# 积分渐近展开中的对数项[1]

Achim Hennings[2]

**摘要：**我们研究由牛顿非退化函数定义的孤立奇点的米尔诺纤维化中的消失圈上的积分。我们提出一个条件，在该条件下，可以精确确定积分展开为对数和时的首要对数项。

## 0 基本概念与问题

设 $f\colon (\mathrm{C}^n, 0) \to (\mathrm{C}, 0)$ 为具有孤立奇点的全纯函数，$n \geq 2$。

### 0.1 米尔诺纤维化与上同调类的展开

我们选取一个足够小的 $\varepsilon > 0$，使得对所有 $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$，以 $0 \in \mathrm{C}^n$ 为中心的 $\varepsilon'-$球面 $S_{\varepsilon'}$ 都与纤维 $f^{-1}(0)$ 横截相交。然后我们将 $\eta > 0$ 取得足够小，使得 $S_\varepsilon$ 仍与 $f^{-1}(t)$ 横截相交，$|t| \leq \eta$，且 $f$ 到 $B_\varepsilon := \{x \in \mathrm{C}^n \| \|x\| < \varepsilon\}$ 的限制没有临界值 $t$、$0 < |t| \leq \eta$。

我们引入记号 $D := D_\eta := \{t \in \mathrm{C} \| |t| < \eta\}$，$D^* := D\backslash\{0\}$，$X := B_\varepsilon \cap f^{-1}(D)$，$X^* := X\backslash f^{-1}(0)$，$X_t := f^{-1}(t) \subseteq X$。于是 $f\colon X^* \to D^*$ 是一个光滑纤维丛（在微分同胚意义下不依赖于 $\varepsilon$）。$f\colon X \to D$ 称为米尔诺代表。

对于米尔诺纤维化，可关联纤维的（唯一有意义次数 $n-1$的）复上同调局部系统，

$$H^{n-1} := R^{n-1} f_* \, \mathbb{C}_{X^*} = \bigcup_{t \in D^*} H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

相对于普适覆盖的逆像层 $u^{-1}H^{n-1}$

$$u\colon U := \{\tau \in \mathbb{C} \| |e^\tau| < \eta\} \to D^*, u(\tau) := e^\tau,$$

是常数的。每个纤维都与 $\mu$ –维向量空间 $E := \Gamma(U, \ u^{-1}H^{n-1})$规范同构，其中 $\mu = \mu(f,0)$为米尔诺数。

在 $E$ 上，单值化算子 $M$ 定义为 $MA(\tau) = A(\tau + 2\pi i)$。根据主分解，有 $M = M_s M_u = M_u M_s$，其中 $M_s$ 可对角化，$M_u$ 是幺幂的。存在唯一的幂零算子 $N$ 满足 $\exp(-2\pi i N) = M_u$。

令 $\Omega^p$ 表示 $\mathrm{C}^n$ 上全纯 $p$ –微分形式的层。每个 $n$ –形式 $\varphi \in H^0(X, \ \Omega^n)$都可通过以下方式导出上同调丛的一个全纯截面：

$$s[\varphi] \in \Gamma(D^*, H^{n-1} \otimes \mathcal{O}_{D^*}), s[\varphi](t) = \left[\frac{\varphi}{df} | X_t\right] \in \ H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

本节有一个收敛发展（[Mal]）

---

[1] 本文对作者学位论文[He]的第5章作了推广。此前曾在波鸿鲁尔大学撰写过一个未发表的德文版本。

[2] 锡根大学，荷尔德林街3号，D-57068锡根。

(0-1) $$s[\varphi](t)=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\alpha\in L(\lambda)}\sum_{k=0}^{n-1}A_{\alpha,k}t^{\alpha}(\ln t)^{k}/k!,$$

其中 $\Lambda$：＝谱（$M$），$L$（$\lambda$）：＝$\{\alpha>-1\big|e^{-2\pi i\alpha}=\lambda\}$，$A_{\alpha,\ k}\in E$，且此方程更准确地说在 $U$（即 $\ln t=\tau$、 $t=e^{\tau}$、 $A_{\alpha,\ k}=A_{\alpha,\ k}(\tau)$）上成立。由于 $s[\varphi]$ 在 $D^{*}$ 上是单值的，我们有（[AGV，第 354 页，引理 13.1]）

$$A_{\alpha,k}=N^{k}A_{\alpha,0}\text{ for all }\alpha,k.$$

此外，对 $\alpha\in\mathrm{Z}$ 而言（[AGV，第 379 页，推论 2]）。

（0-1）中的首要贡献显然来自这样的求和项：在最小的 $\alpha$ 中，其 $k$ 最大。因此，我们定义 $(\alpha,k)(\varphi)=(\alpha(\varphi),k(\varphi))$，其中

$$\alpha(\varphi):=\min\{\alpha\big|\exists\ k\colon A_{\alpha,k}\neq 0\}$$

$$k(\varphi):=\max\{k\big|\ A_{\alpha(\varphi),k}\neq 0\}.$$

那么，按字典序，$(\alpha,k)(\varphi)=\min\{(\alpha,k)\big|\ A_{\alpha,k}\neq 0\}$

$$(\alpha,k)\leq(\alpha',k')\Leftrightarrow\ \alpha<\alpha'\text{ or }(\alpha=\alpha'\text{ and }k\geq k').$$

**0.2 Barlet 的典范厄米形式**

我们用 $p$ –表示 $\mathrm{C}^{n}$ 上的光滑微分形式层$\mathrm{E}^{p}$。在 [Ba 中，D. Barlet 已证明，对于 $\varphi\in\Gamma(X,\mathrm{E}^{2n})$ 以及辅助截断函数 $\sigma\in C_{c}^{\infty}(X)$，在 $0\in\mathrm{C}^{n}$ 附近，实纤维积分

$$F(t):=F_{\sigma\varphi}(t):=\int_{X_t}\frac{\sigma\varphi}{df\wedge d\bar{f}},\ t\in D^{*},$$

存在渐近展开[3][4]

$$F(t)\sim F^{*}:=\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{A}\\ m,m'\in\mathbb{N}\\ k=0,\dots,n-1}}c_{m,m'}^{\alpha,k}\,t^{m}\bar{t}^{m'}|t|^{2\alpha}(ln|t|^{2})^{k},$$

其中 $\mathcal{A}:=\{\alpha\in]-1,0]|\exp(-2\pi i\alpha)\in\Lambda\}$ 以及 $c_{m,\ m',\ k}^{\ \alpha}\in\mathrm{C}$。

形式向量空间中的剩余类 $F^{*}\ mod\ \mathrm{C}[\![t,\ \bar{t}]\!]$

$$\mathcal{N}:=\bigoplus_{\substack{\alpha\in]-1,0]\\ k=0,\dots,n-1}}\mathbb{C}[\![t,\bar{t}]\!]|t|^{2\alpha}(\ln|t|^{2})^{k}/\mathbb{C}[\![t,\bar{t}]\!]$$

与 $\sigma$无关，同样，$F$ 在 $D$上除一个光滑函数外也不依赖于 $\sigma$。

我们得到一个映射

$$\mathcal{H}\colon\Omega_{0}^{n}\times\Omega_{0}^{n}\to\mathcal{N}$$

---

[3] 这意味着 $\forall a$：$F(t)-\sum c_{m,\ m',\ k}^{\ \alpha}\,t^{m}\bar{t}^{m'}|t|^{2\alpha}(ln|t|^{2})^{k}=O(|t|^{a+\varepsilon})$ 对某个 $\varepsilon>0$成立。[4]乍一看，只有 $f^{n}\bar{f}^{n}\varphi$ 能被 $df\wedge d\bar{f}$整除，而 $|t|^{2a}F$、 $a>n-1$具有所述形式的展开。但我们还有 $f^{n}\varphi=df\wedge\alpha$，其中 $\alpha$ 属于 $(n-1,\ n)$ 型，因此 $\alpha=\bar{\partial}\beta$，并且

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\int_{X_t}\sigma\beta=\int_{X_t}\frac{df\wedge\bar{\partial}(\sigma\beta)}{df\wedge d\bar{f}}\equiv\int_{X_t}\frac{\sigma f^{n}\varphi}{df\wedge d\bar{f}}\ mod\ C^{\infty}(D).$$

由于 $\int_{X_t}\sigma\beta$ 的渐近展开可以逐项求导（[Ba 1]），因此 $t^{n}F^{*}$ 和 $F^{*}$ 中的所有项在 $\bar{t}$ 中都为 $>-1$ 阶。$t$ 也同样如此，所声称的展开式由此得出。

$$\mathcal{H}(\omega,\omega')=\left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^{n-1}F^{*}_{\sigma\varphi}\ mod\ \mathbb{C}[\![t,\bar{t}]\!],$$

其中，$\varphi=\sigma\widetilde{\omega}\wedge\overline{\widetilde{\omega}'}$ 以及 $\widetilde{\omega}$、 $\widetilde{\omega}'$是在截断函数 $\sigma$ 的支集邻域内的全纯代表元。

在 [Ba 2] 中证明了，该映射实际上可以定义在 $L\times L, L:=\Omega^{n}_{0}/df\wedge d\Omega^{n-2}_{0}$ 上，从而成为 C$\{t\}$ –厄米且准水平的，即记协变导数

$$\nabla_{\partial/\partial t}: L\to L\otimes Q(\mathbb{C}\{t\})$$

为 $\nabla_t$，则有

$$\mathcal{H}([\omega],[\omega'])=\overline{\mathcal{H}([\omega'],[\omega])},$$

$$\mathcal{H}(.,[\omega'])\text{ is }\mathbb{C}\{t\}-\text{linear},$$

$$\mathcal{H}(\nabla_t[\omega],[\omega'])=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}([\omega],[\omega'])\text{ if }\nabla_t[\omega]\in L.$$

由这些性质，D. Barlet 在 [Ba 2] 中推断存在一个通常的厄米形式h: $E\times E\to$ C，它满足

（i）h$(MA,MA')=$h$(A,A')$（单值性不变性）（ii）h$(NA,A')=$h$(A,NA')$（$N$ 的自伴随性）（这两个条件是等价的，参见 [Ba 2，附录]）（iii）若将 $\omega,\omega'\in\Gamma(X,\Omega^{n})$ 的截面展开为$s[\omega^{(\prime)}]=\sum_{\alpha}\sum_{k}N^{k}A^{(\prime)}_{\alpha}t^{\alpha}(\ln t)^{k}/k!$，则 H([$\omega$], [$\omega'$]) $\in\mathcal{N}$ 可表示为 H([$\omega$], [$\omega'$]) $=\sum_{\alpha\,\alpha\notin\ \alpha-\alpha\in}\ \sum_{k=0}^{n-1}c_{\alpha\,\alpha'\,k}$，，，′Z，′Z $t^{\alpha}\bar{t}^{\alpha'}(\ln|t|^{2})^{k}/k!$ $+\sum_{\alpha\,\alpha\in}\ \sum_{k=0}^{n-2}c_{\alpha\,\alpha'\,k}$，，，′Z $t^{\alpha}\bar{t}^{\alpha'}(\ln|t|^{2})^{k+1}/(k+1)!$，其中 $c_{\alpha,\alpha',k}=$ h$(N^{k}A_{\alpha},A_{\alpha'})$（参见 [Loe]）。

注意，对于 $\alpha\in$Z，$N^{n-1}A_{\alpha}=0$ （作为单值定理的一部分）；并且 $c_{\alpha,\alpha',k}=0$ 若 $\alpha-\alpha'\notin$ Z，则成立，因为 $M$ 的主分量关于 h 正交（参见 [Ba 2，附录]）。

### 0.3 牛顿多面体

以下记号很常见：

对于 $g\in\mathbb{C}[\![x]\!], x=(x_1,\dots,x_n)$、$g=\sum g_m x^m$ 和 $A\subseteq\mathbb{R}^{n}_{+}$，我们记作

$$supp\ (g):=\{m\in\mathbb{N}^{n}|g_m\neq 0\},$$

$$\Gamma_{+}(g):=conv\ (supp\ (g)+\mathbb{N}^{n})\qquad\text{(Newton polyhedron)}$$

$$\Gamma(g):=\text{union of all compact faces of }\Gamma_{+}(g)\qquad\text{(Newton boundary)}$$

$$g_A:=\sum_{m\in A}g_m x^m,$$

$$L(A):=\{h\in\mathbb{C}[x]|supp\ (h)\subseteq A\}.$$

$g$ 称为非退化（依照 [Kou，1.19] 的定义），如果对于 $\Gamma_+(g)$的所有紧面 $\delta$，多项式（拟齐次多项式）$g_\delta$ 在$(\mathbb{C}^*)^n$ 中没有临界点（等价地，$g_\delta$ 的除子是光滑的）。在 [ Kou] $g$ 称为方便（commode），如果 $\Gamma_+(g)$与所有坐标轴相交。（对于孤立奇点，通常可以通过添加适当的高次数齐次多项式来满足这一条件。）

对于固定的非单位幂级数 $g$，它是方便的，考虑多面体$\Gamma_+ \coloneqq \Gamma_+(g)$、$\Gamma \coloneqq \Gamma(g)$。
于是，对于任意非零的 $h \in \mathbb{C}[\![x]\!]$，我们令

$$\nu(h) \coloneqq \sup\{a \in \mathbb{R}_+ | supp\,(h) \subseteq a\Gamma_+\} \qquad \text{(Newton order)}$$

$$l(h) \coloneqq \max\left\{ l \in \mathbb{N} \middle| \begin{matrix} \text{there is a compact face } \delta \text{ of } \Gamma_+ \text{ of dimension } n-1-l \\ \text{such that } supp\,(h) \cap \nu(h)\delta \neq \emptyset \end{matrix} \right\}.$$

（按照约定，单位对应的牛顿阶为 $0\ 0 \cdot \Gamma_+ = \mathbb{R}^n_+$。）

对于全纯微分形式（沿 $(x_1 \dots x_n)$ 至多有对数极点），我们采用对数基下的表示

$$\varphi = \sum_{|I|=p} \varphi_I (dx)_I / x_I,$$

其中对于 $I = \{i_1 < \cdots < i_p\} \subseteq [1,n]$，我们写作 $(dx)_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ 和 $x_I = x_{i_1} \dots x_{i_p}$。于是我们将支集定义为 $supp\,(\varphi) \coloneqq \cup\ supp\,(_I \qquad \varphi_I\ )$，类似地定义 $\varphi_A \coloneqq \sum \quad \varphi_{I,|I|=p} \quad A \quad I\ x_I \qquad\qquad (dx)\ /$。对于 $\Gamma_+(\varphi)$、$\Gamma(\varphi)$、$\nu(\varphi)$、$l(\varphi)$ 的定义，只需将函数的支集替换为 $supp\,(\varphi)$。

**0.4 本文内容**

从现在起，我们假设函数 $f$ 是非退化且方便的，其牛顿多面体为 $\Delta \coloneqq \Gamma_+(f)$；关于 $\Delta$，我们为全纯微分形式构造数对 $(\nu(\varphi), l(\varphi))$。

根据 V.A. Vasil'ev 的结果 [Vas]，展开式 (0-1) 中的最低阶贡献 $(\alpha(\varphi),\ k(\varphi))$ 可以按字典序估计为

(0-2) $\quad (\alpha, k)(\varphi) \geq (\nu, l)(\varphi) - (1,0)$ for all $\varphi \in \Gamma(X, \Omega^n)$.

本文，为 (0-2) 中等号成立给出了关于 的一个充分条件。主要结果是定理3.9。

我们考虑 $\Delta$ 的一个维数为 $n-r$的紧面 $\delta$ , $1 \leq r \leq n$（它不包含在任何坐标超平面内）以及它的某个正倍数 $a\delta$。随后，我们同时考虑位于 $a\delta$内部的两个多项式微分形式 $n -, \varphi_1$，它们起到 $\varphi$的作用，

$$\varphi_j \in \Omega^n_0 \text{ with } supp(\varphi_j) \subseteq a\delta^\circ, j = 1,2.$$

首先，我们假设 $a$ 是整数：$a \in \mathbb{N}^+$ 且 $1 \leq r \leq n-1$。第二种情况，$a \notin \mathbb{Z}$ 和 $1 \leq r \leq n$，稍后将归结为第一种情况。显然，$(\nu, l)(\varphi_j) = (a, r-1)$，如果$\varphi_j \neq 0$。

我们取一个截断函数 $\sigma \in C^\infty_c(X)$，$\sigma = 1$ 在 $0 \in \mathbb{C}^n$附近，并构造积分

$$M(\lambda) \coloneqq M[\sigma\varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_2](\lambda) \coloneqq \int_X |f|^{2\lambda}\sigma\varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_2.$$

$M(\lambda)$ 在 $\lambda \in \mathrm{C}$ 上有定义且全纯，$Re\ \lambda > 0$ （因为 $|f|^{2\lambda}\ln|f|^2$ 是连续的）。我们将在第 2.1 节（连同第 1 节）中证明，$M(\lambda)$ 可亚纯延拓至 C。

$M(\lambda)$的极点性质可以通过富比尼定理和梅林变换，由纤维积分 $F_{\sigma\varphi_1\wedge\bar{\varphi}_2}$ 的渐近展开$\mathrm{H}(\varphi_1,\varphi_2)$确定：

由于 $X$ 是 Stein，$\varphi_j/df$ 可以视为一个（不唯一的）亚纯$n$ –形式，乘以某个 $f^N$ 后便成为全纯形式，其中 $N$ 可取为（例如 $N = n$）。

对于 $Re\ \lambda \geq N$ ，我们有

$$\begin{aligned}\int_X |f|^{2\lambda}\sigma\varphi_1 \wedge \bar{\varphi}_2 &= (-1)^{n-1}\int_X |f|^{2\lambda}\sigma df \wedge d\bar{f} \wedge \frac{\varphi_1}{df} \wedge \overline{\frac{\varphi_2}{df}} \\ &= (-1)^{n-1}\int_{\mathbb{C}} \left(\int_{X_t} |f|^{2\lambda}\sigma \frac{\varphi_1}{df} \wedge \overline{\frac{\varphi_2}{df}}\right) dt \wedge d\bar{t} \\ &= (-1)^n \int_0^\infty r^{2(\lambda+1)} \int_{|t|=r} \left(\int_{X_t} \sigma \frac{\varphi_1}{df} \wedge \overline{\frac{\varphi_2}{df}}\right) \frac{dt}{t}\frac{2dr}{r} = (-1)^n \mathcal{M}\phi(\lambda+1)\end{aligned}$$

其中

$$\phi(r) \coloneqq \int_{|t|=r} \left(\int_{X_t} \sigma \frac{\varphi_1}{df} \wedge \overline{\frac{\varphi_2}{df}}\right) \frac{dt}{t}$$

and

$$\mathcal{M}\phi(\lambda) \coloneqq \int_0^\infty r^{2\lambda}\phi(r)\frac{2dr}{r}$$

是梅林变换。

其渐 $\phi(r)$ 的渐近展开通过对 $\mathrm{H}(\varphi_1,\varphi_2)$ 的每一项积分得到：

$$\phi(r) \sim (2\pi i)^n \left(\sum_{\alpha\notin\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{n-1} c_{\alpha,\alpha,k} r^{2\alpha} \frac{(\ln r^2)^k}{k!} + \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}} \sum_{k=0}^{n-2} c_{\alpha,\alpha,k} r^{2\alpha} \frac{(\ln r^2)^{k+1}}{(k+1)!}\right) mod\ \mathbb{C}[\![r^2]\!]\,.$$

根据以下引理，这个展开确定了 $\phi$ 的梅林变换的极点。

**引理 0.1：**设 $\phi \in C^\infty(\mathrm{R}^+)$ 有有界支集，且渐近展开为

$$\phi(r) \sim \sum_{\alpha\in A} \sum_{k=0}^{K} c_{\alpha,k} r^{2\alpha} \frac{(\ln r^2)^k}{k!}\ (r \to 0),$$

其中包含一个子集 $A \subseteq \mathrm{R}$，该子集是离散、闭且有下界的。然后，梅林变换

$$\mathcal{M}\phi(\lambda) \coloneqq \int_0^\infty r^{2\lambda}\phi(r)\frac{2dr}{r} \quad (Re\ \lambda > -\min A)$$

亚纯延拓到 C，其极点集为 $\subseteq -A$，主部为

$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^k c_{\alpha,k}\left(\frac{1}{\lambda+\alpha}\right)^{k+1} \quad \text{at } -\alpha \text{ for } \alpha \in A.$$

证明：这是公式的一个应用

$$\int_0^1 r^{2\lambda} r^{2\alpha}\frac{\left(\ln r^2\right)^k}{k!}\frac{2dr}{r} = (-1)^k\left(\frac{1}{\lambda+\alpha}\right)^{k+1} \quad (Re\ \lambda > -\alpha),$$

该公式可由简单情形 $k = 0$ 对变量 $\lambda$求导得到。

我们可以得出，函数 $M$ 可亚纯延拓到C，其极点为阶数 $\leq n$的有理极点；除在 $\alpha \in -1 -$ N处的留数外，主部由 $s[\varphi_j]$ 决定（且与 $\sigma$无关）。非平凡极点 $\alpha$ 是满足 $\alpha \notin$Z或极点阶数为 $\geq$ 2的那些极点。令 $P_m(\alpha, M)$表示 $M$ 在 $\alpha \in$ C处阶数为 $m$ 的Laurent系数。

根据估计（0-2），最大的可能非平凡极点是 $-a$，其首项系数为

$$P_{-(r-1)}(-a, M) = (-1)^{n+r}(2\pi i)^n h(A^{\varphi_1}_{a-1,r-1}, A^{\varphi_2}_{a-1,0}),$$

只要该系数非零即可。于是特别有 $A_{a-1,}{}^{\varphi_1}{}_{r-1} \neq 0$ （以及 $A_{a-1,}{}^{\varphi_2}{}_{0} \neq 0$）。

如果我们能找到 $\varphi_2$ 使得 $P_{-(r-1)}(-a, M) \neq 0$，则估计（0-2）取等号。在第2节中，我们为此通过对 $M$的定义积分进行留数计算，以第二种独立方式确定 $P_{-(r-1)}(-a, M)$。这导出了第3节中的判据推论 3.6。

到目前为止，$a$ 被假定为整数。幸运的是，非整数的情形可以通过 A.N. Varchenko（[AGV]）提出的方法化归为前一种情形：将$f$ 替换为$f + y^e$，并引入新变量$y$ 及适当的整数$e$。此外，还要将$\varphi$ 乘以$y$ 的某个幂，使其具有整数次数。

**$f$的解消**

我们沿用第0节中的定义：函数$f$ 是非退化且方便的，其牛顿多面体为Δ；$\delta$ 是一个维数为$n - r$ 的紧面（$1 \leq r \leq n-1$），它不包含在任何坐标超平面中；$\varphi_1$， $\varphi_2 \in \Omega_0^n$ 是多项式形式，满足$supp(\varphi_1) \subseteq a\delta^\circ$, $supp(\varphi_2) \subseteq a\delta$，其中$a \in \mathrm{N}^+$。（为便于说明，本节中我们仅放宽了条件$supp(\varphi_2) \subseteq a\delta^\circ$。）

我们按熟悉的方式构造 $f$ 的托里克消解（参见 [AGV]），所用记号见 [Da1]。令 $\Sigma_0$ 为$\mathrm{R}_+^n$ 上的扇，它与 Δ对偶。它由锥$\sigma(\gamma) \coloneqq \mathrm{R}_+(\Delta - p)$的对偶锥 $\check{\sigma}(\gamma)$组成，其中 $\gamma$ 是 Δ 的一个面（包括 Δ 本身），而 $p$ 是 $\gamma^\circ$中的任意一点。

令 Σ 为任意一个正则细分，它不细分$\mathrm{R}_+^n$的边界锥。

我们需要一组锥 $S$，它们包含于 $\check{\sigma}(\delta)$ 中且维数相同，使得 $\check{\sigma}(\delta)= \cup_{\check{\tau}\in S}\check{\tau}$。我们得到相应环面嵌入的图表：

(1-1)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n \overset{\rho_1}{\leftarrow} X_{\Sigma_0} & \overset{\rho_2}{\leftarrow} & X_\Sigma \\ & \cup| & \cup| \\ & X_{\sigma(\delta)} \leftarrow & \cup_{\check{\tau}\in S} X_\tau \end{array}$$

$\cup_{\check{\tau}\in S} X_\tau$ 是总逆像 $\rho_2^{-1}(X_{\sigma(\delta)})$。根据 Σ 的选取，$D \coloneqq (\rho_1\rho_2)^{-1}(0)$ 是例外集，由对应于 Σ. 中内部射线的所有除子组成。除子 $(f) \subseteq X$ 在 $X_{\Sigma_0}$ 和 $X_\Sigma$ 中的严格变换 $Z_0$ 和 $Z$（分别限制在 $X$) 的逆像上）是超曲面。$Z \cup D$ 是一个具有简单正规交叉的除子。

仿射托里克簇 $X_{\sigma(\delta)}$ 和 $X_\tau$ 包含闭层（= 环面作用的轨道）$T_\delta \coloneqq X_{cospan(\sigma(\delta))}$ 和 $T_\tau \coloneqq X_{cospan(\tau)}$，它们与 $\rho_2$ 相容：

(1-2)
$$\begin{array}{ccc} X_{\sigma(\delta)} \leftarrow & \cup_{\check{\tau}\in S} X_\tau \\ \cup| & \cup| \\ T_\delta \leftarrow & \cup_{\check{\tau}\in S} T_\tau \end{array}$$

**引理 1.1：** $\Pi_\tau \coloneqq \rho_2|_{T_\tau}$: $T_\tau \to T_\delta$ 是一个同构。

证明：该图表对应于代数图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[\sigma(\delta)\cap\mathbb{Z}^n] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[\tau\cap\mathbb{Z}^n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}[cospan(\sigma(\delta))\cap\mathbb{Z}^n] & = & \mathbb{C}[cospan(\tau)\cap\mathbb{Z}^n] \end{array}$$

垂直映射是由 $x^m \mapsto x^{\chi(m)m}$ 定义的限制，其中 $\chi$ 是 $cospan\big(\sigma(\delta)\big) = cospan(\tau)$ 的特征函数。

**引理 1.2：** $X_\Sigma$ 中的闭包 $\bar{T}_\tau$ 两两不相交。

证明：$\bar{T}_\tau$ 是所有除子 $D(l) \subseteq X_\Sigma$ 的交集，它们属于 $\check{\tau}$ 的边。对于$\check{\tau}_1$， $\check{\tau}_2 \in S$ 以下结论成立：属于$\check{\tau}_1$ 或 $\check{\tau}_2$ 的边的所有除子 $D(l)$ 的交集非空 ⇔ 存在一个锥 $\sigma \in X_\Sigma$，它包含所有这些边，即包含 $\check{\tau}_1$， $\check{\tau}_2$。这是不可能的，因为 $\check{\tau}_1$， $\check{\tau}_2$ 都张成维数为 $r$ 的平面 $\mathrm{R}\check{\sigma}(\delta)$。

我们记$X'_\Sigma$ 为$X$ 在$X_\Sigma$中的逆像。设$U_\tau \subseteq X_\Sigma$ 为$\bar{T}_\tau$、 $\check{\tau} \in S$的互不相交开邻域。由于$\bar{T}_\tau$ 是例外的，我们可以选取$U_\tau \subseteq X'_\Sigma$。如上所述，$a \in \mathrm{N}^+$。

于是我们有（用同一符号表示拉回的微分形式）

$$f^{-a}\varphi_i \in \Gamma(X'_\Sigma, \Omega^n(\log D)(aZ)),\ i = 1,2.$$

考虑其中一个$\check{\tau} \in S$。我们可以构造$f^{-a}\varphi_i$沿所有$D(l)$，$l \subseteq \check{\tau}$一条边的迭代庞加莱留数（按任意固定的阶），从而得到

$$Res_{T_\tau}(f^{-a}\varphi_i) \in \Gamma(T_\tau, \Omega^{n-r}(aZ \cap T_\tau)).$$

对于 $i = 1$，该形式沿 $\bar{T}_\tau \backslash T_\tau$ 全纯；对于 $i = 2$，它至多有对数极点。

现在我们固定 $\check{\tau}_0 \in S$ 以供参考。对于 $\check{\tau} \in S$，我们有引理 1.1 中的映射

$$\Pi_{\tau_0}: T_{\tau_0} \xrightarrow{\sim} T_\delta \xleftarrow{\sim} T_\tau: \Pi_\tau,$$

它们限制到 $T_\tau \cap Z \xrightarrow{\sim} T_\delta \cap Z_0$。复合映射 $\Pi_\tau^{\tau_0} \coloneqq \Pi_\tau^{-1}\Pi_{\tau_0}$ 限制到 $T_{\tau_0}\backslash Z \xrightarrow{\sim} T_\tau \backslash Z$。

**引理 1.3：** 对于 $\check{\tau} \in S$，留数

$$\left(\Pi_\tau^{\tau_0}\right)^* Res_{T_\tau}(f^{-a}\varphi_i) \in \Gamma(T_{\tau_0}, \Omega^{n-r}\left(aZ \cap T_{\tau_0}\right))$$

仅相差常数因子 $\in \mathrm{Q}^*$。

证明：令 $m \in \delta \cap \mathrm{Z}^n$, $\tilde{f} \coloneqq x^{-m}f$, $\tilde{\varphi}_i \coloneqq x^{-ma}\varphi_i$，使得 $f^{-a}\varphi_i = \tilde{f}^{-a}\tilde{\varphi}_i \in \tilde{f}^{-a}\mathrm{C}[\tau \cap \mathrm{Z}^n] \otimes \Lambda^n \mathrm{C}^n$。留数 $\tilde{f}^a|_{T_\tau} Res_{T_\tau}(f^{-a}\varphi_i) \in \mathrm{C}[cospan(\tau) \cap \mathrm{Z}^n] \otimes \Lambda^{n-r}\mathrm{C}^n$ 表示为迭代收缩：将第二个因子上与 $\check{\tau}$ 的本原边向量相对应的向量场 ($\in \mathrm{C}^{n\vee}$) 与第一个因子上的限制映射结合起来。在此表示中，$\left(\Pi_\tau^{\tau_0}\right)^*$ 是恒等映射。现在只需将以下注释应用于不同 $\check{\tau}$ 的边向量。

**引理 1.4：** 设 $v_1, \dots, v_r \in \mathrm{Q}^{n\vee}$ 和 $w_1, \dots, w_r \in \mathrm{Q}^{n\vee}$ 是$\mathrm{Q}^n$上的线性无关线性形式。它们在 $\Lambda^\bullet \mathrm{Q}^n$上定义了缩并。

(1) $\bigcap_{j=1}^r \ker v_j = \bigcap_{j=1}^r \ker w_j \iff \sum_{j=1}^r \mathbb{Q}v_j = \sum_{j=1}^r \mathbb{Q}w_j$
(2) $w_k = \sum_{j=1}^r a_{jk}v_j \ (k = 1, \dots, r) \Rightarrow \ i_{w_1} \circ \dots \circ i_{w_r} = \det(a_{jk})\, i_{v_1} \circ \dots \circ i_{v_r}$

## 2 梅林型积分的亚纯延拓

### 2.1 局部考察

设 $W \subseteq \mathrm{C}^l$ 为一个开集。我们考虑一个光滑函数 $\kappa \in C^\infty(\mathrm{C}^n \times W)$，它关于第二个变量 $w \in W$ 是全纯的，并且关于投影 $pr_2$: $\mathrm{C}^n \times W \to W$ 具有适当支集。我们关注积分

(2-1) $$M(\lambda, w) \coloneqq \int_{\mathbb{C}^n} |z_1|^{2\lambda_1} \dots |z_n|^{2\lambda_n} \kappa(z, w) dV$$

（其中 $dV \coloneqq dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$）。

**引理 2.1：**

(1) $M(\lambda, w)$在$(\lambda, w)$中是全纯的，其中 $Re\ \lambda_i > -1, 1 \le i \le n$。
(2) 对于 $k \le n$ 和 $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{N}^+$，我们有

$$M(\lambda,w)(-1)^k\prod_{i=1}^k[(\lambda_i+1)^2\dots(\lambda_i+a_i-1)^2(\lambda_i+a_i)]=$$
$$\int_{\mathbb{C}^n}\left[\prod_{i=1}^k|z_i|^{2(\lambda_i+a_i)}\right]\left[\prod_{i=k+1}^n|z_i|^{2\lambda_i}\right]\frac{1}{z_1\dots z_k}\frac{\partial^k}{\partial\bar{z}_1\dots\partial\bar{z}_k}\prod_{i=1}^k\left[\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\right]^{a_{i-1}}\kappa(z,w)dV.$$

证明：(1)：根据假设，我们可以在积分号下求导。导数 $\partial/\partial\bar{\lambda}_i$, $\partial/\partial\bar{w}_j$ 为零。

(2)：注意（对于 $z,\lambda\in\mathbb{C}$，$Re\,\lambda>0$）

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(z|z|^{2\lambda}\right)=(\lambda+1)|z|^{2\lambda},\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{z}|z|^{2\lambda}\right)=(\lambda+1)|z|^{2\lambda}.$$

利用这一点，通过分部积分可得

$$-M(\lambda,w)(\lambda_i+1)=\int_{\mathbb{C}^n}|z_1|^{2\lambda_1}\dots|z_i|^{2\lambda_i}\dots|z_n|^{2\lambda_n}z_i\frac{\partial}{\partial z_i}\kappa(z,w)dV,$$

$$-M(\lambda,w)(\lambda_i+1)=\int_{\mathbb{C}^n}|z_1|^{2\lambda_1}\dots|z_i|^{2\lambda_i}\dots|z_n|^{2\lambda_n}\bar{z}_i\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i}\kappa(z,w)dV.$$

反复应用这些公式，即可证明 (2)。

(2) 中的右端对于 $Re\,\lambda_i+a_i>-\frac{1}{2}$, $1\le i\le k$, $Re\,\lambda_i>-1$, $k+1\le i\le n$ 是全纯的。若令 $\lambda_i+a_i=0$, $1\le i\le k$，则可对光滑函数应用柯西积分公式，得到

$$(-\pi)^k\int_{\{z|z_i=0,1\le i\le k\}}|z_{k+1}|^{2\lambda_{k+1}}\dots|z_n|^{2\lambda_n}\prod_{i=1}^k\left[\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\right]^{a_{i-1}}\kappa(z,w)dV(z_{k+1},\dots,z_n).$$

因此，我们证明了：

**推论 2.2：**

(1) $M(\lambda,w)$ 在 $\mathbb{C}^n\times W$ 上是亚纯的（可延拓），在超平面 $\lambda_i=-r$, $r\in\mathbb{N}^+$ 处至多有简单极点。(2) 对于 $Re\,\lambda_i>-1$, $k+1\le i\le n$，$\prod_{i=1}^k\frac{1}{\lambda_i+a_i}$ 在 $M(\lambda,w)$ 于 $(-a_1,\dots,-a_k,\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n,w)$ 处的 Laurent 级数中的系数等于$\pi^k\prod_{i=1}^k\left[\frac{1}{(a_i-1)!}\right]\int_{\mathbb{C}^{n-k}}|z_{k+1}|^{2\lambda_{k+1}}\dots|z_n|^{2\lambda_n}\prod_{i=1}^k\left[\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial\bar{z}_i}\right]^{a_i-1}\kappa(z,w)dV(z_{k+1},\dots,z_n)$ $\mathbb{C}$。它全纯地依赖于 $(\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n,w)$。

**注 2.3：**如果函数 $\kappa$ 在 $\{z|z_1\dots z_k=0\}$ 上为零，那么 $M(\lambda,w)$ 沿超平面 $\lambda_i=-1$, $1\le i\le k$ 没有极点。

证明：由中值定理 $|\kappa|\le max_u\left(\left|\frac{\partial\kappa}{\partial z_i}(u,w)\right|+\left|\frac{\partial\kappa}{\partial\bar{z}_i}(u,w)\right|\right)|z_i|$ 对于 $1\le i\le k$。因此 $M(\lambda,w)$ 对于 $Re\,\lambda_i>-\frac{3}{2}$, $1\le i\le k$, $Re\,\lambda_j>-1$, $k+1\le j\le n$ 是全纯的。

## 2.2 整体化

令 $Y$ 为复流形（具有可数基，因此仿紧），$D$ 为 $Y$ 上的有效除子。

我们将 $D$ 的管状函数理解为一个光滑函数 $g$: $Y \to \mathrm{R}_+$，它在局部可表示为 $g = A|t|^2$，其中 $A$ 是光滑正函数，$t$ 是 $D$ 的局部方程。

如果我们有一个（局部有限的）和 $D = \sum_{i\in I} v_i D_i$ 及 $v_i \geq 0$，也可以称其为沿 $D_i$、具有重数 $v_i$ 的 $\cup_{i\in I} D_i$ 的管状函数。

我们使用记号 $D(J) \coloneqq \cup_{i\in J} D_i$、$D_J \coloneqq \cap_{i\in J} D_i$、$J \subseteq I$。

### 2.2.1 特殊情形 I

我们考察这样一种情形：对一个超曲面进行嵌入解消后，给定（半）亚纯微分形式，其极点沿严格变换和某些例外除子分布。（关于半亚纯形式的性质，参见附录 1。）

设 $Y$ 是一个维数为 $n$ 的流形，$Z = D_0$，$D_1$，……，$D_K$ 是 $Y$ 上具有正规交叉的光滑除子，并假设 $D_0 \cap \ldots\ldots \cap D_k \neq \emptyset$ 对某个 $k \in [1, K]$ 成立。令 $I \coloneqq [0, K]$、$J \coloneqq [1, k]$。假设给定一个管状函数 $g$，对应于 $D(I) \subseteq Y$，其重数为 $v_i > 0$、$i \in [0, k]$、$v \coloneqq \mathrm{lcm}\{v_0, \ldots\ldots, v_k\}$，且 $v_i \geq 0$、$i \in [k+1, K]$。对于 $D_0 \cap D_J \subseteq D_J$，给定一个管状函数 $\tilde{g}$，其重数为 $\tilde{v} > 0$。

如果我们有半亚纯微分形式 $\psi_j \in \Gamma(Y, \mathrm{E}_Y^n(\log D(J))(*Z))$、$j = 1,2$，以及一个紧支撑光滑函数 $\sigma \in C_c^\infty(Y)$，我们可以构造梅林型积分：

$$M(\lambda) \coloneqq \int_Y g^\lambda \sigma \psi_1 \wedge \overline{\psi_2},$$

$$\widetilde{M}(\lambda) \coloneqq \int_{D_J} \tilde{g}^\lambda \sigma Res_{D_J}\psi_1 \wedge \overline{Res_{D_J}\psi}_2.$$

记号 $Res_{D_J}\psi_j$ 表示沿除子 $D_1, \ldots, D_k$ 按某个固定顺序取迭代庞加莱留数。由于该项出现了两次，因此不存在歧义。

**引理2.4：**

(1) $M(\lambda)$ 在 C 上是亚纯的（其极点为 $\in \frac{1}{v}\mathrm{Z}$，阶为 $\leq n$）。(2) $\lambda^{k+1}M(\lambda)$ 在 0 处全纯。(3) $\widetilde{M}(\lambda)$ 在 C 上是亚纯的（其极点为 $\in \frac{1}{\tilde{v}}$ Z，阶为 $\leq 1$）。(4) $[\lambda^{k+1}M(\lambda)]_{\lambda=0} = \tilde{v}(v_0 \ldots v_k)^{-1}(2\pi i)^k(-1)^{kn-k(k-1)/2}\left[\lambda\widetilde{M}(\lambda)\right]_{\lambda=0}$。

证明：我们使用局部坐标图 $U = \{z \in \mathrm{C}^n \mid |z_i| < 1\}$ 来描述 $Y$，并且可以假设 $\sigma$ 的支集包含在 $U$ 中。

（1）在适当坐标下，我们有

$$D(I)|U = (z_1 \ldots z_s)$$

$$D_0 \cup D(J)|U = (z_1 \ldots z_t) \quad (0 \leq t \leq s \leq n)$$

$$g(z) = A(z)\left|z_1^{v(1)} \ldots z_s^{v(s)}\right|^2 \quad (A(z) > 0, v(j) = v_{i(j)}).$$

我们选取足够大的 $l \in \mathrm{N}$，以便在 $U$ 上得到光滑形式 $(z_1 \ldots z_t)^l\psi_j$。然后

$$M(\lambda)=\int_{\mathbb{C}^n}|z_1|^{2(v(1)\lambda-1)}\dots|z_t|^{2(v(t)\lambda-1)}\left|z_{t+1}^{v(t+1)}\dots z_s^{v(s)}\right|^{2\lambda}\sigma A^{\lambda}|z_1\dots z_t|^{2l}\psi_1\wedge\overline{\psi_2}.$$

这个积分由 (2-1) 通过以下代换得到

$$\lambda_i=v(i)\lambda-1,\ 1\le i\le t,$$

$$\lambda_i=v(i)\lambda,\ t+1\le i\le s,$$

$$\lambda_i=0,\ s+1\le i\le n,$$

$$w=\lambda,\ \kappa(z,w)dV=\sigma A^{w}|z_1\dots z_t|^{2l}\psi_1\wedge\overline{\psi_2}.$$

由于亚纯延拓以相同方式得到，(1) 得证。

(2) 由此推理可知，$M(\lambda)$ 在坐标图 $U$ 上的 0 处的极点阶数至多为 $t\le k+1$。

(3) 的证明与 (1) 类似。

(4) 根据 (1) 和 (2)，只需考虑以下情形：

$$D_i|U=(z_i),\ 1\le i\le k,$$

$$D_0|U=(z_{k+1})$$

$$D(I)|U=(z_1\dots z_s)\quad(k+1\le s\le n)$$

$$g(z)=A(z)\left|z_1^{v(1)}\dots z_s^{v(s)}\right|^2\quad(A>0,\ v(i)=v_i,\ 1\le i\le k,\ v(k+1)=v_0)$$

$$\tilde{g}(z_{k+1},..,z_n)=\tilde{A}(z_{k+1},..,z_n)|z_{k+1}|^{2\tilde{v}}\quad(\tilde{A}>0),\text{ and}$$

$$\psi_j=z_{k+1}^{-l}\left[\frac{dz_1\wedge\dots\wedge dz_k}{z_1\dots z_k}\wedge\alpha_j+\beta_j\right],\ j=1,2,$$

其中微分形式为 $\alpha_j\in\mathrm{E}^{n-k}(U)$、$\beta_j\in\sum_{(dz)_L\subsetneq J}\frac{L}{z_L}\wedge\mathrm{E}^{n-|L|}(U)$ 和 $l\in\mathrm{N}$。

左端由下式得到

$$M(\lambda)=\int_{\mathbb{C}^n}|z_1|^{2(v_1\lambda-1)}\dots|z_k|^{2(v_k\lambda-1)}|z_{k+1}|^{2(v_0\lambda-l)}\left|z_{k+2}^{v(k+2)}\dots z_s^{v(s)}\right|^{2\lambda}\sigma A^{\lambda}(dz_1\wedge\dots\wedge dz_k\wedge\alpha_1+z_1\dots z_k\beta_1)\wedge(\overline{dz_1\wedge\dots\wedge dz_k\wedge\alpha_2+z_1\dots z_k\beta_2}).$$

如果我们代入（2-1）

$$\lambda_i=v_i\lambda-1,\ 1\le i\le k,$$

$$\lambda_{k+1}=v_0\lambda-l,$$

$$\lambda_i=v(i)\lambda,\ k+2\le i\le s,$$

$$\lambda_i=0,\ s+1\le i\le n,$$

$$w=\lambda,\ \kappa(z,w)dV=\sigma A^{w}\left|z_1\dots z_k z_{k+1}^{l}\right|^2\psi_1\wedge\overline{\psi_2},$$

由推论 2.2 得：

$$[\lambda^{k+1}M(\lambda)]_{\lambda=0}v_0 \dots v_k =$$
$$\pi^{k+1}\left(\frac{1}{(l-1)!}\right)^2 \int_{\{z|z_i=0,1\le i\le k+1\}}\left(L_{z_{k+1}}L_{\bar{z}_{k+1}}\right)^{l-1}\left[\sigma i\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)\dots i\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k \wedge \alpha_1 \wedge \overline{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_k \wedge \alpha_2})\right].$$

（$x_i$， $y_i$ 为实坐标，$L$ 为李导子，而$i$（$w$）为与向量场$w$的缩并。）

为了计算括号中的表达式，我们需要常数

$$C(p) = (-2i)^p(-1)^{p(p-1)/2},$$

它满足 $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_p \wedge dz_1 \wedge \dots \overline{\qquad\qquad \wedge dz_p} = C(p)dV(z_1, \dots, z_p)$。将这个括号限制在 $\{z|z_i = 0,1 \le i \le k\}$ 上，可得

$$(-1)^{k(n-k)}C(k)\,\sigma i\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_2}\Big|_{z_1=\dots=z_k=0}.$$

右端：在我们的情形中 $Res_{D_K}\psi_j = z_{k+1}^{-l}\alpha_j$，并且

$$\widetilde{M}(\lambda) = \int_{\{z|z_i=0,1\le i\le k\}}|z_{k+1}|^{2(\tilde{v}\lambda-l)}\sigma\tilde{A}^{\lambda}\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_2}.$$

由推论 2.2 可得

$$\left[\lambda\widetilde{M}(\lambda)\right]_{\lambda=0}\tilde{v} = \pi\left(\frac{1}{(l-1)!}\right)^2 \int_{\{z|z_i=0,1\le i\le k+1\}}\left(L_{z_{k+1}}L_{\bar{z}_{k+1}}\right)^{l-1}\left[\sigma i\left(\frac{\partial}{\partial y_{k+1}}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\right)(\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_2})\right].$$

将两边合并，我们得到

$$[\lambda^{k+1}M(\lambda)]_{\lambda=0}v_0 \dots v_k = \pi^k(-1)^{k(n-k)}C(k)\left[\lambda\widetilde{M}(\lambda)\right]_{\lambda=0}\tilde{v}.$$

### 2.2.2 偏好的情形 II

在第 2.2.1 节中，我们比较了流形上的梅林型积分与某个子流形上的此类积分，后者是某些除子的交集。在这里，我们将进一步研究后者。

设 $N$ 为维数 $m$的紧复流形。设 $V \cup E$ 为具有正规交叉的约化（有效）除子，且 $V$ 光滑。记 $N' \coloneqq N\backslash E, V' \coloneqq V\backslash E$。设 $\mathrm{h}: N \to \mathrm{R}$是沿着 $V$ 、重数为 $v > 0$的管状函数。

我们考虑闭半亚纯形式

$$\xi_1 \in \Gamma(N, \mathcal{E}_N^m(*V)), \xi_2 \in \Gamma(N, \mathcal{E}_{N,E}^m(*V)),$$

并希望确定 $\left[\lambda\int \mathrm{h}_N{}^{\lambda}\xi_1 \wedge \bar{\xi}_2\right]_{\lambda=0}$。按照 [Ba 3], 的方法，我们将沿 $V$ 的极点阶数降至对数情形。

**引理 2.5：** 存在半亚纯形式 $\alpha \in \Gamma(N, \mathrm{E}_N^{m-1}(*V))$、$\beta \in \Gamma(N, \mathrm{E}_{NE}^{m-1},(*V))$，使得 $\xi_1' \coloneqq \xi_1 + d\alpha \in \Gamma(,\mathrm{E}_N^m(\log))$、$\xi_2' \coloneqq \xi_2 + d\beta \in \Gamma(,\mathrm{E}_{NE,}^m(\log))$。

证明：第一个断言由 [Ba 3, 命题 1] 得出。第二个断言以类似方式得到。由推论 A.1.6，包含映射 $\mathrm{E}_{N,}^{\bullet}{}_E(\log V) \to \mathrm{E}_{N,}^{\bullet}{}_E(*V)$ 是软层之间的拟同构，并且

诱导出一个同构 $H^{\bullet}\Gamma\mathrm{E}_{N,}^{\bullet}{}_{E}(\log V) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}\Gamma\mathrm{E}_{N,}^{\bullet}{}_{E}(*V)$。所要证明的是，该映射在维数 $m$ 时是满射。

庞加莱留数 $Res_V\xi_1' \in Z^{m-1}\Gamma\mathrm{E}_V^{\bullet}$ 分别为 $Res_{V'}(\xi_1'|N') \in Z^{m-1}\Gamma\mathrm{E}_{V'}^{\bullet}$, 分别为 $Res_V\xi_2' \in Z^{m-1}\Gamma\mathrm{E}_{V,}^{\bullet}{}_{E\cap V}$ ，定义了上同调类，分别属于 $H^{m-1}(V, \mathrm{C})$、$H^{m-1}(V', \mathrm{C})$，以及$H_c^{m-1}(V', \mathrm{C})$。

根据推论 A.1.6（以及层的软性），这些类仅取决于 $\xi_1$分别为 $\xi_1|N'$ 分别为 $\xi_2$ 模掉恰当半亚纯形式后的类。它们称为 Leray 留数，记作

$$res_V\xi_1 = [Res_V\xi_1'], res_{V'}\xi_1 = [Res_{V'}\xi_1'|N'], res_{V',c}\xi_2 = [Res_V\xi_2'].$$

众所周知，$res_{V'}\xi_1$ 是 $[\xi_1|N'\backslash V'] \in H^m(N'\backslash V', \mathrm{C})$ 在 Gysin 序列中经映射 $R$ 所得的像

(2-2) $$H^m(N') \to H^m(N'\backslash V') \xrightarrow{R} H^{m-1}(V') \xrightarrow{\gamma} H^{m+1}(N')$$

（即图表中各条直线的上同调序列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \Omega_{N'}^{\bullet} & \to & \Omega_{N'}^{\bullet}(\log V') & \to & \Omega_{V'}^{\bullet-1} \to 0 \\ & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx \\ 0 & \to & K^{\bullet} & \to & \mathcal{E}_{N'}^{\bullet}(\log V') & \to & \mathcal{E}_{V'}^{\bullet-1} \to 0 \end{array}$$

其中 $K^{\bullet} \supseteq \mathrm{E}_{N'}^{\bullet}$ 是核，参见 A.1.6 和 [Gr-S]）。若我们对 $V \subseteq N$取 Gysin序列，就能得到 $res_V\xi_1$ 的类似表示，而 $res_{V'}\xi_1$ 是 $res_V\xi_1$ 在限制映射 $H^{m-1}(V) \to H^{m-1}(V')$ 下的像。

现在我们的目标是为 $res_{V',c}\xi_2$给出类似的表示。

我们还需要一些记号。包含映射如下：

$j: N'\backslash V' \to N$

$j_0: N\backslash V \to N$

$j_1: N' \to N$

$j': N'\backslash V' \to N\backslash V$

$i: V' \to N'$

我们为以下空间定义支撑族 $N, N', N'\backslash V', V, V'$：

$c_N \coloneqq \{A \subseteq N | A \text{ compact}\}$

$c_{N'} \coloneqq c_N|N' = \{A \in c_N | A \subseteq N'\}$

$$\phi \coloneqq c_N \cap (N\backslash V)|N'\backslash V' = \{B \coloneqq A \cap (N\backslash V) | A \in c_N, B \subseteq N\backslash V\backslash E\}$$
$$= \{B \subseteq N\backslash V\backslash E | B \text{ closed in } N\backslash V\}$$

$c_V \coloneqq c_N \cap V = \{B \subseteq V | B \text{ compact}\}$

$c_{V'} \coloneqq c_V|V'$

按照 [Go, 第 150] 页的定义，它们是旁紧化的。[5]

**引理 2.6：**

(1) $H_c^k(N') := H_{c_{N'}}^k(N', \mathrm{C}) = \mathrm{H}^k \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E = \mathrm{H}^k \Omega_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ 和 $H_c^k(V') := H_{c_{V'}}^k(V', \mathrm{C}) = \mathrm{H}^k \mathrm{E}_{V,}{}^{\bullet}{}_{E\cap V} = \mathrm{H}^k \Omega_{V,}{}^{\bullet}{}_{E\cap V}$. (2) $H_\phi^k(N'\backslash V', \mathrm{C}) = \mathrm{H}^k j_{0*} j_0^{-1} \mathrm{E}_N{}^{\bullet}{}_E =, \mathrm{H}^k \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E(*V) = \mathrm{H}^k \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E (\log V) = \mathrm{H}^k \Omega_{N,}{}^{\bullet}{}_E(\log V) = \mathrm{H}^k \Omega_{N,}{}^{\bullet}{}_E(*V)$.

证明：(1) 根据 [Go，第 190] 页（并且由于 $c_N = \{A \subseteq N | A \text{ closed}\}$），我们有

$$H_{c_N|N'}^k(N', \mathbb{C}) = H_{c_N}^k(N, j_{1!}\mathbb{C}) = H^k(N, j_{1!}\mathbb{C}).$$

由于 $j_{1!}\mathrm{C} \approx \Omega_{N,}{}^{\bullet}{}_E \approx \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ （引理 A.1.1），这与 $\mathrm{H}^k \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ 和 $\mathrm{H}^k \Omega_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ 同构。第二个断言也属于同一类型。

(2) 同样，我们有 ([Go，第 190] 页)

$$H_\phi^k(N\backslash V\backslash E, \mathbb{C}) = H_{c_N \cap (N\backslash V)}^k(N\backslash V, j_!'\mathbb{C}) = H^k(N\backslash V, j_!'\mathbb{C}),$$

而这与下式同构

$$H^k \Gamma\big(N\backslash V, \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet}\big) = \mathbb{H}^k j_{0*} j_0^{-1} \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet},$$

这里我们用到：$j_{0*} j_0^{-1} \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ 是软的（且是细的），因为它是软（且是细）环层上的模（[Go，第 156-157] 页）。(2) 的其余部分由此得出，因为这些复形

$$j_{0*} j_0^{-1} \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet}, \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet}(*V), \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet}(\log V), \Omega_{N,E}^{\bullet}(\log V), \Omega_{N,E}^{\bullet}(*V), j_{0*} j_0^{-1} \Omega_{N,E}^{\bullet}$$

都准同构（A.1.4、A.1.6、A.1.10）。

由图表中的各行

(2-3)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega_{N,E}^{\bullet} & \to & \Omega_{N,E}^{\bullet}(\log V) & \xrightarrow{Res} & \Omega_{V,E\cap V}^{\bullet-1} & \to & 0 \\ & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \downarrow\approx & & \\ 0 & \to & K^{\bullet} & \to & \mathcal{E}_{N,E}^{\bullet}(\log V) & \xrightarrow{Res} & \mathcal{E}_{V,E\cap V}^{\bullet-1} & \to & 0 \end{array}$$

（$K^{\bullet} \supseteq \mathrm{E}_{N,}{}^{\bullet}{}_E$ 核）得到如下序列

(2-4)
$$\to H_c^m(N') \to H_\phi^m(N\backslash V\backslash E, \mathbb{C}) \xrightarrow{R_c} H_c^{m-1}(V') \xrightarrow{\gamma_c} H_c^{m+1}(N').$$

现在我们有：

$res_{V',\ c}\xi_2$ 是在 $[\xi_2]$ 作用下 $R_c$的像。

[5] 证明 $\phi$：$N\backslash V$ 是仿紧的，因此是正规的。因此，闭且不相交的子集 $E\backslash V$ 和 $B$ 属于 $N\backslash V$ ，并且在 $N\backslash V$中有不相交邻域 $U_1, U_2$。于是 $\overline{U_2} \in \phi$。

此外，显然，$res_{V',\ c}\xi_2$ 通过典范映射$H_c^{m-1}(V') \to H^{m-1}(V) \to H^{m-1}(V')$被映射到 $res_V\xi_2$ 和$res_{V'}\xi_2$。

我们将为 (2-4) 给出另一种更直观的表示。

**注 2.7：**典范映射

$$H^k\Gamma_{c_{N'}}(N', \mathcal{E}^\bullet_{N'}(\log V')) \to H^k\Gamma(N, \mathcal{E}^\bullet_{N,E}(\log V))$$

是一个同构。

证明：左端可以改写为

$$H^k\Gamma_{c_{N'}}(N', \mathcal{E}^\bullet_{N'}(\log V')) = H^k\Gamma(N, j_{1!}\mathcal{E}^\bullet_{N'}(\log V')) = \mathbb{H}^k(N, j_{1!}\mathcal{E}^\bullet_{N'}(\log V'))$$
$$= \mathbb{H}^k(N, j_{1!}\Omega^\bullet_{N'}(\log V')) = \mathbb{H}^k(N, j_{1!}j_1^{-1}\Omega^\bullet_{N,E}(\log V))$$

（因为 $j_{1!}$ 是正合的，并且将软层变为这样的 [ Go，第 154] 页）。

由于正合列 [ Go，第 140] 页

$$0 \to j_{1!}j_1^{-1}\Omega^\bullet_{N,E}(\log V) \to \Omega^\bullet_{N,E}(\log V) \to \Omega^\bullet_{N,E}(\log V)|E \to 0,$$

只需证明 $\forall\, k \geq 0$

$$\mathbb{H}^k\big(E, \Omega^\bullet_{N,E}(\log V)\big|E\big) = 0.$$

由于

$$0 \to \Omega^\bullet_{N,E}|E \to \Omega^\bullet_{N,E}(\log V)|E \to \Omega^{\bullet-1}_{V,E\cap V}|E \to 0,$$

只要 $\forall\, k \geq 0$ 即可

$$\mathbb{H}^k\big(E, \Omega^\bullet_{N,E}\big|E\big) = 0,\ \mathbb{H}^k\big(E, \Omega^{\bullet-1}_{V,E\cap V}\big|E\big) = 0.$$

这是因为这些复形是零的分解（A.1.1）。

We 由此注记可见，（2-4）也可如下得到：将 $\Gamma_{c_{N'}}$（$N'$，$*$） 应用于

$$0 \to K^\bullet \to \mathcal{E}^\bullet_{N'}(\log V') \to \mathcal{E}^{\bullet-1}_{V'} \to 0$$

（它 re （由于这些层是软层，映射为正合）并构成正合上同调序列 e.

引理 2.8：映射 $i^*$: $H^{m-1}(N') \to H^{m-1}(V')$ 和 $\gamma_c/(-2\pi i)$: $H_c^{m-1}(V') \to H_c^{m+1}(N')$ 关于庞加莱对偶（$H^{m-1}(V') \cong H_c^{m-1}(V')^*$, $H^{m-1}(N') \cong H_c^{m+1}(N')^*$）互为伴随。

证明：这与 [Gr-S, 2.18] 类似。我们需要证明 $\langle \gamma_c x, y\rangle = -2\pi i \langle x, i^*y\rangle$ 对于$x \in H_c^{m-1}(V')$, $y \in H^{m-1}(N')$成立。我们根据 (2-3) 中下方那一行确定 $\gamma_c x$。不失一般性，设 $x = [\varphi]$，其中 $\varphi \in \Gamma_c(\mathrm{E}^{m-1}_{V'})$ 和 $y = [\psi] \in \Gamma(\mathrm{E}^{m-1}_{N'})$。考虑一个管状函数 $g$，对应于 $V \subseteq N$，即局部地

$$g = A|t|^2,\ \frac{\partial g}{g} = \partial \log g = \frac{dt}{t} + \frac{\partial A}{A}.$$

通过向 $V$ 的一个收缩映射， $\varphi$ 可以延拓到 $\tilde{\varphi} \in \Gamma_c(\mathrm{E}_{N'}^{m-1})$，使得在 $N$ 中 $V$ 的某个邻域内有 $d\tilde{\varphi} = 0$。于是 $\phi \coloneqq d\left(\frac{\partial g}{g} \wedge \tilde{\varphi}\right) = \bar{\partial}\partial \log g \wedge \tilde{\varphi} - \frac{\partial g}{g} \wedge d\tilde{\varphi} \in \Gamma_c(\mathrm{E}_{N'}^{m+1})$ 是 $\gamma_c x$ 的一个代表元，而通过一个简单的局部计算（使用柯西公式）

$$\langle \gamma_c x, y \rangle = \int_N \phi \wedge \psi = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{g \geq \varepsilon} d\left(\frac{\partial g}{g} \wedge \tilde{\varphi} \wedge \psi\right) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{g=\varepsilon} \frac{\partial g}{g} \wedge \tilde{\varphi} \wedge \psi = -2\pi i \int_V \tilde{\varphi} \wedge \psi = -2\pi i \langle x, i^* y \rangle.$$

接下来，我们比较 $\int \mathrm{h}_N{}^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}$ 与 $\int \mathrm{h}_N{}^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}''$。

**引理 2.9：** 作为 $\lambda$ 的函数（采用引理 2.5 的记号）

$$\int_N h^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}, \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \alpha \wedge \overline{\xi_2}, \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \xi_1 \wedge \bar{\beta}, \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \alpha \wedge d\bar{\beta}$$

是亚纯（可延拓）的，且至多有简单极点（$\in \frac{1}{v}\mathrm{Z}$）。

证明：利用单位分解，我们得到如下形式的各项

$$\int_U (A|z_1|^{2v})^{\lambda} |z_1|^{-2l} \sigma(z) dV, \sigma \in C_c^{\infty}(U), l \geq 0,$$

在坐标图 $U \subseteq \mathrm{C}^m$ 上，其中 $V|U = (z_1)$，$\mathrm{h}|U = A|z_1|^{2v}$。我们应用推论 2.2（其中 $\kappa(z,w) = A^w \sigma(z)$）。

**引理 2.10：** 我们有 $\left[\lambda \int \mathrm{h}_N{}^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}\right]_{\lambda=0} = \left[\lambda \int \mathrm{h}_N{}^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}\right]_{\lambda=0}''$。

证明：我们使用如下形式的斯托克斯定理

$$0 = \int_N d(h^{\lambda} \alpha \wedge \overline{\xi_2}) = \lambda \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \alpha \wedge \overline{\xi_2} + \int_N h^{\lambda} d\alpha \wedge \overline{\xi_2},$$

$$0 = \int_N d(h^{\lambda} \xi_1 \wedge \bar{\beta}) = \lambda \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \xi_1 \wedge \bar{\beta} \pm \int_N h^{\lambda} \xi_1 \wedge d\bar{\beta},$$

$$0 = \int_N d(h^{\lambda} \alpha \wedge d\bar{\beta}) = \lambda \int_N h^{\lambda} \frac{dh}{h} \wedge \alpha \wedge d\bar{\beta} + \int_N h^{\lambda} d\alpha \wedge d\bar{\beta},$$

其中$Re\ \lambda$ 必须选得足够大（例如$Re\ \lambda > 1 + l$），使得左边出现$C^1$ 微分形式的导数。2.10中的积分相差这些等式右边的第二项。由2.9可知，第一项在$\lambda = 0$处没有极点。

**引理 2.11：** $\left[\lambda \int \mathrm{h}_N{}^{\lambda} \xi_1 \wedge \overline{\xi_2}\right]_{\lambda=0} v = ''(2\pi i)(-1)^m \int Res_V \xi_1{}'_V \wedge \overline{Res_V \xi_2}'.$

证明：设$U \subseteq \mathrm{C}^m$ 是$N$ 的一个局部坐标图，满足$V|U = (z_1)$，$\mathrm{h}|U = A|z_1|^{2v}$，$\xi_j' = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \alpha_j + \beta_j$， $\alpha_j$， $\beta_j \in \Gamma(U, \mathrm{E}_U^{\bullet})$，$j = 1,2$。对于$\sigma \in C_c^{\infty}(U)$，对左边积分的贡献为

$$\int \sigma h^{\lambda} \xi_1{}' \wedge \overline{\xi_2{}'} = \int |z_1|^{2(v\lambda - 1)} \sigma A^{\lambda} (dz_1 \wedge \alpha_1 + z_1 \beta_1) \wedge \overline{(dz_1 \wedge \alpha_2 + z_1 \beta_2)}.$$

如果代入（2-1）

$$\lambda_1 = v\lambda - 1, \lambda_i = 0, 2 \le i \le n = m,$$

$$w = \lambda \text{ and } \kappa(z,w)dV = \sigma A^w |z_1|^2 \xi_1{}' \wedge \overline{\xi_2'},$$

根据推论 2.2，我们得到

$$\left[\lambda \int \sigma h^{\lambda} \xi_1{}' \wedge \overline{\xi_2'}\right]_{\lambda=0} v = \pi \int_{z_1=0} \sigma i \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right) i \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left[(dz_1 \wedge \alpha_1 + z_1\beta_1) \wedge \left(\overline{dz_1 \wedge \alpha_2 + z_1\beta_2}\right)\right] = \pi(-1)^{m-1}(-2i) \int_{z_1=0} \sigma\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_2}.$$

**引理 2.12:** $\left[\lambda \int \mathrm{h}_N \ {}^{\lambda}\xi_1 \wedge \bar{\xi}_2\right]_{\lambda=0} v = (2\pi i)(-1)^m \int_V res_{V'}\xi_1 \cup \overline{res_{V'\,c}\xi_{2,}}$

其中 $\cup: H^{m-1}(V') \times H_c^{m-1}(V') \to H_c^{2m-2}(V')$ 是杯积。

证明：令 $r: H^{m-1}(V) \to H^{m-1}(V')$ 和 $c: H_c^{m-1}(V') \to H^{m-1}(V)$ 表示典范映射，我们有 $r(res_V\xi_1) = res_{V'}\xi_1$, $c\left(res_{V',c}\xi_2\right) = res_V\xi_2$。若我们也用 $\cup$ 表示 $H^{m-1}(V)$ 上的杯积，则有如下相容性

$$\int_{V'} res_{V'}\xi_1 \cup \overline{res_{V',c}\xi_2} = \int_V res_V\xi_1 \cup \overline{res_V\xi_2}.$$

### 2.2.3 结论

我们将通过如下设定，把引理 2.12 应用于第 2.2.1 节的情形：$m = n - k$，

$$N = D_J, V \coloneqq Z \cap D_J, E \coloneqq D' \cap D_J \text{ with } D' \coloneqq D_{k+1} \cup \ldots \cup D_K$$

$$\xi_j \coloneqq Res_{D_J}\psi_j, j = 1,2, \sigma \in C_c^{\infty}(Y), \sigma = 1 \text{ near } Z \cap D_J.$$

这里我们还假设：$D_J$ 是紧的，并且$\psi_j \in \Gamma$（$Y$，$\mathrm{E}_{Y\,D'}^{n}$，（对数$D$（$J$））$* Z$）是闭的，因此$\xi_j \in \Gamma$（$N$，$\mathrm{E}_{N\,E}^{m}$，（$* V$），$j = 1$，$2$也闭。特别地，这些形式定义了紧支撑上同调类。

正如前面所指出的，我们无需指定沿除子$D_i$、 $i \in J$取迭代庞加莱留数$Res_{D_J}\psi_j$ 的顺序，因为顺序的影响会相互抵消。

由引理2.4(4)可知，第 2.2.1 节中的函数$M$（$\lambda$）$= \int_Y g^{\lambda}\sigma\psi_1 \wedge \overline{\psi_1}$ 满足：

**推论 2.13：**

$$P_{-(k+1)}(0,M) = (v_0 \ldots v_k)^{-1}(2\pi i)^{k+1}(-1)^{(k+1)(2n-k)/2} \int_{V'}(res_{V'}\xi_1) \cup (\overline{res_{V',c}\xi_2}).$$

稍后，我们将实质性地用到以下说明。

**注记2.14**：根据我们的假设，$res_{V',\ c}\xi_1$ 有定义，而 $res_{V'}\xi_1$ 是在 $c$： $H_c^{m-1}(V') \to H^{m-1}(V')$ 下的像。因此，$\int (_V \ res_{V',}\xi_1) \cup (\overline{res_{V'\,c}\xi_{2,}})$仅取决于 $res_{V',\ c}\xi_2$ 的像 $res_{V'}\xi_2$，我们将其记为

$$\langle res_{V'}\xi_1, \overline{res_{V'}\xi_2}\rangle_{V'}.$$

证明：在 $image(c) \times image(c)$ 上有一个定义良好的双线性形式。

## 3 应用于 $\int |f|^{2\lambda}$ □及渐近展开的系数

### 3.1 整数次数

**3.1.1** 回到第0.4节的设定，其中有一个整数 $a \in \mathrm{N}^*$ 和 $1 \leq r \leq n-1$。我们考虑积分

$$M(\lambda) = \int_X |f|^{2\lambda} \sigma \varphi_1 \wedge \overline{\varphi_2}, \quad (\sigma \in C_c^\infty(X), \sigma = 1 \text{ near } 0)$$

其中 $\varphi_1, \varphi_2$ 与第0.4节中相同。我们旨在证明$(\alpha, k)(\varphi_1) = (a-1, r)$，为此，只需在能够选择 $\varphi_2$ 使得

(3-1) $$P_{-(r+1)}(-a, M) \neq 0.$$

我们继续用 $X_\Sigma'$表示 $X$ 在 $\rho_2\rho_1 \colon X_\Sigma \to \mathrm{C}^n$下的逆像。与第1节中一样，$\cup_{\check{\tau} \in S} X_\tau$ 是开托里克子集，其中 $f^{-a}\varphi_1$ 有 $r+1$ "极点分量"（$Z$ 和 $r$例外除子）。$\bar{T}_\tau \subseteq X_\Sigma$ 是层 $T_\tau \subseteq X_\tau$ 的闭包，而 $\bar{T}_\tau \subseteq U_\tau \subseteq X_\Sigma'$是互不相交的邻域。

在 $\cup_{\check{\tau} \in S} U_\tau$之外，微分形式 $f^{-a}\varphi_j$ 的"极点分量"少于 $r+1$，也就是说，它们属于 $W_{r-1}\Omega^n$(对数 $D$)$(aZ)$。[6] 因此

$$P_{-(r+1)}(-a, M) = \sum_{\check{\tau} \in S} P_{-(r+1)}(\lambda = 0, \int_{U_\tau} |f|^{2\lambda}\, \sigma_\tau \frac{\varphi_1}{f^a} \wedge \frac{\overline{\varphi_2}}{f^a}),$$

其中 $\sigma_\tau \in C_c^\infty(U_\tau)$，且 $= 1$ 在 $\bar{T}_\tau$ 附近（即首个 Laurent系数仅取决于$\cup_{\check{\tau} \in S} U_\tau$，参见第 2.1 节）。

我们在第2.2.3节将推论2.13应用于右端。对于 $\check{\tau} \in S$，我们设

$$Y \coloneqq U_\tau$$

$$D(J) \coloneqq \cup_{l \leq \check{\tau}} D(l) \ (\Rightarrow k = r), D_0 \coloneqq Z,$$

$$D' \coloneqq \cup_{\substack{l \in \Sigma^{(1)} \\ l \not\leq \check{\tau}}} D(l) \ (\Rightarrow D(J) \cup D' = X_\Sigma \backslash (\mathbb{C}^*)^n),$$

$$g \coloneqq |f|^2, \sigma \coloneqq \sigma_\tau \ (\in C_c^\infty(U_\tau), = 1 \text{ near } \bar{T}_\tau),$$

$$\psi_j = \varphi_j / f^a, j = 1,2.$$

于是我们得到（参见注记2.14）

[6] 按照第 1 节的记号：$f^{-a}\varphi_j$ 仅沿着 $Z$ 和 $D(l)$有极点，$l \in \Sigma^{(1)}$（一维骨架），其中 $l \subseteq \check{\sigma}(\delta)$。所有非空交集组成的集合 $r$ 这类 $D(l)$，恰为 $\bar{T}_\tau = \cap_{l \leq \check{\tau}} D(l)$，$\check{\tau} \subseteq \check{\sigma}(\delta)$维数为 $r$的锥。

$$P_{-(r+1)}\left(\lambda=0,\int_{U_\tau}|f|^{2\lambda}\,\sigma_\tau\frac{\varphi_1}{f}\wedge\frac{\overline{\varphi_2}}{f}\right)=(2\pi i)^{r+1}\varepsilon(n,r)v_\tau^{-1}\left\langle res\left(\frac{\varphi_1}{f^a}\right),\overline{res\left(\frac{\varphi_2}{f^a}\right)}\right\rangle_{T_\tau\cap Z},$$

with

$$res\left(\frac{\varphi_j}{f^a}\right):=res_{T_\tau\cap Z}Res_{T_\tau}\left(\frac{\varphi_j}{f^a}\right)\in H^{m-1}(T_\tau\cap Z,\mathbb{C})\ (m=n-r),$$

$\varepsilon(n,\ r)=\pm1$ （与 $\check{\tau}\in S$ 无关），以及 $v_\tau\in\mathrm{N}^+$ （取决于 $f$ 沿$D$ 的重数）。

根据引理 1.3，这些项相差的$\check{\tau}\in S$ 仅是正因子（因为 1.3 中的非零因子出现了两次）。因此，只需固定某个$\check{\tau}\in S$。我们要找到一个形式 $\varphi_2\in\Omega_0^n$，supp($\varphi_2$) $\subseteq a\delta^\circ$，使得

(3-2) $$\left\langle res\left(\frac{\varphi_1}{f^a}\right),\overline{res\left(\frac{\varphi_2}{f^a}\right)}\right\rangle_{T_\tau\cap Z}\neq 0.$$

记 $F_{\check{\tau}}:=\bar{T}_\tau,\ D_\tau:=\bar{T}_\tau\backslash T_\tau,\ Z_\tau:=Z\cap F_{\check{\tau}},\ V_\tau:=Z\cap T_\tau,\ i\colon\ V_\tau\hookrightarrow T_\tau$，并且

$$res_c\left(\frac{\varphi_j}{f^a}\right):=res_{V_\tau,c}Res_{F_{\check{\tau}}}\left(\frac{\varphi_j}{f^a}\right)\in H_c^{m-1}(V_\tau,\mathbb{C})$$

如第 2.2.2 节所示。此外，回忆正合列

$$H_c^m(T_\tau)\to H_\phi^m(T_\tau\backslash V_\tau)\overset{R_c}{\to}H_c^{m-1}(V_\tau)\overset{\gamma_c}{\to}H_c^{m+1}(T_\tau).$$

**引理 3.1：**

(1) $\left\{Res_{F_{\check{\tau}}}\left(\frac{\varphi}{f^a}\right)\middle|supp(\varphi)\subseteq a\delta^\circ\right\}=\Gamma\left(F_{\check{\tau}},\ \ \Omega^m_{F_{\check{\tau}}}(aZ_\tau)\right)$(2) 对于 $a>m$，映射 $res_c\colon\ \ \Gamma\left(F_{\check{\tau}},\ \ \Omega^m_{F_{\check{\tau}}}(aZ_\tau)\right)\to\ker\gamma_c$ 是满射。

证明：由 A.2.2 和 A.2.6 得出。

根据引理 2.8，$i^*\colon\ H^{m-1}(T_\tau)\to H^{m-1}(V_\tau)$ 和 $\gamma_c/(-2\pi i)$ 关于庞加莱对偶互为伴随。这意味着：

**引理 3.2：** 对于 $x\in H^{m-1}(V_\tau)$，有：$\langle x,y\rangle=0\ \forall\ y\in\ker\gamma_c\Leftrightarrow x\in image(i^*)$。

证明：$\langle x,y\rangle=0\ \forall\ y\in\ker\gamma_c\Leftrightarrow\langle x,.\rangle$ 在 $image(\gamma_c)$ 上定义了一个线性形式，它可以写成 $\langle z,.\rangle$，其中 $z\in H^{m-1}(T_\tau)\Leftrightarrow\langle x,y\rangle=\langle z,\gamma_c(y)\rangle=(-2\pi i)\langle i^*(z),y\rangle$ $\forall y\in H_c^{m-1}(V_\tau)\Leftrightarrow x=(-2\pi i)i^*(z)$。

令 $H_c^{m-1}(V_\tau)\overset{c}{\to}H^{m-1}(V_\tau)\overset{i^*}{\leftarrow}H^{m-1}(T_\tau)$ 为典范映射。由 A.2.8 可得：

**引理 3.3：** 对于 $m\geq 2,\ image(c)\cap image(i^*)=0$，若其属于 $H^{m-1}(V_\tau)$；对于 $m=1$, $image(R_c)\cap image(i^*)=0$，若其属于 $H^0(V_\tau)$。

**引理 3.4：**典范映射的像的交集

$$H^m(T_\tau) \to H^m(T_\tau \backslash V_\tau) \leftarrow H^m_\phi(T_\tau \backslash V_\tau)$$

为零（对于 $m \geq 1$）。

证明：见 A.2.9。

我们将这些引理应用于 $x = res(\frac{\varphi_1}{f^a}) \in image(c) \subseteq H^{m-1}(V_\tau)$。若 $\left[Res_{T_\tau}(\frac{\varphi_1}{f^a})\right] \neq 0$ 属于$H^m(T_\tau \backslash V_\tau)$，则 $x \neq 0$ （由 3.4 和 (2-2) 可得），因此由 3.3 得 $x \notin image$，并且存在一个 $y \in$ _____ker $\gamma_c$，使得 $\langle x, y\rangle \neq 0$ （由 3.2 可得）。在 $a > m$ 的情形下，这可表示为 $y = res_c(\frac{\varphi_2}{f^a})$，其中$supp(\varphi_2) \subseteq a\delta^\circ$ （由 3.1 可得，因为共轭的 $\bar{y} \in \ker \gamma_c$）。

因此，我们已证明对于 $a > m$：

**命题 3.5：**设 $a \in \mathrm{N}^+, 1 \leq r \leq n-1$，且 $\left[Res_{T_\tau}(\frac{\varphi_1}{f^a})\right] \neq 0$ 属于 $H^{n-r}(T_\tau \backslash V_\tau)$（对某个 $\check{\tau} \in S$，因而对所有 $\check{\tau} \in S$）。则 $(\alpha, k)(\varphi_1) = (a-1, r-1)$。

证明：剩下的情况是 $a \leq m$。但对于 $b \geq 0$，我们有

$$Res_{T_\tau}\left(\frac{\varphi_1}{f^a}\right) = Res_{T_\tau}\left(\frac{f^b\varphi_1}{f^{a+b}}\right) = Res_{T_\tau}\left(\frac{f_\delta^b\varphi_1}{f^{a+b}}\right)$$

（因为 $(f^b - f_\delta^b)\varphi_1$ 的牛顿阶为 $> a+b$），并且 $supp(f_\delta^b\varphi_1) \subseteq (a+b)\delta^\circ$。若我们选择 $a+b > n-r$，则属于已证明的情况，得到 $(\alpha, k)(f_\delta^b\varphi_1) = (a+b-1, r-1)$。于是 $(\alpha, k)(f^b\varphi_1) = (a+b-1, r-1)$，因为 $(\alpha, k)((f^b - f_\delta^b)\varphi_1) \geq (\nu, l)((f^b - f_\delta^b)\varphi_1) - (1,0) > (a+b-1, r-1)$。最后 $(\alpha, k)(\varphi_1) = (\alpha, k)(f^b\varphi_1) - (b, 0) = (a-1, r-1)$。

### 3.1.2 条件的计算 $0 \neq \left[Res_{T_\tau}(\frac{\varphi_1}{f^a})\right] \in H^{n-r}(T_\tau \backslash V_\tau)$

再次考虑$\check{\tau} \in S$、 $T_\tau \subseteq X_\tau$ 维数为$n-r$的相应层，以及$V_\tau = Z \cap T_\tau$、 $F_{\check{\tau}} = \bar{T}_\tau \subseteq X_\Sigma$、 $Z_\tau = Z \cap F_{\check{\tau}}$。

回顾引理 1.3 中$Res_{T_\tau}(\frac{\varphi_1}{f^a})$的表示。取$m \in \delta \cap \mathbb{Z}^n$、 $\tilde{f} = x^{-m}f$、 $\tilde{\varphi}_1 := x^{-am}\varphi_1$，这是像

$$\begin{array}{ccc} f^{-a}\varphi_1 = \tilde{f}^{-a}\tilde{\varphi}_1 \in \tilde{f}^{-a}\mathbb{C}[\tau \cap \mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^n\mathbb{C}^n \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow \boldsymbol{r} \otimes \boldsymbol{I} \\ \xi \in \tilde{f}|_{T_\tau}^{-a}\mathbb{C}[cospan(\tau) \cap \mathbb{Z}^n] \otimes \Lambda^{n-r}\mathbb{C}^n \end{array}$$

在该映射下，它由限制 $\boldsymbol{r}$: $\mathrm{C}[\tau \cap \mathrm{Z}^n] \to \mathrm{C}[cospan(\tau) \cap \mathrm{Z}^n]$ 和缩并 $\boldsymbol{I} = \Lambda_l i(l)$: $\Lambda^n\mathrm{C}^n \to \Lambda^{n-r}\mathrm{C}^n$ 的迭代 $i(l)$ 组成（$l$ 的本原边向量）。我们注意到，$\boldsymbol{I}$ 映射到 $\Lambda^{n-r} \cap \ker(l)_l$。

为了描述低维环面嵌入 $F_{\check{\tau}}$，我们引入新的记号（在此语境下有效）：

$M \coloneqq \mathrm{Z}^n M' \coloneqq M \cap \bigcap \ker({}_{j\in J} \quad l_j)$ ($l_j, j \in J$, $\check{\tau}$ 的本原边向量)
$T' \coloneqq Spec\ \mathrm{C}[M'] = T_\tau$, $X' \coloneqq F_{\check{\tau}} \supseteq T'$, $D' \coloneqq X' \backslash T' g \coloneqq \tilde{f}_{|T_\tau} \in \mathrm{C}$
$[M']$, $Z' \coloneqq \overline{(g|T')} \subseteq X'$ ($\Rightarrow x^m g = f_\delta$, $Z' = Z_\tau$)$\Delta' \coloneqq \Delta(g)$
$\subseteq M'_{\mathbb{R}}$ 牛顿多面体

那么 $\xi \in \Gamma(X', \Omega^{n-r}(aZ')) \subseteq \Gamma(X', \Omega^{n-r}(\log D')(aZ'))$（引理 A.2.6）

$$[\xi] \in \frac{\Gamma(X', \Omega^{n-r}(\log D')(aZ'))}{d\Gamma(X', \Omega^{n-r-1}(\log D')((a-1)Z'))} \subseteq H^{n-r}(T' \backslash Z').$$

公式中的两个向量空间具有如下表示（引理 A.2.2）

$$\Gamma(X', \Omega^{n-r}(\log D')(aZ')) = g^{-a} L(a\Delta') \otimes \Lambda^{n-r} M'_{\mathbb{C}},$$

$$\Gamma(X', \Omega^{n-r-1}(\log D')((a-1)Z')) = g^{-a+1} L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^{n-r-1} M'_{\mathbb{C}}.$$

条件 $[\xi] \neq 0$ 乘以 $g^a$ 后可写为：

$$[g^a \xi] \neq 0 \quad \text{in} \quad \frac{L(a\Delta') \otimes \Lambda^{n-r} M'_{\mathbb{C}}}{\{-(a-1)dg \wedge \alpha + g d\alpha \,|\, \alpha \in L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^{n-r-1} M'_{\mathbb{C}}\}}$$

根据迭代收缩 $id \otimes \Lambda_j i(l_j)$： $\mathrm{C}[M'] \otimes \Lambda^n M_{\mathbb{C}} \to \mathrm{C}[M'] \otimes \Lambda^{n-r} M'_{\mathbb{C}}$,

$$\{-(a-1)dg \wedge \beta + g d\beta | \beta \in L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^{n-1} M_{\mathbb{C}}\}$$

映射到

$$\{-(a-1)dg \wedge \alpha + g d\alpha | \alpha \in L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^{n-r-1} M'_{\mathbb{C}}\}.$$

证明：第一个集合映入第二个集合。这由 $i(l_j)dg = 0$ 和 $L(l_j)\beta = (di(l_j) + i(l_j)d)\beta = 0$ 得出，其中 $\beta \in L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^p M_{\mathbb{C}}$ （注意 $M' \subseteq \ker(l_j)$），因此$i(l_j)(dg \wedge \beta) = -dg \wedge i(l_j)\beta$ 且 $i(l_j)d\beta = L(l_j)\beta - di(l_j)\beta = -di(l_j)\beta$。取$\beta = (\Lambda_j v_j) \wedge \alpha$，其中 $v_j, j \in J$ 是 $M_{\mathbb{C}}$ 中 $M'_{\mathbb{C}}$ 的补集的一组基，还可看出该映射是满射。

到目前为止，我们已得到等价条件：$[\tilde{\varphi}_1] \neq 0$ 中

$$L(a\Delta') \otimes \Lambda^n M_{\mathbb{C}} / \{-(a-1)dg \wedge \beta + g d\beta | \beta \in L((a-1)\Delta') \otimes \Lambda^{n-1} M_{\mathbb{C}}\}.$$

我们仍需转换分母：

$$x^{am}\{-(a-1)dg\wedge\beta+gd\beta|\beta\in L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-1}M_{\mathbb{C}}\}=df_\delta\wedge d(x^{(a-1)m}L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-2}M_{\mathbb{C}}.$$

证明：根据恒等式 $x^{am}(-(a-1)dg\wedge\beta+gd\beta)=-(a-1)d(x^mg)\wedge x^{(a-1)m}\beta+x^mgd(x^{(a-1)m}\beta)$，左端为

$$\left\{-(a-1)df_\delta\wedge\alpha+f_\delta d\alpha\middle|\alpha\in x^{(a-1)m}L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-1}M_{\mathbb{C}}\right\}.$$

包含映射 $\supseteq$：对于 $df_\delta\wedge d\gamma,\gamma\in x^{(a-1)m}L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-2}M_{\mathbb{C}}$，我们可以选取 $\alpha:=d\gamma\in x^{(a-1)m}L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-1}M_{\mathbb{C}}$，使得 $d\alpha=0$。

包含映射 $\subseteq$：由拟齐次性，存在一个向量场 $v\in\tilde{M}_{\mathbb{C}}$，使得 $v(f_\delta)=f_\delta$。对于 $\alpha\in x^{(a-1)m}L((a-1)\Delta')\otimes\Lambda^{n-1}M_{\mathbb{C}}$，于是我们有恒等式

$$-(a-1)df_\delta\wedge\alpha+f_\delta d\alpha=df_\delta\wedge(-(a-1)\alpha+i_vd\alpha)=-df_\delta\wedge di_v\alpha.$$

为说明这一点，我们使用 $df_\delta\wedge d\alpha=0$ 和 $L_v\alpha=(a-1)\alpha$，得到

$$f_\delta d\alpha=i_v(df_\delta)d\alpha=i_v(df_\delta\wedge d\alpha)+df_\delta\wedge i_vd\alpha=df_\delta\wedge i_vd\alpha$$

和 $(a-1)\alpha-i_vd\alpha=L_v\alpha-i_vd\alpha=di_v\alpha$。

我们考虑由 $\delta$ 生成的锥 $\sigma:=\mathrm{R}_+\delta$，并定义

$$\Omega_\sigma^p:=\left\{\varphi\in\Omega^p_{\mathbb{C}^n}(\log(x_1\dots x_n))_0\middle|supp(\varphi)\subseteq\sigma\right\}$$

具有显然的（Q −）分次（与$\deg f_\delta=1$相容）。对于此分次

$$\left(\Omega_\sigma^p\right)_b=x^{bm}L(b\Delta')\otimes\Lambda^pM_{\mathbb{C}}\quad(b\in\mathbb{N}).$$

因此，我们已由命题 3.5 证明：

**推论 3.6：**对于 $a\in\mathrm{N}^+$、$1\le r\le n-1$，如前所述，考虑 $\varphi\in\Omega_0^n$，其中 $supp(\varphi)\subseteq a\delta^\circ$，并设 $[\varphi]\neq0$ 属于 $(\Omega_\sigma^n)_a/df_\delta\wedge d(\Omega_\sigma^{n-2})_{a-1}$。则 $(\alpha,k)(\varphi)=(a-1,r-1)$.

### 3.2 非整数次数

此处我们考虑仍缺失的情形 $a\in\mathrm{Q}\backslash\mathrm{Z}$、$1\le r\le n$，以及 $\varphi=\varphi_1\in\Omega_0^n$，其中 $supp(\varphi)\subseteq a\delta^\circ$。我们证明推论 3.6 在作适当修改后仍然成立。

设 $e:=\min\{k\in\mathrm{N}^+|kv(\mathrm{C}\{x\})\subseteq\mathrm{Z}\}$ 以及 $F:=f(x)+y^e/e$，并取新变量 $y$。为了将已证结果应用于 $F$，我们考虑修正形式 $\phi:=\varphi\wedge\frac{dy}{y}y^c$，其中 $c\in\mathrm{N}^+$、$a+\frac{c}{e}=[a]+1$，它具有整数次数。

原始 $\varphi$ 的这一对 $(\alpha,k)$ 随后由 A. Varchenko 的一个定理得出。该定理更一般地讨论两个具有孤立奇点的函数的直和 $f(x)+g(y)$: $(\mathrm{C}^n\times\mathrm{C}^m,0)\to(\mathrm{C},0)$：考虑 $\omega\in\Omega_{\mathbb{C}^n,0}^n$，$\eta\in\Omega_{\mathbb{C}^m,0}^m$ 及其展开式

$$s[\omega]=\sum_{\alpha,k}A^{\omega}_{\alpha,k}t^{\alpha}(\ln t)^{k}/k!,\ s[\eta]=\sum_{\beta,l}A^{\eta}_{\beta,l}t^{\beta}(\ln t)^{l}/l!.$$

**引理 3.7：** 向量空间 $E_{f+g}=\Gamma(U,u^{*}H^{n+m-1}_{f+g})$（参见第 1 页）对于 $f+g$ 与 $f$ 和 $g$对应向量空间的张量积同构，而$\omega\wedge\eta$ 的展开式为

$$s[\omega\wedge\eta\,]=\sum_{\alpha,k}\sum_{\beta,l}\frac{1}{k!\,l!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial\alpha^{k}\partial\beta^{l}}(t^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)A^{\omega}_{\alpha,k}\otimes A^{\eta}_{\beta,l}$$

其中 $A_{\alpha,\ }{}^{\omega}{}_{k}\otimes A_{\beta,\ }{}^{\eta}{}_{l}\in E_{f}\otimes E_{g}\cong E_{f+g}$。（此处，$B$ 是贝塔函数。）

（参见 [AGV, 13.3.5]。）

将其应用于 $g(y)=y^{e}/e,\ \omega=\varphi,\ \eta=y^{c}dy/y$ ，其中

$$s[\omega]=t^{a-1}A^{\omega}_{a-1,r-1}\frac{(\ln t)^{r-1}}{(r-1)!}+\cdots,\ s[\eta]=t^{\frac{c}{e}-1}A^{\eta}_{c/e-1,0}+\cdots$$

我们得到

$$s[\omega\wedge\eta]=\frac{B(a,c/e)}{(r-1)!}t^{a+\frac{c}{e}-1}(\ln t)^{r-1}\,A^{\omega}_{a-1,r-1}\otimes A^{\eta}_{c/e-1,0}+\cdots,$$

在推论 3.6 中关于 $\phi=\omega\wedge\eta$ 的假设下，结论为

$$A^{\omega}_{a-1,r-1}\otimes A^{\eta}_{c/e-1,0}\neq 0,$$

特别是 $(\alpha,\ \ k)(\varphi)\ =(a-1,\ \ r-1)$。

最终结果中，我们希望将这一假设改写为关于 $\varphi$ 的假设。

面 $\delta$ 和锥 $\sigma$ 在 $\Gamma_{+}(F)\subseteq \mathrm{R}^{n+1}$ 中分别对应面 $\hat{\delta}\coloneqq conv(\delta\cup\{(0,e)\})$ 和锥 $\hat{\sigma}\coloneqq \mathrm{R}_{+}\hat{\delta}$。我们考虑带有显然分次的 $\Omega^{n+1}_{\hat{\sigma}}/dF_{\hat{\delta}}\wedge d\Omega^{n-1}_{\hat{\sigma}}$ ，它与 $\deg F_{\hat{\delta}}=1$ 相容。由于 $F_{\hat{\delta}}=f_{\delta}+y^{e}/e$ 是不变的，群 $\mathrm{Z}/\mathrm{Z}e$ 通过将变量 $y$ 乘以 $\zeta\coloneqq e^{2\pi i/e}$ ，作用于每个齐次分量 $(\Omega^{n+1}_{\hat{\sigma}}/dF_{\hat{\delta}}\wedge d\Omega^{n-1}_{\hat{\sigma}})_{b}$ ，并将其分解为特征子空间 $(\Omega^{n+1}_{\hat{\sigma}}/dF_{\hat{\delta}}\wedge d\Omega^{n-1}_{\hat{\sigma}})_{b,c}$，其特征值为 $\zeta^{c}c=0$、……、 $e-1$，对应算子 $\zeta$。$\zeta^{c}-$特征子空间由变量 $y$ 中次数为 $\equiv c\ mod\ e$ 的齐次元素生成。

**引理 3.8：**对于 $a\notin\mathrm{Z}$，$a=[a]+c/e,\ b=[a]+1$，映射

$$(\Omega^{n}_{\sigma}/df_{\delta}\wedge d\Omega^{n-2}_{\sigma})_{a}\to\left(\Omega^{n+1}_{\hat{\sigma}}/dF_{\hat{\delta}}\wedge d\Omega^{n-1}_{\hat{\sigma}}\right)_{b,c},\ [\varphi]\mapsto\left[y^{c}\frac{dy}{y}\wedge\varphi\right],$$

是双射。

证明：我们将用 $f,F$ 代替 $f_{\delta},F_{\hat{\delta}}$。

(1) 该映射是良定义的：

对于次数为 $a-1$ 的 $\varphi \in \Omega_\sigma^{n-2}$，有 $d\left(y^c \frac{dy}{y} \wedge \varphi\right) = -y^c \frac{dy}{y} \wedge d\varphi$，并且

$$y^c \frac{dy}{y} \wedge df \wedge d\varphi = (df + y^e \frac{dy}{y}) \wedge d(y^c \frac{dy}{y} \wedge \varphi).$$

(2) 该映射是满射：

右端由 $y^{c+se} \frac{dy}{y} \wedge \varphi, \varphi \in (\Omega_\sigma^n)_q, q + \frac{c}{e} + s = b, s \in \mathrm{N}$ 的剩余类生成。由于 $q \neq 0$，庞加莱引理成立，因此存在一个 $\psi \in (\Omega_\sigma^{n-1})_q$，使得 $d\psi = \varphi$。对于 $s > 0$，形式

$$y^{c+se} \frac{dy}{y} \wedge \varphi - \left(df + y^e \frac{dy}{y}\right) \wedge d\left(y^{c+(s-1)e}\psi\right) = (c + (s-1)e) y^{c+(s-1)e} \frac{dy}{y} \wedge df \wedge \psi)$$

现在只有 $y$ 中的次数 $c + (s-1)e$，我们对此使用归纳法。（注意，按次数可知 $df \wedge \varphi = 0$，下文也会用到类似的观察。）

(3) 该映射是单射：

我们对 $b$ 使用归纳法证明这一点，从 $b = 1$ 开始。设 $\varphi \in (\Omega_\sigma^n)_a, y^c \frac{dy}{y} \wedge \varphi = dF \wedge d\Psi$，其中 $\Psi \in \left(\Omega_{\hat{\sigma}}^{n-1}\right)_0$。该等式的右端在 $\zeta$ 的作用下保持不变，而左端属于特征值 $\zeta^c \neq 1$。因此，两端以及 $\varphi$ 都为零。

归纳步骤 $b-1 \to b$：令 $\varphi \in (\Omega_\sigma^n)_a, \Psi \in \left(\Omega_{\hat{\sigma}}^{n-1}\right)_{b-1}$ 和

(*) $$y^c \frac{dy}{y} \wedge \varphi = dF \wedge d\Psi.$$

我们将 $\Psi$ 按照 $y$分解为齐次分量：

$$\Psi = \sum_{s \geq 0} y^{c+se} \Psi_s, \Psi_s = C_s \Psi_s' + \frac{dy}{y} \wedge C_{s-1} \Psi_s'', C_s := \prod_{i=0}^{s} (c+ie)^{-1},$$

$C_{-1} := 1$，其中 $\Psi_s', \Psi_s''$ 只包含 $dx_i/x_i$。然后

$$d\Psi = \sum_{s \geq 0} y^{c+se} (\frac{dy}{y} \wedge C_{s-1}(\Psi_s' - d\Psi_s'') + C_s d\,\Psi_s').$$

由 (*) 可推出：

$$-\varphi = df \wedge (\Psi_0' - d\Psi_0'')$$

$$d\Psi_{s-1}' = df \wedge (\Psi_s' - d\Psi_s''), s \geq 1.$$

第二个方程表明，

$$-y^c \frac{dy}{y} \wedge d\Psi_0' = dF \wedge d\widetilde{\Psi}$$

with

$$\widetilde{\Psi} = \sum_{s\geq 1} y^{c+(s-1)e}(C_{s-1}\Psi'_s + \frac{dy}{y} \wedge C_{s-2}\Psi''_s),$$

$$d\widetilde{\Psi} = \sum_{s\geq 1} y^{c+(s-1)e}(\frac{dy}{y} \wedge C_{s-2}(\Psi'_s - d\Psi''_s) + C_{s-1} d\,\Psi'_s)$$

根据归纳假设，存在一个 $\psi \in (\Omega_\sigma^{n-2})_{a-2}$，满足

$$d\Psi'_0 = df \wedge d\psi.$$

于是 $d(\Psi'_0 + df \wedge \psi) = 0$，由庞加莱引理（在次数 $\neq 0$ 中成立），存在一个 $\alpha \in (\Omega_\sigma^{n-2})_{a-1}$，满足 $\Psi'_0 + df \wedge \psi = d\alpha$，从而得到 $\varphi = df \wedge (-\Psi'_0 + d\Psi''_0) = df \wedge (-d\alpha + d\Psi''_0)$，如所需。

借助这个引理，我们可以用统一的形式表述结果的两种情形：

定理 3.9：设 $(a \in \mathrm{N}^+, 1 \leq r \leq n-1)$ 或 $(a \in \mathrm{Q}^+\backslash\mathrm{Z},\ 1 \leq r \leq n)$。假设 $\varphi \in \Omega_0^n$, $supp(\varphi) \subseteq a\delta^\circ$ 且 $[\varphi] \neq 0$ 属于 $(\Omega_\sigma^n)_a / df_\delta \wedge d(\Omega_\sigma^{n-2})_{a-1}$。那么 $(\alpha, k)(\varphi) = (a-1, r-1)$。

**附录 1：微分形式复形**

在开集 $U = \{z \mid |z_i| < R\} \subseteq \mathrm{C}^n$ 上，令 $D_i$ 为除子$(z_i)$，并且对 $0 \leq k \leq n$，令 $D \coloneqq D_1 \cup \ldots \cup D_k$，其中包含映射 $j\colon U\backslash D \hookrightarrow U$ 为补集的包含映射。

利用从 $U$ 到 $D_i$ 的限制映射，定义

$$\Omega^\bullet_{(U,D)} \coloneqq \ker(\Omega^\bullet_U \to \bigoplus_{i=1}^k \Omega^\bullet_{D_i}),$$

$$\mathcal{E}^\bullet_{(U,D)} \coloneqq \ker(\mathcal{E}^\bullet_U \to \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{E}^\bullet_{D_i}).$$

形式 $p - \varphi = \sum_I \ \varphi_{IJ,J} \qquad dz_I \wedge d\bar{z}_J$ 属于 $\mathrm{E}^\bullet_{(U,D)}$，当且仅当 $\varphi_{IJ}|D_i = 0$ 对所有 $i \in [1,k]$ 和 $I, J$（其中 $i \notin I \cup J$）均成立。我们有按型分解

$$\mathcal{E}^p_{(U,D)} = \bigoplus_{r+s=p} \mathcal{E}^{rs}_{(U,D)} \text{ with } \mathcal{E}^{rs}_{(U,D)} = \mathcal{E}^{rs}_U \cap \mathcal{E}^p_{(U,D)}.$$

**引理 A.1.1：**外微分导出正合列

$$0 \to \Gamma j_! \mathbb{C}_{U\backslash D} \to \Gamma\Omega^\bullet_{(U,D)} \text{ and } 0 \to \Gamma j_! \mathbb{C}_{U\backslash D} \to \Gamma\mathcal{E}^\bullet_{(U,D)}.$$

证明：（对于E，对于 Ω 也是一样。）从通常的庞加莱引理（$k = 0$）出发，若令 $D' \coloneqq D_2 \cup \ldots \cup D_k$, $\widetilde{D} \coloneqq D_1 \cap D'$，并利用包含映射 $j'\colon U\backslash D' \hookrightarrow U$, $\tilde{\jmath}\colon D_1\backslash\widetilde{D} \hookrightarrow D_1$ 构造出图表，则通过对 $k$ 归纳即可完成证明

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \Gamma\mathcal{E}^\bullet_{(U,D)} & \to & \Gamma\mathcal{E}^\bullet_{(U,D')} & \to & \Gamma\mathcal{E}^\bullet_{(D_1,\widetilde{D})} \to 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 \to \Gamma j_! \mathbb{C}_{U\backslash D} & \to & \Gamma j'_! \mathbb{C}_{U\backslash D'} & \to & \Gamma\tilde{\jmath}_! \mathbb{C}_{D_1\backslash\widetilde{D}} \to 0 \end{array}$$

根据归纳假设，该图表的各行正合，且有两列正合。

（下行中的项是 $U\backslash D$ 、$U\backslash D'$ 和 $D_1\backslash\widetilde{D}$ 上局部常值函数的向量空间，其支集分别在 $U$ 、$U$ 和 $D_1$ 中闭。根据 $D$ 、$D'$ 和 $\widetilde{D}$ 是否为空，它们分别为0或C。）

**引理 A.1.2：**该序列

$$0 \to \Omega^p_{(U,D)} \to \mathcal{E}^{p,0}_{(U,D)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{E}^{p,1}_{(U,D)} \to \cdots$$

是正合的。

证明：由 Dolbeaut 引理（$k=0$）并对 $k$ 进行归纳，利用短正合列可得

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to \Omega^p_{(U,D)} & \to & \Omega^p_{(U,D')} & \to & \Omega^p_{(D_1,\widetilde{D})} \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to \mathcal{E}^{p,\bullet}_{(U,D)} & \to & \mathcal{E}^{p,\bullet}_{(U,D')} & \to & \mathcal{E}^{p,\bullet}_{(D_1,\widetilde{D})} \to 0 \end{array}$$

其中 $D' = D_2 \cup \ldots \cup D_k$、 $\widetilde{D} = D_1 \cap D'$。

对于两个除子 $D = D_1 \cup \ldots \cup D_k$、 $Z = D_l \cup \ldots\ D_n$ $(0 \le k < l \le n)$，我们定义：

$$\mathcal{E}^p_{(U,D)}(*Z) \coloneqq \mathcal{E}^p_{(U,D)} \otimes \mathcal{O}(*Z),$$

$$\mathcal{E}^p_{(U,D)}(\log Z) \coloneqq \mathcal{E}^p_{(U,D)}(*Z) \cap \mathcal{E}^p_U(\log Z).$$

我们考虑紧子集 $K \coloneqq \{z \mid |z_i| \le \rho\} \subseteq U$。

**引理 A.1.3：** 设 $\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^p_{(U,D)}(*Z))$ 满足 $d\varphi \in \Gamma(K, \Omega^{p+1}_{(U,D)}(*Z))$ 。

(1) $\exists\, \psi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p-1}_{(U,D)}(*Z))$ 满足 $\varphi + d\psi \in \Gamma(K, \Omega^p_{(U,D)}(*Z))$。
(2) $\exists\, \xi \in \Gamma(K, \Omega^p_{(U,D)}(*Z))$ 满足 $d\xi = d\varphi$。

证明：在 (2) 中取 $\xi = \varphi + d\psi$。

(1)：我们按照 [Ba3, 引理 1] 中的方法论证。考虑 $\varphi = \alpha/f$ ，其中 $\alpha \in \Gamma(K, \mathrm{E}^p_{(U,D)})$ 和 $f = z_l^{r_l} \ldots z_n^{r_n}$，并考察按型分解 $\alpha = \alpha_{i,p-i} + \cdots + \alpha_{p,0}$ $(i \ge 0)$。由

$$d\varphi = \frac{d\alpha}{f} - \frac{df \wedge \alpha}{f^2} \in \Gamma(K, \Omega^{p+1}_{(U,D)}(*Z))$$

我们看到 $\bar{\partial}\alpha_{i,\ p-i} = 0$。如果 $i < p$，根据 A.1.2，存在 $\beta \in \Gamma(K,\ \mathrm{E}^{i}_{(U,D),\ }{}^{p-i-1})$ ，使得 $\bar{\partial}\beta = \alpha_{i,\ p-i}$。于是

$$\varphi - d\frac{\beta}{f} = \frac{\alpha - d\beta}{f} + \frac{df \wedge \beta}{f^2}$$

属于 $(i+1,\ p-i-1)+(i+2,\ p-i-2)+\cdots$，断言由归纳法得证 .

**推论 A.1.4:**

$$\Gamma(K,\Omega^{\bullet}_{(U,D)}(*Z)) \xrightarrow{\approx} \Gamma(K,\mathcal{E}^{\bullet}_{(U,D)}(*Z)).$$

**引理 A.1.5:** 设 $\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p}_{(U,D)}(*Z))$ 满足 $d\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p+1}_{(U,D)}(\log Z))$。

(1) $\exists\, \psi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p-1}_{(U,D)}(*Z))$ 满足 $\varphi + d\psi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p}_{(U,D)}(\log\ Z))$。
(2) $\exists\, \xi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p}_{(U,D)}(\log\ Z))$ 满足 $d\xi = d\varphi$。

相应的结果对全纯形式也成立。

证明：(2)由$\xi = \varphi + d\psi$的选取显然成立。

(1)：考虑 $\varphi = \alpha/f$ with $\alpha \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p}_{(U,D)})$ and $f = z_l^{r_l} \ldots\ z_n^{r_n}$。在 $r_l$ 的情形下，...， $r_n \leq 1$ 无须证明，因为半亚纯形式是对数型的，当且仅当该形式本身及其导数都可以表示为分母为 $z_l \ldots z_n$ ([Gr-S，第 73] 页) 的形式。如果 $r_l \geq 2$ and $r_{l+1}$，...， $r_n \geq 1$ （不失一般性）我们构造一个形式 $\tilde{\psi} \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p-1}_{(U,D)}(*Z))$，使得在 $\varphi + d\tilde{\psi}$ 中只出现分母 $z_l^{-1}f$。于是该断言可归纳地得出。我们有 $d\varphi = \frac{d\alpha}{f} - \frac{df}{f} \wedge \frac{\alpha}{f}$，并且根据假设，至少有 $f d\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}^{p+1}_{U})$，即

$$\frac{df}{f} \wedge \alpha = \sum_{i=l}^{n} r_i \frac{dz_i}{z_i} \wedge \alpha \in\ \Gamma(K, \mathcal{E}^{p+1}_{U}).$$

由 A.1.8 可从中得出 $r_i \frac{dz_i}{z_i} \wedge \alpha \in\ \Gamma(K, \mathrm{E}^{p+1}_{U})\ \forall\ i = l,\ \ldots,\ n$。对于向量场 $w = \frac{\partial}{\partial z_l}$, $v = z_l w$ 以及内乘 $i_w, i_v$ ，我们有以下关系

$$di_v\alpha = dz_l \wedge i_w\alpha + z_l di_w\alpha = -i_w(dz_l \wedge \alpha) + \alpha + z_l di_w\alpha,$$

$$\frac{df}{f} \wedge i_v\alpha = -i_v\left(\frac{df}{f} \wedge \alpha\right) + r_l\alpha \ \text{(since } i_v\frac{df}{f} = r_l\text{)},$$

so

$$di_v\varphi = d\left(\frac{i_v\alpha}{f}\right) = \frac{1}{f}\left(di_v\alpha - \frac{df}{f} \wedge i_v\alpha\right) = \frac{1}{f}\left((1-r_l)\alpha + z_l\beta\right),$$

对于 $\beta \coloneqq di_w\alpha + i_w\left(\frac{df}{f} \wedge \alpha\right) - i_w(\frac{dz_l}{z_l} \wedge \alpha)\ \in\ \Gamma(K, \mathrm{E}^{p}_{(U,D)})$。因此，$\tilde{\psi} \coloneqq (r_l - 1)^{-1} i_v\varphi$ 是合适的。这个证明对全纯形式也成立。

**推论 A.1.6：**

$$\Gamma(K,\Omega^{\bullet}_{(U,D)}(\log Z)) \xrightarrow{\approx} \Gamma(K,\Omega^{\bullet}_{(U,D)}(*Z)),$$

$$\Gamma(K,\mathcal{E}^{\bullet}_{(U,D)}(\log Z)) \xrightarrow{\approx} \Gamma(K,\mathcal{E}^{\bullet}_{(U,D)}(*Z)).$$

**A.1.7：** 对于光滑函数 $f \in C^\infty(U)$，我们有以下等价关系：

$$f/z_1 \in C^\infty(U) \Leftrightarrow \forall\, k \geq 0\colon \bar{D}^k f(0, z_2, \ldots, z_n) = 0, \text{ where } \bar{D} = \partial/\partial \bar{z}_1.$$

证明：

⇒：$f = z_1 g$ 蕴含 $\bar{D}^k f = z_1 \bar{D}^k g$。

⇐：根据泰勒公式，对于任意 $N$，存在一个表示 $f = f_1 + f_2$，使得

$$f_1 = \sum_{i+j\leq N} a_{ij}(z') z_1^i \bar{z}_1^j, \quad f_2 = \sum_{i+j=N+1} a_{ij}(z) z_1^i \bar{z}_1^j$$

在第一个和中，$z' = (z_2, \ldots\ldots, z_n)$ 以及 $i \geq 1$ 根据假设成立。由 $\bar{z}_1^{N+1}/z_1 \in C^{N-1}(U)$ 可得结论。

**A.1.8：** 假设光滑函数 $f_1, \ldots\ldots, f_n, g \in C^\infty(U)$ 满足关系 $\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{z_i} = g$。则 $f_i/z_i \in C^\infty(U)\ \forall\, i = 1, \ldots\ldots, n$。

证明：由 $p_i \coloneqq z_1 \ldots\ldots \hat{z}_i \ldots\ldots z_n$，$p = z_1 \ldots\ldots z_n$，等式 $p_i \bar{D}_i^k f_i = -\sum_{j\neq i} p_j \bar{D}_i^k f_j + p \bar{D}_i^k g$ 表明，对于 $z_i = 0$，有 $\bar{D}_i^k f_i = 0$。

A.1.6 的一个变体如下：

**引理 A.1.9：**

$$\Gamma(K, \Omega_U^\bullet(\log D \cup Z)) \xrightarrow{\approx} \Gamma(K, \Omega_U^\bullet(\log D)(*Z)),$$

$$\Gamma(K, \mathcal{E}_U^\bullet(\log D \cup Z)) \xrightarrow{\approx} \Gamma(K, \mathcal{E}_U^\bullet(\log D)(*Z)).$$

证明：以光滑情形作为模板。考虑 $\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^p(\log\ D)(*Z))$，其中 $d\varphi \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^{p+1}(\log\ D \cup Z))$。我们修改 A.1.5 的证明 (1)，以找到一个 $\psi \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^{p-1}(\log D)(*Z))$，其中 $\varphi + d\psi \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^p(\log\ D \cup Z))$。令 $\varphi = \alpha/f$，其中 $\alpha \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^p(\log\ D))$，$f = z_l^{r_l} \ldots z_n^{r_n}, r_{l+1}, \ldots, r_n \geq 1, r_l \geq 2$（否则 $\varphi$ 将是对数型的）。如前所述，我们可以看到 $\sum_{i=l}^n r_i \frac{dz_i}{z_i} \wedge \alpha \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^{p+1}(\log D))$ 和 $r_i \frac{dz_i}{z_i} \wedge \alpha \in \Gamma(K, \mathrm{E}_U^{p+1}(\log\ D))$（$1 \leq i \leq n$）。于是

$$\beta = d i_w \alpha + i_w \left(\frac{df}{f} \wedge \alpha\right) - i_w\left(\frac{dz_l}{z_l} \wedge \alpha\right) \in \Gamma(K, \mathcal{E}_U^p(\log D)),$$

证明的其余部分保持不变。

对于沿 $Z$ 存在任意奇点的情形，我们也有类似的结果。令 $j\colon\ U\backslash Z \hookrightarrow U$ 为包含映射。

**引理 A.1.10：**

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(K,\Omega^{\bullet}_{(U,D)}(\log Z)) & \overset{\approx}{\to} & \Gamma(K,j_*\Omega^{\bullet}_{(U\backslash Z,D\backslash Z)}) \\ \downarrow\approx & & \downarrow\approx \\ \Gamma(K,\mathcal{E}^{\bullet}_{(U,D)}(\log Z)) & \overset{\approx}{\to} & \Gamma(K,j_*\mathcal{E}^{\bullet}_{(U\backslash Z,D\backslash Z)}) \end{array}$$

证明：由 A.1.4 和 A.1.6 可知，左列准同构。由 A.1.1 以及 $U\backslash Z$ 是 Stein 空间这一事实可知，右列准同构。在第一行中，我们可以借助正合列化归为情形 $D=\emptyset$

$$0\to\Omega^{\bullet}_{(U,D)}(\log Z)\to\Omega^{\bullet}_{(U,D')}(\log Z)\to\Omega^{\bullet}_{(D_1,\widetilde{D})}(\log\tilde{Z})\to 0$$

($D'=D_2\cup\ldots\ldots\cup D_k$, $\widetilde{D}=D'\cap D_1$, $\tilde{Z}=Z\cap D_1$) 并应用 $\Gamma(K,.)$ 和 $\Gamma(K,j_*.)$。在这种情况下，通过展开为 Laurent 级数可知，这两个项的 $p-$ 次上同调的基为 $(2\pi i)^{-p}(dz)_I/z_I$, $I\subseteq[l,N]$, $|I|=p$。

**附录 2：环面嵌入中的超曲面**

设 $M\cong \mathrm{Z}^n, n\geq 1$，其对偶格为 $N\coloneqq Hom(M,\mathrm{Z})$，$T\coloneqq Spec\ \mathrm{C}[M]$, $g\in\mathrm{C}[M]$，且 $\Delta\coloneqq\Delta(g)=conv\big(supp(g)\big)\subseteq M_{\mathbb{R}}\coloneqq M\otimes\mathrm{R}$为牛顿多面体。

设 $\Sigma$ 为 $N_{\mathbb{R}}\coloneqq N\otimes\mathrm{R}$ 上的一个扇，使得支撑函数 $s_\Delta(a)\coloneqq min\{\langle a,x\rangle\ |x\in\Delta\}$ 在所有 $\sigma\in\Sigma$ 上都是线性的（若 $\dim\Delta=n$，则存在这样的最粗扇 $\Sigma_\Delta$）。设 $X=X_\Sigma$ 为相应的紧环面嵌入（若 $\Sigma=\Sigma_\Delta$，则它是射影的）。

那么，除子 $V=(g)$ 在 $T\subseteq X$ 上的闭包 $\bar{V}$ 仍是一个超曲面（即有效 Cartier 除子），且不包含 $X$ 的任何层。

$X$ 的各层与 $\bar{V}$ 的交集是其中的光滑超曲面，当且仅当 $g$ 是整体非退化的，也就是说，对于 $\Delta$ 的所有面 $\delta$ （包括 $\Delta$），Laurent 多项式

$$g_\delta\coloneqq\sum_{m\in\delta}g_m\,x^m,\ \text{where}\ g=\sum_{m\in M}g_m\,x^m,$$

在 $T$ 上定义一个光滑超曲面。在这种情况下，我们称 $Z=\bar{V}\subseteq X$ 为非退化超曲面。

现在假设 维数$\Delta=n,\Sigma$ 是正则的，即 $X$ 是光滑的，且 $Z=\bar{V}\subseteq X$ 非退化。那么 $D\cup Z, D\coloneqq X\backslash T$ 是一个具有正规交叉的除子。我们作如下分解：$(g)=Z-C$, $|C|\subseteq D$。层 $\mathcal{O}(C)$ 是一个 $T-$不变的（可逆）分式理想，其阶函数为 $ord\ \mathcal{O}(C)=s_\Delta$。

令 $j$: $X\backslash(D\cup Z)\hookrightarrow X$、$j_0$: $X\backslash Z\hookrightarrow X$ 为包含映射，而 $c_X\coloneqq\{A|A\subseteq X$ 紧致$\}$、$\phi\coloneqq c_X\cap(X\backslash Z)|T\backslash V$ 为支撑族。

**引理 A.2.1：** 对于所有 $p\geq 0$，我们有：

$$H^p(T\backslash V) = \mathbb{H}^p(\Omega_X^\bullet(\log D)(*Z)) = H^p\,\Gamma(X, \Omega_X^\bullet(\log D)(*Z)),$$

$$H_\phi^p(T\backslash V) = \mathbb{H}^p(\Omega_{(X,D)}^\bullet(*Z)) = H^p\,\Gamma(X, \Omega_{(X,D)}^\bullet(*Z)).$$

证明：左侧等式可按照第 2.2.2 节中的方法由下式得到

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(*Z) \approx \Omega_X^\bullet(\log D \cup Z) \approx \mathcal{E}_X^\bullet(\log D \cup Z) \approx j_*\mathcal{E}_{X\backslash(D\cup Z)}^\bullet$$

(A.1.9、A.1.10)，分别为 $\Omega_{(X,D)}^\bullet(*Z) \approx j_{0*}j_0^{-1}\mathrm{E}_{(X,D)}^\bullet$ (A.1.6、A.1.10)。因此只需证明，$\Omega_X^\bullet(\log D)(*Z)$ 和 $\Omega_{(X,D)}^\bullet(*Z)$ 是无上同调的。若应用

$$H^i\big(X, \mathcal{F}(*Z)\big) = \varinjlim_{l\geq 0} H^i\,(X, \mathcal{F}(lZ))$$

紧空间上的凝聚层的公式（参见 [Go，第 194] 页），则可由下式得到：

**引理 A.2.2：**（[TE], [Da 1]）设 $n \geq 1$。

a) $H^0(X, \mathcal{O}(lC)) = L(l\Delta)$，$l \geq 0$；$H^n(X, \mathcal{O}(lC)) \cong L(l\Delta^\circ)$，$l < 0$；$H^i(X, \mathcal{O}(lC)) = 0$，其余情况下；b) $H^0(X, \mathcal{O}(lC - D)) = L(l\Delta^\circ)$，$l > 0$；$H^n(X, \mathcal{O}(lC - D)) \cong L(l\Delta)$，$l \leq 0$；$H^i(X, \mathcal{O}(lC - D)) = 0$，其余情况下；（使用记号 $L(A) := \{g \in \mathrm{C}[M] | supp(g) \subseteq A\}$ 表示 $A \subseteq \mathrm{R}^n$）。c) $\Omega_X^p(\log D) \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^p M$，特别地：$\omega_X = \Omega_X^n = \mathcal{O}(-D) \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^n M$；$\Omega_{(X,D)}^p = \Omega_X^p(\log D)(-D) \cong \omega_X \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^p M$。

证明：设$\mathrm{h} = s_\Delta: |\Sigma| \to \mathrm{R}$为$\mathcal{O}(C)$的阶函数。

a): 根据[TE], [Da，1] 的第$m$ −个（$m \in M$）分量$H^i(X, \mathcal{O}(lC))$可以计算为 s

$$H^i(X, \mathcal{O}(lC))(m) \cong H^i_{Z_m}|\Sigma| \text{ with } Z_m := \{a \in |\Sigma| | m(a) \geq lh(a)\}$$

更明确地说，

$$H^0_{Z_m}|\Sigma| = \ker(H^0|\Sigma| \to H^0(|\Sigma|\backslash Z_m) \cong \begin{cases}\mathbb{C}, Z_m = |\Sigma| \\ 0, \text{ else}\end{cases}$$

$$H^i_{Z_m}|\Sigma| = \widetilde{H}^{i-1}(|\Sigma|\backslash Z_m),\ i \geq 1, \text{ (reduced cohomology)}.$$

在$l < 0$的情况下，$Z_m$ 是一个顶点为……的凸锥，并且

$$|\Sigma|\backslash Z_m \simeq \begin{cases}point, Z_m \neq \{0\} \Leftrightarrow -m \notin -l\Delta^\circ \Leftrightarrow m \notin l\Delta^\circ \\ S^{n-1},\ Z_m = \{0\} \Leftrightarrow m \in l\Delta^\circ\end{cases}.$$

这些断言由此得出。

b) 不借助 Serre 对偶的直接证明如下：对于 $m \in M$，我们设

$$A \coloneqq A_m \coloneqq \{a \in |\Sigma| | m(a) \geq ord\, \mathcal{O}(lC - D)(a)\}$$

$$B \coloneqq B_m \coloneqq \{a \in |\Sigma| | m(a) > lh(a)\} \cup \{0\}.$$

Then

$$H^i(X, \mathcal{O}(lC - D))(m) \cong H^i_{A_m}|\Sigma|.$$

对于 $\sigma \in \Sigma$，有：$H^0(\sigma\backslash A) = H^0(\sigma\backslash B)$，$H^i(\sigma\backslash A) = H^i(\sigma\backslash B) = 0$，$i > 0$，这是因为

$$\sigma \subseteq A \Leftrightarrow m \geq lh + ord\, \mathcal{O}(-D) \text{ on } \sigma \Leftrightarrow m > lh \text{ on } \sigma\backslash\{0\} \Leftrightarrow \sigma \subseteq B$$

（这里我们用到了，对于 $ord\, \mathcal{O}(-D)(a) = 1$，$\sigma$ 的所有本原边向量 $a$ 都成立。）

$H^i(|\Sigma|\backslash A)$ 和 $H^i(|\Sigma|\backslash B)$ 分别是无环覆盖 $(\sigma\backslash A)_{\sigma\in\Sigma}$ 和$(\sigma\backslash B)_{\sigma\in\Sigma}$ 的 Čech 上同调（[Go，第 209] 页），因此二者相等。于是 $H^i_A|\Sigma|$ 和 $H^i_B|\Sigma|$ 也相等，我们可以计算 $H^i_B|\Sigma|$。

在 $l > 0$ 的情形下，集合 $|\Sigma|\backslash B_m$ 是一个顶点不含 $\{0\}$ 的凸锥，并且

$$H^0_{B_m}|\Sigma| = \ker(H^0|\Sigma| \to H^0(|\Sigma|\backslash B_m)) \cong \begin{cases} \mathbb{C},\ B_m = |\Sigma| \Leftrightarrow m \in l\Delta^\circ \\ 0\ else \end{cases}$$

$$H^i_{B_m}|\Sigma| = \tilde{H}^{i-1}(|\Sigma|\backslash B_m) = 0, i \geq 1.$$

在 $l \leq 0$ 的情形下，$B_m$ 是一个以 $\cup\{0\}$ 为顶点的开凸锥，或者是一个开半空间 $\cup\{0\}$，并且有 $B_m = \{0\} \Leftrightarrow -m \in -l\Delta \Leftrightarrow m \in l\Delta$。这表明

$$H^0_{B_m}|\Sigma| = 0,\ \ H^i_{B_m}|\Sigma| \cong \begin{cases} \mathbb{C}, m \in l\Delta,\ i = n \\ 0\ else \end{cases} \text{ for } i \geq 1,$$

如所要求。

c) 关于 $\Omega^p_X(\log D)$ 的公式在 $X$ 的环面图表上很容易验证，参见 [Da 1], $\Omega^p_{(X,D)} = \Omega^p_X(\log D)(-D)$ 根据定义成立。

**引理 A.2.3：** 外微分 $d$: $\Omega^p_X(\log D)(lZ) \to \Omega^{p+1}_X(\log D)((l+1)Z)$ 诱导出$\mathcal{O}_X$ –线性正合列

$$0 \to \Omega^0_X(\log D) \otimes \mathcal{N} \to \cdots \to \Omega^n_X(\log D) \otimes \mathcal{N}^{n+1} \to 0,$$

$$0 \to \Omega^0_{(X,D)} \otimes \mathcal{N} \to \cdots \to \Omega^n_{(X,D)} \otimes \mathcal{N}^{n+1} \to 0,$$

其中 $\mathcal{N} = \mathcal{O}(Z) \otimes \mathcal{O}_Z$ 是法丛。

证明：设 $U \subseteq X$ 是一个开集，配备坐标系 $z, z_2, \ldots, z_n$，使得 $D \cup Z|U$ 是坐标超曲面的并集，且 $Z|U = (z)$。于是（对于不属于 $\Omega^{l-1}_U(\log D)$ 的 $\alpha$，$l \geq 1$）

$$d\left(\frac{\alpha}{z^l}\right)=\frac{1}{z^l}\left(-l\frac{dz}{z}\wedge\alpha+d\alpha\right)\equiv -l\frac{dz}{z}\wedge\frac{\alpha}{z^l}\ mod\ (\frac{1}{z^l}\Omega^l(\log D)).$$

此外，$w=\frac{\partial}{\partial z}$ 是一个向量场，满足 $i_w\Omega_U^p(\log D)\subseteq\Omega_U^{p-1}(\log D)$，对于 $v=zw$，我们有

$$-\left(\frac{1}{l}i_v d+\frac{1}{l-1}di_v\right)\left(\frac{\alpha}{z^l}\right)\equiv i_v\left(\frac{-l}{-l}\frac{dz}{z}\wedge\frac{\alpha}{z^l}\right)+\left(\frac{-(l-1)}{-(l-1)}\frac{dz}{z}\wedge\frac{i_w\alpha}{z^{l-1}}\right)\ mod\ (\frac{1}{z^{l-1}})\equiv\frac{\alpha}{z^l},$$

分母为 $l-1$ 的项在 $l=1$ 时应省略。这表明第一个序列是正合的。第二个序列是将第一个序列与 $\mathcal{O}(-D)$ 作张量积所得，并且仍然正合。

当然，与 $\mathcal{N}^r, r\in$Z 作张量积，或者将微分乘以非零常数，也不会影响这些序列的正合性。

**引理 A.2.4：**截面模的序列（对于 $r\in$Z）

$$0\to\Gamma(\mathrm{X},\Omega_X^0(\log D)\otimes\mathcal{N}^{-r})\to\cdots\to\Gamma(\mathrm{X},\Omega_X^n(\log D)\otimes\mathcal{N}^{-r+n})\to 0,$$

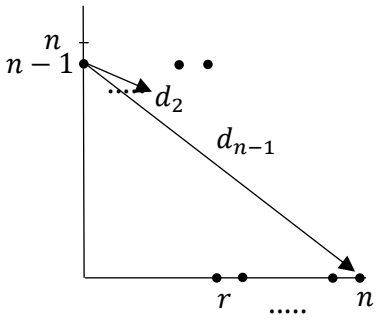
$$0\to\Gamma(\mathrm{X},\Omega_{(X,D)}^0\otimes\mathcal{N}^{1-r})\to\cdots\to\Gamma(X,\Omega_{(X,D)}^n\otimes\mathcal{N}^{1-r+n})\to 0,$$

除最后一项外，这些序列处处正合；若 $r<0$，则处处正合。

证明：底层层序列 $\mathcal{S}^\bullet$（微分由 $\frac{dz}{z}\wedge$ 给出，其中 $z$ 是 $Z$ 的一个局部方程）是零对象的分解。因此，考虑超上同调的第一个谱序列，可得：

$$'E_1^{pq}=H^q(X,\mathcal{S}^p),\ 'E_\infty^{pq}=0\ \text{for all}\ p,q.$$

由引理 A.2.2（连同序列 $0\to\mathcal{O}((l-1)Z)\to\mathcal{O}(lZ)\to\mathcal{N}^l\to 0$ 和维数 $Z=n-1$），只有标记的 $'E_1$ –项可能非零。




记住 $d_s$ 的次数为 $(s,\ 1-s)$，图表显示：

$$'E_2^{p,0}='E_\infty^{p,0}=0\ \text{for}\ p\neq n,\ \text{resp. for}\ p\ \text{arbitrary if}\ r<0,$$

如所要求的那样。

为简化记号，我们用$\Omega^\bullet$表示复形$\Omega_X^\bullet(\log D)$，相应地表示$\Omega_{(X,D)}^\bullet$，并用$K^\bullet$表示$\Omega^\bullet(*Z)$。我们通过子复形$F^pK^\bullet$定义$K^\bullet$的一个滤子：

$$0 \to \Omega^p(Z) \to \Omega^{p+1}(2Z) \to \cdots.$$

在图表中

$$0 \to \Gamma(F^{p+1}K^\bullet) \to \Gamma(F^pK^\bullet) \to \Gamma(Gr^pK^\bullet) \to 0,$$

根据 A.2.2，这些行是正合的，且右列以

$$0 \to \Gamma(\Omega^p(Z)) \xrightarrow{\bar{d}} \Gamma(\Omega^{p+1} \otimes \mathcal{N}^2) \to \cdots.$$

同样，$\Gamma(\Omega^p(Z))/\Gamma(\Omega^p) \subseteq \Gamma(\Omega^p \otimes \mathcal{N})$，等号成立当且仅当 $\Omega^p = \Omega_X^p(\text{对数 } D)$ 或 $n \geq 2$。

根据 A.2.4，我们有

$$H^q\Gamma(Gr^pK^\bullet) = 0 \quad \text{for } p < q < n \text{ or } (p < q, \text{ if } p \leq 0, \text{ resp. } p < 0).$$

无论如何，连接算子 $\delta$：$H^q\Gamma(Gr^pK^\bullet) \to H^{q+1}\Gamma(F^{p+1}K^\bullet)$ 为零，因为（在上述序列中）对于 $p < n$，核 $\bar{d} = \Gamma(\Omega^p)$，且 $d\Gamma(\Omega^p) = 0$。

我们得到：

**引理 A.2.5：**典范映射

$$H^q\Gamma(X, F^{p+1}\Omega^\bullet(*Z)) \to H^q\Gamma(X, F^p\Omega^\bullet(*Z)),$$

其中 $\Omega^\bullet = \Omega_X^\bullet(\log D)$（分别为 $\Omega_{(X,D)}^\bullet$）对所有 $p, q \in \mathbb{Z}$ 都是单射；而对 $p < q < n$ 或（$q = n, p \leq 0$, 分别为 $p < 0$）是满射。

**推论 A.2.6：**对于 $l \in \mathbb{N}^+$，有如下包含映射

$$\frac{\Gamma(X,\Omega^n(\log D)(lZ))}{d\Gamma(X,\Omega^{n-1}(\log D)((l-1)Z))} \subseteq H^n(T\backslash V) \quad \text{(with equality for } l \geq n),$$

$$\frac{\Gamma(X,\Omega_{(X,D)}^n(lZ))}{d\Gamma(X,\Omega_{(X,D)}^{n-1}((l-1)Z))} \subseteq H_\phi^n(T\backslash V) \quad \text{(with equality for } l > n).$$

这些滤子的商（在 $n \geq 2$ 的情况下）正是 A.2.4 中的第 $n-$ 上同调，且易于计算。

最后，我们需要给出引理 3.3 和 3.4 的证明。

与前面一样，令 $i^*: H^{n-1}T \to H^{n-1}V$ 为由包含映射诱导的映射，$c: H_c^{n-1}V \to H^{n-1}V$ 为典范映射，且 $R_c: H_\phi^n(T\backslash V) \to H_c^{n-1}V$ 为留数映射。我们需要证明 $i^*$ 是单射。

我们有表示 $H^kT = \Gamma(X, \Omega^k(\log D)) = \Lambda^k M_{\mathbb{C}}$ 和 $\Gamma(X, \Omega^n(\log D)(Z)) = g^{-1}L(\Delta) \otimes \Lambda^n M_{\mathbb{C}} \subseteq H^n(T\backslash V)$（根据 A.2.2、A.2.6）。我们可以构造一个交换图表：

$$\begin{array}{ccc} & & H^{n-1}(T) \\ & & dg/g \downarrow \quad \searrow i^* \\ H^n(T) & \to & H^n(T\backslash V) \xrightarrow{R} H^{n-1}(V) \end{array}$$

由于维数 $\Delta = n$，导数 $x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1}$，…， $x_n \frac{\partial g}{\partial x_n}$和 $g$ ($x_1$，…， $x_n$ 是 $T$ 的特征基）在 $L(\Delta)$ 中线性无关。这意味着，单射映射的像的交集

$$\Lambda^n M_{\mathbb{C}} \xrightarrow{g} L(\Delta) \otimes \Lambda^n M_{\mathbb{C}} \xleftarrow{dg\wedge} \Lambda^{n-1} M_{\mathbb{C}}$$

为零，因此我们已经证明：

**引理 A.2.7：**限制 $i^*$： $H^{n-1}T \to H^{n-1}V$ 是单射。

**引理 A.2.8：**对于 $n \geq 2$ ，有 $image(c) \cap image(i^*) = 0$ 属于 $H^{n-1}(V)$；对于 $n = 1$ ，有 $image(R_c) \cap image(i^*) = 0$ 属于 $H^0(V) = H_c^0(V)$。

A.2.8 的证明：首先假设 $n \geq 2$。我们考虑 Σ中的本原边向量集合 $E$ 、其中属于 $\Sigma_\Delta$的子集 $E_0$ ，以及相伴除子 $D(e)$ 和嵌入环面 $T_e \subseteq D(e), e \in E$。对于 $e \in E_0$， $Z \cap D(e) \subseteq D(e)$ 是一个非退化超曲面，其牛顿多面体（本质上）是 Δ 中对应于 $e$的面，其维数为 $n - 1 \geq 1$。令 $V_e = Z \cap T_e$。环面 $T_e$ 是除子 $D(e)$ 在 $(X \setminus \cup_{e' \in E} D(e'))$, $_{e' \neq e}$上的限制

$$T_e = (X \setminus \cup_{\substack{e' \in E, \\ e' \neq e}} D(e')) \cap D(e),$$

且补集为 $T$。在下图中，我们取相应的留数映射：

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(T) & \xrightarrow{(R_{T_e})} & \bigoplus_{e \in E_0} H^{n-2}(T_e) \\ i^* \downarrow & & \downarrow (i|V_e)^* \\ H_c^{n-1}(V) \xrightarrow{c} H^{n-1}(V) & \xrightarrow{(R_{V_e})} & \bigoplus_{e \in E_0} H^{n-2}(V_e) \end{array}$$

根据 A.2.7，各列都是单射。映射 $(R_{T_e})$ 由 $(i_e)$: $\Lambda^{n-1} M_{\mathbb{C}} \to \bigoplus_{e \in E_0} \Lambda^{n-2}$ 核 $e$ 描述，且为单射（注意 维数 $\Delta = n \geq 2$）。复合映射 $\left(R_{V_e}\right) \circ c$ 为零，因为 $c$ 可经由限制 $H^{n-1}(Z) \to H^{n-1}(V)$分解。

这证明了第一个断言。关于 $n = 1$ 的第二个断言，源于亚纯 1 –形式在 $X$ 上的留数之和为零这一事实。

**引理 A.2.9：**典范映射的像的交集

$$H^n(T) \to H^n(T \setminus V) \leftarrow H_\phi^n(T \setminus V)$$

对于 $n \geq 1$ 为零。

证明：我们有一个留数映射图表

$$\begin{array}{ccc} H^n(T) & \xrightarrow{(R_{T_e})} & \bigoplus_{e\in E_0} H^{n-1}(T_e) \\ j^*\downarrow & & \downarrow (j|T_e\backslash V_e)^* \\ H^n_\phi(T\backslash V) \to H^n(T\backslash V) & \xrightarrow{(R_{T_e}|T\backslash V)} & \bigoplus_{e\in E_0} H^{n-1}(T_e\backslash V_e) \end{array}$$

其中各列根据 A.2.6 都是单射。映射 $(R_{T_e})$ 由 $(i_e)$: $\Lambda^n M_{\mathbb{C}} \to \bigoplus_{e\in E_0} \Lambda^{n-1}$ 核 $e$ 描述，且也是单射。再次，底行中的复合映射为零，因为左侧映射可通过限制 $H^n(X\backslash Z) \to H^n(T\backslash V)$ 分解。

**参考文献**

AGV Arnold, V.I., S.M. Gusein-Zade, A.N. Varchenko：《可微映射的奇点》第二卷，巴塞尔和波士顿，1988年。Ba 1 Barlet, D.：《由纤维积分得到的函数的渐近展开》，《数学发明》**68**（1982年），129-174。Ba 2 Barlet, D.：关于具有孤立奇点的超曲面米尔诺纤维上上同调的典范厄米形式，《数学发明》**81**（1985年），115-153。Ba 3 Barlet, D.：《具有孤立奇点的齐次多项式的典范厄米形式计算》，《纯粹与应用数学杂志》**362**（1985年），179-196。Da1 Danilov, V.I.：《环面簇的几何》，《俄罗斯数学调查》**33**（1978年），85-134。Da2 Danilov, V.I.：牛顿多面体与消失上同调，《泛函分析及其应用》**13**（1979年），103-115。Go Godement, R.：《层论》，巴黎，1964年。Gr Griffiths, Ph.：论某些有理积分的周期 I，《数学年刊》**90**（1969年），460-495。Gr-S Griffiths, Ph., W. Schmid：霍奇理论的新进展。载于：《李群的离散子群及其在模空间中的应用》，牛津大学出版社，孟买，1975年。He Hennings, A.：《牛顿多面体与孤立超曲面奇点的不变量》，学位论文，波鸿鲁尔大学，1989年。Kou Kouchnirenko, A.G.：《牛顿多面体与米尔诺数》，《数学发明》**32**（1976年），1-31。Loe Loeser, F.：《关于超曲面孤立奇点的典范厄米形式》，《法国数学会通报》**114**（1986年），385-392。

Mal 马尔格朗日, B.：《渐近积分与单值化》，《高等师范学校科学年鉴》**7**（1974年），405-430。TE 肯普夫, G., F. 克努森, D. 芒福德, B. 圣多纳：《环面嵌入》，施普林格 数学讲义 339（1973年）。Vas 瓦西里耶夫, V.A.：《复域中指数积分的渐近行为》，《泛函分析及其应用》**13**（1979年），239-247。