mathcal{W}'$，所以$\mathbf{U}$ 满足至少一个非正则恒等式，因此根据引理 2，我们有 $|I| = 1$，也就是说$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{i_0} \in \mathcal{W}$。因此 $\mathcal{W}' = HSP(\mathbf{U}) \subseteq \mathcal{W}$ 且 $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$。

(2) 为了证明 h 是单射，假设对于某个 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in L$，我们有 $R(\mathcal{V}_1) = R(\mathcal{V}_2)$。($\mathcal{V}$) 按照上述推理，存在一个自由代数$\mathbf{U} \in \mathcal{V}_1$，使得 $\mathcal{V}_1 = HSP(\mathbf{U})$。因此$\mathbf{U} \in R(\mathcal{V}_1) = R(\mathcal{V}_2)$，所以$\mathbf{U} \in R(\mathcal{V}_2)$。现在，将证明(1)中的相同推理应用于此处，可得$\mathbf{U} \in \mathcal{V}_2$，因此 $\mathcal{V}_1 = HSP(\mathbf{U}) \subseteq \mathcal{V}_2$。 $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}_1$的证明类似。

为证明 h是格同态，令 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in L(\mathcal{V})$。我们有 $\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2 \subseteq R(\mathcal{V}_1) \vee R(\mathcal{V}_2) \subseteq R(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2)$；此外，根据 [30, 推论 2], $\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2$ 是非正则的，因此由 (1) 可得 $R(\mathcal{V}_1) \vee R(\mathcal{V}_2) = R(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2)$（因为$R(\mathcal{V}_1) \vee R(\mathcal{V}_2)$是正则的）。这证明了 h 是保并的。

最后，利用 -lonka 和分解（见定理 1）{style id='2'>A $\in R(\mathcal{V}_1) \cap R(\mathcal{V}_2)$，容易证明$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$，因此 $R(\mathcal{V}_1) \cap R(\mathcal{V}_2) \subseteq R(\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2)$，而反向包含关系显然成立。□

定理 4 允 许从任意非正则簇的一个正则化中为其提供一个方程基 n.

推论 1。 设 $\mathcal{V}$ 是一个非正则簇（其语言可能包含常元）， Σ 是 $R(\mathcal{V})$ 的一个方程基，且 $p \approx q$ 是 $\mathcal{V}$ 中成立的任意非正则恒等式。那么， $\Sigma \cup \{p \approx q\}$ 是 $\mathcal{V}$ 的一个方程基。

在以下例子中，我们分别给出布尔代数、群和斜brace这些簇的另一组方程基，其所依据的是它们各自正则化的方程基（见例1、2和3）。

例 4. 下面是对合双半格（见例2）在（代数）语言 $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$（型为（$2, 2, 1, 0, 0$））中的一个方程基（见 [5]）。

(1) $x \vee x \approx x$; (2) $x \vee y \approx y \vee x$; (3) $x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$; (4) $\neg\neg x \approx x$; (5) $x \wedge y \approx \neg(\neg x \vee \neg y)$; (6) $x \wedge (\neg x \vee y) \approx x \wedge y$; (7) $0 \vee x \approx x$; (8) $1 \approx \neg 0$.

因此，只需在 (1)–(8) 中添加例如单个恒等式 $x \approx x \vee (x \wedge y)$，即可公理化布尔代数。

例 5. Clifford 半群（例如参见 [20]）可按如下方式公理化（在语言 $\cdot, ^{-1}$ 中）：
(CS1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$; (CS2) $(x^{-1})^{-1} \approx x$; (CS3) $x \cdot (x^{-1} \cdot x) \approx x$; (CS4) $(x \cdot x^{-1}) \cdot (y \cdot y^{-1}) \approx (y \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot x^{-1})$; (CS5) $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x$.

由推论 1 可知，只需在 (CS1)-(CS5) 中加入恒等式 $x \cdot (y \cdot y^{-1}) \approx x$，便可公理化群。

例 6. 对偶弱括号在例 3 中引入，其公理化方式如下所示（例如参见 [34]）：

(DWB1) $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$; (DWB2) $(x^{-1})^{-1} \approx x$; (DWB3) $x \cdot (x^{-1} \cdot x) \approx x$; (DWB4) $(x \cdot x^{-1}) \cdot (y \cdot y^{-1}) \approx (y \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot x^{-1})$; (DWB5) $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x$. (DWB6) $x \circ (y \circ z) \approx (x \circ y) \circ z$;
(DWB7) $(x')' \approx x$; (DWB8) $x \circ (x' \circ x) \approx x$;
(DWB9) $(x \circ x') \circ (y \circ y') \approx (y \circ y') \circ (x \circ x')$;
(DWB10) $x \circ (y \cdot z) \approx (x \circ y) \cdot x^{-1} \cdot (x \circ z)$;
(DWB11) $x \cdot x^{-1} \approx x \circ x'$.

由推论 1 可知，上述恒等式加上单个恒等式 $x \cdot (y \cdot y^{-1}) \approx x$ 是（斜抱簇的）方程基。

下文中，我们用**2** 表示二元（链）半格（其论域为 $\{0, 1\}$）。

定理 5. 设 τ 是含有常元的代数语言，且 $\mathcal{V}$ 是强非正则的 τ-簇，则$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))) \cong \mathbf{L}(\mathcal{V}) \times \mathbf{2}$。

证明。 该证明与 [16, 定理 3] 的证明完全相同：我们仅给出其概要。设 ϕ: $\mathbf{L}(\mathcal{V}) \times \mathbf{2} \to \mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$ 定义如下：

$$\phi(\mathcal{W}, j) := \begin{cases} \mathcal{W}, \text{ for j=0;} \\ R(\mathcal{W}), \text{ for j=1.} \end{cases}$$

容易验证， ϕ 是一个单同态。为证明满射性，注意到如果 $\mathcal{W} \in L(\mathcal{V})$，那么 $\phi((\mathcal{W}, 0)) = \mathcal{W}$。因此，设 $\mathcal{W} \in L(R(\mathcal{V})) \setminus L(\mathcal{V})$。取一个自由代数U，使得 $\mathcal{W} = HSP(\mathbf{U})$。由于 $\mathcal{V}$ 是强非正则的，且$\mathbf{U} \in HSP(\mathbf{U}) = \mathcal{W} \subseteq R(\mathcal{V})$，由定理 2 可知，U是一个关于半格直系 $\mathbb{U} = (\{\mathbf{U}_i\}_{i \in I}, (I, \leq) \{p_{ij}\}_{i \leq j})$的P-lonka和，其中各代数属于 $\mathcal{V}$。令 X 为一个无限变量集，并分别用 $Id_{\mathbf{A}}(X)$和 $\mathcal{R}(Id_{\mathbf{A}}(X))$表示代数A中满足的、变量取自$X$ 的恒等式集合及其中正则恒等式构成的子集。于是，根据P-lonka和理论，

我们有 $\mathcal{R}(Id_{\mathbf{U}}(X)) = Id_{\mathbf{U}}(X) = \bigcap \mathcal{R}(Id_{\mathbf{U}_i}(X)) = \mathcal{R}(Id_{\prod_{i\in I}\mathbf{U}_i}(X))$。由于 $\mathcal{V}$ 是一个簇，我们有$\prod_{i\in I}\mathbf{U}_i \in \mathcal{V}$。令 $\mathcal{K} = HSP\left(\prod_{i\in I}\mathbf{U}_i\right)$，则 $\mathcal{K} \in L(\mathcal{V})$且 $Id_{\mathcal{R}(\mathcal{K})}(X) = \mathcal{R}(Id_{\mathcal{K}}(X)) = \mathcal{R}(Id_{\prod_{i\in I}\mathbf{U}_i}(X)) = Id_{\mathbf{U}}(X) = Id_{\mathcal{W}}(X)$，因此 $\mathcal{W} = \phi((\mathcal{K}, \mathbf{1}))$。

□

我们用 $\mathcal{T}$ 表示平凡簇，即满足任意恒等式的簇（在固定的代数语言中）。可以证明，平凡簇的正则化 $R(\mathcal{T})$ 是由 $\mathcal{SL}^{\tau}$ 构成的簇，它与半格簇项等价（详情参见 [31]）。此外，簇 $\mathcal{V}$ 是正则的，当且仅当它包含 $\mathcal{SL}^{\tau}$ 作为子簇 [3] [31, 命题 2.1]。稍微滥用一下记号，从现在起我们将簇 $\mathcal{SL}^{\tau}$ 简记为 $\mathcal{SL}$。

推论 2。 设 τ 是一种包含常元的代数复数语言，且 $\mathcal{V}$ 是一个非正则簇。那么 $R(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \vee \mathcal{SL}$。

3.1. 次直不可约代数。 [23] 中给出的次直不可约 P-lonka 和的刻画实际上也适用于包含常元符号的代数。我们回顾主要结果，并仅给出证明概要，因为证明过程与 [23] 中完全相同。

定义 4. 设$\mathbf{A}$ 是一个代数，$\infty \notin A$ 是一个平凡代数的论域。我们用$\mathbf{A}^*$ 表示半格直系系统（$\{\mathbf{A}_i = \mathbf{A}, \mathbf{A}_j = \{\infty\}\}, \{i < j\}, \{p_{ij}\}$）上的 P-lonka 和。

引理 3. 设$\mathbf{A}$ 是由代数构成的半格直系系统上的 *P-lonka* 和，该系统以$\mathbf{I} = (I, \leq)$为指标。若$\mathbf{A}$是次直不可约的，则$\mathbf{I}$ 是次直不可约的。

证明。 证明策略如下：

(1) 对每个 $\theta \in Con(I)$，关联一个同余 $\theta^{\mathbf{A}} \in Con(\mathbf{A})$，定义如下：

$$\text{for } a \in A_i, b \in A_j : (a,b) \in \theta^{\mathbf{A}} \iff \exists k \in I : i,j \leq k, (i,k),(j,k) \in \theta \text{ and } p_{ik}(a) = p_{jk}(b).$$

(2) 证明，对每个 $\theta \in Con(I)$，若 $\theta^{\mathbf{A}} = \Delta_{\mathbf{A}}$，则 $\theta = \Delta_{\mathbf{I}}$。**(3)** 证明，给定 $D \subseteq Con(\mathbf{I})$ 中的一个族，满足 $\bigcap D = \Delta_{\mathbf{I}}$，则 $\Delta_{\mathbf{I}} \in D$。论证采用反证法，考虑族 $D^{\mathbf{A}} = \{\theta^{\mathbf{A}} : \theta \in D\} \subseteq Con(\mathbf{A})$，$D_1 = \{\psi \in Con(\mathbf{I}) : \psi \neq \Delta_{\mathbf{I}}, \exists \theta \in D : \psi \subseteq \theta\}$, $D_2 = D \cup D_1$，并证明 $\bigcap D_2^{\mathbf{A}} = \Delta_{\mathbf{A}}$。

□

定义5。 非平凡代数 $\mathbf{A}$ 的元素 a 称为吸收元，如果对于每个运算符号f（元数为 $n \geq 1$），若 $a \in \{x_1, ..., x_n\}$，则 $f^{\mathbf{A}}(x_1, ..., x_n) = a$。

定理6。 [23, 主定理] 设 $\mathbf{A}$ 是簇 $\mathcal{V}$（可能含有常元符号）中代数的半格直系 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 上的 *P-lonka* 和。那么$\mathbf{A}$ 是次直不可约的，当且仅当以下情形之一成立：

(1) $\mathbf{A}$ 在 $\mathcal{V}$中是次直不可约的；(2) 存在$\mathbf{B} \in \mathcal{V}$，它是次直不可约且没有吸收元，并且$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}^*$。

证明。 由引理 3，$\mathbf{I}$是次直不可约的，也就是说，它是平凡的，或者（在同构意义下）是二元链 $i < j$。在前一种情形下，我们立即得到 **(1)**；在后一种情形下，定义 $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$ 如下：

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in \theta_1 \iff x = y \text{ or } x,y \in A_j;$$

$$\forall x,y \in A : (x,y) \in \theta_2 \iff \exists h \in \{i,j\} : x,y \in A_h \text{ and } p_{hj}(x) = p_{hj}(y).$$

$\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta$，因此 $\theta_1 = \Delta$ 或 $\theta_2 = \Delta$（因为$\mathbf{A}$ 是次直不可约的），且在这两种情况下，$|A_j| = 1$，因此$\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_i^*$。最后，可以（通过反证法）证明$\mathbf{A}_i$ 没有吸收元，且$\mathbf{A}_i$ 是次直不可约的。

□

推论3. [23, 推论] 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇（可能含有常元符号）。那么$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 是次直不可约的，当且仅当出现以下情形之一：

[3]假设 代数类型至少包含一个元数大于1的运算，这一点对该结果至关重要。

(1) $\mathbf{A}$在 $\mathcal{V}$中是次直不可约的；(2) 存在一个次直不可约代数$\mathbf{B} \in \mathcal{V}$，使得 $\mathbf{A} = \mathbf{B}^*$。

推论4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。则$\mathbf{A}$ 在 $R(\mathcal{V})$ 中是简单的，当且仅当$\mathbf{A}$ 在$\mathcal{V}$ 中是简单的，或者$\mathbf{A}$ 是二元半格。

证明。 设$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$是简单的，则$\mathbf{A}$ 也是次直不可约的，并且由推论3，$\mathbf{A}$ 在 $\mathcal{V}$ 中是次直不可约的，特别地是简单的，或者存在 $\mathcal{V}$ 的一个次直不可约成员$\mathbf{B}$，使得$\mathbf{A} = \mathbf{B}^*$。注意到$\mathbf{B}$ 不能是非平凡的，否则同余 $\nabla^{\mathbf{B}} \cup \{(\infty, \infty)\} \notin \{\Delta^{\mathbf{B}^*}, \nabla^{\mathbf{B}^*}\}$将与$\mathbf{A}$ 是简单的这一假设相矛盾。因此，$\mathbf{B}$ 是平凡的，且$\mathbf{A}$ 是二元半格。反之显然。□

4. Splittings in regular varieties

正则化簇的子簇格的刻画对于描述这种格中的分裂 非常有用，而这正是本节的内容。

给定一个格 $\mathbf{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$，我们分别用 $\uparrow a$ 和 $\downarrow a$ 表示元素 a 的上集和下集，即 a 分别为 $\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}$、$\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$。回忆一下，元素对$a, b \in L$（其中 $a \not\leq b$）将 $\mathbf{L}$ 分裂，是指对于任意 $c \in L$，都有 $a \leq c$ 或 $c \leq b$；在这种情况下，(a, b) 被称为一个分裂对，且 $L = \uparrow a \cup \downarrow b$。显然， a 是一个并不可约元，而 b 是一个交不可约元。若 $\mathbf{L} = L(\mathcal{V})$ 是给定簇 $\mathcal{V}$ 的子簇格，那么对于每个分裂对（$\mathcal{V}_1$，$\mathcal{V}_2$），都有：

- $\mathcal{V}_1 = V(\mathbf{A})$，其中 $\mathbf{A}$ 是 $\mathcal{V}$ 中的一个次直不可约有限生成代数（$\mathbf{A}$ 被称为分裂代数）；
- $\mathcal{V}_2$ （相对于 $\mathcal{V}$）由单个恒等式公理化，该恒等式称为分裂恒等式。

分裂代数（在一个簇中）与簇的投射成员[4] 相关联（参见例如 [22]）。特别地，以下内容是 A. Day 一般结果的一个有用推论（[15], [22, 定理 2.11]）。

推论 5. 簇 $\mathcal{V}$ 中的每个投射次直不可约代数$\mathbf{P}$ 在$\mathbf{L}(\mathcal{V})$中是分裂的 .

现在让我们介绍正则簇中分裂对的主要例子之一 s.

例 7. 对于强不规则簇 $\mathcal{V}$，对（$\mathcal{SL}$， $\mathcal{V}$）在格$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$中是分裂的（这直接由定理 5 得出）。相应地， $\mathcal{SL}$ 由二元半格生成，而 $\mathcal{V}$ 由形如 $x \cdot y \approx x$的单个恒等式公理化，其中某个运算 $x \cdot y$在$R(\mathcal{V})$中充当分割函数，并见证 $\mathcal{V}$ 的强不规则性（参见例如 [31]）。

当 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇时，$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$本质上由两个同构的$\mathbf{L}(\mathcal{V})$副本构成（根据定理 5），即$\mathbf{L}(R(\mathcal{V})) = \mathbf{L}(\mathcal{V}) \cup \mathbf{L}_R$，其中$\mathbf{L}_R$ 是$\mathbf{L}(\mathcal{V})$的同构副本，由 $L(\mathcal{V})$中所有簇的正则化构成，因此其顶元和最小元分别为 $R(\mathcal{V})$ 和 $\mathcal{SL}$ 。特别地，$\mathbf{L}(\mathcal{V}) \cong \mathbf{L}_R$，通过映射 Φ 将 $\Phi(\mathcal{W})$映至 $= R(\mathcal{W})$。这些观察得出以下结论。

引理 4. 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇，且 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \in L(\mathcal{V})$。则以下各项等价：(i) $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ 是$\mathbf{L}(\mathcal{V})$中的一个分裂对；(ii) $(R(\mathcal{V}_1)\ R(\mathcal{V}_2))$ 是$\mathbf{L}_R$中的一个分裂对；(iii) $(\mathcal{V}_1, R(\mathcal{V}_2))$ 是$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$中的一个分裂对。

通常，寻找分裂恒等式是一项困难的任务，有时需要借助临时方法来完成（例如，参见[21] 关于海廷代数的讨论）。不过，考察 $R(\mathcal{V})$或许会有所帮助，具体如下。

定理 7. 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。那么对于 $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ 在 $\mathbf{L}(\mathcal{V})$ 中的每个分裂对，都存在一个 $\mathcal{V}$ 的方程基，使得该分裂恒等式是正则的。

证明。 根据推论 1， $\mathcal{V}$ 的一个方程基为 $\Sigma \cup \{x \cdot y \approx x\}$，其中 Σ 是正则化 $R(\mathcal{V})$的一个方程基，而 $x \cdot y$是 $\mathcal{V}$的语言中的一个二元项。设$(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$是 $\mathcal{V}$中的一个分裂对。那么，根据引理 4，$(R(\mathcal{V}_1)\ R(\mathcal{V}_2))$是$\mathbf{L}_R$ （$\mathbf{L}(R)$的正则子簇之格）中的一个分裂对。这意味着存在一个单个正则恒等式 $\rho \approx \tau$，它相对于 $R(\mathcal{V})$公理化了 $R(\mathcal{V}_2)$。接下来

[4]有时也称为 *weakly projective* （例如参见 [18]）。

根据推论 1，存在一个二元项 $t(x,y)$（属于 $\mathcal{V}$的语言），使得 $\Sigma\cup\{\rho\approx\tau\}\cup\{t(x,y)\approx x\}$是 $\mathcal{V}_2$的一个方程基。另一方面，由于$(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$是 $\mathcal{V}$中的分裂对，$\mathcal{V}_2$ 可由一个单个恒等式相对于 $\mathcal{V}$公理化：我们断言 $\rho\approx\tau$ 就是这样的恒等式。注意，$\mathcal{V}_2\models x\cdot y\approx x$（因为 $\mathcal{V}_2\subset\mathcal{V}$），且 $\mathcal{V}_2\models t(x,y)\approx x$，因此 $\mathcal{V}_2\models x\cdot y\approx t(x,y)$。这意味着 $\mathcal{V}_2$的一个方程基为$\Sigma\cup\{x\cdot y\approx x\}\cup\{\rho\approx\tau\}$，即 $\mathcal{V}_2$可由 $\rho\approx\tau$相对于 $\mathcal{V}$公理化，换言之，$\rho\approx\tau$是$(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$的分裂恒等式。□

为了找出定理 7 中所得的正则分裂恒等式，必须寻找强不规则簇 $\mathcal{V}$ 的一个特定方程基（见推论 1），它由下列各项组成：

- $R(\mathcal{V})$ 的任意方程基 Σ；
- 见证 $\mathcal{V}$ 之强非正则性的单个恒等式 $x\cdot y\approx x$。

尽管这可能导致考虑强不规则簇 $\mathcal{V}$ 的不寻常方程基，但该过程并不复杂（见例 4、5 和 6）。由定理 7 的证明，我们立即得到。

推论 6. 设 $\mathcal{V}$ 为强不规则簇。则 $\mathcal{V}$ 中的分裂对 $(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$ 与 $R(\mathcal{V})$ 中的分裂对 $(\mathcal{V}_1,R(\mathcal{V}_2))$ 具有相同的（正则）分裂恒等式。

定理 8. 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。那么，当且仅当$(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$ 是$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$ 中的一个分裂对时，$(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)=(\mathcal{SL},\mathcal{V})$，或者存在 $\mathcal{W}\in\mathbf{L}(\mathcal{V})$ 使得 $\mathcal{V}_2=R(\mathcal{W})$，且$(\mathcal{V}_1,\mathcal{W})$ 是$\mathbf{L}(\mathcal{V})$中的一个分裂对。

证明。(⇒)。设 $(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$ 是$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$ 中的一个分裂对，也就是说 $L(R(\mathcal{V}))=\uparrow\mathcal{V}_1\cup\downarrow\mathcal{V}_2$ with $\mathcal{V}_1\not\subseteq\mathcal{V}_2$，即 $\uparrow\mathcal{V}_1\cap\downarrow\mathcal{V}_2=\emptyset$。我们区分两种情况：

1) $\mathcal{V}_1$ 是正则的。那么我们知道 $\mathcal{SL}\subseteq\mathcal{V}_1$。事实上，情况是 $\mathcal{SL}=\mathcal{V}$。确实，反设 $\mathcal{SL}\subsetneq\mathcal{V}_1$，那么由于对 $(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$ 是分裂的，$\mathcal{SL}\in\downarrow\mathcal{V}_2$，也就是说 $\mathcal{V}_2$ 也是正则的。由于 $\mathcal{V}_1$ 是正则的，我们有（根据定理 5）$\mathcal{V}\notin\uparrow\mathcal{V}_1$（否则 $\mathcal{V}$ 将是正则的），因此 $\mathcal{V}\in\downarrow\mathcal{V}_2$，从而 $R(\mathcal{V})\subseteq R(\mathcal{V}_2)=\mathcal{V}_2\subseteq R(\mathcal{V})$，所以 $\mathcal{V}_2=R(\mathcal{V})$，这意味着 $\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2\neq\emptyset$，与假设 $(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)$ 是 $\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$ 中的分裂对矛盾。因此，$\mathcal{V}_1=\mathcal{SL}$。因此，$\mathcal{SL}\notin\downarrow\mathcal{V}_2$，这意味着 $\mathcal{V}_2$ 是非正则的。另一方面，$\mathcal{V}\notin\uparrow\mathcal{V}_1$（否则，$\mathcal{V}$ 将是正则的），于是 $\mathcal{V}\in\downarrow\mathcal{V}_2$，所以 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{V}_2\subseteq R(\mathcal{V})$，从而根据定理 4，$\mathcal{V}_2=\mathcal{V}$。因此我们证明了 $(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)=(\mathcal{SL},\mathcal{V})$。

2) $\mathcal{V}_1$ 不是正则的。在这种情况下，注意到 $\mathcal{SL}\notin\uparrow\mathcal{V}_1$。事实上，若非如此，我们就会有 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{V}_1\subseteq\mathcal{SL}=R(\mathcal{T})$，从而有 $\mathcal{V}_1=\mathcal{T}$，这与假设$(\mathcal{V}_1,\ \mathcal{V}_2)$是$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$中的一个分裂对相矛盾。因此 $\mathcal{SL}\in\downarrow\mathcal{V}_2$，于是 $\mathcal{V}_2$ 是正则的。由定理 5，存在 $\mathcal{W}\in L(\mathcal{V})$，使得 $\mathcal{V}_2=R(\mathcal{W})$。由于根据假设，$(\mathcal{V}_1,\ R(\mathcal{W}))$是$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$中的一个分裂对，且 $\mathcal{V}_1,\ \mathcal{W}\in\mathbf{L}(\mathcal{V})$，由引理 4 可知，$(\mathcal{V}_1,\ \mathcal{W})$是$\mathbf{L}(\mathcal{V})$中的一个分裂对。(⇐)。这可由引理 4 立即得出。□

作为前一定理的直接推论，我们得到以下结果。

推论7。 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。那么，代数$\mathbf{A}$ 在$\mathbf{L}(R(\mathcal{V}))$ 中是分裂的，当且仅当它在$\mathbf{L}(\mathcal{V})$中是分裂的。

推论8。 设$\mathbf{A}$ 是 $\mathcal{V}$中的非平凡次直不可约投射代数，则$\mathbf{A}$在 R（$\mathcal{V}$）中不是投射的。

5. Free algebras

Romanowska [32] 给出了强非正则簇的正则化中自由代数的刻画（推广了P-lonka [29]先前的结果），其假设是（标准的）代数语言为复数语言，因此特别是不包含常元符号。本节将指出，[32] 中的技巧实际上也适用于包含常元的代数语言。

设$\mathbf{A}\in R(\mathcal{V})$为生成元集合 $\{a_j\}_{j\in J}$上的自由代数。设 $x\cdot y$ 是见证 $\mathcal{V}$强不规则性的二元项，也就是说 $\mathcal{V}\models x\cdot y\approx x$，且 $J_0=\{k_1,\ldots,k_n\}\subseteq J$，那么对每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$，我们定义

$$g_i=a_{k_i}\cdot^{\mathbf{A}}a_{k_2}\cdot^{\mathbf{A}}\ldots\cdot^{\mathbf{A}}a_{k_{i-1}}\cdot^{\mathbf{A}}a_{k_1}\cdot^{\mathbf{A}}a_{k_{i+1}}\cdot^{\mathbf{A}}\ldots\cdot^{\mathbf{A}}a_{k_n}. \tag{1}$$

˜设 $A_\emptyset = Sg^{\mathbf{A}}(\emptyset)$、 $A_{J_0} = Sg^{\mathbf{A}}(g_1, \ldots\ldots, g_n)$，其中 S_g 是生成子宇宙（闭包）算子（参见 [12,˜定义 3.1]），并设$\mathbf{A}_{J_0}$为论域为 A_{J_0}的代数，使得对每个非零元运算 f，都有 $f_{\mathbf{A}^{J_0}} = f^{\mathbf{A}}|_{A_{J_0}}$；对每个常元 c，都有 $c^{\mathbf{A}_{J_0}} = c^{\mathbf{A}} .^{\mathbf{A}} g_j$，其中 g_j是 $\{g_1, ..., g_n\}$中的任意元素。给定集合J，我们用 $\mathcal{P}_{fin}(J)$表示 J的所有有限子集构成的集合，即 $\mathcal{P}_{fin}(J) = \{J_0 \subseteq J : J$ 是有限的$\}$。

引理 5。 [29, 引理 1] 对于任意 $J_0 \in \mathcal{P}_{fin}(J)$，$\mathbf{A}_{J_0}$ 是一个 $\mathcal{V}$-自由代数。

证明。 不难验证，$\mathbf{A}_{J_0}$ 在 $\mathcal{V}$中具有泛映射性质。 □

引理 6。 [29, 引理 2] 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇，且$\mathbf{A}$ 是 $R(\mathcal{V})$ 中的自由代数。那么，$\mathbf{A}$ 是一个基于半格直系的 *P-lonka* 和，其指标半格为 $(\mathcal{P}_{fin}(J) \subseteq)$，其纤维为$\{\mathbf{A}_{J_0}\}_{J_0 \in \mathcal{P}_{fin}(J)}$。

证明。 由于$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$，根据定理 2，$\mathbf{A}$ 分解为$\mathbb{B} = (\{\mathbf{B}_l\}_{l \in L}, (L, \leq^L) \{q_{u,v}\}_{u \leq^L v})$上的半格直系中代数的 P-lonka 和，其中代数属于 $\mathcal{V}$。只需验证运算 $.^{\mathbf{A}}$（其在$\mathbf{A}$上充当分割函数）恰好给出了$\mathbf{A}$的 P-lonka 和分解，即两个元素 $a, b \in A$ 属于 A_{J_0}（其中 $J_0 \in \mathcal{P}_{fin}(J)$）当且仅当 $a \sim b$，也就是说，$a .^{\mathbf{A}} b = a$ 和 $b .^{\mathbf{A}} a = b$。（见定理 1）。注意，我们包含了子集 $J_0 = \emptyset$，因为$\mathbf{A}$ 的常元运算属于 $A_\emptyset$。□

以下结论是在每个有限生成自由代数 $\mathcal{V}$ 均为有限的假设下，由前述引理直接推出的。

推论 9。 设$\mathbf{A}_n$ 为由 n 个生成元生成的 $R(\mathcal{V})$自由代数（$n \in \mathbb{N}$）。则

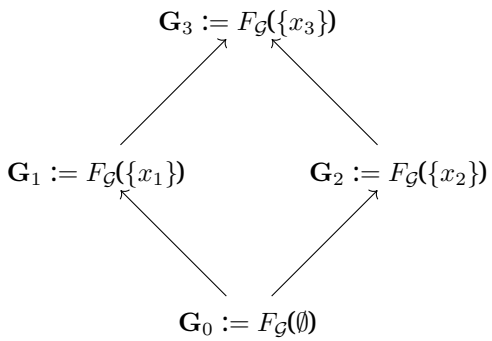
$$|A_n| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} |B_j|, \tag{2}$$

其中，$\mathbf{B}_j$ 是以 j 个生成元为基的（有限）$\mathcal{V}$自由代数。特别地，如果 $\mathcal{V}$ 是强非正则局部有限簇，那么 $R(\mathcal{V})$ 是局部有限的。

证明。 推论的第一部分是引理 5 和引理 6 的直接结果。至于第二部分，根据 [12, 定理 10，15] $R(\mathcal{V})$是局部有限的，当且仅当每个有限生成的 $R(\mathcal{V})$自由代数都是有限的；但这由第一部分立即得到，因为 $\mathcal{V}$ 按假设是局部有限的，所以其中每个有限生成自由代数都是局部有限的。□

作为引理 5 和引理 6 的推论，我们得到：代数语言中含有常元时，强非正则簇 $\mathcal{V}$ 的正则化中的每个自由代数，都是 $\mathcal{V}$中有限生成自由代数的、带零元的半格直系上的 P-lonka 和。然而，正如下面的例子所示，对于正则化 $R(\mathcal{V})$中的代数$\mathbf{A}$而言，该条件只是其为自由代数的必要条件，而非充分条件，其中 $\mathcal{V}$。

例 8. 令 $I = \{0, 1, 2, 3\}$ 为四元格，其序关系 $\leq$为 $0 < 1$，$2 < 3$（1，2 不可比）。显然，$(I, \leq)$ 是以生成元集合 $\{1, 2\}$ 为基的带零元自由并半格。令 $\mathbf{G}_i$ 为对每个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 都以生成元集合 $\{x_i\}$ 为基的自由群，而 $\mathbf{G}_0$ 为平凡群（即以空生成元集合为基的自由群）。令 $\mathbf{C}$ 为族 $(\mathbf{G}_i)_{i \in I}$ 在半格 $(I, \leq)$ 上的 P-lonka 和，其中同态 p_{13} 和 p_{23} 定义为满足$p_{13}(x_1) = x_3$ 及 $p_{23}(x_2) = x_3$ 的唯一同态（扩张该映射）（其余同态以显然的方式定义）。



因此，C是以两个生成元生成的自由并半格为底的自由群的 P-lonka 和。但 $\mathbf{C}$ 并非 $R(\mathcal{G})$ 中的自由代数，也就是说，C并非自由 Clifford 半群。事实上，反设结论成立，则由 (1) 可知，$\mathbf{C}$ 是以生成元集合 $\{x_1, x_2\}$ 为基的自由代数。用 $\cdot$ 表示 $\mathbf{C}$ 中的乘法，我们有 $x_1 \cdot^{\mathbf{C}} x_2 = p_{13}(x_1) \cdot^{\mathbf{G}_3} p_{23}(x_2) = x_3 \cdot^{\mathbf{G}_3} x_3 = p_{23}(x_2) \cdot^{\mathbf{G}_3} p_{13}(x_1) = x_2 \cdot^{\mathbf{C}} x_1$；又由于 x_1、x_2 是C的生成元，这就意味着 Clifford 半群簇满足恒等式 $x_1 \cdot x_2 \approx x_2 \cdot x_1$，这与并非每个 Clifford 半群都是交换的这一事实矛盾。

定理 9。设$\mathbf{A}$ 是 $R(\mathcal{V})$中的一个代数，其中 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇。那么，当且仅当$\mathbf{A} = \mathcal{P}_l(\mathbb{A})$ 满足带有 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}、(I, \leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 的条件时，$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 是在生成元集合 $\{a_j\}_{j\in J}$ 上的自由代数：

(1) $(I, \leq)$ 是生成元集合 J 上带零元的自由半格；*(2)* 对任意 $i \in I$，A_i 是一个有限生成的 $\mathcal{V}$-自由代数。特别地，A_i 恰好有 n 个生成元$G^i = \{g_1^i, \ldots, g_n^i\}$ 当且仅当 $i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$，对于 $i_1, \ldots, i_n \in I$（$i_k \neq i_m$ 对于 $k \neq m$），并且若 $i \in J$，则 A_i是由元素 $g_1^i = a_{i_1} = a_i$生成的自由代数；*(3)* 对任意 $i \in I$，$p_{i_0 i}$ 是从 A_{i_0} 到 A_i的唯一同态，其中 i_0 是 I的最小元；而对于任意 i_1，...，$i_n \in J(\forall n \in \mathbb{N}^+)$，若 $i = i_1 \vee ... \vee ... \vee i_n$，则对任意 $j \in \{1, ..., n\}$：$p_{i_j i}$：$A^{i_j} \to A_i$ 是延拓（单射）映射 $p^0_{i_j i}$：$\{a_{i_j}\} \to A_i$、$a_{i_j} \mapsto p^0_{i_j i}(g^i_j) := g^k_j$的唯一同态。特别地，对于 $i_0 \neq i \leq k$，p_{ik}：$A_i \to A_k$ 是延拓（单射）映射 p^0_{ik}：$G^i \to A_k$、$g^i_j \mapsto p^0_{ik}(g^i_j) := g^k_j$的唯一同态。

证明。证明过程与 [32]中的基本相同。我们在此给出证明，因为这有助于阐明自由代数的结构。（⇒）设 $\mathbf{A}$ 是 $R(\mathcal{V})$ 中的自由代数，其生成元为 $\{a_j\}_{j\in J}$。
根据引理 5 和引理 6，$\mathbf{A}$ 是定义在带零元的半格直和 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 上的 P-lonka 和，满足：

- $(I, \leq) = (\mathcal{P}_{fin}(J) \subseteq)$；
- 对于每个 $i \in I \setminus \{i_0\}$，$\mathbf{A}_i$ 都是 $\mathcal{V}$中的自由有限生成代数，而$\mathbf{A}_{i_0} = Sg^{\mathbf{A}}(\emptyset)$。

我们证明（1）、（2）和（3）确实成立。
（1）$\mathcal{P}_{fin}(J)$是以生成元集合 $X = \{\{j\}$ 为基础的带零元的自由半格：$j \in J\}$。事实上，考虑映射 f_0：$X \to \mathbf{S}$，它从集合 X 映到带零元的半格$\mathbf{S}$。那么，由下式定义的映射 f：$\mathcal{P}_{fin}(J) \to \mathbf{S}$：

$$f(\{j_1, .., j_n\}) = \begin{cases} f_0(j_1) \vee \cdots \vee f_0(j_n), \text{ if } \{j_1, .., j_n\} \in \mathcal{P}_{fin}(J) \setminus \emptyset, \\ 0_{\mathbf{S}}, \text{ if } \{j_1, .., j_n\} = \emptyset \end{cases}$$

与 f_0 重合　　当限制在单元素集合 $\{j\}$ 上时。此外，f 是一个半格同态。事实上　　d

$$\begin{aligned} f(\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{j'_1, \ldots, j'_l\}) =& f(\{j_1, \ldots, j_k, j'_1, \ldots, j'_l\}) \\ =& f_0(\{j_1\}) \vee \ldots f_0(\{j_k\}) \vee f_0(\{j'_1\}) \vee \cdots \vee f_0(\{j'_l\}) \\ =& f(\{j_1\}) \vee \ldots f(\{j_k\}) \vee f(\{j'_1\}) \vee \cdots \vee f(\{j'_l\}). \end{aligned}$$

这就表明，$(I, \leq) = (\mathcal{P}_{fin}(J) \subseteq)$ 是一个带零元的自由半格。

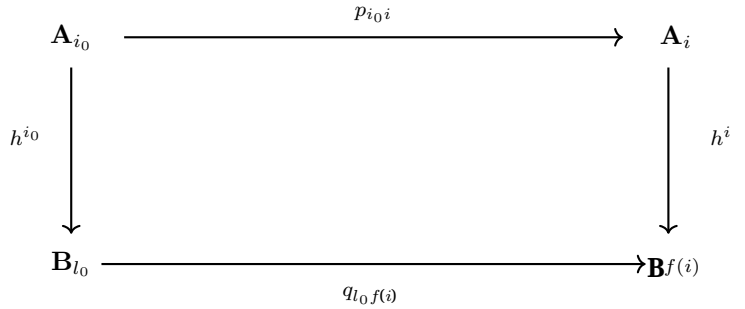
(2) 根据引理 6，$\mathbf{A}^{i_0} = \mathbf{A}_\emptyset$，并且根据定义，$\mathbf{A}_\emptyset = Sg^{\mathbf{A}}(\emptyset)$。根据引理 5 和引理 6，对于每个 $i \in I \setminus \{i_0\}$，$\mathbf{A}_i$ 是 $\mathcal{V}$ 中以 $G^i = \{g_1^i, \ldots, g_n^i\}$ 为生成元的自由代数。注意，在 $i \in J$ 的情况下，也就是说它是自由半格（带零元）$(I, \leq)$ 的一个生成元，那么根据构造以及 $I = \mathcal{P}_{fin}(J)$ 这一事实，i 对应于单元素集合 $J_0 = \{k_1\} \subseteq J$ 和 $G^i = \{g_1\}$，且 $g_1 = a_{k_1} = a_1$：因此 $\mathbf{A}_i$ 是由这一个元素生成的。另一方面，如果 $i \in I \setminus J$，那么根据构造，代数 $\mathbf{A}_i$ 由 $G^i = \{g_1^i, \ldots, g_n^i\}$ 生成。

(3) 首先注意，若 $i \in J$（即 i 是从带零元的半格（$I, \leq$）的生成元中选取的），则由 (2) 可知，$\mathbf{A}_i$ 是由 a_i 自由生成的 $\mathcal{V}$-自由代数。因此，对于任意满足 $i \leq k$ 的 $k \in I$，单射映射 p^0_{ik}：$\{a_i\} \to \mathbf{A}_k$ 可扩张为单同态 p_{ik}：$\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_k$（例如参见 [12, 第 10] 章习题 5）。类似地，若 $i \in I \setminus J \cup \{i_0\}$，则 $i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$，其中 $i_1, \ldots, i_n \in J$（$(I, \leq)$ 是由 J 自由生成的），且由 (2) 可知，$\mathbf{A}_i$ 是由 $G^i = \{g_1, \ldots, g_n\}$ 在 $\mathcal{V}$ 中自由生成的代数。此外，对于任意满足 $i \leq k$ 的 $k \in I$，$\mathbf{A}_k$ 是由 $G^k = \{g_1, \ldots, g_m\}$ 自由生成的 $\mathcal{V}$- 自由代数，其中 $n \leq m$（因为（$I, \leq$）$= (\mathcal{P}^*_{fin}(J)$ $\subseteq$，由 (1) 得出）。因此，自然可定义单射映射 p^0_{ik}：$G^i \to \mathbf{A}_k$, $g^i_j \mapsto g^k_j$（对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$），并且由于 $\mathbf{A}_i$ 是

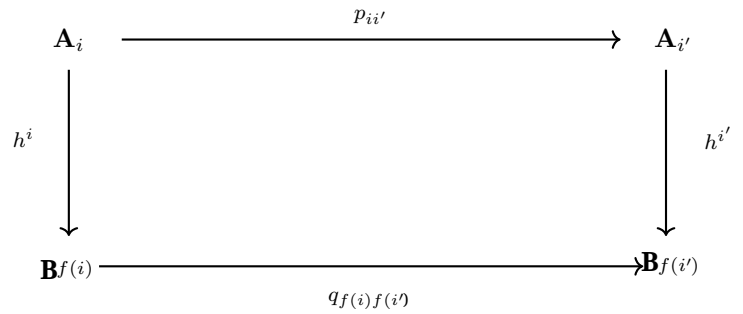
$\mathcal{V}$-自由，p_{ik}^0 可扩张为一个单同态 p_{ik}：$\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_k$。

(⇚) 根据假设，$\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 是基于满足条件 (1)-(2)-(3) 的半格直系的 P-隆卡和。特别地，与 A 的 P-隆卡和分解相对应的分割函数，由见证 $\mathcal{V}$ 强不规则性的项函数 $x \cdot y$ 的解释给出。首先证明 $\mathbf{A} = Sg^{\mathbf{A}}(\{a_j\})_{j\in J}$。由 (1) 可知，$(I, \leq)$ 是由 J 自由生成的（带零元）自由半格，因此令 $i \in I$，则对于某个 $i_1, \ldots, i_n \in J$，有 $i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$。令 $a_{i_k} \in A_{i_k}$，其中 $k \in \{1, \ldots, n\}$。回顾定理 1，$p_{i_k i}(a_{i_k}) = a_{i_k} \cdot^{\mathbf{A}} x$，其中 x 是在 A_i 中任意选取的元素。由 (2) 可知，$\mathbf{A}_i$ 是以自由生成元集合 $G^i = \{g_1^i, \ldots, g_n^i\}$ 为基的 $\mathcal{V}$-自由代数。设 $a_{i_1} \in A_{i_1}$，...，$a_{i_n} \in A_{i_n}$。则 $a_{i_1} \cdot^{\mathbf{A}} \ldots \cdot^{\mathbf{A}} a_{i_n} = p_{i_1 i}(a_{i_1}) \cdot^{\mathbf{A}_i} \ldots \cdot^{\mathbf{A}_i} p_{i_n i}(a_{i_n}) = g_1^i \cdot^{\mathbf{A}_i} \ldots \cdot^{\mathbf{A}_i} g_n^i$，最后一个等式由 (3) 得出。对于 $\mathbf{A}_i$ 的任意生成元 g_k^i，有 $g_j^i = p_{i_j i}(a_{i_k}) = a_{i_k} \cdot^{\mathbf{A}} (a_{i_1} \cdot^{\mathbf{A}} \ldots \cdot^{\mathbf{A}} a_{i_n}) = a_{i_k} \cdot^{\mathbf{A}} a_{i_1} \cdot^{\mathbf{A}} \ldots \cdot^{\mathbf{A}} a_{i_n}$，最后一个等式利用了 $\cdot^{\mathbf{A}}$ 是分割函数这一事实（即特别地，$(A, \cdot)$ 是左正规带）。由此我们证明了，$\mathbf{A}_i$ 的任意生成元都可以写成 $\{a_j\}_{j\in J}$ 中元素的乘积，因此 $\mathbf{A}$ 由 $\{a_j\}_{j\in J}$ 生成。

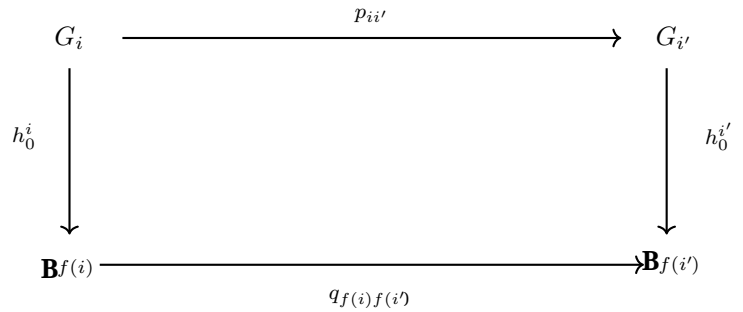
现在证明，$\mathbf{A}$ 对于 $\{a_j\}_{j\in J}$ 上的 $R(\mathcal{V})$ 具有泛映射性质。设 $\mathbf{B} \in R(\mathcal{V})$，且 h_0：$\{a_j\}_{j\in J} \to \mathbf{B}$ 是一个映射。由于 $\mathbf{B} \in R(\mathcal{V})$，根据定理 2，$\mathbf{B}$ 是半格直系 $\mathbb{B} = (\{B_l\}_{l\in L}, (L, \leq^L) \{q_{uv}\}_{u\leq v})$ 上的 P-lonka 和。映射 h_0 诱导出映射 f_0：$J \to L$，定义如下：对于 $j \in J$，$f_0(j) = l$，其中 l 是纤维 $\mathbf{B}_l$ 的指标，且满足 $h_0(a_j) \in B_l$（P-lonka 和的纤维互不相交，因此 f_0 定义良好）。
令 f：$I \to L$ 为延拓 f_0 的半格同态（根据 (1)，$(I, \leq)$ 在生成元集合J上是自由的）。令 $i \in I$，因此 $i = i_1 \vee \cdots \vee i_n$，其中某些 i_1、.....、$i_n \in J$（因为根据 (1)，J生成 i）。此外，根据 (2)，代数 $\mathbf{A}_{i_1}$、...、...、$\mathbf{A}_{i_n}$ 分别由元素 a_{i_1}、.....、a_{i_n}生成。因此，我们可以考虑元素 $h_0(a_{i_1}) \in B_{f(i_1)}$ $\cdots$、$h_0(a_{i_n}) \in B_{f(i_n)}$。注意，由于 f是半格同态，我们有 $f(i_1) \vee \cdots \vee f(i_n) = f(i_1 \vee \cdots \vee i_n) = f(i)$。因此，可以定义映射 h_0^i：$G^i \to \mathbf{B}_{f(i)}$，使得$g_k^i \mapsto h_0^i(g_k^i) = q_{f(i_k)f(i)}(h_0(a_{i_k}))$。令 h^i：$\mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_{f(i)}$ 为延拓 h_0^i 的同态，并且对于 $i = i_0$，令h^{i_0} 为唯一的同态 $\mathbf{A}_{i_0} \to \mathbf{B}_{l_0}$。定义映射 h：$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ 为 $a \mapsto h(a) := h^i(a)$，其中$a \in A_i$。为了验证 h 是一个同态，我们应用 [9,Th. 3.3.8] 中建立的范畴等价（另见 [3], [7]），因此证明 $(f, (h^i)_{i\in I})$ 是带零元的半格直接系统的一个态射。
由于对每一个 $i \in I$ 我们都有 $h^i \in Hom(\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_{f(i)})$，因此对每一个 $i \in I$，下列图都是交换的，因为对每一个 τ-代数$\mathbf{C}$，存在唯一的同态$\mathbf{A}_{i_0} \to \mathbf{C}$。



因此，要完成证明，只需证明对每个 $i_0 \neq i \leq i'$，下图都是交换的



由于每个代数$\mathbf{A}_i$ 都是 $\mathcal{V}$-自由代数，只需在生成元上验证上述图的交换性即可。



假设 $i \neq i_0$ 且令 $g_k^i \in G_i$。于是$q_{f(i)f(i')}(h_0^i(g^i we_k)) = vq_{f(i)f(i')}(\ q_{f(i_k)f(i)}(h_0(a_{i_k}))) = q_{f(i_k)f(i')}(h_0(a_{i_k}))$，其中第一个等式成立，是因为根据(3)，生成元$a_{i_k}$ 被映到生成元 g_k^i。
另一方面，$h_0^{i'}(p_{ii'}(g_k^i)) = h_0^{i'}(g_k^{i'}) = q_{f(i_k)f(i')}(h_0(a_{i_k}))$，其中第一个等式再次由假设(3)得出。最后一个等式成立是因为映射 $p_{ii'}$ 具有单射性（同样根据(3)），由此可知，元素 a_{i_k} 是分别经由 $pi_k i$ 和 $p_{i_k i'}$映到 g_k^i 和 $g_k^{i'}$ 的唯一元素。□

备注 2. 请注意，例 8 中引入的 Clifford 半群 $\mathbf{C}$ 并非自由的，因为两个生成元x_1 和 x_2 经由转移同态映射到同一个生成元 x_3，这违反了定理 9 中的条件 (3)。此外，定理 9 中的条件 (2) 也被违反，因为该条件会要求自由群 $\mathbf{G}_3$ 由两个元素生成。

6. Congruences

本节中，我们将研究属于强不规则簇 $\mathcal{V}$ ($\mathbf{A}_i \in \mathcal{V}$ 对每个 $i \in I$ 都成立) 的代数的半格直系 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq) \{p_{ij}\}_{i\leq j})$，其强不规则性由一个二元项 $x \cdot y$ 见证。

我们首先通过了解 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 上任意同余的基本结构特征，开始这项研究。

定义 6。设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$。定义：

(1) 对于每个 $(i, j) \in I$，令 $\theta_{ij} := \theta \cap (A_i \times A_j)$；(2) $S_\theta := \{(i, j) \in I \times I \mid \theta_{ij} \neq \emptyset\}$，即 $(i, j) \in I$当且仅当存在元素 $a \in A_i$、$b \in A_j$ 使得 $(a, b) \in \theta$；(3) $C_\theta = \{(i, j) \in I \times I \mid \{(i, i \vee j), (j, i \vee j)\} \subseteq S_\theta\}$。

我们将 θ_{ij} 称为同余 θ 的纤维（该术语的用法稍后将变得清楚）。$\mathcal{V}$ 的强不规则性为我们提供了以下基本引理，该引理揭示了 S_θ 的代数结构。

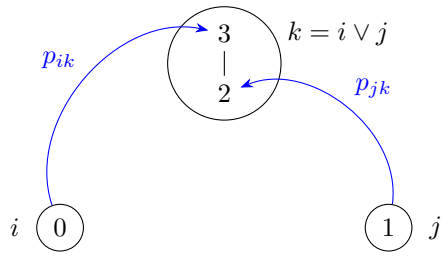
引理 7。令 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$，则对于每个$(i、 j) \in S_\theta$ 以及任意 $a \in A_i$，$(a、 p_{ii\vee j}(a)) \in \theta$。此外，$S_\theta$ 是 $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ 的自反且对称的子半格，并满足以下条件：

$$for\ every\ i, j, k \in I\ such\ that\ (i, j), (j, k) \in S_\theta, (i, i \vee k) \in S_\theta. \qquad \text{（上传递性）}$$

证明。设 $(i,j) \in S_\theta$，则存在 $(c,d) \in \theta_{ij}$，即 $(c,d) \in \theta$，其中 $c \in A_i$ 且 $d \in A_j$。由于 θ 是 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 上的同余格，我们有 $(a, p_{ii\vee j}(a)) = (a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} c, a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} d) \in \theta$，对任意 $a \in A_i$ 均成立；这里等式由 $a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} c = a$（因为 $a, c \in A_i$）以及 $p_{i,i\vee j}(a) = a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} x$ 得出，对任意 $x \in A_j$ 均成立。由 S_θ 的定义可立即得出其自反性和对称性。为证明 S_θ 是 $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ 的子半格，设 $(i,j),(u,v) \in S_\theta$，因此存在 $(a,b) \in \theta_{ij}$、$(c,d) \in \theta_{uv}$，于是 $(a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} c, b \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} d) \in \theta_{i\vee u, j\vee v}$，从而 $(i\vee u, j\vee v) \in S_\theta$。为证明 S_θ 也是上传递的，考虑 $(i,j),(j,k) \in S_\theta$ 且 $a \in A_i$。由于 $(i,j) \in S_\theta$，我们有 $(a, p_{ii\vee j}(a)) \in \theta$。此外，$(i,j),(j,k) \in S_\theta$ 蕴含 $(i\vee j, j\vee k) \in S_\theta$（由并的保持性），因此（由上文已证结论）$(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ii\vee j\vee k}(a)) = (p_{ii\vee j}(a) p_{i\vee j,(i\vee j)\vee(j\vee k)}(p_{ii\vee j}(a))) \in \theta$。因此，由 θ 的传递性可得 $(a, p_{ii\vee j\vee k}(a)) \in \theta$。此外，$(i,j),(j,k) \in S_\theta$，则 $(i\vee k, j) = (i\vee k, j\vee j) \in S_\theta$，于是我们有 $(p_{ii\vee k}(a)\ p_{ii\vee j\vee k}(a)) = (p_{ii\vee k}(a) p_{i\vee k, i\vee j\vee k}((p_{ii\vee k}(a)))) \in \theta$。因此，由 θ 的传递性，$(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ii\vee k}(a))$，从而 $(a, p_{ii\vee k}(a)) \in \theta$，即 $(i, i\vee k) \in S_\theta$。□

前一个引理中引入的较弱传递形式，称为上传递性，遗憾的是，通常不能用传递性取代，如下面的例子所示。

例 9. 考虑下图所示的 P-lonka 和（定义在一个半格直系上），其中两个底层纤维是平凡格，顶层纤维是一个二元格。



不难验证，由 $\{(0,3),(1,2)\}$ 生成的同余 θ 并非传递的（因为 $(i,k),(k,j) \in S_\theta$，但 $(i,j) \notin S_\theta$）。

下面的引理给出了 S_θ传递性的一个刻画。

引理 8. 设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$ 且 $i,j,k \in I$ 满足 (i,j)、$(j,k) \in S_\theta$。则下列命题等价：(1) $(i,k) \in S_\theta$；(2) $(p_{ii\vee k} \times p_{ki\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee k, i\vee k}) \neq \emptyset$。

证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。根据假设，我们有 $(i,k) \in S_\theta$，因此存在 $(a,c) \in \theta_{ik}$。根据引理 7（特别是上传递性），我们有 $(i, i\vee k)$ 和 $(k, i\vee k) \in S_\theta$（注意，$S_\theta$ 是对称的），因此根据引理 7，我们也有 $(a, p_{ii\vee k}(a)), (c, p_{ki\vee k}(c)) \in \theta$；并且利用 θ的传递性，可得 $(p_{ii\vee k}(a)\ p_{ki\vee k}(c)) \in \theta$，即 $(p_{ii\vee k} \times p_{ki\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee k, i\vee k}) \neq \emptyset$。

(2) $\Rightarrow$ (1)。设 $(a,c) \in A_i \times A_k$，使得 $(p_{ii\vee k}(a)\ p_{ki\vee k}(c)) \in \theta$。根据引理 7，我们有 $(a, p_{ii\vee k}(a)), (c, p_{ki\vee k}(c)) \in \theta$。因此，根据 θ 的对称性和传递性，$(a,c) \in \theta$，从而 $(i,k) \in S_\theta$。□

在后续 引理中，我们研究 C_θ 的代数结构及其与 S_θ 的密切关系 .

引理 9. 设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$，则有以下结论：

(i) $C_\theta \in Con(\mathbf{I})$；(ii) 对任意 $(i,j) \in I \times I$，$(i,j) \in S_\theta$ 当且仅当 $(i,j) \in C_\theta$ 且 $(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j, i\vee j}) \neq \emptyset$.。特别地，$C_\theta = Cg^{\mathbf{I}}(S_\theta)$。

证明。(i). 根据定义和引理 7，自反性与对称性显然成立。接下来只需证明传递性与并保持性。

设 (i,j)、$(j,k) \in I \times I$ 满足 (i,j)、$(j,k) \in C_\theta$，这意味着 $\{(i, i\vee j)$、$(j, i\vee j)\}$，$\{(j, j\vee k)$、$(k, j\vee k)\} \subseteq S_\theta$。于是，由引理 7 可知 $S_\theta \leq \mathbf{I} \times \mathbf{I}$，$(i\vee j,\ i\vee j\vee k) \in S_\theta$，故根据引理 7（$S_\theta$ 的上传递性），可推出 $(i, i\vee j\vee k) \in S_\theta$。类似地，还可得到 $(k, i\vee j\vee k) \in S_\theta$，因此 $\{(i, i\vee k)$、$(k, i\vee k)\} \subseteq S_\theta$（根据上传递性），即 $(i,k) \in C_\theta$，从而证明了传递性。

令 $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in C_\theta$，即 $\{(i_1, i_1\vee j_1), (j_1, i_1\vee j_1), (i_2, i_2\vee j_2), (j_2, i_2\vee j_2)\} \subseteq S_\theta$。因此，由于 $S_\theta \leq \mathbf{I} \times \mathbf{I}$，$\{(i_1\vee i_2, (i_1\vee i_2) \vee (j_1\vee j_2)), (j_1\vee j_2, (i_1\vee i_2) \vee (j_1\vee j_2))\} \subseteq S_\theta$，也就是说 $(i_1\vee i_2, j_1\vee j_2) \in C_\theta$。

(ii). ($\Rightarrow$) 显然 $S_\theta \subseteq C_\theta$（因为 $S_\theta \leq \mathbf{I} \times \mathbf{I}$）。此外，假设 $(i,j) \in S_\theta$，则我们也有 $(i,j),(j,j) \in S_\theta$（由自反性），并应用引理 8 可推出 $(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$。($\Leftarrow$) 假设 $(i,j) \in C_\theta$ 且 $(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$，则 $\{(i,i\vee j),(j,i\vee j)\} \subseteq S_\theta$ 且 $(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$，因此由引理 8 得到 $(i,j) \in S_\theta$。最后，令 C 为 $\mathbf{I}$ 的任意一个包含 S_θ 的同余，并且 $(i,j) \in C_\theta$，则根据定义有 $\{(i,i\vee j),(j,i\vee j)\} \subseteq S_\theta \subseteq C \in Con(\mathbf{I})$，因此由 C 的传递性可得 $(i,j) \in C$。这表明 $C_\theta = Cg^{\mathbf{I}}(S_\theta)$。□

事实证明，在某些特殊但又相关的情况下，$S_\theta = C_\theta$，也就是说 $S_\theta \in Con(\mathbf{I})$。

引理 10。设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$ 的代数语言包含常元（或 $\mathcal{V}$ 包含一个代数常元），或者 $\mathbf{I}$ 是一条链。那么 $S_\theta \in Con(\mathbf{I})$。

证明。根据引理 7，只需证明 S_θ 是传递的。设$\mathbf{I}$是一条链。不失一般性，假设 $i \leq j \leq k$。分两种情况：$(i,j),(j,k) \in S_\theta$ 以及 $(i,k),(k,j) \in S_\theta$。在第一种情况下，根据引理 7，有 $(i,k) = (i,i\vee k) \in S_\theta$；而在第二种情况下，$(i,j) = (i,k\vee j) \in S_\theta$。

假设 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 的代数语言包含常元。我们更一般地证明：若对每个i、j、$k \in I$，都有 $Im(p_{ii\vee j\vee k}) \cap Im(p_{ki\vee j\vee k}) \neq \emptyset$，则 S_θ 具有传递性。事实上，假设 (i,j)、$(j,k) \in S_\theta$，则由引理 7 可得 $(i,i\vee k)$、$(k,i\vee j) \in S_\theta$。由于 S_θ 保并且自反，由前述可推出 $(i,i\vee j\vee k)$、$(k,i\vee j\vee k) \in S_\theta$。令 $c \in Im(p_{ii\vee j\vee k}) \cap Im(p_{ki\vee j\vee k})$，则根据定义，存在$a \in A_i$、$b \in A_k$ 使得 $p_{ii\vee j\vee k}(a) = c = p_{ki\vee j\vee k}(b)$。由引理 7 可得 $(a,c) = (a, p_{ii\vee j\vee k}(a)) \in \theta$，且 $(b,c) = (b, p_{ki\vee j\vee k}(a)) \in \theta$，因此由 θ的传递性可得 $(a,b) \in \theta$。所以 $(i,k) \in S_\theta$。若 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 包含常元，则上述条件显然成立，因此 S_θ 是一个同余。□

在下面的引理中，我们分析 θ的纤维结构。

引理 11. 设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$，则：

(i) 对每个$(i,j) \in I \times I$：$\theta_{ii} \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$；*(ii)* 对每个 $i \in I$ 与$(i,j) \in S_\theta$：$\theta_{ii} = (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$；*(iii)* 对每个$(i,j) \in S_\theta$：$\theta_{ij} = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$。

证明. (i) 设$(a,b) \in \theta_{ii}$，即$(a,b) \in \theta$ 且 $a,b \in A_i$。则对任意 $c \in A_j$，我们有$(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ii\vee j}(b)) = (a \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} c, b \cdot^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})} c) \in \theta$，从而得到所需的包含关系。

(ii) 令 $(i,j) \in S_\theta$，并假设 $(a,b) \in (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$，即 $(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ii\vee j}(b)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$。由引理 7，我们还可得 $(a, p_{ii\vee j}(a)) \in \theta$ 和 $(b, p_{ii\vee j}(b)) \in \theta$，因此根据 θ 的传递性，我们推得 $(a,b) \in \theta_{ii}$。所以，对每个 $(i,j) \in S_\theta$，都有：$(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \subseteq \theta_{ii}$。

(iii) 假设 $(i,j) \in S_\theta$。令 $(a,b) \in \theta_{ij}$。由引理 7，我们还可得 $(a, p_{ii\vee j}(a))$、$(b, p_{ji\vee j}(b)) \in \theta$，因此 $(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ji\vee j}(b)) \in \theta$，即 $(a,b) \in (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$。反过来，令 $(a,b) \in (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$，则 $(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ji\vee j}(b)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$；但由引理 7 还可得 $(a, p_{ii\vee j}(a))$、$(b, p_{ji\vee j}(b)) \in \theta$，所以根据 θ 的对称性和传递性，$(a,b) \in \theta_{ij}$。□

对于每个 $i \in I$，我们将集合 θ_{ii} 纯纤维 和 θ_{ij}（其中 (i,j)）称为 $\in S_\theta \setminus \Delta_{\mathbf{I}}$ 混合纤维。请注意，使用“纤维”一词是恰当的，因为对于 $\theta \leq \mathcal{P}_t(\mathbb{A}) \times \mathcal{P}_t(\mathbb{A}) \in R(\mathcal{V})$，这些子集实际上构成了 $\mathcal{V}$ 中 P-lonka 分解的纤维，其中 θ 是 $R(\mathcal{V})$ 中的一个代数。

下面的技术引理可视为迄今为止所证明结果的某种逆命题，即它展示了如何从 P-lonka 和的纤维上的一族同余出发，构造迄今为止遇到的对象。

引理 12. 设 $\mathcal{P}_t(\mathbb{A}) \in R(\mathcal{V})$，$\{\theta_{ii}\}_{i\in I}$ 是纤维（对每个 $\theta_{ii} \in Con(\mathbf{A}_i)$）上的一族同余，并且对于每个 i，$j \in I$，$\theta_{ii} \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$。则以下结论成立：

(i) 若 S 是 $I \times I$ 的自反、对称且上传递的子半格，则 $C_S = \{(i,j) \in I \times I \mid \{(i,i\vee j),(j,i\vee j)\} \subseteq S\} \in Con(I)$。*(ii)* 若 $C \in Con(I)$，则 $S_C = \{(i,j) \in C \mid (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset\}$ 是 $I \times I$ 的自反、对称且上传递的子半格。*(iii)* $C_{S_C} = C$ 对于每个 $C \in Con(I)$，以及每个自反、对称且上传递的 $I \times I$，若 $(i,j) \in S$ 蕴含 $(p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$，则 $S_{C_S} = S$。

证明。 (i) 证明过程与引理 9-(i) 的证明完全相同。

（ii）注意，对于每个 (i,j)、$(h,k) \in I \times I$，使得 $(p_{i,i\vee j} \times p_{j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$，均有 $(p_{i\vee h,i\vee j\vee h\vee k} \times p_{j\vee k,i\vee j\vee h\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee h\vee k,i\vee j\vee h\vee k}) \neq \emptyset$. 。事实上，根据假设 $\theta_{i\vee j,i\vee j} \subseteq (p_{i\vee j,i\vee j\vee h\vee k} \times p_{i\vee j,i\vee j\vee h\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee h\vee k,i\vee j\vee h\vee k})$，故 $\emptyset \neq (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \subseteq (p_{ii\vee j\vee h\vee k} \times p_{ji\vee j\vee h\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee h\vee k,i\vee j\vee h\vee k}) = (p_{ii\vee h} \times p_{jj\vee k})^{-1}((p_{i\vee h,i\vee j\vee h\vee k} \times p_{j\vee k,i\vee j\vee h\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee h\vee k,i\vee j\vee h\vee k}))$，因此

$(p_{i\vee h,i\vee j\vee h\vee k} \times p_{j\vee k,i\vee j\vee h\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee h\vee k,i\vee j\vee h\vee k}) \neq \emptyset$。由此立即可知，$S_C$ 是$\mathbf{I} \times \mathbf{I}$的一个自反、对称且上传递的子半格。

(iii) 根据定义，我们有 $(i,j) \in C_{S_C}$ 当且仅当 $\{(i,i\vee j),(j,i\vee j)\} \subseteq S_C$，也就是说 $(i,i\vee j),(j,i\vee j) \in C$，并且 $(p_{ii\vee j} \times p_{i\vee j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset, (p_{ji\vee j} \times p_{i\vee j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) \neq \emptyset$；这等价于（仅仅）$(i,i\vee j),(j,i\vee j) \in C$（事实上，对于 $a \in A_i$ 和 $b \in A_j$，我们有 $(a, p_{ii\vee j}(a)) \in (p_{ii\vee j} \times p_{i\vee j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$，且 $(b, p_{ji\vee j}(b)) \in (p_{ji\vee j} \times p_{i\vee j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$）。最后，$C$ 是 I 上的一个同余这一事实保证了 $(i,j) \in C$。□

现在我们已经可以给出 P-lonka 和的同余的刻画。在表述中，我们将采用引理 12 中引入的术语。首先给出如下内容。

定义 7。设 $\mathbb{A} = (\{\mathbf{A}_i\}_{i\in I}, (I, \leq) \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 是一个半格直系。在 $\mathbb{A}$ 上的一个 同余 是满足以下条件的有序对 $(C, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$:

(i) $C \in Con(\mathbf{I})$; (ii) 对每个 $i \in I$, $\theta_{ii} \in Con(\mathbf{A}_i)$;
(iii) 对每个 $(i, j) \in I \times I$, $\theta_{ii} \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,\ i\vee j})$;
(iv) 对每个 $(i, j) \in S_C$, $\theta_{ii} = (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,\ i\vee j})$。

我们用 $Con(\mathbb{A})$ 表示 $\mathbb{A}$ 上的同余集合。容易验证，若赋予偏序关系 $(C, \{\theta_{ii}\}_{i\in I}) \subseteq (C', \{\theta'_{ii}\}_{i\in I})$，当且仅当对于每个 $i \in I$, $C \subseteq C'$ 且 $\theta_{ii} \subseteq \theta'_{ii}$，则 $Con(\mathbb{A})$ 构成一个（代数）格。

定理 10. 设 $\mathcal{P}_l(\mathbb{A}) \in R(\mathcal{V})$。则格 $Con(\mathbf{A})$ 与 $Con(\mathbb{A})$ 同构。更确切地说:

(1) 若 θ 是 $\mathcal{P}_l(\mathbb{A})$ 上的同余，则 $(C_\theta, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$ 是 $\mathbb{A}$ 上的同余，其中 C_θ 和 θ_{ii} 对每个 $i \in I$ 都如定义 6 中所述。(2) 若 $(C, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$ 是 $\mathbb{A}$ 上的同余，令 $\theta_{ij} := (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$ 对每个 $(i, j) \in S_C \setminus \Delta_{\mathbf{I}}$ 成立，则

$$\theta := \bigcup_{(i,j)\in S_C} \theta_{ij}$$

是 $\mathcal{P}_l(\mathbb{A})$上的同余。
(3) 前两种构造定义了互为逆的格同构 s.

证明。 (1) 假设 $\theta \in Con(\mathcal{P}_l(\mathbb{A}))$，并设 C_θ 与 $\{\theta_{ii}\}_{i\in I}$ 如定义 6 所述。我们证明序对$(C_\theta, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$满足定义 7 中的条件(i)-(iv)。(i)由引理 9-(i)得出。(ii)由 θ 是 $\mathcal{P}_l(\mathbb{A})$上的同余这一假设容易得出。(iii)-(iv)由引理 11 得出。

(2) 假设$(C, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$是 $\mathbb{A}$上的同余。我们先证明

$(*)$ for every $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in S_C, \theta_{i_1 j_1} \subseteq (p_{i_1,i_1\vee i_2} \times p_{j_1,j_1\vee j_2})^{-1}(\theta_{i_1\vee i_2,j_1\vee j_2})$.

事实上:

$$\begin{aligned}
\theta_{i_1 j_1} &= (p_{i_1 i_1\vee j_1} \times p_{j_1 i_1\vee j_1})^{-1}(\theta_{i_1\vee j_1,i_1\vee j_1}) && \text{(定义)}\\
&\subseteq (p_{i_1 i_1\vee j_1} \times p_{j_1 i_1\vee j_1})^{-1}((p_{i_1\vee j_1,i_1\vee j_1\vee i_2\vee j_2} \times p_{i_1\vee j_1,i_1\vee j_1\vee i_2\vee j_2})^{-1}(\theta_{i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2}))\\
&= (p_{i_1,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2} \times p_{j_1,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2})^{-1}(\theta_{i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2})\\
&= (p_{i_1,i_1\vee i_2} \times p_{j_1,j_1\vee j_2})^{-1}((p_{i_1\vee i_2,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2} \times p_{j_1\vee j_2,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2})^{-1}(\theta_{i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2,i_1\vee i_2\vee j_1\vee j_2}))\\
&= (p_{i_1,i_1\vee i_2} \times p_{j_1,j_1\vee j_2})^{-1}(\theta_{i_1\vee i_2,j_1\vee j_2}),
\end{aligned}$$

这里我们仅应用了过渡态射之间复合的性质。现在可以证明 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$。自反性可直接由以下事实得出： S_C 和 θ_{ii} (对每个 $i \in I$) 都是自反的。为证明 θ 是对称的，设 $(a,b) \in \theta = \bigcup_{(i,j)\in S_C} \theta_{ij}$，则存在 $(i,j) \in S_C$ 使得

因此 $(a,b) \in \theta_{ij} = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$。所以 $(p_{iivj}(a)\ p_{ji\vee j}(b)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$，由$\theta_{i\vee j,i\vee j}$的对称性，我们也有 $(p_{ji\vee j}(b)\ p_{ii\vee j}(a)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$，即 $(b,a) \in (p_{ji\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) = \theta_{ji} \subseteq \theta$。

为证明 θ 是传递的，设 (a,b)、$(b,c) \in \theta$；则存在 (i,j)、$(j,k) \in S_C$，使得 $(a,b) \in \theta_{ij}$，$(b,c) \in \theta_{jk}$。由 (i,j)、$(j,k) \in S_C$ 这一事实，根据引理 12 可得 $(i, i\vee k)$、$(k, i\vee k) \in S_C$，且 $(i, i\vee j\vee k)$、$(j, i\vee j\vee k)$、$(k, i\vee j\vee k) \in S_C$。应用 $(*)$，得到 $\theta_{ij} \subseteq (p_{ii\vee j\vee k} \times p_{ji\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k})$ 以及 $\theta_{jk} \subseteq (p_{ji\vee j\vee k} \times p_{ki\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k})$，因此 $(p_{ii\vee j\vee k}(a)\ p_{ji\vee j\vee k}(b))$、$(p_{ji\vee j\vee k}(b)\ p_{ki\vee j\vee k}(c)) \in \theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k}$；并且（利用$\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k}$ 是同余这一事实）$(a,c) \in (p_{ii\vee j\vee k} \times p_{ki\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k}) \neq \emptyset$。此外（复合过渡态射） $(p_{ii\vee j\vee k} \times p_{ki\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k}) = (p_{ii\vee k} \times p_{ki\vee k})^{-1}((p_{i\vee k,i\vee j\vee k} \times p_{i\vee k,i\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k})) = (p_{ii\vee k} \times p_{ki\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee k,i\vee k})$（最后一个等式由定义 7 以及 $(i\vee k, i\vee j\vee k) \in S_C$这一事实得出）。因此 $(p_{ii\vee k} \times p_{ki\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee k,i\vee k}) \neq \emptyset$，所以 $(i,k) \in S_C$且$\theta_{ik} = (p_{ii\vee j\vee k} \times p_{ki\vee j\vee k})^{-1}(\theta_{i\vee j\vee k,i\vee j\vee k})$，从而 $(a,c) \in \theta_{ik} \subseteq \theta$。

为了证明 θ 保持任意运算，设 $(a_1,b_1) \in \theta_{i_1j_1}, \ldots, (a_n,b_n) \in \theta_{i_nj_n}$，且 f 是一个 $n-$元运算。令 $i = i_1 \vee \ldots \vee i_n$ 和 $j = j_1 \vee \ldots \vee j_n$，则 $(i,j) \in S_C$。利用 $(*)$，对任意 $k \in \{1,\ldots,n\}$，有： $\theta_{i_1j_1} \subseteq (p_{i_ki} \times p_{j_kj})^{-1}(\theta_{ij})$，因此 $(p_{i_ki}(a_k)\ p_{j_kj}(b_k)) \in \theta_{ij} = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$，也就是说 $\forall k \in \{1,\ldots,n\}$：$(p_{i_k,i\vee j}(a_k)\, p_{j_k,i\vee j}(b_k)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$。由于 $\theta_{i\vee j,i\vee j} \in Con(\mathbf{A}^{i\vee j})$，我们推得 $(p_{i,i\vee j} \times p_{j,i\vee j})(f^{\mathbf{A}^i}(p_{i_1i}(a_{i_1}) \ldots, p_{i_ni}(a_{i_n}))\ f^{\mathbf{A}_j}(p_{j_1j}(b_1) \ldots, p_{j_nj}(b_n))) =$

$$= (f^{\mathbf{A}_{i\vee j}}(p_{i,i\vee j}(p_{i_1,i}(a_1)) \ldots, p_{i,i\vee j}(p_{i_n,i}(a_n))), f^{\mathbf{A}_{i\vee j}}(p_{j,i\vee j}(p_{j_1,j}(b_1)) \ldots, p_{j,i\vee j}(p_{j_n,j}(b_n)))) =$$

$(f^{\mathbf{A}^{i\vee j}}(p_{i_1,i\vee j}(a_1) \ldots, p_{i_n,i\vee j}(a_n))\ f^{\mathbf{A}_{i\vee j}}(p_{j_1,i\vee j}(b_1) \ldots, p_{j_n,i\vee j}(b_n))) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$, 因此，根据定义，我们有 $(f^{\mathbf{A}^i}(p_{i_1i}(a_{i_1}) \ldots, p_{i_ni}(a_{i_n}))\ f^{\mathbf{A}_j}(p_{j_1j}(b_1) \ldots, p_{j_nj}(b_n))) \in (p_{i,i\vee j} \times p_{j,i\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j}) = \theta_{ij}$，即 $(f^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})}(a_1, \ldots, a_n)\ f^{\mathcal{P}_t(\mathbb{A})}(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta_{ij} \subseteq \theta$。

(3) 若 $\theta \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$，则（根据引理 11 的第 (iii) 项） $\theta_{ij} = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$ 对每个 $(i,j) \in S_\theta = S_{C_\theta}$ （此等式由引理 9 的第 (ii) 项和引理 12 的第 (iii) 项的第二部分得出），并且

$$\theta = \theta \cap (A \times A) = \theta \cap \bigcup_{(i,j)\in I\times I} (A_i \times A_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times I} [\theta \cap (A_i \times A_j)] = \bigcup_{(i,j)\in S_\theta} \theta_{ij}.$$

由引理 12 的第一部分 (iii) 可得其逆命题。 □

如前所述， $\mathcal{P}_t(\mathbb{A})$上的一个同余由半格 S_θ （或由同余 C_θ，因为引理 9 告诉我们总能由其中一个得到另一个）及其纯纤维 $\{\theta_{ii}\}_{i\in I}$唯一确定。

推论 10. 设 $\theta, \theta' \in Con(\mathcal{P}_t(\mathbb{A}))$。那么， $\theta = \theta'$ 当且仅当 $S_\theta = S_{\theta'}$，并且对每个 $i \in I$，都有 $\theta_{ii} = \theta'_{ii}$。

当$\mathcal{V}$ 是一个由理想决定的簇时，对正则化簇 $R(\mathcal{V})$中代数的同余的描述可以有效地应用，正如下面所示。

注 3. 设 $\mathcal{V}$ 是一个簇，其语言包含一个常元符号 0。回忆一下，若项 $p(\vec{x},\vec{y})$中$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$和 $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)$，则它是 $\vec{y}$中关于 $\mathcal{V}$的理想项，当且仅当 $\mathcal{V} \models p(\vec{x},\vec{0}) \approx 0$（其中 $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$）；而 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ 的非空子集 I 是 $\mathbf{A}$ 的理想，当且仅当对于每个 $\vec{a} \in A^n$、 $\vec{i} \in I^m$ 以及 $\vec{y}$ 中关于 $\mathcal{V}$的理想项$p(\vec{x},\vec{y})$，都有 $p(\vec{a},\vec{i}) \in I$。注意，前述定义并未要求变量 x、 y 实际出现在 p中，因此常元 0 总是 $\vec{y}$ 中关于 $\mathcal{V}$的理想项；于是，给定 $\mathbf{A}$ 上的一个同余 $\theta \in \mathcal{V}$， $[0]_\theta$ 是 $\mathbf{A}$ 的理想。反过来一般并不成立，也就是说，$\mathbf{A}$ 的理想 J 未必是某个（唯一的）同余 $\theta \in Con(\mathbf{A})$的零类。若对每个代数 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ 以及 $\mathbf{A}$ 的每个理想 I，都存在唯一的 $\theta \in Con(\mathbf{A})$使得 $I = [0]_\theta$，则称 $\mathcal{V}$ 是理想决定的。在这种情况下，映射 $Con(\mathbf{A}) \to Id(\mathbf{A})$ $\theta \mapsto [0]_\theta$ 是格同构。Gumm 和 Ursini[17, 35] 的一项基本结果表明， $\mathcal{V}$ 是理想决定的，当且仅当 $\mathcal{V}$ 是 0-正则的（即对每个 $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ 以及每个θ，若 $[0]_\theta = [0]_{\theta'}$，则 $\theta = \theta'(\mathbf{A})$）且可减的（即存在一个称为减法项的二元项 $s(x,y)$，使得 $\mathcal{V} \models s(x, 0) \approx x$ 且 $\mathcal{V} \models s(x,x) \approx 0$）。注意，任何可减的簇 $\mathcal{V}$（因而任何理想决定簇 $\mathcal{V}$）都是强非正则的，因为对 $\mathcal{V}$的任意减法项 s，都有 $\mathcal{V} \models s(x, s(y,y)) \approx x$。因此，理想决定簇的正则化属于定理 10 和推论 10 的适用范围。注意，对于 $R(\mathcal{V})$，根据正则性，常元项 0（在恒等式意义下）是唯一的理想项，因此代数 $\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 的理想恰好是满足 $0^{\mathbf{A}} \in S$的子集 $S \subseteq A$。然而，鉴于

定理 10，提出代数 A 在 $R(\mathcal{V})$中的一种更严格的理想概念，并建立 Con(A)与 A 的理想格（按包含关系排序）之间的同构，是有意义的。设 A 是半格直系$(\{A_i\}_{i\in I}, (I,\leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$上的一个 P-lonka 和，其中 $\mathcal{V}$是理想决定簇，则称 A 的一个 P-lonka 理想为一对$(C,\{J_i\}_{i\in I})$，其中 $C\in Con$(I)，且对每个 $i\in I$， J_i都是 A_i 的理想，并满足：对每个 i、 $j\in I$，都有 $J_i\subseteq (p_{i,i\vee j})^{-1}(J_{i\vee j})$；并且若$(i,j)\in C$，则 $J_i=(p_{i,i\vee j})^{-1}(J_{i\vee j})$。我们将 A 的 P-lonka 理想构成的格记为 Id(A)，其序关系定义为$(C,\{J_i\}_{i\in I})\leq(C',\{K_i\}_{i\in I})$，当且仅当对每个 $i\in I$都有 $C\subseteq C'$且 $J_i\subseteq K_i$。定理 10 和推论 10 表明，映射 $\theta\mapsto(S_\theta,[0]_{\theta_{ii}})_{i\in I}$ 是 Con(A)与 Id(A)之间的同构。

前述评注使我们能够刻画强非正则簇的若干种正则化所对应的同余。

例10. 利用定理 10，我们可以刻画 Clifford 半群的同余。设 $\mathbb{C}=(\{G_i\}_{i\in I}, (I,\leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 是一个由群组成的半格直系，C 是其 P-lonka 和，即一个 Clifford 半群。给定 $\theta\in Con$(C)，可知 $S_\theta=\{(i,j)\in I\times I\mid\theta\cap(G_i\times G_j)\neq\emptyset\}$ 是半格 I 上的一个同余（由引理 10 得出），且 $\theta_{ii}=\theta\cap(G_i\times G_i)$ 是每个群 G_i 上的一个同余，因此我们可以将 θ_{ii} 与 G_i 的相应正规子群 N_i 等同（注意， $N_i=[e_i]_{\theta_{ii}}$，其中 e_i 是 G_i 的单位元）；此外，对于每个 i, $j\in I$，都有 $N_i\subseteq p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(N_{i\vee j})$，特别地，对于 $(i,j)\in S_\theta$，有 $N_i=p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(N_{i\vee j})$。定理 10 表明，我们可以将 θ 与 $(S_\theta,\bigcup_{i\in I}N_i)$ 等同。

反过来，设 $\{N_i\}_{i\in I}$ 是正规子群族（C 的每个纤维对应一个正规子群），并且 $S\in Con$(I) 满足：对于所有的 i, $j\in I$，若 $(i,j)\in S$，则有 $N_i\subseteq p_{ii\vee j}^{-1}(N_{i\vee j})$ 和 $N_i=p_{ii\vee j}^{-1}(N_{i\vee j})$。于是令

$$N=\bigcup_{i\in I}N_i$$

并定义 $\theta_{N,S}$如下： $\forall a\in G_i, b\in G_j$: $(a,b)\in\theta_{N,S}\iff(i,j)\in S$，且 $ab^{-1}\in N$，则有$\theta_{N,S}\in Con$(C)。

例 11. 利用定理 10，我们可以刻画对合双半格的同余。设 $\mathbb{B}=(\{B_i\}_{i\in I}, (I,\leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$ 是一个布尔代数的半格直系，B 是其 P-隆卡和，即一个对合双半格。给定 $\theta\in Con$(B)，有 $S_\theta=\{(i,j)\in I\times I\mid\theta\cap(B_i\times B_j)\neq\emptyset\}$ 是半格 I 上的一个同余（根据引理 10），而 $\theta_{ii}=\theta\cap(B_i\times B_i)$ 是每个布尔代数 B_i 上的一个同余，因此我们可以将 θ_{ii} 视为 G_i 的相应滤子 F_i（回顾 $F_i=[1_i]_{\theta_{ii}}$，其中1_i 是 B_i 的最大元）；此外，对于每个 $i,j\in I$，都有 $F_i\subseteq p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(F_{i\vee j})$，尤其是当 $(i,j)\in S_\theta$ 时，$F_i=p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(F_{i\vee j})$。定理 10 指出，我们可以将 θ 视为 $(S_\theta,\bigcup_{i\in I}F_i)$。

反过来，设 $\{F_i\}_{i\in I}$ 是滤子族（B的每个纤维对应一个滤子），并且 $S\in Con$(I)满足对所有$i,j\in I$： $F_i\subseteq p_{ii\vee j}^{-1}(F_{i\vee j})$，且在$(i,j)\in S$的情况下， $F_i=p_{ii\vee j}^{-1}(F_{i\vee j})$。那么令

$$F=\bigcup_{i\in I}F_i$$

并定义$\theta_{N,S}$ 如下： $\forall a\in B_i, b\in B_j$: $(a,b)\in\theta_{F,S}\iff(i,j)\in S$，并且 $a\leftrightarrow b\in F$，则有$\theta_{F,S}\in Con$(B)。

例 12。利用定理 10，我们可以刻画对偶弱括号的同余。设 $\mathbb{S}=(\{S_i\}_{i\in I}, (I,\leq)\ \{p_{ij}\}_{i\leq j})$是斜 brace 的半格直系，D是其 P-lonka 和，即一个对偶弱括号（见 [34, 13]）。给定 $\theta\in Con$(D)，由引理 10 可知， $S_\theta=\{(i,j)\in I\times I\mid\theta\cap(S_i\times S_j)\neq\emptyset\}$ 是半格 I 上的同余，而 $\theta_{ii}=\theta\cap(S_i\times S_i)$是每个斜 brace S_i上的同余，因此我们可以将 θ_{ii} 识别为 S_i 的对应（Gumm-Ursini）理想 J_i（回忆一下， $J_i=[0_i]_{\theta_{ii}}$，其中 0_i 是 S_i的单位元）；此外，对每个 $i,j\in I$，都有$J_i\subseteq p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(J_{i\vee j})$，特别是对于$(i,j)\in S_\theta$，有$J_i=p_i^{-1}{}_{,i\vee j}(J_{i\vee j})$。定理 10 表明，我们可以将 θ识别为$(S_\theta,\bigcup_{i\in I}N_i)$。

反过来，设 $\{J_i\}_{i\in I}$ 是理想族（对 C 的每个纤维各取一个），且 $S\in Con$(I) 满足：对于所有i， $j\in I$，在情形 $(i,\ j)\in S$ 中， $J_i\subseteq p_{ii\vee j}^{-1}(J_{i\vee j})$ 和 $J_i=p_{ii\vee j}^{-1}(J_{i\vee j})$。那么令

$$J=\bigcup_{i\in I}J_i$$

并定义 $\theta_{J,S}$为： $\forall a\in S_i, b\in S_j$: $(a,b)\in\theta_{J,S}\iff(i,j)\in S$且 $ab^{-1}\in J$我们有 $\theta_{J,S}\in Con$(C)。

有了同余刻画，我们还可以描述 $\mathbf{A} = \mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 的商的 P-lonka 和分解结构（在本节相同的假设下，即 $\mathbf{A} \in R(\mathcal{V})$ 属于强不规则簇）。

命题 1. 设 $\theta \in Con(\mathbf{A})$。则 $\mathbf{A}/\theta$ （同构于）由下述给出的半格直系上的 *P-lonka* 和：

(1) 半格$\mathbf{I}/C_\theta$；(2) 对每个 $i \in I$，纤维的论域为 $(A/\theta)_{[i]_{C_\theta}} = \{[a]_\theta \mid j \in [i]_{C_\theta},\ a \in A_j\}$；
(3) 转移同态为：对每个满足 $[i]_{C_\theta} \le [k]_{C_\theta}$ 的 i、$k \in I$，

$$p_{[i]_{C_\theta}[k]_{C_\theta}}([a]_\theta) = [p_{jj\vee k}(a)]_\theta,$$

对任意 $j \in [i]_{C_\theta}$ 与 $a \in A_j$。

证明。设 i，$j \in I$与 $a \in A_i$，$b \in A_j$。则 $[a]_\theta = [a]_\theta \cdot^{\mathbf{A}/\theta} [b]_\theta = [a \cdot^{\mathbf{A}} b]_\theta = [p_{ii\vee j}(a)]_\theta$且 $[b]_\theta = [b]_\theta \cdot^{\mathbf{A}/\theta} [a]_\theta = [b \cdot^{\mathbf{A}} a]_\theta = [p_{ji\vee j}(b)]_\theta$当且仅当 $(a,\ p_{ii\vee j}(a)) \in \theta$且 $(b,\ p_{ji\vee j}(b)) \in \theta$。由$S_\theta$的定义与引理 7，这等价于 $\{(i,\ i\vee j),\ (j,\ i\vee j)\} \subseteq S_\theta$，即 $(i,\ j) \in C_\theta$。其余断言由前述事实以及 P-lonka 和的一般理论立即得出。□

生成同余。 在本小节中，我们描述 P-lonka 和 $\mathbf{A} = \mathcal{P}_t(\mathbb{A})$ 中的生成同余。

我们将采用定义 6 中的记号，并将其从同余推广到任意（二元）关系；例如，这里 R_{ij} 表示 $R \cap (A_i \times A_j)$，其中 R 是 A 上的一个关系。

定理 11。 设 $R \subseteq A \times A$, $C \in Con(I)$ 满足 $S_R \subseteq C$ 和 $\Psi_i := Cg^{\mathbf{A}_i}\left(\bigcup_{u\ v\le i} (p_{ui} \times p_{vi})(R_{uv})\right)$。

对于每个 $i \in I$，令 θ_{ii} 为 A_i 上定义的二元关系，其定义如下 $(a,b) \in \theta_{ii}$ 当且仅当满足以下条件：
(1) 存在 $k \in I$，使得 $i \le k$，且 $(i,k) \in S_C = \{(i,j) \in C \mid (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\Psi_{i\vee j}) \neq \emptyset\}$；
(2) $(p_{ik}(a)\ \ p_{ik}(b)) \in \Psi_k$.

那么，$\theta_{ii} \in Con(\mathbf{A}_i)$和$(S_C, \{\theta_{ii}\}_{i\in I})$是直接系统 $\mathbb{A}$上的一个同余，其关联同余θ （见定理 *10*）满足 $R \subseteq \theta$。特别地，对于每个 $R \subseteq A \times A$ 以及每个 $C \in Con(\mathbf{I})$，都存在 $\theta \in Con(\mathbf{A})$ 使得 $C_\theta = C$。

证明。首先注意到，S_C 是良定义的（见引理 12），其所对应的同余族为Ψ_i；引理 12 保证 S_C 是 $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$的一个自反、对称且上传递的子半格。现在我们检验 θ_{ii} 是$\mathbf{A}_{ii}$上的一个同余。

自反性。设 $a \in A_i$，则 $(a,a) = (p_{ii}(a)\ p_{ii}(a)) \in \Delta_i \subseteq \Psi_i$，因此 $(a,a) \in \theta_{ii}$。
对称性。设 $(a,b) \in \theta_{ii}$，也就是说，存在 $k \in I$使得 $i \le k$，$(i,k) \in S_C$且 $(p_{ik}(a)\ p_{ik}(b)) \in \Psi_k$，因此 $(p_{ik}(b)\ p_{ik}(a)) \in \Psi_k$，于是 $(b,a) \in \theta_{ii}$。

传递性。设 $(a,b), (b,c) \in \theta_{ii}$。根据定义，存在 $k_1, k_2 \in I$使得 $i \le k_1, k_2$, $(i,k_1), (i,k_2) \in S_C$，且 $(p_{ik_1}(a)\ p_{ik_1}(b)) \in \Psi_{k_1}$，$(p_{ik_2}(b)\ p_{ik_2}(c)) \in \Psi_{k_2}$。由 $(p_{k_1k_1\vee k_2} \times p_{k_1k_1\vee k_2})(\Psi_{k_1}) \subseteq \Psi_{k_1\vee k_2}$ 和 $(p_{k_2k_1\vee k_2} \times p_{k_2k_1\vee k_2})(\Psi_{k_2}) \subseteq \Psi_{k_1\vee k_2}$，以及 $\Psi_{k_1\vee k_2}$ 的传递性，可推出 $((p_{i,k_1\vee k_2})(a), (p_{i,k_1\vee k_2})(c)) \in \Psi_{k_1\vee k_2}$。此外，我们有 $(i, k_1 \vee k_2) \in S_C$ (因为 S_C 是 $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ 的子半格)，因此 $(a,c) \in \theta_{ii}$。与运算的相容性：设 $(a_1,b_1) \ldots, (a_n,b_n) \in \theta_{ii}$。根据定义，存在 $k_1, \ldots, k_n \in I$使得 $i \le k_1, \ldots, k_n$, $(i,k_1) \ldots, (i,k_n) \in S_C$，且对每个 $j \in \{1,\ldots,n\}$，都有 $(p_{ik_j}(a_j)\, p_{ik_j}(b_j)) \in \Psi_{k_j}$。由于对于每个 $j \in \{1,\ldots,n\}$，我们有 $(p_{k_jk_1\vee\ldots\vee k_n} \times p_{k_jk_1\vee\ldots\vee k_n})\Psi_{k_j} \subseteq \Psi_{k_1\vee\ldots\vee k_n}$，因此 $(p_{ik_1\vee\ldots k_n}(a_j)\ p_{ik_1\vee\ldots k_n}(b_j)) \in \Psi_{k_1\vee\ldots\vee k_n}$。所以

$$(p_{ik_1\vee\ldots\vee k_n}(f^{\mathbf{A}_i}(a_1,\ldots,a_n)), p_{ik_1\vee\ldots\vee k_n}(f^{\mathbf{A}_i}(b_1,\ldots,b_n))) =$$
$$= (f^{\mathbf{A}_{k_1\vee\ldots\vee k_n}}(p_{ik_1\vee\ldots\vee k_n}(a_1),\ldots,p_{ik_1\vee\ldots k_n}(a_n)), f^{\mathbf{A}_{k_1\vee\ldots\vee k_n}}(p_{ik_1\vee\ldots k_n}(b_1),\ldots,p_{ik_1\vee\ldots k_n}(b_n))) \in \Psi_{k_1\vee\ldots\vee k_n}.$$

根据定义，由于 $(i, k_1 \vee \ldots \vee k_n) \in S_C$，我们有 $(f^{\mathbf{A}_1}(a_1,\ldots,a_n)\ f_{\mathbf{A}^i}(b_1,\ldots,b_n)) \in \theta_{ii}$。

现在我们证明条件。(iii) 令 $(a,b) \in \theta_{ii}$，t
那么根据定义，存在 $k \in I$ 使得 $i \le k$，$(i,k) \in S_C$ 且 $(p_{ik}(a)\ p_{ik}(b)) \in$

Ψ_k。因此 $i \vee j \leq k \vee j$，$(i \vee j, k \vee j) \in S_C$，且 $(p_{i\vee j,k\vee j}((p_{ii\vee j})(a))p_{i\vee j,k\vee j}((p_{ii\vee j})(b))) = (p_{ik\vee j}(a)\ p_{ik\vee j}(b)) = (p_{kk\vee j}(p_{ik}(a))\ p_{kk\vee j}(p_{ik}(b))) \in (p_{kk\vee j} \times p_{kk\vee j})(\Psi_k) \subseteq \Psi_{k\vee j}$，因此根据定义，$(a,b) \in (p_{ii\vee j\times p_{ii\vee j}})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$。

(iv) 假设 $(i,j) \in S_C$。$(a,b) \in (p_{ii\vee j} \times p_{ii\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$ 当且仅当 $(p_{ii\vee j}(a)\ p_{ii\vee j}(b)) \in \theta_{i\vee j,i\vee j}$ 当且仅当存在 $k \in I$ 使得 $i\vee j \leq k$, $(i\vee j,k) \in S_C$ 且 $(p_{ik}(a)\ p_{ik}(b)) = (p_{i\vee j,k}(p_{ii\vee j}(a))\, p_{i\vee j,k}(p_{ii\vee j}(b))) \in \Psi_k$。也就是说 $(a,b) \in \theta_{ii}$，因为 $i \leq i\vee j \leq k$ 蕴含 $i \leq k$，且 $(i, i\vee j), (i\vee j, k) \in S_C$ 蕴含（上传递性）$(i,k) \in S_C$。

由于对于每个 $i \in I$，我们都有 $i \leq i$，$(i,i) \in S_C$ 且 $(p_{ii} \times p_{ii})(\Psi_i) = \Psi_i$，因此可推出，对每个 $i \in I$，都有 $\Psi_i \subseteq \theta_{ii}$。最后注意到，$(i,j) \in S_R$ 意味着 $\emptyset \neq R_{ij} \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}((p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})(R_{ij})) \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(Cg^{\mathbf{A}_{i\vee j}}(\bigcup_{u,v\leq i\vee j}(p_{ui\vee j} \times p_{vi\vee j})(R_{uv}))) = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})(\Psi_{i\vee j}) \subseteq (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})(\theta_{i\vee j,i\vee j})$，所以 $(i,j) \in S_C$ 且 $R_{ij} \subseteq \theta_{ij} = (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\theta_{i\vee j,i\vee j})$（见定理 10）。因此 $R \subseteq \theta$。□

推论 11. 设 $R \subseteq A \times A$。那么对于每个 $C \in Con(\mathbf{I})$ 且满足 $S_R \subseteq C$ 的对象，都存在 $\theta \in Con(\mathbf{A})$，使得$R \subseteq \theta$ 且 $C_\theta = C$。

证明. 这可由定理 11 立即推出，同时还用到了引理 12 的第 (iii) 项。□

推论 12. 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $\Psi_i := Cg^{\mathbf{A}_i}\left(\bigcup_{u\ v\leq i} (p_{ui} \times p_{vi})(R_{uv})\right)$。那么 $S_{Cg^{\mathbf{A}}(R)} = S_{Cg^{\mathbf{I}}(S_R)}$ 且$(a,b) \in (Cg^{\mathbf{A}}(R))_{ii}$ 当且仅当满足以下条件：

(1) 存在 $k \in I$，使得 $i \leq k$ 且 $(i,k) \in S_C = \{(i,j) \in C \mid (p_{ii\vee j} \times p_{ji\vee j})^{-1}(\Psi_{i\vee j}) \neq \emptyset\}$；(2) $(p_{ik}(a)\ p_{ik}(b)) \in \Psi_k$。

证明。设 $\theta \in Con(\mathbf{A})$，使得 $R \subseteq \theta$，则 $S_R \subseteq S_\theta \subseteq C_\theta$，因此 $Cg^{\mathbf{I}}(S_R) \subseteq C_\theta$，故 $S_{Cg^{\mathbf{I}}(S_R)} \subseteq S_{C_\theta} = S_{\theta\circ}$ 此外，对每个 $i \in I$，令 $\eta_{ii} \subseteq A_i \times A_i$ 为定理 11 中定义在 $\mathbf{A}_i$ 上的同余，则对每个 $i \in I$ 以及每个 $(a,b) \in A_i \times A_i$，我们有 $(a,b) \in \eta_{ii}$ 当且仅当存在 $k \in I$使得 $i \leq k$，$(i,k) \in S_{Cg^{\mathbf{I}}(R)} \subseteq S_\theta$，且满足 $(p_{ik}(a)\ p_{jk}(b) \in \Psi_k \subseteq \theta_{kk}$，因此 $(p_{ik}(a)\ p_{ik}(b)) \in \theta$。但也有 $(i,k) \in S_\theta$，于是 $(a, p_{ik}(a))$，$(b, p_{ik}(b)) \in \theta$，因此根据 θ的传递性，$(a,b) \in \theta_{ii}$。□

因子同余。回顾一下，对于代数 $\mathbf{A}$，一对因子同余 是指一对 $(\theta,\ \theta^*) \in Con(\mathbf{A}) \times Con(\mathbf{A})$，满足 $\theta \cap \theta^* = \Delta_{\mathbf{A}}$，$\theta \vee \theta^* = \nabla_{\mathbf{A}}$ 以及 θ，θ^*可交换，即 $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$（见 [12, 定义 7。4]）。在本小节中，我们刻画 P-lonka 和的因子同余。

回顾一下，如果 θ_1 和 θ_2 是代数 $\mathbf{A}$上的同余，则它们的关系乘积 $\theta_1 \circ \theta_2$ 是 $\mathbf{A}$ 上的同余，当且仅当 θ_1、θ_2 可交换（在这种情况下 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_2$）。自然会产生这样的疑问：当 $\mathbf{A}$ 是强不规则簇中代数半格直系上的 P-lonka 和时，同余 $\theta_1 \circ \theta_2$的结构是什么 $\mathcal{V}$

引理 13. 设 $\mathbf{A}$ 为强不规则簇 $\mathcal{V}$ 中诸代数的半格直系 $\mathbb{A}$ 上的 *P-lonka* 和，且 $\theta_1, \theta_2 \in Con(\mathbf{A})$。则：

(1) $C_{\theta_1 \cap\ \theta_2} = C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2}$;
(2) $(\theta_1 \cap \theta_2)_{ii} = (\theta_1)_{ii} \cap (\theta_2)_{ii}$ *for every* $i \in I$.

证明。(1) 不难验证 $S_{\theta_1 \cap\ \theta_2} \subseteq S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2\circ}$ 设 $(i,j) \in C_{\theta_1 \cap\ \theta_2}$，则 $\{(i, i\vee j), (j, i\vee j)\} \subseteq S_{\theta_1 \cap\ \theta_2} \subseteq S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2}$，从而 $(i,j) \in C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2\circ}$ 反之，设 $(i,j) \in C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2}$，则 $\{(i, i\vee j), (j, i\vee j)\} \subseteq S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2\circ}$ 设 $a \in A_i$, $b \in A_j$，则 $\{(a, p_{ii\vee j}(a)), (b, p_{ji\vee j}(b))\} \subseteq \theta_1 \cap \theta_2$，因此 $\{(i, i\vee j), (j, i\vee j)\} \subseteq S_{\theta_1 \cap\ \theta_2}$，即 $(i,j) \in C_{\theta_1 \cap\ \theta_2\circ}$

(2) $(\theta_1 \cap \theta_2)_{ii} = (\theta_1 \cap \theta_2) \cap (A_i \times A_i) = (\theta_1 \cap (A_i \times A_i)) \cap (\theta_2 \cap (A_i \times A_i)) = (\theta_1)_{ii} \cap (\theta_2)_{ii}$ 对每个 $i \in I$。□

引理 14. 设 $\mathbf{A}$ 是代数在 $\mathcal{V}$ 和 θ_1 上以半格直系 $\mathbb{A}$ 为指标的 *P-lonka* 和，且 $\theta_2 \in Con(\mathbf{A})$具有两个可置换同余。那么 $S_{\theta_1\circ\theta_2} \subseteq S_{\theta_1} \circ S_{\theta_2}$、$C_{\theta_1} \circ C_{\theta_2} \subseteq C_{\theta_1\circ\theta_2}$，并且对每个 $i \in I$

$$(\theta_1 \circ \theta_2)_{ii} = \bigcup_{(i,j)\in S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2}} ((\theta_1)_{ij} \circ (\theta_2)_{ji}).$$

证明。假设 $(i,k) \in S_{\theta_1\circ\theta_2\circ}$ 那么根据定义，存在 $(a,c) \in A_i \times A_k$，使得 $(a,c) \in \theta_1 \circ \theta_2$，也就是说，存在 $j \in I$ 和 $b \in A_j$，对于某个 $j \in I$，使得 $(a,b) \in \theta_1$ 且 $(b,c) \in \theta_{2\circ}$ 因此，$(i,j) \in S_{\theta_1}$ 且

$(j,k) \in S_{\theta_2}$，这意味着 $(i,k) \in S_{\theta_1 \circ \theta_2}$。
假设 $(i,k) \in C_{\theta_1} \circ C_{\theta_2}$。那么存在 $j \in I$，使得 $(i,j) \in C_{\theta_1}$ 且 $(j,k) \in C_{\theta_2}$，也就是说 $\{(i,i \vee j)$、$(j,i \vee j)\} \subseteq S_{\theta_1}$ 以及 $\{(j,j \vee k)$、$(k,j \vee k)\} \subseteq S_{\theta_2}$。因此，由于保持并，我们还得到 $(i \vee j, i \vee j \vee k) \in S_{\theta_2}$。此外，对于每个 $a \in A_i$，$(a, p_{ii \vee j}(a)) \in \theta_1$ 且 $(p_{ii \vee j}(a)\ p_{ii \vee j \vee k}(a)) \in \theta_2$，从而 $(a, p_{ii \vee j \vee k}(a)) \in \theta_1 \circ \theta_2$，这意味着 $(i, i \vee j \vee k) \in S_{\theta_1 \circ \theta_2}$。由 θ_1 和 θ_2 的对称性与可置换性，我们还得到 $(k, i \vee j \vee k) \in S_{\theta_1 \circ \theta_2}$。因此，根据 $S_{\theta_1 \circ \theta_2}$ 的上传递性，我们有 $\{(i, i \vee k)$、$(k, i \vee k)\} \subseteq S_{\theta_1 \circ \theta_2}$，从而证明了 $(i,k) \in C_{\theta_1 \circ \theta_2}$。
最后，假设 $(a,c) \in (\theta_1 \circ \theta_2)_{ii}$。那么，根据定义，$(a,c) \in (A_i \times A_i) \cap (\theta_1 \circ \theta_2)$。这意味着 $(a,c) \in A_i \times A_i$，并且存在 $b \in A_j$，使得 $(a,b) \in \theta_1$ 且 $(b,c) \in \theta_2$。由此可推得，存在 $j \in I$，使得 $(a,c) \in (\theta_1)_{ij} \circ (\theta_2)_{ji}$。反过来，假设对于某个 $j \in I$，有 $(a,c) \in (\theta_1)_{ij} \circ (\theta_2)_{ji}$。那么，根据定义，存在 $b \in A_j$，使得 $(a,b) \in (\theta_1)_{ij} \subseteq \theta_1$ 且 $(b,c) \in (\theta_2)_{ji} \subseteq \theta_2$。因此，$(a,c) \in \theta_1 \circ \theta_2$，进而 $(a,c) \in (\theta_1 \circ \theta_2)_{ii}$。□

由前述内容，我们得出因子同余的如下刻画。

定理 12. 设**A** 是代数在半格直系 $\mathbb{A}$ 上方的 *P-lonka* 和，其中代数属于 $\mathcal{V}$ 和 $\theta_1, \theta_2 \in Con(A)$。则以下条件等价：

(1) (θ_1, θ_2) 是**A**上的一对因子同余；(2) θ_1, θ_2 可交换，$(C_{\theta_1}, C_{\theta_2})$ 是**I** 上的一对因子同余，并且对每个 $i \in I$ $((\theta_1)_{ii}, (\theta_2)_{ii})$都是$\mathbf{A}_i$上的一对因子同余。

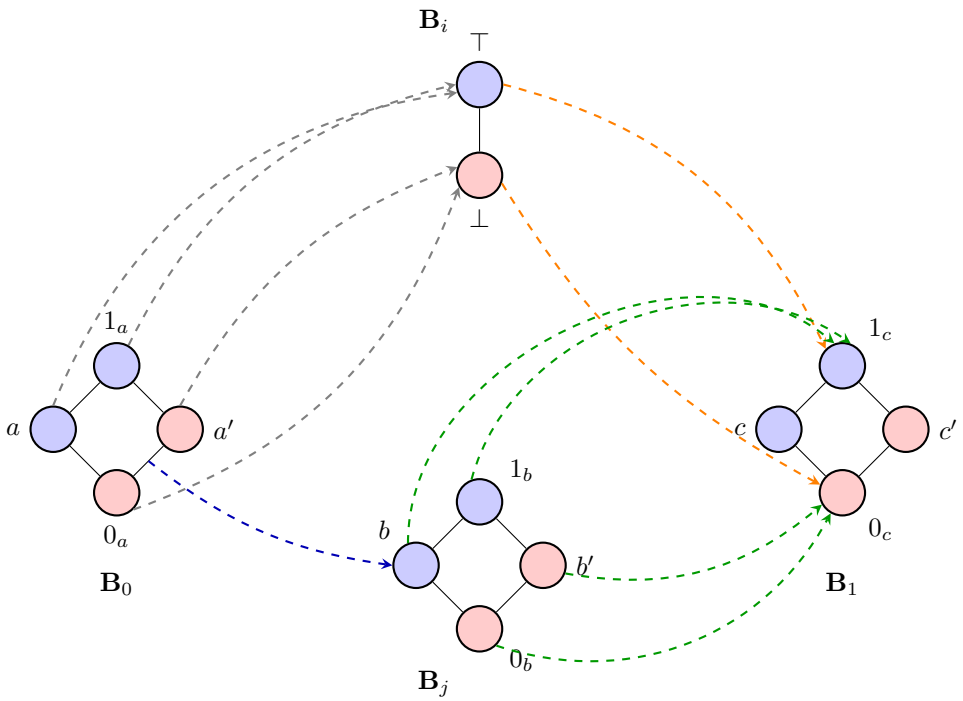
证明。(1) (⇒) (2)。设 (θ_1, θ_2) 是**A**上的一对因子同余。于是，特别地，$\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$，由此根据引理 13-(1)可得 $C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2} = C_{\theta_1 \cap \theta_2} = C_{\Delta_{\mathbf{A}}} = \Delta_{\mathbf{I}}$。此外，根据引理 14，$\nabla_{\mathbf{I}} = S_{\nabla_A} = S_{\theta_1 \vee \theta_2} = S_{\theta_1 \circ \theta_2} \subseteq S_{\theta_1} \circ S_{\theta_2} \subseteq C_{\theta_1} \circ C_{\theta_2}$（最后一个包含关系利用定义很容易验证），因此 $C_{\theta_1} \circ C_{\theta_2} = \nabla_{\mathbf{I}}$。这表明 $(C_{\theta_1}, C_{\theta_2})$ 是**I**上的一对因子同余。

根据引理 13-(2)，对每个 $i \in I$，$(\theta_1)_{ii} \cap (\theta_2)_{ii} = (\theta_1 \cap \theta_2)_{ii} = (\Delta_{\mathbf{A}})_{ii} = \Delta_{\mathbf{A}_i}$。此外，注意到 $S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2} \subseteq C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2} = C_{\theta_1 \cap \theta_2} = \Delta_{\mathbf{I}}$，即 $S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2} = \Delta_{\mathbf{I}}$。因此，由引理 14，对每个 $i \in I$，$(\theta_1)_{ii} \circ (\theta_2)_{ii} = (\theta_1 \circ \theta_2)_{ii} = (\theta_2 \circ \theta_1)_{ii} = (\theta_2)_{ii} \circ (\theta_1)_{ii}$，从而 $((\theta_1)_{ii}, (\theta_2)_{ii})$ 是一对可置换同余。因此，对每个 $i \in I$：$(\theta_1)_{ii} \vee (\theta_2)_{ii} = (\theta_1)_{ii} \circ (\theta_2)_{ii} = (\theta_1 \circ \theta_2)_{ii} = (\nabla_{\mathbf{A}})_{ii} = \nabla_{\mathbf{A}_i}$。这表明对所有 $i \in I$，$((\theta_1)_{ii}, (\theta_2)_{ii})$ 是 $\mathbf{A}_i$ 上的一对因子同余。

(2)⇒(1)。假设 θ_1 和 θ_2 可置换，并且对于每个 $i \in I$，$(C_{\theta_1}, C_{\theta_2})$ 和 $((\theta_1)_{ii}, (\theta_2)_{ii})$ 分别是 I 和 $\mathbf{A}_i$上的一对因子同余。由于 $S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2} \subseteq C_{\theta_1} \cap C_{\theta_2} = C_{\theta_1 \cap \theta_2} = \Delta_{\mathbf{I}}$，因此 $S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2} = \Delta_{\mathbf{I}}$；并且根据引理 13，对于每个 $i \in I$，有 $(\theta_1 \cap \theta_2)_{ii} = (\theta_1)_{ii} \cap (\theta_2)_{ii} = \Delta_{\mathbf{A}_i}$。因此，根据定理 10，我们可推出 $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_{\mathbf{A}}$。由 C_{θ_1} 和 C_{θ_2} 是因子同余这一事实（以及引理 14），可得 $\nabla_{\mathbf{I}} = C_{\theta_1} \vee C_{\theta_2} = C_{\theta_1} \circ C_{\theta_2} \subseteq C_{\theta_1 \circ \theta_2}$，因此 $C_{\theta_1 \circ \theta_2} = \nabla_{\mathbf{I}}$ 和 $\forall i \in I$：$(\theta_1 \vee \theta_2)_{ii} = (\theta_1 \circ \theta_2)_{ii} = (\theta_1)_{ii} \circ (\theta_2)_{ii} = \mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_i$。这里我们再次运用了引理 14，并考虑到 $S_{\theta_1} \cap S_{\theta_2} = \Delta_{\mathbf{I}}$，于是 $\forall (i,j) \in I \times I$：$(p_{ii \vee j} \times p_{ji \vee j})^{-1}((\theta_1 \circ \theta_2)_{i \vee j, i \vee j}) = (p_{ii \vee j} \times p_{ji \vee j})^{-1}(A_{i \vee j} \times A_{i \vee j}) = A_i \times A_j \neq \emptyset$，所以 $S_{\theta_1 \circ \theta_2} = C_{\theta_1 \circ \theta_2} = \nabla_{\mathbf{I}}$；根据定理 10 中的同余刻画，我们有 $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_{\mathbf{A}}$。这表明 (θ_1, θ_2) 是 A 上的一对因子同余。□

注记 4。请注意，在定理 12 的（2）中，要求 θ_1、θ_2 可置换（即 P-lonka 和**A**的同余）是必要假设。也就是说，可以找到成对的 C_{θ_1}、C_{θ_2} 和 $(\theta_1)_{ii}$、$(\theta_2)_{ii}$，它们在**I** 和 P-lonka 和的每个纤维$\mathbf{A}_i$ 上都是因子同余，但通过定理 10 得到的 P-lonka 和**A** 上的相应同余 θ_1、θ_2不可置换，如下例所示。

设**A** 为一个对合双半格，其 P-lonka 和以（并半格）菱形 $I = \{0, i, j, 1\}$ 为指标集，并且其布尔分量为 $B_0 \cong B_j \cong B_1$（四元布尔代数的副本）和 B_i（二元布尔代数的一个副本），同时配备下图所示的布尔同态。



设 $C_{\theta_1} = Cg^{\mathbf{I}}(i,1)$、$C_{\theta_2} = Cg^{\mathbf{I}}(1,j)$、$(\theta_1)_{00} = Cg^{B_0}(a',1_a)$、$(\theta_1)_{jj} = Cg^{B_j}(b',1_b)$、$(\theta_1)_{ii} = \nabla_{B_i}$、$(\theta_1)_{11} = \nabla_{B_1}$ 以及 $(\theta_1)_{00} = Cg^{B_0}(a,1_a)$、$(\theta_1)_{jj} = Cg^{B_j}(b,1_b)$、$(\theta_1)_{ii} = \Delta_{B_i}$、$(\theta_1)_{11} = \Delta_{B_1}$。那么，$C_{\theta_1}$、$C_{\theta_2}$ 以及 $(\theta_1)_{uu}$、$(\theta_2)_{uu}$（对每个 $u \in I$）分别是 I 和 A 的纤维上的因子同余，并且满足定理 10 的条件。相应的同余（见定理 10）θ_1、θ_2 在 A 上满足：$[0_a]_{\theta_1} = \{0_a, 0_b, a, b\}$、$[1_a]_{\theta_1} = \{a', 1_a, b', 1_b\}$、$[0_c]_{\theta_1} = \{\bot, \top, 0_c, c, c', 1_c\}$ 以及 $[0_a]_{\theta_2} = \{a', 0_a, \bot\}$、$[1_a]_{\theta_2} = \{a, 1_a, \top\}$、$[1_b]_{\theta_2} = \{b, 1_b, 1_c\}$、$[0_b]_{\theta_2} = \{0_b, 0_c, b'\}$、$[c]_{\theta_2} = \{c\}$、$[c']_{\theta_2} = \{c'\}$ 不可置换；事实上，$(c,b) \in \theta_1 \circ \theta_2$，但 $(c,b) \notin \theta_1 \circ \theta_2$。

7. Epimorphism surjectivity and Monomorphism injectivity

定义 8。 设**A** 和**B** 是类 $\mathcal{K}$ 中的代数，且 $f \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 为一个同态。 f 称为 $\mathcal{K}$-满同态，如果它是右可消去的，即对于类 $\mathcal{K}$ 中的每个代数**C** 以及每个 $g_1, g_2 \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{C})$，若$g_1 \circ f = g_2 \circ f$ 则有 $g_1 = g_2$。如果它是左可消去的，则 f 称为 $\mathcal{K}$-单同态，即对于类 $\mathcal{K}$ 中的每个代数**C**以及每个 $g_1, g_2 \in Hom(\mathbf{C}, \mathbf{A})$，若 $f \circ g_1 = f \circ g_2$ 则有 $g_1 = g_2$。

注意，每个满射（单射）同态都是满同态（单同态），但反之未必成立。这就说明了下面的定义是合理的。

定义 9。 代数类 $\mathcal{K}$ 具有满同态满射性（简称ES），如果 $\mathcal{K}$ 中的每个代数满同态都是满射的。 $\mathcal{K}$ 具有单同态单射性，如果 $\mathcal{V}$ 中的每个代数单同态都是单射的。

回忆一下，带零元的（并）半格**S** 的理想是一个子集 $I \subseteq S$，它是一个下集（即，对于每个$x \in S$和 $y \in I$ $x \leq y$，有 $x \in I$），并且对 $\vee$封闭，也就是说，对于每个 x， $y \in I, x \vee y \in I$。此外，映射φ: $\mathbf{S} \to \mathbf{2}$ 是到二元半格**2** 中的一个（半格）同态，当且仅当 $\varphi^{-1}(\{0\})$是**S**的一个理想。最后，回忆一下，半格（带零元）簇具有 ES [19]。

满同态（单同态）的概念可以按显然的方式对任意范畴加以定义。在以下某些结果中，我们提及带零元的半格直接系统这一范畴中的满态射（单态射）。

引理 15. 设 $h = (\varphi, (h_i)_{i \in I})$: $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$是强不规则簇 $\mathcal{V}$ 中带零元的半格直接系统的满同态。则 φ: $\mathbf{I} \to \mathbf{K}$ 是满同态。

证明。 反设 φ: $\mathbf{I} \to \mathbf{K}$ 不是满同态，也就是说 φ 不是满射。于是，利用（定理 1 的证明中的）技巧，[19, 定理 1。1], 考虑 K 的两个子集，定义如下：

- $J_1 = \downarrow a = \{x \in K : \ x \leq a\}$;
- $J_2 = \{x \in K : \ \exists z \in \varphi(I),$ 使得 $x \leq z < a\}$。

容易验证， J_1、 J_2 是理想，使得 $J_1 \neq J_2$ 且 $J_1 \cap \varphi(I) = J_2 \cap \varphi(I)$。由此可知，我们可以定义两个同态 ψ_1, $\psi_2 : \mathbf{K} \to \mathbf{2}$，使得 $\psi_1 \neq \psi_2$ 且 $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$ （通过令 $\psi_i(\{0\}) = J_i$， 其中 $i \in \{1, 2\}$）。给定半格同态 $\psi : \mathbf{K} \to \mathbf{2}$, 考虑半格正向系统 $\psi^\star$ 之间的如下情形： $\mathbb{B} \to \mathbb{S}_2$, 其中 $\mathbb{S}_2$ 是由 $\mathcal{V}$ 中两个平凡代数构成的半格直系（并以 $\mathbf{2}$ 为指标），定义为 $\forall k \in K, \forall a \in \mathbf{A}_k : \ \psi^\star(a) = \psi(k)$。由构造可知 $\psi_1^\star \circ h = \psi_2^\star \circ h$, 但 $\psi_1^\star \neq \psi_2^\star$, 这与 h 是带零元的半格直接系统的满同态这一假设相矛盾。□

引理 16。 设 $\mathbf{A}$ 是强非正则簇 $\mathcal{V}$ 中的一个半格直系 $\mathbb{A} = ((A_i)_{i \in I}, (I, \leq), (p_{ij})^{i \leq j})$ 上的 ***P-lonka*** 和， 且 $g \in Hom(\mathbf{A}_i, \mathbf{B})$, 其中 $\in \mathcal{V}$属于$\mathbf{B}$, 对于某个 $i \in I$。那么 g 可以扩展为一个同态 $h_g \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B}^*)$。

证明。 设 $i \in I$ 和 h_g: $A \to B^*$ 定义如下:

$$a \mapsto h_g(a) := \begin{cases} g \circ p_{ji}(a), \text{ if } a \in A_j \text{ with } j \leq i; \\ \infty, \text{ otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

映射 h_g 显然定义良好，并且是 g 的扩展（因为 $p_{ii} = id_{\mathbf{A}_i}$）。我们只需验证 h_g 是一个同态，也就是说，对于任意 n 元运算 f（属于 $R(\mathcal{V})$的型），都有 $h_g(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f_{\mathbf{B}^*}(h_g(a_1) \ldots, h_g(a_n))$。为此，只需考虑以下两种（穷尽所有情况的）情形:

1) $a_j \in A_j$满足 $j \leq i$, 对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立。在这种情况下， $1 \vee \cdots \vee n = k \leq i$ （这里稍微滥用了记号，也将 $1, \ldots, n$ 用作代数的指标，而元素 $a_1, \ldots a_n$ 属于这些代数），因此我们有:

$$\begin{aligned} h_g(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= h_g(f^{\mathbf{A}_k}(p_{1k}(a_1), \ldots, p_{nk}(a_n))) \\ &= g(p_{ki}(f^{\mathbf{A}_k}(p_{1k}(a_1), \ldots, p_{nk}(a_n)))) && \text{(definition of } h_g) \\ &= g(f^{\mathbf{A}_i}(p_{ki}(p_{1k}(a_1)), \ldots, p_{ki}(p_{nk}(a_n)))) && (p_{ki} \text{ homomorphism}) \\ &= g(f^{\mathbf{A}_i}(p_{1i}(a_1), \ldots, p_{ni}(a_n))) \\ &= f^{\mathbf{B}^*}((g(p_{1i}(a_1))), \ldots, g(p_{ni}(a_n))) && (g \text{ homomorphism}) \\ &= f^{\mathbf{B}^*}(h_g(a_1), \ldots, h_g(a_n))) && \text{(definition of } h_g) \end{aligned}$$

2) $a_j \in A_j$满足 $j \not\leq i$, 对某个 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 成立。于是 $1 \vee \cdots \vee n = k \not\leq i$ （因为若 $k \leq i$， 则 $j \not\leq i$）。因此 $h_g(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = h_g(f^{\mathbf{A}_k}(p_{1k}(a_1) \ldots, p_{nk}(a_n))) = \infty$（因为 $k \not\leq i$），另一方面， $f^{\mathbf{B}^*}(h_g(a_1) \ldots, h_g(a_n)) = \infty$, 因为 $h_g(a_j) = \infty$。□

定理 13. 设 $\mathcal{V}$ 是一个具有满同态满射性的强不规则簇，则其正则化$R(\mathcal{V})$ 具有满同态满射性。

证明。假设 $\mathcal{V}$ 具有 ES，并通过反证假设 $R(\mathcal{V})$ 不具有 ES; 也就是说，存在 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B} \in R(\mathcal{V})$, 以及一个非满射的满同态 $g \in Hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$。我们断言存在 $\mathbf{C} \in \mathcal{V}$以及 $h_1, h_2 \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{C}^*)$, 使得 $h_1 \neq h_2$ 且 $h_1 \circ g = h_2 \circ g$, 这与根据假设 g 是满同态这一事实矛盾。由于 g 不是满射， φ_g 不是满射，或者存在 $i \in I$ 使得$g_i : A_i \to B_{\varphi_g(i)}$ 不是满射。第一种情形下，断言由引理 15 的证明可得。第二种情形下， $g_i : A_i \to B_{\varphi_g(i)}$ 不是满同态（因为根据假设 $\mathcal{V}$ 具有满同态满射性），因此存在 $\mathbf{C} \in \mathcal{V}$以及 $f_1, f_2 \in Hom(\mathbf{B}_{\varphi_g(i)}, \mathbf{C})$, 使得 $f_1 \circ g_i = f_2 \circ g_i$ 且 $f_1 \neq f_2$; 而根据引理 16，我们可以将这些映射扩展为同态 $h_{f_1}, h_{f_2} \in Hom(\mathbf{B}, \mathbf{C}^*)$。由 (3) 立即可得 $h_{f_1} \circ g = h_{f_2} \circ g$ 且 $h_{f_1} \neq h_{f_2}$。□

例 13: 由定理 13 可知， ***Clifford*** 半群、对合双半格和对偶弱括号 的簇具有 ES。对于后者，注意到利用群簇具有满态射满射性这一事实，很容易证明斜括号 的簇具有满态射满射性，因此由定理 13 可知对偶弱括号的簇也具有满态射满射性。

定理 13 中采用的证明策略使我们能够证明一个更强的结果，陈述如下。

定理 14. 设 $\mathcal{V}$ 是一个强不规则簇，具有 ES，且 $\mathcal{K}$ 是其正则化 $R(\mathcal{V})$ 的一个子类，使得对于每个 $\mathbf{C} \in \mathcal{V}$，都存在 $\mathbf{D} \in \mathcal{K}$，使得 $\mathbf{C}^*$ 嵌入到 $\mathbf{D}$ 中。那么 $\mathcal{K}$ 具有满同态满射性。

证明。设 A、B $\in \mathcal{K}$ 和 $h \in Hom$(A, B) 是一个 $\mathcal{K}$-满同态。我们证明，实际上 h 也是一个 $R(\mathcal{V})$-满同态（从而得到所需结论）。反设 h 不是一个 $R(\mathcal{V})$-满同态，那么，运用定理 13 证明中的相同论证，可知存在 C $\in \mathcal{V}$ 和 $g_1, g_2 \in Hom$(B, C*)，使得 $g_1 \neq g_2$ 和 $g_1 \circ h = g_2 \circ h$。根据假设，存在 D $\in \mathcal{K}$，使得 C* 通过单同态 ι: C* $\to$ D 嵌入 D，因此 $(\iota \circ g_1) \circ h = (\iota \circ g_2) \circ h$。所以 $\iota \circ g_1, \iota \circ g_2$: B $\to$ D*是 $\mathcal{K}$-同态，而 h 根据假设是一个 $\mathcal{K}$-满同态，因此我们推得 $\iota \circ g_1 = \iota \circ g_2$，进而有$g_1 = g_2$（因为 ι 是单射），这与假设 $g_1 \neq g_2$矛盾。因此 h 是一个 $R(\mathcal{V})$-满同态，故它是满射，因为根据定理 13，$R(\mathcal{V})$具有满同态满射性。□

回顾一下，二元链既可以看作半格，也可以看作半格有向系统（由两个平凡代数组成）：在下面的引理中，前者记作 **2**，后者记作 $\mathbb{2}$。

引理 17. 设 $h = (\varphi, (h_i)_{i \in I})$: $\mathbb{A} \to \mathbb{B}$ 是强非正则簇 $\mathcal{V}$中带零元的半格直接系统之间的一个单同态，则 φ: **I** $\to$ **K** 是一个单同态。

证明. 反设 φ 不是单同态，也就是说 φ 不是单射，即存在$i_1, i_2 \in I$使得 $i_1 \neq i_2$且 $\varphi(i_1) = \varphi(i_2)$。考虑常值映射 ψ_1, ψ_2: **2** $\to$ **I** 到 i_1和i_2，它们分别是半格同态；再考虑半格直接系统 $\mathbb{2}$ 以及态射k_1, k_2: $\mathbb{2} \to \mathbb{A}$，其对应的同态分别为 ψ_1和 ψ_2。于是显然 $h \circ k_1 = h \circ k_2$，但 $k_1 \neq k_2$，这与 h 是单同态的假设矛盾。□

引理 *18.* 设 *A* 和 *B* 分别是强非正则簇 $\mathcal{V}$ 中、基于半格直系 $((A_i)_{i \in I}, (I, \leq), (p_{ij})_{i \leq j})$ 和 $((B_h)_{h \in K}, (K, \leq), (q_{hk})_{h \leq k})$ 的 *P-lonka* 和，且 $h = (\varphi, (h_i)_{i \in I}) \in Hom$(A, B) 是一个单同态。那么 $\forall i \in I$: $h_i : A_i \to B_{\varphi(i)}$ 是一个单同态。

证明。反设存在 $i \in I$，使得 h_i: $\mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_{\varphi(i)}$ 不是单同态，也就是说，h_i 不是单射，因为根据假设，$\mathcal{V}$ 具有单同态单射性。因此，我们可以找到 $a, b \in A_i$，使得 $h_i(a) = h_i(b)$。令 ψ: **2** $\to$ **I** 为取常值于 $\{i\}$ 的常元（半格）同态。定义同态 k_1, k_2: $\mathbb{2} \to \mathbb{A}$（其对应的半格同态为 ψ），分别为取常值于 $\{a\}$ 和 $\{b\}$ 的常值映射。由此可得 $h \circ k_1 = h \circ k_2$，但 $k_1 \neq k_2$，这与 h 是单同态这一假设矛盾。□

引理 17 和 18 的结合立即得出以下结论。

定理 15. 设 $\mathcal{V}$ 是一个具有单同态单射性的强不规则簇，则其正则化$R(\mathcal{V})$ 具有单同态单射性。

Ackowlegments

我们谨此感谢以下资助来源：

- 卡利亚里大学通过 StartUp 项目 $GraphNet$ (F25F21002720001)；
- 欧盟（“地平线欧洲”研究与创新计划）通过 MSCA-RISE 行动 MOSAIC（资助协议编号：101007627）；
- 意大利教育、大学与研究部通过 PRIN 2022 项目 DeKLA（“发展克林逻辑及其应用”，项目代码：2022SM4XC8）、PRIN 2022 项目“基础簇”（项目代码：2022NTCHYF），以及 PRIN Pnrr 项目“逻辑、计算与自然过程的量子模型 (Qm4Np)”（项目代码：P2022A52CR）；
- 撒丁岛基金会通过 MAPS 项目（F73C23001550007）；
- 感谢 ASL（符号逻辑协会）向 G. Zecchini 提供参加锡耶纳 LATD 2025 会议的旅行资助；
- INDAM GNSAGA（Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche, Geometriche e loro Applicazioni）。

本文的研究成果曾在多个会议和研讨会上作报告。作者特别感谢华沙理工大学“一般代数”研究组的成员，尤其是 Anna Romanowska 和 Anna Zamojska-Dzienio。我们还要感谢卡利亚里大学 ALOPHIS 研究组的成员，尤其是 Francesco Paoli。

References

[1] C. Bergman. *Universal Algebra: Fundamentals and Selected Topics*. Chapman &; Hall 纯数学与应用数学丛书。Chapman and Hall/CRC，2011。[2] C. Bergman 和 A. Romanowska。正则化簇的子准簇。 *Algebra Universalis*，36(4):536–563，1996。[3] S. Bonzio。关于 P-lonka 和。 *Logica Universalis*，12:327–339，2018。[4] S. Bonzio、J. Gil-F´erez、P. Jipsen、A. P˘renosil 和 M. Sugimoto。关于平衡剩余偏序幺半群的结构。载于 U. Fahrenberg、W. Fussner 和 R. Gl¨uck 编，
Relational and Algebraic Methods in Computer Science，第 83–100 页，2024。[5] S. Bonzio、J. Gil-F´erez、F. Paoli 和 L. Peruzzi。关于次协调弱克莱尼逻辑：公理化与代数分析。 *Studia Logica*，105(2):253–297，2017。[6] S. Bonzio、J. Gil-F´erez、P. Jipsen、A. P˘renosil 和 M. Sugimoto。平衡剩余偏序半群，2025。ArXiv 预印本（https://arxiv.org/abs/2505.12024）。[7] S. Bonzio、A. Loi 和 L. Peruzzi。对合双半格的对偶。 *Studia Logica*，107:423–444，2019。[8] S. Bonzio、T. Moraschini 和 M. Pra Baldi。左变量包含逻辑与 P
- *Archive for* lonka 矩阵
Mathematical Logic 60 49 76, 2021
和。 , : – 。[9] S. Bonzio、F. Paoli 和 M. Pra Baldi。 *Logics of Variable Inclusion*。施普林格，逻辑趋势丛书，2022。[10] S. Bonzio 和 M. Pra Baldi。包含逻辑：代数对应物与约化模型。 *Journal of Logic and Com-*
putation 32 808 831, 2022
, : – 。[11]
S. Bonzio 和 M. Pra Baldi。关于博赫瓦尔代数的结构。 *The Review of Symbolic Logic*，18(1):273–299，2025。[12] S. Burris 和 H. P. Sankappanavar。
A course in Universal Algebra `https://www.math.uwaterloo.` 。可在线获
`ca/~snburris/htdocs/ualg.html` 2012
取，千年纪念版，。[13] F. Catino、M. Mazzotta 和 P. Stefanelli。杨–巴克斯特方程的解与斜括号的强半格。
Mediterranean Journal of Mathematics，21(2):67，2024。[14] A. H. Clifford 和 G. B. Preston。 *The Algebraic Theory of Semigroups, Volume I*。数学调查丛书第 7 号。美国数学学会，1961。[15] A. Day。分裂代数与投射性的弱概念。 *Algebra Universalis*，5(1):153–162，1975。[16] J. Dudek 和 E. Graczyinska。代数簇格。 *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Mathematics*，29 337 340，1981 : – 。[17] H. P. Gumm 和 A. Ursini。普遍代数中的理想。 *Algebra Universalis*，19(1):45–54，1984。[18] J. Harding 和 A. Romanowska。伯克霍夫系统的簇：第一部分。 *Order*，34(1):45–68，2017。[19] A. Horn 和 N. Kimura。半格范畴。 *Algebra Universalis*，1:26–38，1971。[20] J. Howie。 *Fundamentals of Semigroup Theory*。伦敦数学学会专著。克拉伦登出版社，1995。[21] V. A. Jankov。可证性在直觉命题演算中与有限蕴涵结构之间的联系。 *Doklady Akademii Nauk SSSR*，151:1293–1294，1993。俄文。[22] P. Jipsen 和 H. Rose。
Varieties of lattices。施普林格，数学讲义，1992。[23] H. Lakser、R. Padmanabhan 和 C. R. Platt。P-lonka 和的次直积分解。
Duke Mathematical Journal，39 485: –488，1972。[24] F. J. Pastijn。构造满足 amalgamation 性质或同余扩张性质的簇。
Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica，17:101–111，1982。[25] J. P-lonka。抽象代数的一种构造方法。
Fundamenta Mathematicae，61(2):183–189，1967。[26] J. P-lonka。关于分配拟格。 *Fundamenta Mathematicae*，60:191–200，1967。[27] J. P-lonka。关于代数的直接系统的一些备注。 *Fundamenta Mathematicae*，62(3):301–308，1968。[28] J. P
- *Colloquium Mathematicum* 64 241 247, lonka。关
1969
于由正则方程定义的抽象代数等式类。 , : – 。[29] J. P-lonka。关于由某些正则方程定义的等式类中的自由代数及代数分解。
Algebra Universalis，1:261–264，1971。[30] J. P
- *Algebra Universalis* 19 2 197 207, lonka。关
1984
于带有零元多项式的普遍代数直接系统之和。 , ( ): – 。[31] J. P
- *Universal Algebra and* lonka 和
Quasigroup Theory 123 158 1992
A. Romanowska。半格和。载于 A. Romanowska 和 J. D. H. Smith 编， ，第 – 页。Heldermann，。[32] A. Romanowska。关于由正则方程定义的某些等式类中的自由代数。 *Demonstratio Mathematica*，11 4 1131( ): –1137，1978。[33] A. Romanowska。关于正则簇与正则化簇。 *Algebra Universalis*，23:215–241，1986。[34] P. Stefanelli。对偶弱括号与杨–巴克斯特方程解的 P-lonka 和。载于
Proceedings LOOPS'23，2025。[35] A. Ursini。关于可减簇，第一部分。 *Algebra Universalis*，31(2):204–222，1994。

Dipartment of Mathematics and Computer Science, University of Cagliari, Italy.
Email address: stefano.bonzio@unica.it, giuseppe.zecchini1@gmail.com