arXiv:2602.06222v1 [math.RA] 5 Feb 2026

除法与传递：超越交换性的非唯一分解

DANIEL SMERTNIG

摘要。许多环和幺半群中都不满足唯一分解，但因子同态和传递同态为理解非唯一分解提供了工具。本文以综述的方式，首先探讨这些概念在经典交换戴德金整环中的应用，其中零和序列幺半群自然构成一种组合模型。随后，我们运用模论方法，将这些思想推广到非交换戴德金素环的情形。更进一步，我们还讨论 Rump 和 Yang 最近提出的遗传诺特素环中理想的因子理论；在这一理论中，因子可以通过图示演算来直观呈现。

1. 引言

将数学对象分解为最简单的基本构件，是一个几乎与数学本身一样古老的主题。欧几里得证明，每个自然数都能唯一分解为素数。库默尔在 19th 世纪发现，分圆整数环 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中并不满足唯一分解，这一发现著名地使拉梅´证明费马大定理的尝试功亏一篑。最终，这促使戴德金定义了理想这一概念，如今它已遍及整个代数学。在代数整数环中，理想在更高的抽象层次上恢复了唯一分解。

跳出数的范畴，我们也会分解其他对象：根据乔丹–赫尔德定理，有限群具有唯一的合成因子，这使有限单群成为有限群的构件。环上的模通常可以分解为不可分解模的直和。有时，例如在域上的有限维代数中，克鲁尔–雷马克–施密特–阿祖马亚定理保证这类分解的唯一性¨BW [。不过，这类分解更多时候并不唯一。置换可以分解为对换的乘积，正交矩阵可以分解为反射的乘积。奇异矩阵可以分解为幂等矩阵的乘积13]Erd67， [CT24]。

由此产生两个基本问题：构件是什么？它们又如何组合成原始对象，尤其是在分解不唯一的情况下？对于第二个问题，库默尔和戴德金的思想提供了一个范本。或许，通过转向更高层次的抽象，我们可以进一步将简单对象分解成更小的部分，从而恢复唯一性。于是，对非唯一分解的研究便转化为研究这些部分如何组合起来形成原始对象。

因子与传递同态是这一研究中的有力工具。Halter-Koch 定义了传递同态，将 Narkiewicz 在代数整数环中使用的一个想法形式化。在本文的第2节中，我们将从交换戴德金整环这一经典情形出发，介绍这些概念，开启本文的探讨。

关键词和短语。分解理论、因子同态、传递同态、戴德金素环、遗传诺特素环。

详细论述见 [BC11、Ger16、GZ20] 以及以下著作 [GHK06、Ger09] [Nar04，第 9]章。

在第3 节中，我们将进而涉足非交换领域，认识戴德金素环这一交换戴德金整环的自然推广。在那里，我们将看到如何基于 [Sme19]，将这些思想应用于非交换情形。

交换代数中的概念通常有若干有趣的非交换代数推广。遗传诺特素环（HNPrings）构成了一个严格大于戴德金素环的类；在交换情形下，它也与戴德金整环相同。

在戴德金素环中，双边理想仍然可以令人惊讶地唯一分解为交换的极大理想之积，恰如交换情形。这在 HNP 环中不再成立：这些环让我们得以窥见一个世界，在那里理想的分解本身不再唯一，但偏离唯一性的程度极其微小。尽管 HNP 环是非交换环论和整数群表示中的经典研究对象，其理想的乘法结构直到最近才仍是个谜。

十年前，Rump 和 Yang 提出了一种除子理论，可以完整描述 HNP 环中理想的结构 [RY16，Rum22，Rum25]。理想乘法通过函数复合这一自然的非交换运算来描述。尽管这种设定看似抽象，令人欣喜的是，这些除子可以用简单的图直观呈现，而理想乘法则可转化为将这些图直接拼接起来。第4节将以一窥 Rump 和 Yang 的优美理论，为我们的短暂探讨画上句号。本文唯一略有新意的贡献便是这种可视化。

1.1. **开篇**。本文始终讨论最基本类型的分解：将环的元素分解为原子，也称不可约元。我们将范围限定在非零因子上，因为在此处理论最为丰硕。

若 R 是一个环，令 $R^\bullet$ 为其非零因子的乘法幺半群。最常见的情况是，环 R 为一个整环，此时 $R^\bullet = R \setminus \{0\}$。稍后，为方便起见，我们也会考虑一些含零因子的环，例如矩阵环 $M_n(\mathbb{Z})$。

一个不可逆的 $a \in R^\bullet$ 是**原子**，如果 $a = bc$ 且 b、 $c \in R^\bullet$蕴含 b 或 c 是可逆元。于是 $r \in R^\bullet$ 的一个分解是形如 $r = a_1 \cdots a_n$的表示，其中 a_i 为原子。若 H 是任意乘法幺半群，则适用类似的定义。

我们从一个简单的例子开始。设 $\alpha := \frac{1+\sqrt{-23}}{2}$，并且

$$D := \mathbb{Z}[\alpha] := \{ a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z} \}.$$

在这个环中，即虚二次数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ 的整数环中，我们有8的如下分解：

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{3+\sqrt{-23}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{-23}}{2}. \tag{1}$$

为了看出这些因子是原子，我们可以注意到域范数 $N\colon \mathbb{Q}(\sqrt{-23}) \to \mathbb{Q}$将$x + y\sqrt{-23}$ 映射到 $x^2 + 23y^2$ （$x, y \in \mathbb{Q}$），并限制为一个乘法映射 $D \to \mathbb{N}_0$，且 $N(a + b\alpha) = a^2 + ab + 6b^2$。由于 $N(2) = 4$且 $N\left(\frac{3\pm\sqrt{-23}}{2}\right) = 8$，只需观察到~~$N$ 在 D~~上不取值2。

请注意，（1）中的两种分解甚至长度都不相同！要理解其中的缘由，我们需要考虑理想。

2. 熟悉的图景：交换戴德金整环

在交换戴德金整环 R中，每个非零理想 I 都能唯一分解为素理想的乘积 [AM69，第 9]章：

$$I = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \cdots P_n^{e_n}.$$

事实上，此类分解的存在是戴德金整环的诸多等价定义之一 [ZS75，§V。6][Cla25，§20。4]。数域中的整数环，例如环 D 我们刚刚遇到的那个，是戴德金整环的典型例子。

记 (a) 为由 $a \in D$ 生成的主理想，我们可以把例子中的原子进一步分解为两个不同的素理想 P 与 Q：[1]

$$(2) = PQ, \quad \left(\frac{3+\sqrt{-23}}{2}\right) = P^3, \quad \left(\frac{3-\sqrt{-23}}{2}\right) = Q^3,$$

以及（8） $= P^3Q^3$。

这里， P和 Q是非主理想，而 PQ、 P^3和 Q^3是主理想。将 8 分解为原子的两种不同方式，对应于将素理想分组相乘、使乘积成为主理想的两种不同方式。让我们将这一想法形式化。

设 Max(R) 表示 R的非零极大理想集合。在 Dedekind 整环中，这些理想恰好是非零素理想。要将两个理想相乘，若将它们表示为极大理想的乘积，只需把相应极大理想的指数相加。用 $\mathcal{I}(R)$表示非零理想构成的幺半群，这意味着存在一个同构

$$(\mathcal{I}(R), \cdot) \to (\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}, +), \quad P_1^{e_1} \cdots P_n^{e_n} \mapsto e_1 P_1 + \cdots + e_n P_n,$$

其中的和应理解为形式和（而非理想的相加）。我们将$\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 的元素视为（有效）**除子**：由极大理想构成、系数为非负整数的形式和。

将该同构与自然的幺半群同态 $R^\bullet \to \mathcal{I}(R)$复合，该同态将 a 映射到主理想（a），由此得到一个幺半群同态

$$\partial : R^\bullet \to \mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}.$$

例如，我们有 $\partial(8) = 3P + 3Q$。

容易验证， $\partial(a) = \partial(a')$ 当且仅当 $a' = au$对于某个可逆元 $u \in R$成立；也就是说，当且仅当 a 且 a' 是**相伴元**。由于分解只在置换和相伴元意义下有意义，映射 ∂ 保留了所有相关的分解论信息。

因子将元素的乘法化为非负整数向量的加法。要研究 a通过 $\partial(a)$ 的分解，还存在一个障碍：我们需要能够识别哪些因子是主因子，也就是说，哪些因子属于 ∂ 的像。这就引出了因子同态。

由于 ∂ 是幺半群同态，如果 a 是 b的因子（即存在某个 c使得 $b = ac$），那么$\partial(a)$就是 $\partial(b)$的因子。加法幺半群 $\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 中的整除关系意味着 $\partial(a)$是 $\partial(b)$的一个加项。这等价于在系数的逐分量比较中， $\partial(a) \le \partial(b)$。映射 ∂ 也具有逆向性质。

---

[1]我们不讨论如何获得这些分解。感兴趣的读者可参阅任何一本代数数论入门教材。实际计算可以使用 SageMath、PARI/GP 或 Magma 等计算机代数系统完成。

定义 1. 设 H, D 为交换消去幺半群。若同态 $\varphi\colon H \to D$ 满足：只要 $\varphi(a)$是 D中 $\varphi(b)$ 的因子，那么 a 就是 H中 b 的因子（对所有 $a, b \in H$均成立），则称其为**因子同态**。

命题 2. 映射 $\partial\colon R^\bullet \to \mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 是一个因子同态。

证明。 假设 $\partial(a) \le \partial(b)$。那么 $(b) = P_1 \cdots P_n(a)$，其中素理想为 P_i。这意味着 $(b) \subseteq (a)$，因此 $b = ac$对某个 $c \in R^\bullet$成立。□

通常的对构造使我们能够将任意交换消去幺半群H 嵌入群 $\mathbf{Q}(H)$，即其分式群。$\mathbf{Q}(H)$的元素形式为 ab^{-1}，其中a、 $b \in H$。

定义 3. 若 $\varphi\colon H \to D$ 是因子同态，则其**类群** 为 $\mathrm{Cl}(\varphi) := \mathbf{Q}(D)/\mathbf{Q}(\mathrm{im}\ \varphi)$。

引理 4. 对于 $d \in D$，有 $d \in \mathrm{im}\,\varphi$ 当且仅当 $[d] = 0$ 属于$\mathrm{Cl}(\varphi)$。

证明。 需要证明的非平凡方向是，$[d] = 0$ 蕴含 $d \in \mathrm{im}\,\varphi$。若 $[d] = 0$，则 $d = \varphi(a)\varphi(b)^{-1}$ 对于某些 a、 $b \in H$成立。两边相乘，得到 $d\varphi(b) = \varphi(a)$。由于 φ 是因子同态，因此 $a = cb$，且 $c \in H$。现在，$\varphi(a) = \varphi(c)\varphi(b) = d\varphi(b)$ 蕴含$d = \varphi(c)$，这是由 D的消去性得出的。□

应用于 ∂ 后，我们现在有一种识别主因子的方法。在我们的例子中，$\mathrm{Cl}(\partial) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$。素理想 P和 Q 分别代表两个非平凡类 $\overline{1}$ 和 $\overline{2}$。将我们贯穿始终的例子中的每个素理想映射到其所属的类，可以看到，$(2) = PQ$ 映射为 $\overline{1} \cdot \overline{2}$，即这两个类的形式乘积（不是它们在类群中的和！），我们称之为一个序列。同理，

$$\left(\frac{3+\sqrt{-23}}{2}\right) = P^3 \mapsto \overline{1} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1}, \qquad \left(\frac{3-\sqrt{-23}}{2}\right) = Q^3 \mapsto \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2}.$$

注意，$\overline{1} + \overline{2} = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{2} + \overline{2} + \overline{2} = \overline{0}$ 属于 $\mathrm{Cl}(\partial)$，这反映出相应的理想是主理想。此外，我们可以看到，这三个序列都不存在非平凡子序列，其元素之和为 $\overline{0}$。这说明这些元素都是原子：例如，$\frac{3+\sqrt{-23}}{2}$ 的任何非平凡因子都会对应于长度为三的序列 $\overline{1}^3$ 的一个子序列，其类之和为 $\overline{0}$；但 $\overline{1}^3$ 的唯一非平凡子序列是 $\overline{1}^2$，，它们并不满足这一条件。

数字 8 映射到 $\overline{1}^3 \cdot \overline{2}^3$。8 在 D 中分解为原子的不同方式（忽略置换和相伴元）恰好对应于该序列分解为极小零和序列的不同方式：

$$\overline{1}^3 \cdot \overline{2}^3 = (\overline{1} \cdot \overline{2}) \cdot (\overline{1} \cdot \overline{2}) \cdot (\overline{1} \cdot \overline{2}) = (\overline{1}^3) \cdot (\overline{2}^3).$$

组合模型现在可以轻松验证，8 只有这两种可能的分解方式。

我们可以使这一方法严谨化。设 $(G, +)$ 是任意一个阿贝尔群（可以将其视为类群），并设 G_0 是 G 的一个子集（可以将其视为包含素理想的类的集合）。G_0 上的一个**序列**是由 G_0 中的元素组成的有限集合，其中允许重复，且元素的顺序无关紧要。我们对序列采用乘法记号。例如，序列 $S = g_1 \cdot g_2^2 \cdot g_3$ 由一个 g_1、两个 g_2 和一个 g_3 组成。序列可以通过连接相乘。形式上，G_0 上的序列构成一个以 G_0 为基、采用乘法记号书写的自由阿贝尔幺半群。

除了序列的形式乘法外，我们还可以使用 G 的群运算，将给定序列中的元素相加：如上所述， S 的**和**为 $\sigma(S) := g_1 + 2g_2 + g_3 \in G$。一个**零和序列**是指其和为 $0 \in G$ 的序列。

定义 5. G_0上的**零和序列幺半群**记作 $\mathcal{B}(G_0)$，它由 G_0上的所有零和序列构成，两个序列的乘积定义为它们的连接。

回到我们的例子，我们有 $G = G_0 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。那么 $1 \bullet 2, -1$ 和 2^3 都是 $\mathcal{B}(G_0)$ 中的零和序列。仅包含单位元 0 的长度为一的序列也是一个零和序列。我们将这些全部 留给读者验证：它们就是**极小零和序列**，即不含非空真零和子序列的非空零和序列。显然，每个零和序列都可以分解为极小零和序列，因此极小零和序列正是 $\mathcal{B}(G_0)$ 的原子。

在这个例子中，我们看到 $\mathcal{B}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 为 D中的分解提供了一个简化模型。例如，它能告诉我们 8 的分解结构，却无法让我们还原出实际的因子。显然，理解 $\mathcal{B}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 比直接理解 D 中的分解容易得多。下面我们将这一方法精确化。

定义 6. 设 H 是一个消去幺半群， D 是一个约化消去幺半群（也就是说，1 是唯一的可逆元）。传递同态 是满足以下性质的幺半群同态 $\theta\colon H \to D$：

(T1) θ 是满射；若 $\theta(a) = 1$，则 a 在 H中是可逆元。(T2) 对所有 $a \in H$ 以及所有满足 $d_1, d_2 \in D$的表达式 $\theta(a) = d_1 d_2$ ，都存在$b_1, b_2 \in H$ ，使得 $a = b_1 b_2$ 且 $\theta(b_i) = d_i$。

第二个性质使我们能够提升分解。传递同态保留关键的分解数据。例如，很容易验证， $a \in H$ 是原子，当且仅当 $\theta(a)$在 D中是原子。我们很快会看到更多推论，但首先注意到，我们的同态 $\partial\colon R^\bullet \to \mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 确实诱导出到零和序列幺半群的传递同态。

定理7。 如果 $\varphi\colon H \to D$ 是到自由阿贝尔幺半群 $D = \mathbb{N}_0^{(P)}$ 中的因子同态，那么它会诱导出传递同态 $\theta\colon H \to \mathcal{B}(G_0)$，其中 $G_0 := \{[p] : p \in P\} \subseteq \mathrm{Cl}(\varphi)$ 是包含素因子的类的集合。[2]

证明。 映射 θ 定义为 $\pi \circ \varphi$，其中 $\pi(d_1 + \cdots + d_n) = [d_1] \bullet \cdots \bullet [d_n]$ 对应于 $d_i \in P$。对于(T1)，首先注意到 θ 根据 G_0的选取是满射。如果 $\theta(a) = 1$，那么 $\varphi(a) = 0 = \varphi(1)$。由于 φ 是因子同态，这意味着 a 整除1，因此是可逆元。

让我们验证 (T2)。设 $\theta(a) = S_1 S_2$ with $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(G_0)$。将 $\varphi(a) = d_1 + d_2$with d_1, $d_2 \in D$ 分解为映射到 S_1, S_2 的元素（这种选择可能不唯一）。根据构造，$[d_1] = \sigma(S_1) = 0 \in \mathrm{Cl}(\varphi)$，因此由引理 4 可知 $d_1 \in \mathrm{im}\,\varphi$。

设 $b_1 \in H$ with $\varphi(b_1) = d_1$。那么 $\varphi(b_1) + d_2 = \varphi(a)$。由于 φ 是一个因子同态，现在 $a = b_1 b_2$ for $b_2 \in H$ with $\varphi(b_2) = d_2$。于是 $\theta(b_2) = S_2$。□

对于代数整数环的情形，例如我们最初的例子 D，群 G就是 D 的理想类群，它是一个有限阿贝尔群，并且 $G = G_0$ 根据切博塔廖夫密度定理 [GHK06，推论 2.11。6]。

[2]因子同态及其类群并非由 H 唯一确定。这可以通过进一步限制 φ 为除子理论来解决。有兴趣的读者可参阅 [GHK06，§2。4]。我们的映射 ∂ 是一个除子理论。

推论 8。若 R 是代数整数环，则存在一个传递同态$R^\bullet \to \mathcal{B}(G)$，其中 $G = \mathrm{Cl}(R)$ 为类群。

这一关键成果为运用加性组合学中的方法研究整数环中的非唯一分解打开了闸门，例如 Geroldinger 关于长度集的结构定理 [Ger88][Ger09, §3]。相关文献浩如烟海，无法在此一一涵盖；入门可参考标准参考文献 [GHK06] 以及 [TV06，第 9 章。5][Ger09，Gry13，Ger16，Sch16，GZ20，Gry22]。我们只考察其中最早的成果之一，并将其与当前猜想联系起来。

对于 $a \in H$，**长度集** $\mathsf{L}(a) \subseteq \mathbb{N}_0$ 由 a的所有分解长度组成。在该例中，$\mathsf{L}(8) = \{2, 3\}$。H的**长度集系统** 为 $\mathcal{L}(H) = \{\mathsf{L}(a) \colon a \in H\}$。在该例中，$\mathcal{L}(D) = \{\{0\}, \{1\}, \{2, 3\}, \dots\}$；若 a是可逆元，则 $\mathsf{L}(a) = 0$。这些不变量在传递同态下保持不变。

命题 9 ([Ger16，引理 4。2])。若 $\theta \colon H \to D$ 是传递同态，则$\mathsf{L}(a) = \mathsf{L}(\theta(a))$ 对所有 $a \in H$ 以及 $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(D)$。

整环 R 若 **是半阶乘的** 当且仅当每个元素的分解长度唯一，也就是说，每个长度集$\mathsf{L}(a)$ 都是单元素集。Carlitz 证明，代数整数环是半阶乘的，当且仅当 $|G| \le 2$ [Car60，Cha19]。利用推论 8 现在这是一道简单的练习：证明 $\mathcal{B}(G)$ 是半阶乘的，当且仅当 $|G| \le 2$。

逆猜想要问的是 $\mathcal{L}(R^\bullet)$ 是否决定了 $\mathrm{Cl}(R)$，除了一些平凡的例外。这个猜想已在一些有趣的特殊情形下得到证明，例如两个循环群的直积情形，但一般情形仍悬而未决 [GZ17，GS19，GS23]。

最后要指出的是，要使这套方法奏效，并不需要 Dedekind 整环。所需的仅仅是一个映入自由阿贝尔幺半群的因子同态。这便引出了 Krull 幺半群和 Krull 整环 [GHK06，第 2][Ger09，GZ20]节。这一框架不仅让这种方法适用于更广泛的一类环，也使我们能够用同样的方法研究模的直和分解 [Fac12，BW13] 和 [FH00，Fac02，FW04，BG14，BGGS15]。

不过，我们并不打算沿着这条路继续走，而是将目光投向另一个方向：迈入非交换世界。

3. 非交换前沿：戴德金素环

Dedekind 整环的一种自然的非交换推广是戴德金素环 [MR01，第 5][Lev00，LR11]节。在定义它们之前，我们先来看两个例子。

除矩阵环之外，**赫维茨四元数**也是一个经典例子：

$$\mathcal{H} = \left\{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ or } a, b, c, d \in \mathbb{Z} + \tfrac{1}{2}\right\}.$$

这里 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$。环 $\mathcal{H}$ 关于其范数是欧几里得的$N(a + bi + cj + dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$。因此，它是一个主理想整环，并呈现出某种唯一分解 [CS03，第 5]。[3] 不过，我们更想关注非唯一分解。

在 $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$上，我们发现了一个非主理想整环。在环

$$S := \left\{a + bi + c\tfrac{\sqrt{3}i+j}{2} + d\tfrac{\sqrt{3}+k}{2} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]\right\},$$

[3]尽管具有唯一性，一种称为元交换的新现象出现了 [CK15]。近年来，这引发了大量研究活动 [FGS16、Cha20、BC21、LM25]。这一基本概念早已在 Asano 和 Murata 的一项抽象研究中出现 [AM53]。

元素 $1-2i+k$ 分解为

$$1-2i+k=(i+j)\cdot(-1-i-k)=(-1-j+k)\cdot(i+j)$$
$$=\left(\tfrac{1}{2}-i+\tfrac{\sqrt{3}-2}{2}k\right)\cdot\left(\tfrac{\sqrt{3}+2}{2}-j+\tfrac{k}{2}\right)=\dots$$

如果我们再计算更多例子，就会开始怀疑 S 是半阶乘的。但该如何证明呢？如果像上一节那样， S 是交换戴德金整环，那么只需找出类群 G和集合 G_0即可。

我们将再次构造一个转移同态，把这一点推广到非交换环，但过程会更加艰难。文中会出现若干定义，不过要理解论证，并不需要完全弄懂它们。

我们采用模论方法，但在特殊情形下还可以采用其他途径[Est91，BPA+11，Sme 13]。我们先在熟悉的 $\mathbb{Z}$整数环 n 中考察这一问题。我们可以借助循环群 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$来理解一个整数$n=p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$的分解：素数分 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 解对应于一个 $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ 的合成列，其中合成因子 e_i 重复出现¨次。因此，整数的唯一分解可由 Jordan-Hölder 定理推出。

交换戴德金整环中也有相同的结论。如果 $I=P_1^{e_1}\cdots P_k^{e_k}$是一个非零理想的因子分解，那么 R/I 是一个有限长度模，其合成因子为 R/P_i 重复 e_i 次。这样，我们就可以从 ∂ 第 2节中，通过 R/I的合成因子得到除子理论。

要使这一方法适用于非交换环，我们需要用合适的对象来替代戴德金整环。特别是，每个关于 $a\in R^\bullet$ 的模 R/aR 都必须具有有限长度。我们可以要求 R 是主理想整环，但这过于严格，因为它会排除例子 S。

在主理想整环中，每个左理想和每个右理想分别作为左模和右模都是自由的。让我们用更一般的对象来替代自由模。若（右）模P是**投射的**，则它是某个自由右模 [Lam99，§2A]，的直和项；也就是说，$P\oplus X\cong R^{(I)}$ 对某个集合 I成立。若环 R 是**遗传的**，则每个右理想和左理想都是投射的。于是，投射模的子模仍然是投射的 [Lam99，§2E]。

交换遗传整环恰好就是 Dedekind 整环 [Lam99，例 2.32(k)], 所以这很有希望。遗憾的是，非交换遗传整环的性质不那么理想。它们包括自由代数 $\mathbb{C}\langle x,\ y\rangle$，这类环不具备我们所需的 R/aR有限长度性质。事实上，交换遗传整环总是诺特且整闭的，但对于非交换整环，这一点不再成立。我们必须额外施加这些条件。

定义 10。遗传诺特素环（HNP 环）是一个遗传环 R，它左右诺特且为素环（这意味着 $IJ\neq 0$对于非零理想 I， J和 R 不是零环）。

虽然我们加入了诺特性，但将整环弱化为素。这样就允许了诸如$M_n(\mathbb{Z})$这样的环，它们并非整环。设 R 为一个 HNP 环。现在我们有如下结论。

命题 11 ([MR01，命题 5.4。5])。 商 R/aR 具有有限长度，当 $a\in R^\bullet$。

为了继续构造传递同态，我们添加一个额外条件，以取代整闭性。尽管没有这个条件，结论仍然成立 [Sme19]，，但论证会复杂得多。为此，我们需要一个 $\mathbf{Q}(R)$ 的 R分式环。构造非交换环的分式环是一件微妙的事 [Coh71][Lam99, §9],

但在我们的设定中，Goldie定理 [MR01, 第 2 章 & 3][Lam99, §11] 表明存在一个分式环$\mathbf{Q}(R) = \{ ab^{-1} \colon a \in R,\ b \in R^\bullet \}$并且$\mathbf{Q}(R)$只是一个除环上的矩阵环。现在我们来介绍戴德金整环的替代概念。

定义12. 一个**Dedekind素环**是一个**遗传的诺特素(HNP)**环，使得$\{ x \in \mathbf{Q}(R) \colon xI \subseteq I \} = R$对每个非零理想$I$属于$R$。

HNP环和戴德金素环起初或许显得晦涩，但其实相当自然：诺特素环是交换诺特整环的非交换类似物。遗传的仅仅意味着整体维数（一种自然的同调维数）至多为1 [Lam99，命题5.14]。因此，我们不过是在考察非交换诺特环中最小的有趣类。

这些例子$\mathcal{H}$与S是戴德金素环。它们属于数域上中心单代数中的极大序这一更一般的类。这些环是代数整数环的非交换类似物，并出现在群的整表示论中 [Rei75，CR81，CR87]。其他例子是某些模的自同态环 [MR01，命题5.3.15]。

现在设R为一个Dedekind素环，并取$R \neq \mathbf{Q}(R)$以避免平凡情形。仿照整数的例子，我们现在可以定义第2节中除子理论∂的一个替代。设$\mathcal{S}(R)$为简单右R-模的同构类的集合。我们将有限长度模M的合成因子视为自由阿贝尔幺半群$\mathbb{N}_0^{(\mathcal{S}(R))}$中的一个元素$(M)$。例如，若$M$具有合成因子$V$、$W$、$V$，则$(M) = 2(V) + (W)$。于是，对于右理想$I$（其中$I \cap R^\bullet \neq \emptyset$），$(R/I)$起着因子$\partial(I)$的作用。

在我们的例子中，对于互不同构的简单模V与W，我们有$(S/(1-2i+k)S) = 2(V) + 2(W)$，并且

$$(S/(i+j)S) = 2(V), \quad (S/(-1-i-k)S) = (S/(-1-j+k)S) = 2(W),$$
$$(S/(\tfrac{1}{2} - i + \tfrac{\sqrt{3}-2}{2}k)S) = (S/(\tfrac{\sqrt{3}+2}{2} - j + \tfrac{k}{2})S) = (V) + (W).$$

在交换情形中，关键在于我们可以通过因子识别主理想。这里也需要如此：如果$I = aR$对某个$a \in R^\bullet$成立，我们就需要能够仅凭(R/I)判断这一点。这里$I = aR$对某个$a \in R^\bullet$成立，当且仅当I是自由的，这由 [MR01，命题 3.1.15(iv)]得出。因此，我们需要了解能否从I判断(R/I)是自由的。

让我们先考虑一个不那么宏大的问题：我们能从$R/I \cong R/bR$和$b \in R^\bullet$中得到什么？Schanuel 引理 [Lam99，引理 51] 很有用。它使我们能够对同构的商交叉相乘，这让人想起我们用分数进行计算的方式。

引理 13。 设M、M'、N、N'为模，且M、N是投射的。若

$$M/M' \cong N/N', \quad \textit{then} \quad M \oplus N' \cong N \oplus M'.$$

证明。 将 Schanuel 引理应用于短正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/M' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N/N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

证明了这一主张。 □

由$R/I \cong R/bR$我们得到$R \oplus I \cong R \oplus bR$。这不足以得出$I \cong bR$。目前，我们通过引入一个比同构更弱的新定义来绕开这个问题。

定义 14. 若存在某个 $k \geq 0$ 使得 $M \oplus R^k \cong N \oplus R^k$，则称两个有限生成投射模 M，N 为**稳定同构**。等价地，存在一个有限生成投射模 X 使得 $M \oplus X \cong N \oplus X$。

现在，我们可以将前一个引理推广到仅有 $(R/I) = (R/bR)$ 的情形。

命题 15. 设 M、M'、N、N' 是有限生成投射模，且 M/M' 和 N/N' 是有限长度模，并满足 $(M/M') = (N/N')$。则 $M \oplus N'$ 和 $N \oplus M'$ 稳定同构。

证明。设 $M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_k = M'$和 $N = N_0 \supsetneq N_1 \supsetneq \cdots \supsetneq N_k = N'$为合成列。根据 Jordan-H¨older 定理，存在一个置换 σ 使得$M_{i-1}/M_i \cong N_{\sigma(i)-1}/N_{\sigma(i)}$ 对所有 i 均成立。由于 R 是遗传的，所有模 M_i 和 N_i 都是有限生成投射模。引理 13 表明

$$M_{i-1} \oplus N_{\sigma(i)} \cong N_{\sigma(i)-1} \oplus M_i \qquad \text{for all } i.$$

对 $1 \leq i \leq k$ 取直和，得到

$$M_0 \oplus X \oplus N_k \cong N_0 \oplus X \oplus M_k,$$

其中 $X := \bigoplus_{i=1}^{k-1} N_i \oplus M_i$ 有限生成投射。 □

虽然同构模必定稳定同构，但反之则未必成立。幸运的是，在戴德金素环中，稳定同构几乎等同于同构，这是 Stafford 深刻的消去定理所带来的结果 [MR01，定理 11.7。13]。[4]

定理 16 ([MR01，推论 11.7。14])。两个有限生成投射模 M，N 稳定同构，当且仅当 $M \oplus R \cong N \oplus R$。

因此，对于稳定同构，我们可以消去除 R 之外的所有副本。遗憾的是，最后一个副本未必能消去。这就引出了一个附加条件；如果 R是交换的，则该条件总是成立（依据 [MR01，命题 11.1。16] 或戴德金整环上有限生成模的结构定理 [Rot17，§C-5。3]）。

定义 17。 环 R 满足 **Hermite** 条件，当且仅当 $M \oplus R \cong R \oplus R$ 蕴含 $M \cong R$，对所有有限生成投射模 M均如此。

有了 Hermite 条件，我们终于可以根据 (R/I) 识别出自由右理想 I：现在 $(R/I) = (R/bR)$ 蕴含 $I \oplus R \cong bR \oplus R$，进而蕴含 $I \cong R$。接下来，我们还需要一个观察：每个“因子”实际上都来自某个右理想。

引理 18。 每个 $(M) \in \mathbb{N}_0^{(\mathcal{S}(R))}$ 都可表示为 $(M) = (R/I)$，其中 I 是某个右理想。

证明。戴德金素环的每个非零右理想 J 都是生成元模 [MR01，定理 5.2。10]（生成元见 [Lam99，§18]）。这意味着，对每个单模 V，都存在 $I \subseteq J$ 使得 $J/I \cong V$。由于我们排除了平凡情形 $R = \mathbf{Q}(R)$，该环R 没有极小右理想 [MR01，引理 3.3。4]。因此，$I \neq 0$，我们可以对 (M) 的长度进行归纳，从而完成证明。□

综合以上内容，我们得到了主因子的替代方案。

定理 19 ([Sme19，命题 3。17])。设 R 是一个 *Hermite Dedekind* 素环，并设

$$H := \left\{ (R/aR) : a \in R^\bullet \right\} \subseteq \mathbb{N}_0^{(\mathcal{S}(R))}.$$

那么 H 是一个幺半群，且包含映射 $H \hookrightarrow \mathbb{N}_0^{(\mathcal{S}(R))}$ 是一个因子同态。

[4] 这个定理甚至允许我们在命题 11，34 6]，X 13 15，$M \oplus N' \cong N \oplus M'$ 的证明中约去，并得出 LR定理。正如引理。

证明。 我们看到 H 是一个幺半群，因为 $(R/abR) = (R/aR)+(aR/abR) = (R/aR)+(R/bR)$，其中使用了 $R/bR \cong aR/abR$ 通过 $x + bR \mapsto ax + abR$。

现在只需证明，若 $(R/I)+(R/aR) = (R/bR)$，且 $a, b \in R^\bullet$，则 I是自由的，也就是说，同构于 R。由于 R 是 Hermite 的，只需证明 I 与 R稳定同构。为此，注意到 $((R \oplus R)/(I \oplus aR)) = (R/I) + (R/aR) = (R/bR)$，因此命题 15 蕴含 $R \oplus R \oplus bR \cong I \oplus aR \oplus R$。□

定理 7 现在给出了一个从 H出发的传递同态！还需要一步才能得到 $R^\bullet$ 而不是 H。Jordan-Ḧolder 定理保证合成因子在置换意义下唯一，但并未说明因子的哪些置换实际上可以实现。

要解决这个问题，需要增加最后一个条件，使 R 更加接近交换世界。若环 R 的每个形如 aR 或 Ra且满足 $a \in R^\bullet$ 的单边理想都包含一个非零双边理想，则称其为**有界**环。上文中的环 $\mathcal{H}$ 和 S 都是有界的。相比之下，第一外尔代数 $A_1 := \mathbb{C}\langle x,\ y \mid yx - xy = 1\rangle$ 是一个戴德金素环，但不是有界环。

命题20。 若 R 是有界的戴德金素环，且 M 是有限长度模，那么 M 的合成因子的任意置换都可以在 M的某个合成列中实现。

证明。 对长度进行归纳，只需验证长度为二的模满足此性质。设M是一个模，含有子模 N，使得 $M/N \cong V$和 $N \cong W$是非同构的简单模 V、 W。那么存在一个短正合列

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0.$$

在有界的戴德金素环中，任何这样的序列都会分裂。这可由 [LR11，定理15。4],推出，因为 [LR11，引理14。3]。因此 $M = N \oplus N'$满足 $N' \cong M/N$，并且 M 也有一个合成列，其合成因子次序相反。□

最后，我们得到主要结果，即关于 $R^\bullet$ 的传递同态。

定理21([Sme19，定理 4。4])。 如果 R 是一个有界 *Hermite Dedekind* 素环，那么存在一个从 $R^\bullet$ 到零和序列幺半群的传递同态。

证明。只需证明 θ: $R^\bullet \to H, a \mapsto (R/aR)$，其中 H 如定理 19 中所述，是一个传递同态。非平凡的部分是：若 $\theta(a) = (R/d_1R) + (R/d_2R)$ 且$d_i \in R^\bullet$，则存在 $a = b_1b_2$，使得 $b_i \in R^\bullet$ 满足 $(R/b_iR) = (R/d_iR)$。

重新排列 R/aR 的合成因子，我们得到一个右理想 $R \supseteq I \supseteq aR$ 满足$(R/I) = (R/d_1R)$。与定理 19 中一样， $I = b_1R$ 满足 $b_1 \in R^\bullet$。由于 $aR \subseteq b_1R$，存在 $b_2 \in R^\bullet$ 满足 $a = b_1b_2$ 且 $(R/b_2R) = (I/aR) = (R/d_2R)$。 □

这一结果的一个优点是，目标幺半群与交换情形下的完全相同！因此，即使在非交换情形下，我们也能利用关于阿贝尔群上的零和序列的大量文献。

环 S 是本节开头所述的 Hermite 环，其类群为 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$[SV19，表 2]，，其中两个单模 V和 W来自 $(S/(1 - 2i + k)S)$，二者都代表非平凡类。因此我们最终得出结论： S 是半阶乘的。

遗憾的是，去掉有界性条件或 Hermite 条件中的任意一个，结论都会彻底失效 [Sme13，定理 1。2][Sme19，§6]。不过，在数域上的中心单代数中极大序的经典情形下，有界性条件总是成立。根据 Eichler 的一项深刻结果，Hermite 条件仅在四元数代数的情形下可能失效，而这一失效已被彻底

分类 [SV19]。事实上，在这里，Hermite 条件是 必要的，它是存在到零和序列幺半群的传递同态的必要条件；缺少该条件意味着分解的表现会相当混乱 [Sme13，定理 1。2]。

这些方法可以推广到有界Hermite HNP环 [Sme19]。不过，接下来让我们把注意力从元素转向双边理想。

4. 未知高峰：HNP 环中的理想

在Dedekind素环中，每个非零理想都能唯一分解为极大理想的乘积 [MR01，定理 5.2。9]。对于两个不同的极大理想 M， N 我们有 $MN = M \cap N = NM$，因此这种乘法甚至是交换的，恰如交换情形。

设 R 是一个任意的 HNP 环，且满足 $R \neq \mathbf{Q}(R)$。下述环 T_1 是这类非戴德金环中最简单的例子。对于一个素 p，令

$$T_1 := \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & (p) \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad M := \begin{bmatrix} (p) & (p) \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}.$$

这里， $M \in \mathrm{Max}(T_1)$是幂等的，因此这些理想不能构成自由阿贝尔幺半群。

我们的目标是理解这些理想的乘法结构。为了考察一个更具代表性的例子，我们考虑一个稍大的环 T_2。设 D 是一个以素元 π为素元的离散赋值环。例如，取 $D = \mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{a}{b} : \ a, b \in \mathbb{Z}, \ \ p \nmid b \}$，即将$\mathbb{Z}$ 在素理想(p)处局部化所得的环，其中 $\pi = p$。令

$$T_2 := \begin{bmatrix} D & (\pi) & (\pi) \\ D & D & (\pi) \\ D & D & D \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad J(T_2) := \begin{bmatrix} (\pi) & (\pi) & (\pi) \\ D & (\pi) & (\pi) \\ D & D & (\pi) \end{bmatrix}.$$

注意到对于 $A \in J(T_2)$， $1 - A$ 在 T_2 中是可逆元，再结合 $T_2/J(T_2) \cong (D/(\pi))^3$, , 可知 $J(T_2)$是 T_2的 Jacobson根。因此，环 T_2 有三个极大理想：

$$Q_1 = \begin{bmatrix} D & (\pi) & (\pi) \\ D & D & (\pi) \\ D & D & (\pi) \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} D & (\pi) & (\pi) \\ D & (\pi) & (\pi) \\ D & D & D \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} (\pi) & (\pi) & (\pi) \\ D & D & (\pi) \\ D & D & D \end{bmatrix}.$$

我们将看到，图1 和 2中的图示如何表示这些理想及其乘法；我们没有足够的篇幅来回答为什么。

首先，我们需要理解所有非零理想构成的集合。此前，只需将一个理想表示为极大理想的乘积，并记录每个极大理想出现的重数，便可得到经典的因子理论 ∂第 2节中介绍了这一理论。现在

$$Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} D & (\pi) & (\pi) \\ D & (\pi) & (\pi) \\ D & (\pi) & (\pi) \end{bmatrix}, \quad \text{but} \quad Q_2 Q_1 = \begin{bmatrix} D & (\pi) & (\pi) \\ D & (\pi) & (\pi) \\ D & D & (\pi) \end{bmatrix} = Q_1 \cap Q_2.$$

因此 $Q_1 Q_2 \neq Q_2 Q_1$，而先前的方法显然已不再适用。进一步可以计算出 $Q_1 Q_2 = Q_1 Q_2 Q_1$，所以理想幺半群甚至不满足消去律。

为了重新获得良好的因子概念，我们从第3节得到启发，考虑合成列。只是这一次，我们不考虑R 与理想 I之间的右理想极大链，而是考虑双边理想的极大链。

命题22 ([RY16, §5])。 设 I 是 R的一个非零理想，并设

$$R = I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots \supsetneq I_n = I$$

是理想的极大链。

(1) 对于每个 k，存在唯一的极大理想 P_k，使得 R 满足 $P_k I_{k-1} \subseteq I_k$。(2) 理想 P_1、……、P_n 由 I唯一确定，至多相差一个置换。

这引出了 Rump 和 Yang 对除子的定义。

定义 23 ([RY16，Rum25])。非零**理想** $\partial(I)$ 的因子是形式和

$$\partial(I) = P_1 + \cdots + P_n \in \mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$$

其中 P_1、……、P_n 如前一个命题所述。

在这个例子中，我们有 $\partial(Q_i) = Q_i$ 和 $\partial(J(T_2)) = Q_1 + Q_2 + Q_3$。更有意思的是，我们有 $\partial(Q_2Q_1) = Q_1 + Q_2$，而 $\partial(Q_1Q_2) = 2Q_1 + Q_2$。

为了通过理想所对应的除子来描述理想，映射 ∂ 必须是单射。论证较为复杂，这里略去：其思路是证明理想格是分配的，也就是说，对所有 I、J、K，$I \cap (J + K) = (I \cap J) + (I \cap K)$。

定理 24([RY16，命题 17])。映射 ∂ 从非零理想到 $\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 是单射。

因此，原则上，我们应该能够用因子来描述理想的乘法：给定理想 I 和 J，其因子分别为 $D = \partial(I)$ 和 $E = \partial(J)$，那么 $\partial(IJ)$ 用 D 和 E表示是什么？观察上面的例子 $Q_1Q_2 \neq Q_2Q_1$，我们发现答案并不只是 $D + E$。事实上，因子相加是交换运算，而理想乘法是非交换的。

我们首先需要更好地理解极大理想集合 $\mathrm{Max}(R)$。在非零理想集合上存在一个自然的双射 τ，不过其精确定义对我们并不重要：

$$I \mapsto \tau(I) \coloneqq (R :_l (R :_l I)) \quad \text{with} \quad (R :_l I) \coloneqq \{ x \in \mathbf{Q}(R) : xI \subseteq R \}.$$

映射 τ 在极大理想上限制为一个双射，并且具有有限轨道 [RY16，§5]。这将 $\mathrm{Max}(R)$ 划分为互不相交的有限**循环**，每个循环都具有由 τ诱导的循环次序。

在上面的例子中，只有一个长度为 3 的循环：$\tau(Q_1) = Q_2$、$\tau(Q_2) = Q_3$，以及 $\tau(Q_3) = Q_1$。一般而言，任意循环结构都是可能的 [LR11，§25]。例如，环

$$\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & (p) & (pq) \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & (pq) \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$$

具有 $p \neq q$ 个素数，包含一个 2-循环（位于 q 上）、一个 3-循环（位于 p 上），以及可数多个 1-循环（位于其余素数上；这些循环并不重要）。事实证明，不相交的循环彼此独立，因此，我们关于单个 3-循环的例子已经足够一般，能够帮助理解一般情形。

现在我们来说明如何将除子视为函数。

定义 25。令 $\mathrm{Max}(R) \coloneqq \mathrm{Max}(R) \times \mathbb{Z}$。

我们将其视为 $\mathrm{Max}(R)$ 的覆叠空间：点 $(P,\ n)$ 位于 P 上方，对所有 n 均如此。如果 $C = \{P_1, \ldots, P_l\}$ 是极大理想的循环，则相应的集合 $C \times \mathbb{Z}$ 按字典序全序排列：当 $n < m$ 或当 $n = m$ 且 $i \leq j$ 时，$(P_i,\ n) \leq (P_j,\ m)$。

定义 26 ([RY16, §8][Rum25, §5])。对于 $D \in \mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$，令 $\widehat{D}$：$\widetilde{\mathrm{Max}}(R) \to \widetilde{\mathrm{Max}}(R)$表示这样一个函数：按照自然序，将每个点 $(P,\ n)$ 向前移动 $D(P)$ 步。

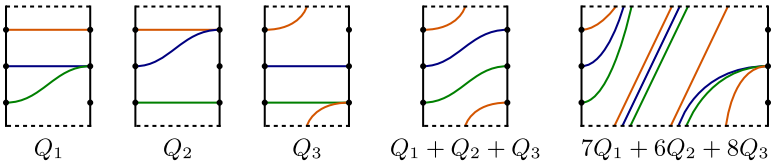

图1。与幂等极大理想 Q_1、 Q_2、 Q_3，极大可逆理想 $J(T_2)$（其中 $\partial(J(T_2)) = Q_1+Q_2+Q_3$），以及更复杂的因子 $7Q_1+6Q_2+8Q_3$相对应的除子的可视化。（颜色用于提高可读性。）

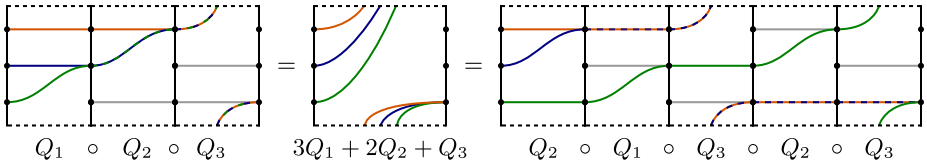

图2。因子 $D = 3Q_1+2Q_2+Q_3$ 有两种不同的分解方式，即 $D = Q_1 \circ Q_2 \circ Q_3$ 和 $D = Q_2 \circ Q_1 \circ Q_3 \circ Q_2 \circ Q_3$。

例如，对于因子 $D = 2Q_1+Q_3$，

$$\widehat{D}(Q_1,n) = (Q_3,n), \quad \widehat{D}(Q_2,n) = (Q_2,n), \quad \widehat{D}(Q_3,n) = (Q_1,n+1).$$

这将除子嵌入到自映射集合中 $\widehat{\text{最大值}}(R)$。

覆叠空间的概念为直观理解这类函数提供了一种方法。设想一个圆柱面 $[0,1]\times S^1$ 上有 l 个标记点 P_1，……， P_l在两条边界圆周上分别按循环次序排列。现在， D 可以通过绘制 l 路径来表示，将左侧圆周上的每个点 P_i 连接到右侧圆周上的某个点，并向前移动 $D(P_i)$步。路径只能沿循环次序向前移动，并且可以绕圆柱面多圈，如图1所示（路径视为相差同伦等价）。

例如，如果 $D(Q_1) = 4$，那么路径会沿循环次序向前移动 4 步。因此，它绕圆柱面一圈（3 步），然后连接到 Q_2。如果 $D(Q_1) = 6$，路径会绕两圈后再连接回自身的 Q_1。

其中包含的信息是(i)左侧的哪些点与右侧的哪些点相连；(ii) 每条路径绕圆柱面多少圈。

集合上的自映射可以通过函数复合进行复合，因此这为我们提供了一种复合除子的方法！为了与理想乘法相符，复合的顺序需要反转（或者可以认为函数是从左向右复合的）。

定义27。 两个除子 D, E 的**复合** 是唯一满足 $\widehat{D \circ E} = \widehat{E} \circ \widehat{D}$的除子 $D \circ E$。

从图示上看，这对应于两个图的自然拼接，如图 2所示。从图中可以立即看出，每个 Q_i 都是幂等的。通过这种可视化方式，也很容易观察到 $Q_1 \circ Q_2 = Q_1 \circ Q_2 \circ Q_1$。图 2 展示了一个稍复杂的例子，其中 $D = 3Q_1+2Q_2+Q_3$ 可以用两种不同的方式分解。

Rump 和 Yang 证明了，这种复合对应于理想乘法。

定理 28 ([RY16，定理 5], [Rum25，定理 4])。对于所有非零理想 I，J 属于 R，都有 $\partial(IJ) = \partial(I) \circ \partial(J)$。特别地，映射 ∂ 是从非零理想到 $(\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}, \circ)$的单射同态。

读者可能已经注意到，在这些图中，路径可以合并，但绝不会交叉。具有这种表示恰好刻画了 ∂的像。从代数角度可以表述如下。

定理 29 ([Rum25，定理 5])。因子 D属于 ∂的像，当且仅当 $D(\tau(P)) \geq D(P) - 1$ 对于所有 $P \in \mathrm{Max}(R)$均成立。

其结果是下面这个出人意料且颇不平凡的结论。

定理 30 ([RY16，定理 6])。中的每个非零理想 R 都是极大理想与极大可逆元理想的乘积。

当然，现在很自然会想知道运算 $\circ$ 和 $+$ 在 $\mathbb{N}_0^{(\mathrm{Max}(R))}$ 上的关系。这超出了本文的范围，并引出了左拟环 [Rum22][Rum25，命题 10], 这一代数结构与 brace 相关，而 brace 出现在集合论 Yang-Baxter 方程解的研究中 [Ven24]。

5. 展望：未解问题

我们看到，如何将戴德金整环的经典除子理论改造后用于研究戴德金素环中的分解，以及 HNP 环中的理想也存在类似理论。然而，许多基本问题仍未解决。例如，甚至尚不清楚在诺特整环 $\mathsf{L}(a)$ 是否总是有限的 [BBNS23], ，尽管对交换诺特整环而言，这可由主分解轻易推出。

在戴德金素环中，第一外尔代数 $A_1 := \mathbb{C}\langle x, y \mid yx - xy = 1\rangle$ 不是半阶乘的，因为

$$f = y^2x = (1 + yx)y$$

具有 $\mathsf{L}(f) = \{2, 3\}$。由于 A_1 既非有界也非 Hermite，我们的方法不适用。长度集可以有多复杂？在 $\mathcal{B}(\mathbb{Z})$ 以及整值多项式环$\mathrm{Int}(\mathbb{Z})$ 中，$\mathbb{N}_{\geq 2}$ 每个有限子集都会作为长度集出现 [Kai99，Fri13]。外尔代数中是否也可能有类似结论?

这些问题表明，尽管因子同态和传递同态很有用，但关于非交换环中的分解，仍有许多有待探索之处。

致谢。感谢 Alfred Geroldinger 以及我的博士生 Mara Pompili 和 Daniel Vitas 对本手稿早期版本提出的意见。

经费信息。本研究得到斯洛文尼亚研究与创新局（ARIS）项目 P1-0288 和资助项目 J1-60025 的支持。

参考文献

[AM53] K. Asano 和 K. Murata。半群中的算术理想理论。大阪市立大学工学部期刊 *A* 辑，4：9–33，1953年。[AM69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald。交换代数导论。Addison-Wesley 出版公司，雷丁，马萨诸塞州—伦敦—唐米尔斯，安大略省，1969年。[BBNS23] J. P. Bell、K. Brown、Z. Nazemian 和 D. Smertnig。关于非交换有界分解整环与素环。《代数杂志》，

622 404 449, 2023 doi:10.1016/j.jalgebra.2023.01. ：–。。[

023

BC11] P. Baginski 和 S. T. Chapman。代数整数的分解、块幺半群与加法数论。《美国数学月刊》，

118 10 901 920, 2011 doi:10.4169/amer.math. （）：–。。

monthly.118.10.901

[BC21] A. Babei 和 S. Chari。Eichler 阶中素元的元交换。《算术学报》，
197 1 77 92, （）：–。。[
2021 doi:10.4064/aa191031-23-5
BG14] N. R. Baeth 和 A. Geroldinger。模幺半群与直和分解的算术。《太平洋数学杂志》，271(2)：257–319，2014年。doi:10.2140/pjm.2014.271.257。[BGGS15] N. R. Baeth、A. Geroldinger、D. J. Grynkiewicz 和 D. Smertnig。直和分解及相关组合问题的半群理论视角。《代数及其应用杂志》，
14 2 1550016, （）：。。[
60, 2015 doi:10.1142/S0219498815500164
BPA+11] N. Baeth、V. Ponomarenko、D. Adams、R. Ardila、D. Hannasch、A. Kosh、H. McCarthy 和 R. Rosenbaum。矩阵半群的数论。《线性代数及其应用》，434(3)：694–711，2011 年。
doi:10.1016/j.laa.2010.09.028。[BW13] N. R. Baeth 和 R. Wiegand。分解理论与模的分解。《美国数学月刊》，120(1)：3–34，2013年。doi:10.4169/amer.math.monthly.120.01.003。[Car60] L. Carlitz。类数为二的代数数域的刻画。《美国数学会会刊》，11：391–392，1960年。doi:10.2307/2034782。[
Cha19] S. T. Chapman。类数
2 126 4 330 339, 2019 doi: 是什么? 《美
10.1080/00029890.2019.1562827
国数学月刊》，（）：–。。[Cha20] S. Chari。中心单代数中素元的元交换。《数论杂志》，206 309, 2020年 296：–。doi:10.1016/j.jnt.2019.06.017。[CK15] H. Cohn 和 A. Kumar。Hurwitz 素元的元交换。《美国数学会会刊》，143(4)：1459–1469，2015年。doi:10.1090/S0002-9939-2014-12358-6。[
Cla25] P. C. Clark。交换代数。在线讲义，
2025 https://plclark.github.io/ 。，检索日期：-
PeteLClark/Expositions/integral2015.pdf 2026 01 23
-。[Coh71] P. M. Cohn。分式环。《美国数学月刊》，78：596–615，1971 年。doi:10.2307/2316568。[
CR81] C. W. Curtis 和 I. Reiner。表示论方法。第 I 卷。纯粹与应用数学。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1981年。关于有限群与阶的应用，Wiley-Interscience 出版物。[CR87] C. W. Curtis 和 I. Reiner。表示论方法。第 II 卷。纯粹与应用数学（纽约）。John Wiley & Sons, Inc.，纽约，1987年。关于有限群与阶的应用，Wiley-Interscience 出版物。[CS03] J. H. Conway 和 D. A. Smith。关于四元数与八元数：其几何、算术与对称性。A K Peters, Ltd.，马萨诸塞州纳蒂克，2003年。[CT24] L. Cossu 和 S. Tringali。抽象分解定理及其在幂等分解中的应用。《以色列数学杂志》，263(1)：349–395，2024年。
doi:10.1007/s11856-024-2623-z。[Erd67] J. A. Erdos。关于幂等矩阵的乘积。《格拉斯哥数学杂志》，
8 118 122, 1967 doi:10. ：–。。[Est91]
1017/S0017089500000173
D. R. Estes。遗传阶中的分解。《线性代数及其应用》，
157 161 164, 1991 doi:10. ：–。。[Fac02]
1016/0024-3795(91)90110-I
A. Facchini。模的直和分解、半局部自同态环与 Krull 幺半群。《代数杂志》，256(1)：280–307，2002年。
doi:10.1016/S0021-8693(02)00164-3。[Fac12] A. Facchini。具有半局部自同态环的模的直和分解。《数学科学通报》，2(2)：225–279，2012年。doi:10.1007/s13373-012-0024-9。[FGS16] A. Forsyth、J. Gurev 和 S. Shrima。元交换作为 $\mathbb{F}_p$ 上射影直线上的群作用。《美国数学会会刊》，144(11)：4583–4590，2016年。doi:10.1090/proc/13126。[FH00] A. Facchini 和 D. Herbera。
K_0 225 1 47 69, 2000 doi:10.1006/ 半局部环的。
jabr.1999.8092
《代数杂志》，（）：–。。[Fri13] S. Frisch。构造具有预设分解长度集的整值多项式。《数学月刊》，171(3-4)：341–350，2013年。doi:10.1007/s00605-013-0508-z。[FW04] A. Facchini 和 R. Wiegand。具有半局部自同态环的模的直和分解。《代数杂志》，274(2)：689–707，2004年。
doi:10.1016/j.jalgebra.2003.06.004。[Ger88] A. Geroldinger。¨不可约元素中的非唯一分解。《数学杂志》，197(4)：505–529，1988年。doi:10.1007/BF01159809。[Ger09] A. Geroldinger。加法群论与非唯一分解。载于《组合数论与加法群论》，巴塞罗那 CRM 高级课程，页 1–86。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2009年。¨。doi:10.1007/978-3-7643-8962-8Ger[A. Geroldinger。长度集。《美国数学月刊》，16]
（）：–。。

[GHK06] A. Geroldinger 和 F. Halter-Koch。《非唯一分解》，纯粹与应用数学第278卷（博卡拉顿）。Chapman & Hall/CRC，佛罗里达州博卡拉顿，2006年。代数、组合与分析理论。doi:10.1201/9781420003208。[Gry13] D. J. Grynkiewicz。《结构加性理论》，数学进展丛书第30卷。施普林格，Cham，2013年。doi:10.1007/978-3-319-00416-7。[Gry22] D. J. Grynkiewicz。《有限弹性的刻画——通过凸几何研究 Krull 幺半群中的分解理论》，数学讲义第 2316 卷。施普林格，Cham，2022 doi:10.1007/978-3-031-14869-9。。[GS19] A. Geroldinger 和 W. A. Schmid。通过长度集刻画类群。《韩国数学会杂志》，56(4):869–915，2019年。doi:10.4134/JKMS.j180467。[GS23] A. Geroldinger 和 W. A. Schmid。论长度集系统的不可比性。《欧洲组合学杂志》，111 103694, 25, 2023 doi:10.1016/j.ejc.2023.103694。：论文编号。。序言由 Alain Plagne 撰写。。[GZ17] A. Geroldinger 和 Q. Zhong。通过长度集刻画类群 II。《波尔多数论杂志》，29(2):327–346，2017年。doi:10.5802/jtnb.983。[GZ20] A. Geroldinger 和 Q. Zhong。交换幺半群中的分解理论。《Semigroup Forum》，100(1):22–51，2020年。doi:10.1007/s00233-019-10079-0。[Kai99] F. Kainrath。无限类群 Krull 幺半群中的分解。《Colloq. Math.》，80 1 23 30, ( ): –。。[1999 doi:10.4064/cm-80-1-23-30。[Lam99] T. Y. Lam。《模与环讲义》，数学研究生教材第189卷。Springer-Verlag，纽约，1999年。doi:10.1007/978-1-4612-0525-8。[Lev00] L. S. Levy。遗传诺特素环上的模（综述）。载于《代数及其应用》（俄亥俄州雅典，1999年），《当代数学》第259卷，第353–370页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年。doi:10.1090/conm/259/04107。[LM25] A. Leite 和 A. Machiavelo。元交换映射的循环结构。预印本，arXiv:2504.08709，2025年。[LR11] L. S. Levy 和 J. C. Robson。《遗传诺特素环与理想化子》，数学综述与专著第174卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2011年。doi:10.1090/surv/174。[MR01] J. C. McConnell 和 J. C. Robson。《非交换诺特环》，数学研究生研究丛书第30卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，修订版，2001年。L. W. Small 协助编写。doi:10.1090/gsm/030。[Nar04] W. Narkiewicz。《代数数的初等与解析理论》。数学施普林格专著。Springer-Verlag，柏林，第三版，2004年。doi:10.1007/978-3-662-07001-7。[Rei75] I. Reiner。《极大序》。伦敦数学会专著，第5号。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich，出版社]，伦敦-纽约，1975年。[Rot17] J. J. Rotman。《高等近世代数》。第2部分，数学研究生研究丛书第180卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，第三版，2017年。序言由 Bruce Reznick 撰写。doi:10.1090/gsm/180。[Rum22] W. Rump。双射1-上闭链、brace 与非交换素因子分解。《Colloq. Math.》，170(1):145–170，2022年。doi:10.4064/cm8684-2-2022。[Rum25] W. Rump。因子在非交换理想论中的作用。载于《环论与分解理论新进展》，Springer 数学与统计学论文集第477卷，第391–416页。施普林格，Cham，2025年。doi:10.1007/978-3-031-75326-8_18。[RY16] W. Rump 和 Y. Yang。遗传算术。《代数杂志》，468 214 252, 2016 doi:10.1016/j.jalgebra.2016.08.015：–。。[Sch16] W. A. Schmid。有限类群 Krull 幺半群的长度集：近期结果与未决问题。载于《乘性理想论与分解理论》，Springer 数学与统计学论文集第170卷，第323–352页。施普林格，[Cham], 2016。doi:10.1007/978-3-319-38855-7_14。[Sme13] D. Smertnig。中心单代数极大序中的长度集。《代数杂志》，390:1–43，2013年。doi:10.1016/j.jalgebra.2013.05.016。[Sme19] D. Smertnig。有界遗传诺特素环中的分解。《爱丁堡数学会会刊》（第2辑），62(2):395–442，2019年。doi:10.1017/s0013091518000305。[SV19] D. Smertnig 和 J. Voight。具有局部自由消去性质的定序。《伦敦数学会会刊》，6(1):53–86，2019年。doi:10.1112/tlm3.12019。[TV06] T. Tao 和 V. Vu。《加性组合学》，剑桥高等数学研究第105卷。剑桥大学出版社，剑桥，2006年。doi:10.1017/CBO9780511755149。

[Ven24] L. Vendramin。斜括号：简要综述。载于《物理学中的几何方法 *XL*》研讨会，波兰比亚沃维耶扎˙，波兰，*6*月 *20 25, 2023*， 153 175 ¨ 2024 doi:10.1007/ –页–。978-3-031-62407-0_12
Cham：Birkhauser，。。[ZS75] O. Zariski 和 P. Samuel。《交换代数》第*1*卷。数学研究生教材，第28号。Springer-Verlag，纽约-海德堡-柏林，1958年版，1975年。I. S. Co- hen 协助编写。

卢布尔雅那大学数学与物理学院 (FMF) 与数学、物理与力学研究所 (IMFM)，Jadranska Ulica 21，1000 卢布尔雅那，斯洛文尼亚电子邮箱地址： daniel.smertnig@fmf.uni-lj.si