arXiv:2602.06253v1 [cs.LO] 5 Feb 2026

二阶（直觉主义）时态逻辑的证明论与语义

Justus Becker ，Anupam Das ，Sonia Marin ，以及 Paaras Padhiar

Abstract. 我们从句法和语义两方面发展了直觉主义模态逻辑的二阶扩展，使其能够对命题进行量化。二阶逻辑的一个关键特征是能够从负片段定义正联结词。因此，只要同时纳入前向和后向模态（“时态”模态），我们就能仅用方框算子重构菱形算子（及其相关理论）。

我们提出“二阶直觉主义时态逻辑”的公理化、证明论和模型论定义，并最终证明这些定义彼此一致。特别是，我们通过证明搜索论证，确立了带标记的序列演算的完备性，同时得到切规则可容许性结果。我们的方法也适用于二阶时态逻辑的经典版本；我们在研究直觉主义情形的同时，也对其进行了发展。

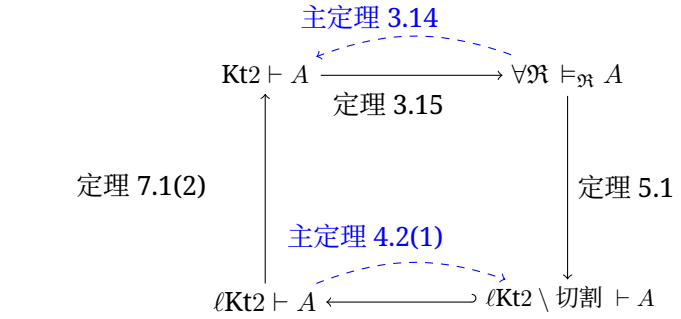
1. Introduction

1.1. 背景与动机。 二阶 逻辑通过允许对谓词进行量化，扩展了一阶逻辑。它已成为数学和计算逻辑中的标准工具，应用领域包括类型论和程序设计语言（例如 [Gir72, Rey74, Mil78, Par97]）、可计算性与复杂性（例如[Sim09, DM22b, Bus86, CN10]），以及近来人工智能中的知识表示（例如 [BH15, BH16, BHK18, BBW06]）。在过去一个世纪里，二阶逻辑的元逻辑和证明论基础一直给逻辑学家带来重大挑战。对于标准 （或完全）语义，即属性在整个幂集上取值的语义，完备性并不成立，因此需要采用更一般的$Henkin$ 语义 [Hen50]。相应的理论通常包含概括 公理，因而需要借助非谓述技术进行元逻辑分析。事实上，二阶逻辑的切规则可容许性 ，即所谓***Takeuti*** 猜想 [RS24], 自20世纪30年代以来一直是一个开放问题，直至60年代末，才由 Tait [Tai66], 、Prawitz [Pra68a, Pra68b], 、Takahashi [Tak67]和 Girard [Gir72]的开创性工作解决。

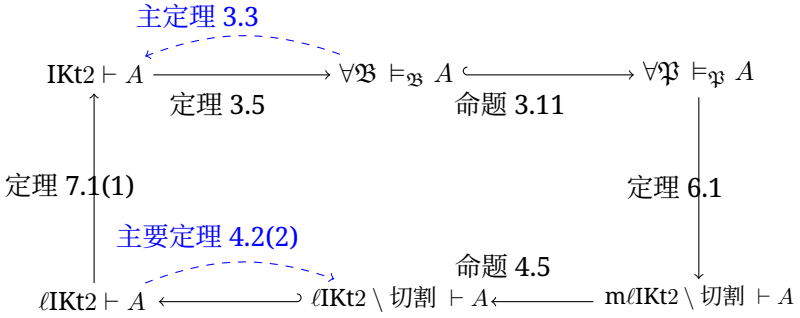
在直觉主义逻辑中，二阶量化尤其允许用负片段编码正联结词。例如， $A \vee B$ 在逻辑上等价于 $\forall X\,((A \to X) \to (B \to X) \to X)$。这与一阶情形形成鲜明对比，在一阶情形中，众所周知，各个联结词在直觉主义下彼此独立。在本文中，我们将二阶方法应用于模态逻辑，从而能够在直觉主义基础上，从负模态（□s）恢复出正模态（◇s）理论。

与命题逻辑和谓词逻辑不同，对于模态逻辑的直觉主义 片段是什么，并无共识。尽管自然会接受分配律，

Date: 2026年2月9日。



(A) 经典结果



(B) 直觉主义结果

FIGURE 1. 本文的“宏观概览”。

$\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$ 以及必然化，$A/\Box A$，但这些原理并未说明 $\Diamond$ 是什么；请记住，$\Diamond$ 无法用 $\Box$来定义。例如，人们或许还希望接受 $\Diamond$-分配律，$\Box(A \to B) \to \Diamond A \to \Diamond B$。因此出现了若干不同的方案，例如 [BPR01、Wij90、DM23、GSC25、Ser84、Sim94]。值得注意的是，$\Diamond$-公理的选择甚至会影响该逻辑中仅含 $\Box$（即不含 $\Diamond$）的定理[Gre99、DM23]。（关于相关综述，见 [DM22a] 。）

相反，我们证明，只要也允许使用一个向后 模态框 $\blacksquare$，就可以像 $\vee$先前那样，在二阶直觉主义逻辑上编码 $\Diamond$，如时态逻辑 [Pri57]所示：

$$\Diamond A \iff \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X) \tag{1}$$

反向菱形 $\blacklozenge$也满足对称等价关系。这使我们能够恢复 $\Diamond$ （以及 $\blacklozenge$）的一套理论，而不是任意选取一种公理化方式。由此得到的二阶逻辑 IKt2 保守地扩展了 Fischer Servi 和 Simpson 的 IK [Ser84、Sim94] ，此外还保守地扩展了 Ewald 的 IKt [Ewa86]。

1.2. 贡献。 本文为二阶时态逻辑奠定公理、语义和证明理论基础，涵盖经典基础与直觉主义基础。我们的主要结果如下：

(i) 我们的系统相对于相应（双）关系语义的可靠性与完备性；以及 (ii) 相关带标签序列演算系统的切规则可容许性。

这些结果可从图1所示的“宏观概览”中还原出来，其中以蓝色虚线标示。我们的主要完备性论证，即定理5.1和定理6.1，是通过证明搜索得出的；具体而言，我们改造了 Sch¨utte 的半赋值 [Sch60] 概念，使其适用于直觉主义情形，从而克服非谓述性的障碍（参见 [Tai66, Pra68b, Pra70]）。反向方向背后的主要技术难点，在于将带标签证明转换为公理化证明（定理 7.1）；这一转换由时态逻辑中带标签序列的树状表示所推动（例如，参见 [CLRT21]）。

1.3. **相关研究**。 自 20 世纪 70 年代以来，已有研究提出了（经典）模态逻辑的二阶扩展，参见 [Bul69, Fin70, Kap70]。此后，人们对诸多方面进行了研究，包括表达力[TC06, KT96], 在插值 理论中的应用 [Fit02, B´ıl07], ，以及在可证性逻辑元理论中的应用 [AB93]。然而，这些研究大多聚焦于完全语义，因此不适用于证明论研究。

近来，有研究提出将二阶模态逻辑作为人工智能中知识表示的规约语言 [BH15, BH16, BHK18]。这与我们的研究路径更为相关，因为这些逻辑是在亨金结构而非全结构上解释二阶语言的，尽管它们只涉及量词自由（或谓词式）概括。值得注意的是， [BHK18] 的作者总结道，对于二阶模态逻辑而言，“若要将其采用于人工智能和知识表示中的规约语言，就需要发展适当的理论成果和形式工具”。我们的工作可视为朝这一方向作出的贡献，旨在发展其中的元逻辑和证明论基础。

1.4. **本文结构**。 我们的主要结果示于图1。第2节介绍经典二阶时态逻辑和直觉主义二阶时态逻辑的公理化系统 Kt2 和 IKt2。两者都包含完整的概括公理，并相应地证明等式（1）。第3节遵循 Simpson 的方法 [Sim94]，为 Kt2 定义关系语义，并为 IKt2 定义两种基于偏序的扩展。本节的主要结果是这些公理化系统相对于其语义的可靠性，即定理3.5和定理3.15以及命题 3.11。

第4节介绍受 Simpson [Sim94], 启发的带标签序列演算 ℓKt2 和 ℓIKt2，其中尤其包含一条左-$\forall$ 规则，用于实现完整概括。我们还介绍一种中间的多后件版本 mℓIKt2， `即 Mae- hara [Mae54], 风格的系统，更适用于基于证明搜索的完备性论证（例如参见[Pra70] 和 [Tak87，第 15]节）；该系统最终对 ℓIKt2是保守的，见命题4.5。我们的主要证明搜索论证分别见第5节（经典情形）和第6节（直觉主义情形），由此得到 ℓKt2 的无割完备性（定理 5.1），以及 mℓIKt2 的无割完备性（定理 6.1）。尤其是直觉主义情形展现了新的复杂之处，它结合了简单类型论[Pra68b]和一阶直觉主义逻辑 [Tak87，第 15]节中类似构造的思想。

在第7节中，我们分别给出从带标签系统 ℓKt2 和 ℓIKt2 到公理系统 Kt2 和 IKt2 的翻译（定理 7.1），从而完成图 1a 和 1b 所示的蕴涵循环。最后，我们在第8节以一些补充视角为本文作结，尤其是通过否定翻译建立 Kt2 与 IKt2 之间的联系，并在第9节作出总结性评论。

2. A second-order extension of tense logic

本节介绍二阶时态逻辑的语法，并给出其直觉主义理论和经典理论的公理化。本节的要点之一是展示如何用其他联结词来定义菱形算子，甚至在直觉主义的情况下也可以做到，从而让我们恢复其理论，而不是为其任意添加公理。

关于二阶（直觉主义）命题逻辑的一些有用背景知识，可参见例如 [SU06，第 12] 章。

2.1. 二阶时态逻辑的语法。 设有一个命题符号集Pr，记作 P，Q，R等，以及一个与之不相交的（公式/二阶）变量集Var，记作 X，Y，Z 等。我们将使用以下二阶时态**公式**:

$$A, B, C, \ldots \quad ::= \quad P \in \mathsf{Pr} \mid X \in \mathsf{Var} \mid A \to B \mid \Box A \mid \blacksquare A \mid \forall X A$$

用Fm表示所有公式构成的集合。我们常省略公式外围的括号以及长蕴含式内部的括号，并将其理解为最右侧配对。即 $A \to B \to C = (A \to (B \to C))$等。

公式 A的**自由变量**集记作FV(A)，其定义如下:

$$\begin{array}{rr} \mathsf{FV}(P) := \varnothing & \mathsf{FV}(\Box A) := \mathsf{FV}(A) \\ \mathsf{FV}(X) := \{X\} & \mathsf{FV}(\blacksquare A) := \mathsf{FV}(A) \\ \mathsf{FV}(A \to B) := \mathsf{FV}(A) \cup \mathsf{FV}(B) & \mathsf{FV}(\forall X A) := \mathsf{FV}(A) \setminus \{X\} \end{array}$$

注意，命题符号并非变量。如果 FV(A) $= \varnothing$ 那么 A 就是**闭合**的（或是一个**句子**）。否则，它就是**开放**的。

备注 2.1 （命题符号与变量）。 我们完全可以不使用命题符号，而只使用变量。不过，我们采用目前这种表述，以便在所介绍的系统和语义中，只需处理闭公式。这样，在解释语法时便无需显式引入环境，从而简化相关记号。

众所周知，其他命题联结词和量词都可以通过定义，利用非谓述的编码，从我们的最简语法中导出。特别地，在纯二阶直觉主义逻辑中，有以下等价关系：[1]

$$\begin{array}{rcl} \bot & \iff & \forall X X \\ A \vee B & \iff & \forall X((A \to X) \to (B \to X) \to X) \\ A \wedge B & \iff & \forall X((A \to B \to X) \to X) \\ \exists Y A & \iff & \forall X(\forall Y(A \to X) \to X) \end{array} \tag{2}$$

请注意，即使在直觉主义的框架下，这些等价关系也成立，这与（一阶）直觉主义逻辑形成鲜明对比：在那里，所有命题联结词彼此独立。详见例如 [SU06 第 12 节，4] 或 [GLT89 第 11 节，3] 以了解更详细的论述。同理，我们可以在二阶框架下通过适当的等价关系来定义 菱形模态:

$$\begin{array}{rcl} \Diamond A & \iff & \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X) \\ \blacklozenge A & \iff & \forall X(\blacksquare(A \to \Box X) \to X) \end{array} \tag{3}$$

[1]在所有情况下，变量 X 都应选为在 A 和 B中不自由出现的变量。由于我们通常只处理闭公式，因此全文将略过这一技术细节。

目前，为了说明问题并提供动机，这一切都还相当非正式，因为我们尚未赋予公式任何含义。为了论证这些等价关系的合理性，下面我们将先讨论基于我们语法的公理化，然后在下一节介绍语义。

2.2. **最小公理化**。 本文仅给出公式的一个最小公理化。原因有二：

(i) 我们希望以最一般的方式证明公式（3）中的等价关系，使其适用于我们公理化的任意 扩展；以及 (ii) 我们稍后将论证这一最小公理化的稳健性。

关于项目 i，我们暂时用一元算子 $\Diamond$ 和 $\blacklozenge$扩展公式语言。待证明它们并非必需后，我们将删去这些算子。我们考虑一种最小公理化：在二阶直觉主义命题逻辑 IPL2 的基础上，仅加入模态算子的正规性，以及以下两对算子的伴随关系：$(\Box, \blacklozenge)$ 和 $(\blacksquare, \Diamond)$：

定义 2.2（带菱形算子的公理化）。 IKt2($\Diamond, \blacklozenge$) 是由以下内容公理化的逻辑：

(1) 全部二阶直觉主义命题逻辑 IPL2，即公理和规则：[2]

$$\begin{array}{ll} \mathsf{K}: A \to B \to A & \\ \mathsf{S}: (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C & \mathsf{mp}\ \dfrac{A \to B \quad A}{B} \\ \mathsf{D}_\forall: \quad \forall X(A \to B) \to \forall X A \to \forall X B & \\ \mathsf{V}: \quad A \to \forall X A \ (\text{当 } (X \notin \mathrm{FV}(A))) & \mathsf{gen}\ \dfrac{A[P/X]}{\forall X A}\ P \text{ 新鲜} \\ \mathsf{C}: \quad \forall X A \to A[C/X] & \end{array}$$

其中，“P 新鲜”表示命题符号 P 未出现在该规则的结论中。

(2) 白色与黑色模态的正规性，即分配公理和必然化规则：

$$\begin{array}{ll} \mathsf{D}_\Box: \quad \Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B & \mathsf{nec}_\Box\ \dfrac{A}{\Box A} \\ \mathsf{D}_\Diamond: \quad \Box(A \to B) \to \Diamond A \to \Diamond B & \\ \mathsf{D}_\blacksquare: \quad \blacksquare(A \to B) \to \blacksquare A \to \blacksquare B & \mathsf{nec}_\blacksquare\ \dfrac{A}{\blacksquare A} \\ \mathsf{D}_\blacklozenge: \quad \blacksquare(A \to B) \to \blacklozenge A \to \blacklozenge B & \end{array}$$

(3) $(\Box, \blacklozenge)$ 与 $(\blacksquare, \Diamond)$ 的伴随：

$$\begin{array}{ll} \mathsf{A}_{\blacklozenge\Box}: \quad \blacklozenge\Box A \to A & \mathsf{A}_{\Diamond\blacksquare}: \quad \Diamond\blacksquare A \to A \\ \mathsf{A}_{\Box\blacklozenge}: \quad A \to \Box\blacklozenge A & \mathsf{A}_{\blacksquare\Diamond}: \quad A \to \blacksquare\Diamond A \end{array}$$

注释 2.3（完全概括）。 请注意，在公理 C 的概括中，对 C 的选择不受限制：公式 $A[C/X]$ 可以比 $\forall X A$更复杂。例如，我们甚至可以设定 $C = \forall X A$。这种表面上的循环性（称为非谓述性）会使二阶逻辑的语义等问题变得复杂，正如我们将在第3节中看到的那样。

[2]请注意，我们给出的命题公理和规则实际上是 *minimal* 逻辑的，而非 $\bot$。不过在二阶语境下，由于后者是可定义的，“最小”与“直觉主义”之间的差异便消失了。

注释 2.4 （其他逻辑算子）。 如前所述，如果我们用原生算子 $\bot$、$\vee$、$\wedge$、$\exists$来表述 IPL2，那么公式 (2) 中的等价式都已经可以证明。例如，$\forall X X \to \bot$ 只是 C 的一个实例，而 $\forall X((A \to X) \to (B \to X) \to X) \to A \vee B$ 可通过在 C 中设定 $C := A \vee B$ 推导出来。因此，以下内容中我们将自由使用这些逻辑联结词，并将这些等价式重新表述为定义。我们还写作 $\neg A := A \to \bot$ 和 $A \leftrightarrow B := (A \to B) \wedge (B \to A)$。

注 2.5 （最小性）。 在直觉主义命题逻辑之上，条目 2 中关于白（或黑）模态的公理和规则确定了所谓的构造性模态逻辑 CK [BPR01]。这是通常所考虑的最小直觉主义版本的模态逻辑（含有 $\Box$ 和 $\Diamond$）；其他常见版本则通过添加经典模态逻辑的更多原理而得到，尤其包括：

$$
\begin{array}{ll}
\mathsf{N}_{\Diamond\vee}: & \Diamond(A_0 \vee A_1) \to \Diamond A_0 \vee \Diamond A_1 \\
\mathsf{N}_{\Diamond\bot}: & \Diamond\bot \to \bot \\
\mathsf{I}_{\Diamond\Box}: & (\Diamond A \to \Box B) \to \Box(A \to B)
\end{array} \tag{4}
$$

例如，$\mathsf{WK} := \mathsf{CK} + \mathsf{N}_{\Diamond\bot}$ 在 [Wij90], 中得到研究；$\mathsf{WK} + \mathsf{N}_{\Diamond\vee}$ 在 [DM23], 中得到研究；$\mathsf{IK}^N := \mathsf{CK} + \mathsf{N}_{\Diamond\bot} + \mathsf{I}_{\Diamond\Box}$ 在 [GSC25], 中得到研究，而 IK 是通过加入上述所有公理对 CK 进行扩展所得的逻辑 [Ser84, Sim94]。不含 $\Diamond$ 的最小直觉主义模态逻辑 iK，定义为在直觉主义命题逻辑基础上加入 $\mathsf{D}_\Box$ 和必然化$_\Box$所得的扩展，是 CK 的保守扩展。从这个意义上说，条目 2 在扩展基础模态逻辑方面作出了最小限度的承诺。

另一方面，条目 3 中的时态公理仅指出，假设不存在进一步的关系，$(\Box, \blacklozenge)$ 和 $(\blacksquare, \Diamond)$ 是伴随对。这些是时态逻辑表述中的标准公理 [BBW06], ，因此，条目 3 在关联白色与黑色模态方面再次体现了最小承诺。

例 2.6 ($\Box$ 在 $\forall$ 上分配)。 让我们看一个简单的 IKt2($\Diamond$, $\blacklozenge$) 推理实例，尤其是借此说明我们如何呈现公理化证明：

$$
\begin{array}{ll}
\forall X A \to A[P/X] & \text{by C, setting } X = P \\
\Box\forall X A \to \Box A[P/X] & \text{by } \mathsf{nec}_\Box \text{ and } \mathsf{D}_\Box \\
\Box\forall X A \to \forall X \Box A & \text{by gen}, \mathsf{D}_\forall, \mathsf{V}
\end{array}
$$

请注意，此处我们大多略去常规的直觉主义命题逻辑推理，而着重关注每一步所需的模态公理和量词公理。为了稍微展开最后一步，请看下面这个构造，其中 $X \notin \mathrm{FV}(A)$：

$$
\begin{array}{ll}
A \to B & \\
\forall X(A \to B) & \text{by gen} \\
\forall X A \to \forall X B & \text{by } \mathsf{D}_\forall \\
A \to \forall X B & \text{by V}
\end{array}
$$

今后我们将继续以这种方式书写公理化证明，不再另作说明。

请注意，只需在上述证明中交换白色与黑色模态，我们也可以得到 $\blacksquare\forall X A \to \forall X \blacksquare A$ 的证明。今后我们也将继续运用这一观察，只简单提及“对称性”。

在展示更多涉及菱形算子的例子之前，我们先兑现承诺，为公式（3）给出证明：

定理 2.7。 IKt2($\Diamond, \blacklozenge$) （因此，其所有扩展）证明：

(1) $\Diamond A \leftrightarrow \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X)$

(2) $\blacklozenge A \leftrightarrow \forall X(\blacksquare(A \to \Box X) \to X)$

证明。 由对称性可知，我们只需证明第一项，并分别证明两个方向：

$\Diamond\blacksquare P \to P$	by $\mathsf{A}_{\Diamond\blacksquare}$
$\Diamond A \to (\Diamond A \to \Diamond\blacksquare P) \to P$	by IPL reasoning
$\Diamond A \to \Box(A \to \blacksquare P) \to P$	by $\mathsf{D}_{\Diamond}$
$\Diamond A \to \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X)$	by gen, $\mathsf{D}_{\forall}$, V
$A \to \blacksquare\Diamond A$	by $\mathsf{A}_{\blacksquare\Diamond}$
$\Box(A \to \blacksquare\Diamond A)$	by $\mathsf{nec}_{\Box}$
$(\Box(A \to \blacksquare\Diamond A) \to \Diamond A) \to \Diamond A$	by IPL reasoning
$\forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X) \to \Diamond A$	by C, setting $X = \Diamond A$ ✓

正如我们先前指出的，在刚刚证明的等价关系下，现在可以省去原生菱形算子：

定义 2.8。 将 IKt2($\Diamond, \blacklozenge$) 中的下列内容设定为：即可得到 IKt2。

$$\Diamond A := \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X)$$
$$\blacklozenge A := \forall X(\blacksquare(A \to \Box X) \to X)$$

此后所有对 $\Diamond$ 和 $\blacklozenge$的引用，均受上述定义约束。

例 2.9 （冗余）。 请注意，根据上面对 $\Diamond, \blacklozenge$ 的定义，我们在 IKt2($\Diamond, \blacklozenge$) 中给出的一些公理变得冗余，也就是说，它们已经可以由其他公理推导出来。具体而言，半数伴随公理 $\mathsf{A}_{\Diamond\blacksquare}$ 和 $\mathsf{A}_{\blacklozenge\Box}$，以及菱形算子的分配公理 $\mathsf{D}_{\Diamond}$和 $\mathsf{D}_{\blacklozenge}$，便是如此：

$\blacksquare A \to \blacksquare A$	by IPL reasoning
$\Box(\blacksquare A \to \blacksquare A)$	by $\mathsf{nec}_{\Box}$
$(\Box(\blacksquare A \to \blacksquare A) \to A) \to A$	by IPL reasoning
$\Diamond\blacksquare A \to A$	by C and definition of $\Diamond$

$(A \to B) \to (B \to \blacksquare P) \to A \to \blacksquare P$ 通过直觉主义命题逻辑推理

$\Box(A \to B) \to \Box(B \to \blacksquare P) \to \Box(A \to \blacksquare P)$ 根据必然化$_{\Box}$ 和 $\mathsf{D}_{\Box}$s

$\Box(A \to B) \to ((\Box A \to \blacksquare P) \to P) \to \Box(B \to \blacksquare P) \to P$ 根据直觉主义命题逻辑推理

$\Box(A \to B) \to \Diamond A \to \Box(B \to \blacksquare P) \to P$ 根据C公理和 $\Diamond$的定义

$\Box(A \to B) \to \Diamond A \to \Diamond B$ 根据全称概括规则，$\mathsf{D}_{\forall}$、V以及 $\Diamond$的定义

同样，$\mathsf{D}_{\blacklozenge}$ 和$\mathsf{A}_{\blacklozenge\Box}$ 的可导性由对称性得到。

例 2.10 （$\forall$分配于 $\Box$之上）。 参见例 2.6，我们还得到逆向原则：[3]

$\forall X\Box A \to \Box A[P/X]$

$\blacksquare(\forall X\Box A \to \Box A[P/X])$

$(\blacksquare(\forall X\Box A \to \Box A[P/X]) \to A[P/X]) \to A[P/X]$ 由C公理，设定 $X = P$由必然化$_{\blacksquare}$由直觉主义命题逻辑推理由C公理，设定 $X = A[P/X]$ 以及 $\Diamond$的定义由全称概括规则style id='5'>,$\mathsf{D}_{\forall}$, V由必然化$_{\Box}$ 以及$\mathsf{D}_{\Box}$由$\mathsf{A}_{\Box\blacklozenge}$

$\blacklozenge\forall X\Box A \to A[P/X]$

$\blacklozenge\forall X\Box A \to \forall X A$

$\Box\blacklozenge\forall X\Box A \to \Box\forall X A$

$\forall X\Box A \to \Box\forall X A$

[3]熟悉谓词模态逻辑的读者会注意到，这与所谓的“Barcan”公式相似。

两个方向合在一起，构成 □对 ∧的通常分配的一种无穷版本： □($A \wedge B$) $\leftrightarrow$ □$A \wedge$ □B。

同样，根据对称性，我们也有 ■$\forall X\, A \leftrightarrow \forall X$■$A$。

2.3. 关于底层（一阶）模态逻辑和时态逻辑。现在我们已经处理了项目 i（即菱形算子定义的一般正确性），接下来讨论项目 ii：我们提出的最小公理化系统 IKt2 的稳健性。

正如我们先前在注 2.5 中提到的，文献中的直觉主义模态逻辑可能包含公式（4）中的其他公理。事实证明，这些公理都可以在当前表述中导出：

$\bot \to$ ■$\bot$ 根据直觉主义命题逻辑推理□($\bot \to$ ■$\bot$) 根据必然化□(□($\bot \to$ ■$\bot$) $\to \bot$) $\to \bot$ 根据直觉主义命题逻辑推理◇$\bot \to \bot$ 根据 C公理和 ◇的定义◇$A_i \to$ ◇$A_0 \vee$ ◇A_1 对于 $i = 0$，1，根据直觉主义命题逻辑推理

■◇$A_i \to$ ■(◇$A_0 \vee$ ◇A_1) 通过必然化■ 和 D■$A_i \to$ ■(◇$A_0 \vee$ ◇A_1) 通过 A■◇$A \vee B \to$ ■(◇$A_0 \vee$ ◇A_1) 通过直觉主义命题逻辑推理□($A \vee B \to$ ■(◇$A_0 \vee$ ◇A_1)) 通过必然化□(□($A \vee B \to$ ■(◇$A_0 \vee$ ◇A_1)) $\to$ ◇$A \vee$ ◇B) $\to$ ◇$A \vee$ ◇B 通过直觉主义命题逻辑推理◇($A \vee B$) $\to$ ◇$A \vee$ ◇B 通过 C公理，令 $X =$ ◇$A \vee$ ◇B，并根据 ◇的定义(■◇$A \to$ ◆□B) $\to A \to B$ 通过 A■◇、A◆□ 和直觉主义命题逻辑推理◆(◇$A \to$ □B) $\to A \to B$ 通过 D■、D◆ 和必然化■□◆(◇$A \to$ □B) $\to$ □($A \to B$) 通过必然化□ 和 D□(◇$A \to$ □B) $\to$ □($A \to B$) 通过 A□◆

为稍微解释一下以“由 D■、D◆ 和 nec■”为依据的这一步，请注意， ◆($C \to D$) $\to$ ■$C \to$ ◆D 确实可以利用这些公理和规则轻易地推导出来。

因此，IKt2 包含 Fischer Servi 和 Simpson[Ser77, Sim94]提出的直觉主义模态逻辑 IK。根据对称性，它也包含公式（4）中各项原理的所有黑色版本。总之，我们现在得到，IKt2 还包含 Ewald 的 IKt [Ewa86], ，这也证明了我们所选命名的合理性。[4]

需要指出的是，在 IKt2 中推导出 IKt 并不真正依赖于二阶推理。仔细检查这些论证后可以发现，我们只需要以下（一阶）原理：

- ◇$A \to$ □($A \to$ ■C) $\to C$
- ◆$A \to$ ■($A \to$ □C) $\to C$
- $C \to$ □(◆$C \to A$) $\to$ □A
- $C \to$ ■(◇$C \to A$) $\to$ ■A

这些公式在直觉主义命题逻辑下，类似于定理 2.7 的证明，已经可以由模态公理和规则（条目 2）以及时态公理（条目 3）推出。这样一个最小公理化已经能够生成 IKt 的全部内容，这似乎是（直觉主义）时态逻辑学界的一个常识性结论，例如 [LZQ22 的备注 2.3] 中就有陈述。我们

[4] Ewald 还纳入了另外几个公理，即 □ $A \wedge B \leftrightarrow$ □$A \wedge$ □B ◇ $A \to B \to$ ( ) 和 ( )（以及它们的黑色类比）。即使在 CK（及其黑色类比）中，这两者通常也都可以推导出来。

尽管如此，我们还是给出了上述推导，因为我们未能在文献中找到明确的相关论述。

命题 2.11. IKt证明如下：

(1) $(\Box A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$. *(2)* $(\blacksquare A \wedge \blacklozenge B) \to \blacklozenge(A \wedge B)$ *(3)* $(\Diamond A \to \Box B) \to \Box(A \to B)$ *(4)* $(\blacklozenge A \to \blacksquare B) \to \blacksquare(A \to B)$ *(5)* $\Diamond(A \to B) \to (\Diamond A \to \Box B)$ *(6)* $\blacklozenge(A \to B) \to (\blacklozenge A \to \blacksquare B)$

2.4. **经典理论**。 最后，让我们通过给出二阶时态逻辑的经典版本来结束本节。不出所料，该版本通过添加双重否定消去而得到：[5]

定义 2.12。$\mathsf{Kt2} := \mathsf{IKt2} + \neg\neg A \to A$。

我们将在第 8 节稍后讨论直觉主义理论与经典理论之间的关系。

3. Model theory: (bi)relational structures

本节介绍直觉主义模态逻辑的一种标准语义形式，其中包含两个关系：来自直觉主义逻辑 Kripke 结构的偏序，以及来自模态逻辑和时态逻辑关系结构的“可达”关系。这里最有趣的方面是对集合（或谓词）的容纳，即变量 X、Y 等所取值的域。

我们还考虑双关系结构的一个特殊子集，称之为谓词结构，以及它们向经典模型的特殊化。

3.1. **完全概括下的双关系语义**。 一阶直觉主义时态公式的双关系语义将按照惯例进行定义，遵循直觉主义模态与时态逻辑传统 [Ser77、Ewa86、PS86、Sim94]。为了处理二阶量词，我们还必须加入一个集合域，变量在其中取值：

定义 3.1（双关系结构）。一个**（双类型的）（双关系）结**构包含以下数据：

- 一个**世界**集合 W $\mathfrak{B}$。
- 一个定义在 W 上的偏序 $\leq$。
- 一个类 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(W)$，由向上闭合的**集合**（或**谓词**）组成；也就是说，若 $V \in \mathcal{W}$ 且 $v \leq v'$，则 $Vv \implies Vv'$。
- 对每个 $P \in$Pr，给出一个解释 $P_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{W}$。
- 一个**可及关系** $R_{\mathfrak{B}} \subseteq W \times W$。

此外，我们要求在 $\mathfrak{B}$ that $R_{\mathfrak{B}}$ 上，双模拟 满足 $\leq$，即：

- $\forall v, w, w' \in W\,(vR_{\mathfrak{B}}w \leq w' \implies \exists v' \geq v\, v' R_{\mathfrak{B}} w')$.
- $\forall v, v', w \in W\,(v' \geq vR_{\mathfrak{B}}w \implies \exists w' \geq w\, v' R_{\mathfrak{B}} w'$.

现在，让我们暂时扩充公式语言，将每个$V \in \mathcal{W}$ 都纳入为命题符号，并设定 $V_{\mathfrak{B}} = V$。对于$v \in W$，判断 $v \vDash_{\mathfrak{B}} A$通过对闭公式 A的大小进行归纳定义：

[5]我们也可以做出其他等价的选择，例如添加皮尔士定律 $((A \to B) \to A) \to A$。

- $v \vDash_{\mathfrak{B}} P$ 若 $P_{\mathfrak{B}} v$。[6]
- $v \vDash_{\mathfrak{B}} A \to B$ 若 $v \leq v'$ 且 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} A$，则有 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} B$。
- $v \vDash_{\mathfrak{B}} \Box A$ 若 $v \leq v'$ 且 $vR_{\mathfrak{B}}w'$，则有 $w' \vDash_{\mathfrak{B}} A$。
- $v \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare A$ 若 $v \leq v'$ 且 $u'R_{\mathfrak{B}}v'$，则有 $u' \vDash_{\mathfrak{B}} A$。
- $v \vDash_{\mathfrak{B}} \forall X A$ 若 $v \leq v'$ 且 $V \in \mathcal{W}$，则有 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} A[V/X]$。

我们简写为 $\vDash_{\mathfrak{B}} A$，对每个 $w \in W$都有 $w \vDash_{\mathfrak{B}} A$。

我们称 $\mathfrak{M}$ **完备**，若对于每个（扩展语言中的）闭公式 C，它在 $\mathcal{W}$ 中都有一个集合 $[C] = \{w \in W \mid w \vDash_{\mathfrak{B}} C\}$。**双关系模型**是完备的双关系结构。

文献中“完备结构”还有几个不同的名称，包括“全结构”“完全结构”“主结构”，有时甚至简称为“结构”（此时“预结构”未必完备）。我们更倾向于采用这里的术语，因为它的歧义较少（例如，全语义、完全公理化.....），而且能体现这一性质在刻画概括公理 C 时所起的作用。

注 3.2（全结构与亨金结构）。朴素的集合域就是完整的幂集$\mathcal{P}(W)$。这样的结构天然就是完备的，因为它包含所有可能的集合，当然也包括各个公式的外延 $[C]$。这通常称为二阶逻辑的全语义或标准语义。[7] 然而，二阶逻辑的这种语义不存在完备证明系统，因为它的有效式甚至不是解析的，更不用说递归可枚举了。在证明论研究中，更常见的做法是接受我们在此介绍的亨金结构，并将“二阶”视为另一种类型。关于这一区别的实用讨论及更多参考文献，可参见 [V¨a24], ，尤其是第 5 节和第 9 节。

另一方面，若要使 IKt2 对我们的模型可靠，我们就不能允许任意的集合域。需要全面性条件，以确保结构能够刻画概括，即 C公理。请注意这里的别扭之处：集合类 $\mathcal{W}$必须被直接指定，但它是否完备则取决于由此产生的蕴涵关系概念。因此，完备结构的典型定义是非谓述的。

此后，我们保留元变量 $\mathfrak{B}$，令其在双关系模型上取值。本文的主要结果之一是：我们的公理系统 IKt2 与上文的双关系语义实际上导出同一逻辑：

主定理 3.3（可靠性与完备性）. $\mathsf{IKt2} \vdash A \iff \forall \mathfrak{B} \vDash_{\mathfrak{B}} A$.

$\Longleftarrow$ 方向（即完备性）的证明将被分成若干步骤，事实上要经由第 4 节中该逻辑的另一种证明论 表述。我们很快就会转向这一点，但在本小节的剩余部分，让我们先确立 $\Longrightarrow$ 方向，即可靠性。

首先，我们需要一个标准的中间结果：

引理 3.4 (单调性)。若 $v \leq v'$ 且 $v \vDash_{\mathfrak{B}} A$ 则 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} A$。

[6]请注意，这一条款也涵盖了新的命题符号 $V \in \mathcal{W}$。[7]传统上，「二阶」这一命名仅用于此类语义，而我们的框架或许更准确地说应称为「双类型一阶」。此处我们不再重述这一讨论，请读者参阅 REF，以了解完备的说明。当前「二阶」这一术语已成为计算逻辑中的标准用语。

证明。 对 A 的结构进行归纳法。假设 $v \leq v'$ 且 $v \vDash_{\mathfrak{B}} A$。

- $A = P \in \mathsf{Pr}$: $P_{\mathfrak{B}} v$ 对于 $P_{\mathfrak{B}} \in \mathcal{W}$。因此，由于 $P_{\mathfrak{B}}$ 相对于 $\leq$向上封闭，$P_{\mathfrak{B}} v'$ 且 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} P$。
- $A = B \to C$: 任取 v''，满足 $v' \leq v''$ 和 $v'' \vDash_{\mathfrak{B}} B$。由 $\leq$的传递性，$v \leq v''$，因此 $v'' \vDash C$。由 v''的任意性: $v' \vDash_{\mathfrak{B}} B \to C$。
- $A = \Box B$: 任取 v'' 和 w'，满足 $v' \leq v''$ 和 $v'' R_{\mathfrak{B}} w'$。同样由 $\leq$的传递性: $v \leq v''$，因此 $w' \vDash_{\mathfrak{B}} B$ 和 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} \Box B$。
- $A = \blacksquare B$: 任取 v'' 和 w'，满足 $v' \leq v''$ 和 $w' R_{\mathfrak{B}} v''$。如前所述，$v \leq v''$，因此 $w' \vDash_{\mathfrak{B}} B$ 和 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare B$。
- $A = \forall X B$: 任取 v''，使得 $v' \leq v''$，并取某个 $V \in \mathcal{W}$。与之前一样，我们有 $v \leq v''$，因此 $v'' \vDash_{\mathfrak{B}} B[V/X]$。由此得到 $v' \vDash_{\mathfrak{B}} \forall X B$。✓

定理 3.5 (可靠性)。$\mathsf{IKt2} \vdash A \implies \forall \mathfrak{B} \vDash_{\mathfrak{B}} A$。

证明。 我们对 $\mathsf{IKt2} \vdash A$ 作归纳。

IPL2 的公理和规则，即.....，都是标准的，它们可由 IPL2 对完备直觉主义结构的可靠性推出（例如参见 [SU06，第 11.1] 节）。特别要注意的是，由于验证这些公理和规则不涉及模态，因此不会涉及可及关系 $R_{\mathfrak{B}}$。

模态公理 $\mathsf{D}_{\Box}$、$\mathsf{D}_{\blacksquare}$ 以及规则 $\mathsf{nec}_{\Box}$，$\mathsf{nec}_{\blacksquare}$ 也都是标准的，它们可由 IK（等价地，其黑色变体）对双关系结构的可靠性推出 [Ser84，定理 4]。特别要注意的是，由于验证这些公理和规则不涉及量词，因此不会涉及集合类 $\mathcal{W}$。

还需验证涉及 $\Diamond$，$\blacklozenge$ 的公理，因为它们由二阶 r 公式编码。

- $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$。设 $w_1 \geq w$，其中 $w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(A \to B)$。设 $w_2 \geq w_1$，其中 $w_2 \vDash_{\mathfrak{B}} \Diamond A = \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X)$，且 X 对 A 是新鲜的。我们证明，对于 X 对 B 是新鲜的，$w_2 \vDash_{\mathfrak{B}} \Diamond B = \forall X(\Box(B \to \blacksquare X) \to X)$。设 $w_3 \geq w_2$ 且 $V \in \mathcal{W}$。我们需要证明 $w_3 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(B \to \blacksquare V) \to V$。设 $w_4 \geq w_3$，其中 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(B \to \blacksquare V)$，因此剩下要证明 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} V$。对于 $w_4 \leq w_5 R_{\mathfrak{B}} v_5$，$v_5 \vDash_{\mathfrak{B}} B \to \blacksquare V$。现在，由于 $w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(A \to B)$ 且 $w_1 \leq w_5 R_{\mathfrak{B}} v_5$，所以 $v_5 \vDash_{\mathfrak{B}} A \to B$。通过标准推理，我们有 $v_5 \vDash_{\mathfrak{B}} A \to \blacksquare V$，因此 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(A \to \blacksquare V)$。由于 $w_2 \vDash_{\mathfrak{B}} \Diamond A = \forall X(\Box(A \to \blacksquare X) \to X)$ 且 $w_4 \geq w_2$，所以 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(A \to \blacksquare V) \to V$，由此可得 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} V$。
- $A \to \Box\blacklozenge A$。令 $w_1 \geq w$，其中 $v_1 \vDash_{\mathfrak{B}} A$。我们证明，对于 $w_2 \geq w_1$ 和 $w_2 R_{\mathfrak{B}} v_2$，有 $v_2 \vDash_{\mathfrak{B}} \blacklozenge A = \forall X\,(\blacksquare\,(A \to \Box X) \to X)$，其中 X 对 A 是新鲜的。令 $v_3 \geq v_2$ 和 $V \in \mathcal{W}$。我们证明 $v_3 \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare\,(A \to \Box V) \to V$。令 $v_4 \geq v_3$，其中 $v_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare\,(A \to \Box V)$。由于 $w_2 R_{\mathfrak{B}} v_2 \leq v_4$，存在 $w_4 \geq w_2$ 使得 $w_4 R_{\mathfrak{B}} v_4$。根据引理 3.4，$w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} A$，并且由于 $v_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare\,(A \to \Box V)$，$w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} A \to \Box V$。通过标准推理，这意味着 $w_4 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box V$；又由于 $w_4 R_{\mathfrak{B}} v_4$，我们必有 $v_4 \vDash_{\mathfrak{B}} V$。
- $\Diamond\blacksquare A \to A$。设 $w_1 \geq w$ with $w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} \Diamond\blacksquare A = \forall X(\Box(\blacksquare A \to \blacksquare X) \to X)$，其中 X 对 $\blacksquare A$ 是新鲜的。于是，根据 $A \in \mathcal{W}$ 的定义，$w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(\blacksquare A \to \blacksquare A) \to A$。对于所有世界 v，我们必须有 $v \vDash_{\mathfrak{B}} \blacksquare A \to \blacksquare A$，因此 $w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} \Box(\blacksquare A \to \blacksquare A)$。由此可得 $w_1 \vDash_{\mathfrak{B}} A$。

其余公理 $\mathsf{D}_{\blacklozenge}$，$\mathsf{A}_{\blacksquare\Diamond}$，$\mathsf{A}_{\blacklozenge\Box}$ 可通过对称论证得出。 ✓

3.2. **完全概括下的双类型谓词语义**。我们还将考察直觉主义谓词结构，在这种结构中，每个世界都是一个经典

模态模型。我们引入这种额外语义有两个原因：（i）进一步检验逻辑 IKt2 的稳健性；（ii）我们将在第6节中用它们构造最终的反模型。

定义 3.6（谓词结构）。（双类型）谓词结构 $\mathfrak{P}$包含以下数据：

- 一个由直觉主义世界（或**状态**）构成的集合 Ω。
- Ω 上的偏序 $\leq$。
- 一个由 W（模态）世界构成的集合。
- 一个由 $\mathcal{W} \supseteq \mathsf{Pr}$ 构成的**（模态）集合**（或**（模态）谓词**）构成的集合。
- 对每个 $P \in \mathcal{W}$ 和 $a \in \Omega$，给出一个解释 $P^a \subseteq W$。我们要求满足单调性：$a \leq b \implies P^a \subseteq P^b$。
- 在 a 处有一个**可及关系** $R^a \subseteq W \times W$。我们要求满足单调性：$a \leq b \implies R^a \subseteq R^b$。

让我们暂时扩展公式语言，将每个 $P \in \mathcal{W}$ 都作为命题符号纳入其中。对于 $a \in \Omega$ $v \in W$，判断 $a,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} A$ 按公式 A 的大小归纳定义如下：

- $a,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} P$ 当且仅当 $v \in P^a$。
- $a,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} A \to B$ 当且仅当：只要 $a \leq b$ 且 $b,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} A$，就有 $b,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} B$。
- $a,\ v \Vdash_{\mathfrak{P}} \Box A$ 当且仅当：只要 $a \leq b$ 且 vR^bw，就有 $b,\ w \Vdash_{\mathfrak{P}} A$。
- $a, v \Vdash_{\mathfrak{P}} \blacksquare A$ 如果每当 $a \leq b$ 且 uR^bv 时，我们有 $b, u \Vdash_{\mathfrak{P}} A$。
- $a, v \Vdash_{\mathfrak{P}} \forall X A$ 如果每当 $a \leq b$ 且 $P \in \mathcal{W}$ 时，我们有 $b, v \Vdash_{\mathfrak{P}} A[P/X]$。

如果对每个 $a \in \Omega$ $v \in W$ 都有 $a, v \Vdash_{\mathfrak{P}} A$，我们简记为 $\Vdash_{\mathfrak{P}} A$。

我们称 $\mathfrak{M}$ 是**完备**的，如果对（扩展语言的）每个公式 C，它都有一个集合 $[C] \in \mathcal{W}$ 使得 $[C]^a = \{w \in W \mid a, w \Vdash_{\mathfrak{P}} C\}$成立。**谓词模型**是一个完备的谓词结构。

此后，我们保留元变量 $\mathfrak{P}$，使其在谓词模型上取值。事实上，谓词结构可被看作特定的双关系结构。形式上：

定义 3.7（双关系坍缩）. 给定如定义 3.6 所述的谓词结构 $\mathfrak{P}$，我们按如下方式定义双关系结构 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}$：

- 世界的集合为 $W_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} := \Omega \times W$。
- 偏序 $\leq_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}}$ 由 $(a, v) \leq_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} (b, w)$ 给出，当且仅当 $a \leq b$ 且 $v = w$。
- 集合类 $\mathcal{W}_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}}$ 包含每个 $V_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} := \{(a, v) \in W_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} \mid v \in V^a\}$，对于$V \in \mathcal{W}$。
- 命题符号的解释 $P_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}}$ 由 $\{(a, v) \in W_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} \mid v \in P^a\}$ 给出。
- 可及关系 $R_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}}$ 由 $(a, v) R_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} (b, w)$ 给出，当且仅当 $a = b$ 且 vR^aw。

我们最好证明 $\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}$ 满足定义 3.1 中的相应条件：

命题 3.8. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}$ 是一个定义良好的双关系结构。

证明。首先，我们证明每个 $V \in \mathcal{W}_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}}$ 都向上封闭。设 $(a, v) \leq_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} (b, v)$，不失一般性地，亦即 $a \leq b$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} (a, v) \in V_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} & \implies & v \in V^a & \text{by definition of } V_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} \\ & \implies & v \in V^b & \text{by monotonicity of } V^- \\ & \implies & (b, v) \in V_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} & \text{by definition of } V_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} \end{array}$$

现在我们来证明 $R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$ 是 $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$上的双模拟:

- 假设 $(a,v)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,w)$ $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,w)$，不失一般性，设 vR^aw 且 $a\leq b$。那么：$-$根据 $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$的定义，$(a,v)$ $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,v)$；并且，$-$根据 R^-的单调性， vR^bw，因此根据 $R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$的定义，$(b,v)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,w)$。所以我们可以选取 (b,v) 作为所需的世界。

- 假设 (b,v) $\geq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,v)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,w)$，不失一般性，设 $b\geq a$ 且 vR^aw。那么：$-$根据 $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$的定义，$(b,w)$ $\geq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,w)$；并且，$-$根据 R^-的单调性， vR^bw，因此根据 $R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$的定义，$(b,v)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,w)$。所以我们可以选取 (b,w) 作为所需的世界。✓

我们可以展示 $\mathfrak{P}$与 $\mathfrak{B}_\mathfrak{P}$的理论之间一种相当强的等价：**命题 3.9**（等价）。设 $A(\vec{X})$ 为一个公式，所有自由变量均已标出，且 $\vec{V}\in\mathcal{W}$满足 $|\vec{V}|=|\vec{X}|$。则 $(a,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}A(\vec{V})\iff a,\ v\vDash_\mathfrak{P}A(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$。证明。对 $A(\vec{X})$ 的结构使用归纳法:

- 若 $A(\vec{X})=X$ 且 $\vec{V}=V$，则：$(a,\ v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}V_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\iff v\in V^a$ 根据 $\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\iff a$的定义， $v\vDash_\mathfrak{P}V$根据 $\vDash_\mathfrak{P}$的定义
- $A=P$。$(a,\ v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}P\iff(a,\ v)\in P_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\iff v\in P^a\iff a,\ v\vDash_\mathfrak{P}P$。
- $A(\vec{X})=B(\vec{X})\to C(\vec{X})$：假设 $(a,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})\to C(\vec{V})$，并考虑任意满足 $b,v\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$ 的 $b\geq a$。根据归纳假设，$(b,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})$；再由 (a,v) $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,v)$，可得 $(b,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}C(\vec{V})$。再次根据归纳假设，得到 $b,v\vDash_\mathfrak{P}C(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$，这表明 $a,v\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})\to C(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$。反过来，假设 $a,v\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})\to C(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$，并考虑任意满足 $(b,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})$ 的 $(b,v)\geq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,v)$。根据归纳假设，$b,v\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$；再由 $a\leq b$，可得 $b,v\vDash_\mathfrak{P}C(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$。再次根据归纳假设，得到 $(b,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}C(\vec{V})$，这表明 $(a,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})\to C(\vec{V})$。
- $A=\Box B(\vec{X})$: $(a,\ v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\Box B(\vec{V})\iff(b,\ w)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})$ 对任意 $(a,\ v)$ $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,\ v)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,\ w)$ I.H. $\iff b,\ w\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$ 对任意 $a\leq b$和 $vR^bw\iff a,\ v\vDash_\mathfrak{P}\Box B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$
- $A=\blacksquare B(\vec{X})$: $(a,\ v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\blacksquare B(\vec{V})\iff(b,\ w)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V})$ 对任意 $(a,\ v)$ $\leq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,\ v)$ 和 $(b,\ w)R_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(b,\ v)$ I.H. $\iff b,\ w\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$ 对任意 $a\leq b$ 和 $wR^bv\iff a,\ v\vDash_\mathfrak{P}\blacksquare B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$
- $A=\forall XB(\vec{X},X):(a,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\forall XB(\vec{V},X)\iff(b,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}B(\vec{V},V)$ 对任意 $(b,v)\geq_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}(a,v)$ 且 $V\in\mathcal{W}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}$ I.H. $\iff b,v\vDash_\mathfrak{P}B(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}},V_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}})$ 对任意 $a\leq b$以及 $V_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\in\mathcal{W}\iff a,v\vDash_\mathfrak{P}\forall XB(\vec{V}_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}},X)$。✓

现在，我们可以从这一对应关系中进一步推出几个有用的结果:

推论 3.10 (全面性)。如果 $\mathfrak{P}$ 是完备的，那么 $\mathfrak{B}_\mathfrak{P}$ 也是完备的。

证明。假设 $\mathfrak{B}$ 是完备的，并考虑满足 $v\in[C]^a\iff a,\ v\vDash_\mathfrak{P}C$ 的集合 $[C]$。我们按要求得到:

$$\begin{aligned}
[C]_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}} &= \{(a,v)\in W_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\mid v\in[C]^a\} && \text{by definition of } -_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\\
&= \{(a,v)\in W_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\mid a,v\vDash_\mathfrak{P}C\} && \text{by definition of } [C]\\
&= \{(a,v)\in W_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}\mid (a,v)\vDash_{\mathfrak{B}_\mathfrak{P}}C\} && \text{by Proposition 3.9}\quad\checkmark
\end{aligned}$$

结合前面的命题 3.9 和推论 3.10，我们得到：

命题 3.11. $\forall \mathfrak{B} \vDash_{\mathfrak{B}} A \implies \forall \mathfrak{P} \vDash_{\mathfrak{P}} A$。

最后，在第6节的证明搜索论证中，一并继承以下内容也将是有用的：

引理 3.12（单调性）。如果 $a \leq b$ 且 $a,\ v \vDash_{\mathfrak{P}} A$ 则 $b,\ v \vDash_{\mathfrak{P}} A$。

证明。给定 $a \leq b$，我们有：

$$\begin{aligned} a, v \vDash_{\mathfrak{P}} A &\implies (a, v) \vDash_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} A && \text{by Proposition 3.9} \\ &\implies (b, v) \vDash_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} A && \text{since } (a, v) \leq_{\mathfrak{B}_{\mathfrak{P}}} (b, v) \text{ and Lemma 3.4} \\ &\implies b, v \vDash_{\mathfrak{P}} A && \text{by Proposition 3.9} \quad \checkmark \end{aligned}$$

3.3. **完全概括下的双排序（单）关系语义**。最后，让我们将已给出的语义改造为经典情形。我们可以把经典结构视为双关系结构或谓词结构的特例，其中 $\leq$ 是平凡的，即：

- 一个所有点彼此不可比的双关系结构；或者，
- 一个仅有一个直觉主义世界的谓词模型。为求完备，我们给

出一个自足的定义：

定义 3.13（经典结构）。一个**（单）关系结构** $\mathfrak{R}$ 包含以下数据：

- 一个**世界**集合 W。
- 一个**集合** 类 $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}(W)$（或**谓词**）。
- 针对每个 $P \in$Pr 的一个解释 $P_{\mathfrak{R}} \in \mathcal{W}$。
- 一个**可及关系** $R \subseteq W \times W$。

现在，我们暂时扩展公式语言，将每个 $V \in \mathcal{W}$作为命题符号，并设定 $V^{\mathfrak{R}} := V$。对于 $v \in W$，判断 $v \vDash_{\mathfrak{R}} A$ 通过对闭公式 A 的大小进行归纳来定义：

- $v \vDash_{\mathfrak{R}} P$ 当且仅当 $P_{\mathfrak{R}} v$。
- $v \vDash_{\mathfrak{R}} A \to B$ 当且仅当，只要 $v \vDash_{\mathfrak{R}} A$，就有 $v \vDash_{\mathfrak{R}} B$。
- $v \vDash_{\mathfrak{R}} \Box A$ 当且仅当，只要 vRw，就有 $w \vDash_{\mathfrak{R}} A$。
- $v \vDash_{\mathfrak{R}} \blacksquare A$ 当且仅当，只要 uRv，就有 $u \vDash_{\mathfrak{R}} A$。
- $v \vDash_{\mathfrak{R}} \forall X A$ 如果每当 $V \in \mathcal{W}$ 时，我们就有 $v \vDash_{\mathfrak{R}} A[V/X]$。

对于每个 $v \in W$，只要 $v \vDash_{\mathfrak{R}} A$，我们就简单地写作 $\vDash_{\mathfrak{R}} A$。

我们称 $\mathfrak{R}$ 是**完备的**，当且仅当对于（扩展语言中的）每个公式 C，都存在一个谓词 $[C] \in \mathcal{W}$，使得 $[C] = \{w \in W \mid w \vDash_{\mathfrak{R}} C\}$。一个**（单）关系模型**就是一个完备的关系结构。

今后，我们用元变量 $\mathfrak{R}$ 表示关系模型。对于经典二阶时态逻辑，我们的主要元逻辑结果类似于直觉主义情形下的主定理 3.3，即：

主定理 3.14（可靠性与完备性）。$\mathsf{Kt2} \vdash A \iff \forall \mathfrak{R} \vDash_{\mathfrak{R}} A$。

与直觉主义情形下的完备性一样，$\impliedby$ 方向通过第 4 节中对该逻辑的证明论呈现来实现。鉴于我们对关系模型的定义，可以将可靠性（即 $\implies$ 方向）分解为：（a）已确立的 IKt2 对双关系结构的可靠性；以及（b）对附加公理 $\neg\neg A \to A$ 的验证：

定理 3.15 (可靠性)。$\mathsf{Kt2} \vdash A \implies \forall \mathfrak{R} \vDash_{\mathfrak{R}} A$。

证明略。只需令 $\leq$ 为世界上的相等关系，即可将关系模型扩展为双关系模型。因此，根据定理 3.5，IKt2 的所有公理和规则对于关系模型来说都已是可靠的。剩下需要验证的是双重否定公理 $\neg\neg A \to A$。假设 $v \vDash_{\mathfrak{R}} \neg\neg A$，则 $v \nvDash_{\mathfrak{R}} A$ 或 $v \vDash_{\mathfrak{R}} \bot$。我们分别考虑每种情况：

$v \nvDash_{\mathfrak{R}} \neg A \implies v \vDash_{\mathfrak{R}} A$ 并且 $v \nvDash_{\mathfrak{R}} \bot$ 根据 $\vDash_{\mathfrak{R}}$ 和 $\neg$的定义$\implies v \vDash_{\mathfrak{R}} A$
$v \vDash_{\mathfrak{R}} \bot \implies v \vDash_{\mathfrak{R}} [A]$ 因为 $\bot = \forall X\, X$ 并且根据 $\vDash_{\mathfrak{R}}$的定义$\implies v \in [A]$ 根据 $\vDash_{\mathfrak{R}}$ 的定义 $\implies v \vDash_{\mathfrak{R}} A$ 根据 $[A]$ ✓的定义

4. Proof theory: labelled systems

现在我们将转向二阶时态逻辑的证明论呈现。除了其本身的价值外，正如前文所述，这也将有助于分解我们先前陈述的公理完备性结果。与前两节不同，我们将先介绍经典系统，然后通过施加适当的约束来恢复直觉主义版本。这样安排唯一的原因是简洁；如此一来，我们便可以定义所考虑的所有系统，而无需重复列出规则。

4.1. 带标签序列演算。 加标演绎系统 由 Gab- bay [Gab91] 提出，作为适用于多种逻辑的统一证明论框架。借助（单）关系语义的优势，这一思路被应用于模态逻辑 [Rus96]，以解决使用标准 Gentzen 序列为模态逻辑设计证明系统时遇到的困难。它们对带有标签的公式进行推理，标签表示公式被求值的世界，同时追踪约束世界之间可及关系的“控制”条件。Simpson [Sim94], 全面发展了直觉主义模态逻辑中的这类系统；此后，它们被广泛应用于经典模态逻辑（包括 Horn [Vig 00] 扩展或相干扩展 [Neg05] ）以及其他领域，例如证明逻辑 [Neg14], 、非正规模态逻辑 [Gha17], 、条件逻辑 [DON18], 和一阶模态逻辑 [GNO21], [Orl21], 等。

现在固定一个由**世界符号**构成的集合 Wl，记作 u，v，w等。**关系原子**是形如 vRw 的表达式，其中 v，$w \in$ Wl。**带标签公式**是形如$v : A$ 的表达式，其中 $v \in$ Wl，且 A 是一个公式。记 ℓFm 为带标签公式的集合。

（带标签）序列是形如$\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta$的表达式，其中$\mathbf{R}$是关系原子的集合，称为**关系上下文**；$\Gamma$和 Δ是带标签公式的多重集，分别称为**（左侧）序列项**和**（右侧）序列项**。这里的“ |”和“⇒”只是句法分隔符。非正式地说，我们可以将序列读作：“如果左侧的所有内容都成立，那么右侧就有某些内容为真。”这一理解将在后面的第7节中得到更形式化的阐述。

定义 4.1（序列演算）。 系统 ℓKt2由图2中的规则给出。我们还定义了该系统的两个直觉主义限制：

- ℓIKt2 是将 ℓKt2 限制为右侧为单元素集的序列式。（特别是，不可能有右结构步骤，w_r andc_r。）
- mℓIKt2 是对 ℓKt2 的限制，其中每个右逻辑步骤的前提中的右侧均为单元素集（即 $\Delta = \varnothing$）。

任何推理步骤下方的序列都是**结论**，而任何上方的序列都是**前提**。系统中的**证明**和**推导**按通常方式定义。

Identity and cut:

$$\mathsf{id}\,\frac{}{\mathbf{R}\,|\,v:A\Rightarrow v:A}\qquad \mathsf{cut}\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A\quad \mathbf{R}\,|\,\Gamma',v:A\Rightarrow\Delta'}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\Gamma'\Rightarrow\Delta,\Delta'}$$

Strutural rules:

$$\mathsf{w}_l\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:A\Rightarrow\Delta}\qquad \mathsf{w}_r\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A}$$

$$\mathsf{c}_l\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:A,v:A\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:A\Rightarrow\Delta}\qquad \mathsf{c}_r\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A,v:A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A}$$

Logical rules:

$$\to_l\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A\quad \mathbf{R}\,|\,\Gamma',v:B\Rightarrow\Delta'}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\Gamma',v:A\to B\Rightarrow\Delta,\Delta'}\qquad \to_r\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:A\Rightarrow\Delta,v:B}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A\to B}$$

$$\forall_l\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:A[C/X]\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma,v:\forall XA\Rightarrow\Delta}\qquad \forall_r\,\frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:A[P/X]}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:\forall XA}\ P\text{ fresh}$$

$$\Box_l\,\frac{\mathbf{R},vRw\,|\,\Gamma,w:A\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R},vRw\,|\,\Gamma,v:\Box A\Rightarrow\Delta}\qquad \Box_r\,\frac{\mathbf{R},vRw\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,w:A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:\Box A}\ w\text{ fresh}$$

$$\blacksquare_l\,\frac{\mathbf{R},uRv\,|\,\Gamma,u:A\Rightarrow\Delta}{\mathbf{R},uRv\,|\,\Gamma,v:\blacksquare A\Rightarrow\Delta}\qquad \blacksquare_r\,\frac{\mathbf{R},uRv\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,u:A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta,v:\blacksquare A}\ u\text{ fresh}$$

FIGURE 2. 带标签系统 ℓKt2（含切割）的规则。这里，如果某个符号未出现在下方序列中，则称其为新鲜的 。

如果演算 L 证明了$\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta$，我们就写作 $\mathrm{L}\vdash\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta$。若 $\mathrm{L}\vdash\cdot\,|\,\cdot\Rightarrow v\colon A$，我们就简写为 $\mathrm{L}\vdash A$。

ℓKt2不过是在时态逻辑带标签演算 [BN10, CLRT21]的基础上，加入二阶量词的常规规则（例如参见 [Gir87, 第3.A节。1], [RS24, 第5节。1] 或 [Tak87, 定义15。3]）。定义 ℓIKt2的右侧单例限制是直觉主义序列演算中的标准做法；直觉主义模态逻辑和时态逻辑的演算系统也以同样方式构造 [Sim94, Str13, Lyo25]。最后，mℓIKt2是一个处于中间状态的演算，体现了Mae- hara的思路 [Mae54, KS19]。我们引入它的原因是，后文第6节的证明搜索论证需要用到它。正如我们很快将会看到的，在我们所考虑的语言范围内，我们的两个直觉主义系统并无实质区别，参见命题 4.5。

首先陈述我们的主要证明论结果：

主定理 4.2 (主定理)。 如下：

(1) ℓKt2$\vdash A \implies \ell$Kt2$\setminus$切割 $\vdash A$。

(2) ℓIKt2$\vdash A \implies \ell$IKt2$\setminus$ 切割 $\vdash A$。

切割在序列演算证明理论中的可容许性是一项关键要求。特别是，它使系统更适合进行证明搜索，从而减少其中的非确定性。

至于我们的可靠性与完备性结果，即主要定理 3.3 和 3.14，这一结果是通过图 1a 和 1b 的“宏观概览”获得的。

4.2. **插曲：假阳性**。IK 的常见加标演算，例如 [Sim94 第7节中的演算，2], 包含以下规则，

$$\frac{}{\mathbf{R} \,|\, \Gamma, v : \bot \Rightarrow w : A} \tag{5}$$

其中 $\mathbf{R}$ （以及 Γ）可以是任意的。根据我们对否定的二阶定义， $\bot := \forall X X$，当 v 和 w 在 $\mathbf{R}$ 中由某条（无向）路径连接时，上述结论可在 ℓIKt2 中导出。形式上，若存在一个序列 $v = v_0, \ldots\ldots, v_n = w$，并且对每个 $i < n$，要么 $v_i R v_{i+1} \in \mathbf{R}$，要么 $v_{i+1} R v_i \in \mathbf{R}$，我们就称 v 和 w 在 $\mathbf{R}$ 中**连通**。我们有：

引理 4.3。 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R} \,|\, \Gamma, v : \bot \Rightarrow w : A$ 只要 v 和 w 在 $\mathbf{R}$ 中连通。

证明。我们对连接 $\mathbf{R}$ 中 v 与 w 的路径 $v = v_0, \ldots\ldots, v_n = w$ 的长度进行归纳。

- 若 $n = 0$，则 $v = w$，我们有：

$$\forall_l \frac{\mathsf{id} \dfrac{}{\mathbf{R} \,|\, \Gamma, w : A \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R} \,|\, \Gamma, w : \forall X X \Rightarrow w : A}$$

- 否则， vRv_1 或 $v_1 Rv$。我们分别通过以下方式处理这两种情况：

$$\forall_l \frac{\Box_l \dfrac{IH \dfrac{}{\mathbf{R}, vRv_1 \,|\, \Gamma, v_1 : \forall X X \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R}, vRv_1 \,|\, \Gamma, v : \Box \forall X X \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R}, vRv_1 \,|\, \Gamma, v : \forall X X \Rightarrow w : A} \qquad \forall_l \frac{\Box_l \dfrac{IH \dfrac{}{\mathbf{R}, v_1 Rv \,|\, \Gamma, v_1 : \forall X X \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R}, v_1 Rv \,|\, \Gamma, v : \blacksquare \forall X X \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R}, v_1 Rv \,|\, \Gamma, v : \forall X X \Rightarrow w : A}$$

其中，标记为归纳假设 的推导由归纳假设得到。 ✓

另一方面，显然，公式（5）的实例 $\cdot \,|\, v : \forall X X \Rightarrow w : P$ 在 ℓIKt2 中没有无切证明（因此也没有任何证明，参见主定理 4.2）。事实上，公式（5）的一般性并无实质影响：在任何 ℓKt2 的公式证明中，甚至在关系上下文连通的带标签序列证明中，根据图 2 中各规则即可看出，证明中出现的所有关系上下文始终保持连通。这体现了二阶逻辑中负基的一种更普遍现象：我们或许能够正确地定义正联结词，却未必能恢复它们全部的证明论行为（例如，参见 [TS00，第6节2] 中相关的讨论）。[8]

为了举一个更切合主题的例子，我们现在来讨论菱形模态。我们可以用以下方式，利用公式（3）的编码来模拟 IK 的常见标签 $\Diamond_r$ 规则（见 [Sim94，第7节。2]）

[8]请注意，我们对假命题的编码所捕捉的其实是 *additive* 正向的假，而非线性逻辑意义上的乘法假（例如参见 [Mil25，第9节。5]）。因此，更准确地说，或许应将其称为“0”，但在关于（二阶）直觉主义逻辑的文献中，这种记法似乎并不常见。

公式（3）的编码如下：

$$(6)\qquad \forall_r,\to_r \frac{\to_l \dfrac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w : A \qquad \blacksquare_l \dfrac{\mathsf{id}\dfrac{}{|\,v : A \Rightarrow v : A}}{vRw\,|\,w : \blacksquare A \Rightarrow v : A}}{\mathbf{R}, vRw\,|\,\Gamma, w : A \to \blacksquare X \Rightarrow v : X}}{\mathbf{R}, vRw\,|\,\Gamma \Rightarrow v : \forall X(\square(A \to \blacksquare X) \to X)}$$

◆同理。然而，尽管有定理 2.7，似乎仍无法对左规则进行这样的局部解释：

$$(7)\quad \diamond_l \frac{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u : \diamond A \Rightarrow w : B}\, v \text{ fresh} \qquad \blacklozenge_l \frac{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, u : A \Rightarrow w : B}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : \blacklozenge A \Rightarrow w : B}\, u \text{ fresh}$$

4.3. 关联两种直觉演算系统。 我们先前提到，就它们所定义的逻辑而言，我们的两种直觉演算系统并无实质差异。现在让我们将这一点形式化：

引理 4.4. 若mℓIKt2(\切割) $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$，则存在某个 $w\colon A \in \Delta$，使得 ℓIKt2(\切割) $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon A$（分别）。

证明。 对$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$在 m$\ell$IKt2 中的证明应用归纳法，并对其中应用的最后一条规则进行分类讨论：

- 同一规则和右逻辑规则：显然，因为它们的右侧都只有一个公式。
- 右弱化：$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$ w$\dfrac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta,\ v\colon\ A}{}$根据归纳假设，存在一个 $w\colon\ C$，属于 Δ，使得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon\ C$；这正是我们所需要的。
- 右收缩：$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta,\ v\colon\ A,\ v\colon\ A$ c$\dfrac{}{}$ $\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta,\ v\colon\ A$根据归纳假设，要么存在一个 $w\colon\ C$，属于 Δ，使得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon\ C$；要么 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v\colon\ A$；这正是我们所需要的。
- 非分支左规则：$\mathbf{R}\,|\,\Gamma' \Rightarrow \Delta$ $\dfrac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta}{}$根据归纳假设，存在 $w\colon\ A \in \Delta$，使得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma' \Rightarrow w\colon\ A$；应用相同的规则，可得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon A$。
- 蕴含左规则：R $\dfrac{|\,\Gamma \Rightarrow \Delta\ v\ \ A \qquad |\,\Gamma'\ v\ \ B \Rightarrow \Delta', : \mathrm{R}, : \mathrm{R}}{}$ $|\,\Gamma, \Gamma', v\colon A \to B \Rightarrow \Delta, \Delta'$根据归纳假设，要么存在 $w\colon C \in \Delta$，使得 ℓIKt2 $\vdash$ R $|\,\Gamma \Rightarrow w\colon C$；此时通过弱化 ℓIKt2 $\vdash$ R $|\,\Gamma, \Gamma', v\colon A \to B \Rightarrow w\colon C$，要么$\ell$IKt2 $\vdash$ R $|\,\Gamma \Rightarrow v\colon A$且存在 $w\colon C \in \Delta'$，使得 ℓIKt2 $\vdash$ R $|\,\Gamma', v\colon B \Rightarrow w\colon C$；此时通过 $\to_l$, ℓIKt2 $\vdash$ R $|\,\Gamma, \Gamma', v\colon A \to B \Rightarrow w\colon C$。
- 切割：$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta,\ v\colon\ A$ $\mathbf{R}\,|\,\Gamma',\ v\colon\ A \Rightarrow \Delta'$ 切割$\dfrac{}{}$ $\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \Gamma' \Rightarrow \Delta,\ \Delta'$根据归纳假设，要么存在 $w\colon\ C \in \Delta$，使得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon\ C$，此时由弱化可得 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \Gamma' \Rightarrow w\colon\ C$；要么 ℓIKt2 $\vdash$

$\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon\ A$ 并且存在 $w\colon\ C \in \Delta'$，使得 $\ell\mathsf{IKt2} \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma' \Rightarrow w\colon\ C$，此时由切割可得 $\ell\mathsf{IKt2} \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma,\ \Gamma' \Rightarrow w\colon\ C$。✓

由此可立即得到：

命题 4.5. $\mathsf{m}\ell\mathsf{IKt2}(\backslash\text{切割}) \vdash A \implies \ell\mathsf{IKt2}(\backslash\text{切割}) \vdash A$ （分别）。

注 4.6. 乍看之下，上述结果可能令人惊讶，因为即使在（一阶）直觉主义命题逻辑（不含模态）中，只要存在正联结词，该结果通常也不成立。例如，存在一个多后承的直觉主义证明 $A_0 \vee A_1 \Rightarrow A_0, A_1$，但显然无法证明 $A_0 \vee A_1 \Rightarrow A_i$。我们避免了这个问题，因为我们不使用原生的正联结词，包括 $\vee$，而只使用公式 (2) 中的非谓述编码。同样请注意，在上面的引理 4.4 中，并不要求 Δ 非空：根据 $\mathsf{m}\ell$IKt2 的规则分析，根本无法证明右侧为空的序列式。

4.4. **更多示例**。我们以另外几个带标签证明结束本节。首先，回顾第 2.3 节中的公理推导，下面给出 $\mathrm{I}_{\Diamond\Box}$ 的一个带标签证明：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{

二阶逻辑的：

$$(8)\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \mid v : P \Rightarrow v : P}\,\mathsf{id}}{vRw \mid w : \blacksquare P \Rightarrow v : P}\,\blacksquare_l}{vRw \mid w : \forall X X \Rightarrow v : P}\,\forall_l}{vRw \mid v : \Box\bot \Rightarrow v : P}\,\Box_l}{vRw \mid v : \Box\bot \Rightarrow v : \forall X X}\,\forall_r}{vRw \mid \cdot \Rightarrow v : \neg\Box\bot}\,\to_r \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \mid w : \bot \Rightarrow w : \bot}\,\mathsf{id}}{vRw \mid v : \Box\bot \Rightarrow w : \bot}\,\Box_l}{vRw \mid v : \forall X X \Rightarrow w : \bot}\,\forall_l}{vRw \mid v : \neg\neg\Box\bot \Rightarrow w : \bot}\,\to_l}{\cdot \mid v : \neg\neg\Box\bot \Rightarrow v : \Box\bot}\,\Box_r$$

前面的例子是 ℓIKt2的直觉主义证明。以下是经典证明的例子。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \mid v : A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\mathsf{id}}{vRw \mid w : \blacksquare A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\blacksquare_l}{vRw \mid v : \Box\blacksquare A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\Box_l}{\cdot \mid v : \Box\blacksquare A \Rightarrow v : A, v : \Box\bot}\,\Box_r \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \mid v : A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\mathsf{id}}{vRw \mid w : \Box A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\Box_l}{vRw \mid v : \blacksquare\Box A \Rightarrow v : A, w : \bot}\,\blacksquare_l}{\cdot \mid v : \blacksquare\Box A \Rightarrow v : A, v : \blacksquare\bot}\,\blacksquare_r$$

利用上面的两个证明，我们可以得到如下结果：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{proof above}}{\cdot \mid v : \Box\blacksquare A \Rightarrow v : A, v : \Box\bot}}{\mid \cdot \Rightarrow v : \Box\blacksquare A \to A, v : \Box\bot}\,\to_r \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{proof above}}{\cdot \mid v : \blacksquare\Box A \Rightarrow v : A, v : \blacksquare\bot}}{\cdot \mid \cdot \Rightarrow v : \blacksquare\Box A \to A, v : \blacksquare\bot}\,\to_r \qquad \dfrac{}{\cdot \mid v : A \Rightarrow v : A}\,\mathsf{id}}{\cdot \mid v : (\blacksquare\Box A \to A) \to A \Rightarrow v : A, v : \blacksquare\bot}\,\to_l}{\cdot \mid v : (\Box\blacksquare A \to A) \to (\blacksquare\Box A \to A) \to A \Rightarrow v : \Box\bot, v : A, v : \blacksquare\bot}\,\to_l}{\cdot \mid v : \forall X((\Box\blacksquare A \to X) \to (\blacksquare\Box A \to X) \to X) \Rightarrow v : \Box\bot, v : A, v : \blacksquare\bot}\,\forall_l$$

最后，我们来看一个关于非构造性原则的经典 ℓKt2 证明：$\forall X(A \vee B) \to A \vee \forall X B$ 对于 $X \notin \mathrm{FV}(A)$。为节省篇幅，我们省略每个左侧开头的“$\cdot \mid$”，也省略公式的所有标签（它们都相同）。

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{

赋值的方法则改编了Prawitz在其关于简单类型论的工作中提出的可能值 概念 [Pra68b]。[9]

5.1. **建立证明搜索**。 首先，我们将自底向上构建证明，从结论走向初始序列。我们将本着这一观点来描述证明搜索过程。

5.1.1. 用于识别公式出现的术语。 我们将使用关于证明与推理步骤中带标签的公式出现之间关系的标准术语。具体而言，逻辑步骤的**主**公式是下方序列中被区分出来的带标签的公式出现，其排版见图2。**辅助**公式是上方序列中任何被区分出来的带标签的公式出现。对此及相关术语的良好阐述，可见于[Bus98第1.2节3]。

5.1.2. 作为集合的前提集。 在证明搜索中，将前提集理解为带标签公式的集合而非多重集是有用的。当然，在存在结构规则的情况下，这对通常的可证性并无影响。实践中，若某一前提集中同一标记公式出现两次（或更多），则可安全地**弱化**其中一次（即通过应用w_l 或w_r 步骤将其删除）。若需要额外的副本，我们总是对逻辑步骤的主公式进行**收缩**（即通过应用c_l 或c_r 步骤进行复制）。具体而言，我们的证明搜索算法的步骤将由以下**宏规则**组成：

(9)

$$\rightarrow_l \frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \to B \Rightarrow \Delta, v : A \quad \mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \to B, v : B \Rightarrow \Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \to B \Rightarrow \Delta} \qquad \rightarrow_r \frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow \Delta, v : A \to B, v : B}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : A \to B}$$

$$\forall_l \frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : \forall X A, v : A[C/X] \Rightarrow \Delta}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : \forall X A \Rightarrow \Delta} \qquad \forall_r \frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \forall X A, v : A[P/X]}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \forall X A}\ P \text{ fresh}$$

$$\Box_l \frac{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, u : \Box A, v : A \Rightarrow \Delta}{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, u : \Box A \Rightarrow \Delta} \qquad \Box_r \frac{\mathbf{R}, vRw\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \Box A, w : A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \Box A}\ w \text{ fresh}$$

$$\blacksquare_l \frac{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, v : \blacksquare A, u : A \Rightarrow \Delta}{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma, v : \blacksquare A \Rightarrow \Delta} \qquad \blacksquare_r \frac{\mathbf{R}, uRv\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \blacksquare A, u : A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta, v : \blacksquare A}\ u \text{ fresh}$$

如前所述，借助结构规则，可以很容易地从 ℓKt2 的规则推导出这些宏规则。我们先指出，上述左规则甚至可以在 mℓIKt2 中推导出来（但右规则不行）。在证明搜索过程中，我们（隐式地）应用的唯一其他规则是弱化，即 w_l, w_r，用来删除带标签公式的多余副本，如前所述。今后我们将不再提及这类簿记工作。

注意，这些规则是**单调**的：自底向上推导时，序列式只会变得更大。我们指出由此带来的两个重要结果：

- 这些规则也是可逆的：结论的可证性意味着前提的可证性（通过弱化）。

[9] Prawitz 在其关于二阶逻辑的开创性著作中，通过超限递归采用了另一种方法 [Pra68a], , 但我们认为可能值方法更简洁。

- 上述任何宏步骤的无限分支，都可以通过取关系上下文、左部和右部的并，得到定义良好的（可能是无限的）极限。

5.1.3. 按活动枚举步骤。 现在，固定一个结论序列式，注意公式（9）中的步骤由主公式与辅助标记公式的选择，以及主公式出现在哪一侧所决定。我们将这些数据称为一个推理步骤的**活动** 。由于活动仅由有限数据决定，它们只有可数多个，因此可由 ω枚举。我们的证明搜索算法的思路是依次应用这些步骤中的每一个，从而使一个序列任一侧上每一个可能的标记公式最终都成为主公式。为确保不遗漏任何可能的步骤，我们将采用具有充分冗余的枚举：

约定 5.2 (充分枚举**).** 我们假定有一个活动枚举$(\alpha_i)_{i<\omega}$ ，其中每一个可能的活动都出现无穷多次。

备注 5.3 (活动与推理步骤**).** 注意，不同的推理步骤可能具有相同的活动，因为它们的上下文可能不同；但一旦结论序列式被固定，该活动至多决定一个推理步骤。它也可能根本不决定任何正确的推理步骤，例如，若相应的主公式并未出现在该序列中，或仅出现在错误的一侧。

5.2. **证明搜索分支**。 为方便起见，我们先引入一些记号。我们用 $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ 等表示任意带标签序列。若 $\mathcal{S} = \mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 和 $\mathcal{S}' = \mathbf{R}' \,|\, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$，我们就简记为 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ if $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}'$, $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 和 $\Delta \subseteq \Delta'$。对于序列式集合 $\{\mathcal{S}_i = \mathbf{R}_i \,|\, \Gamma_i \Rightarrow \Delta_i\}_{i \in I}$，我们简记序列 $\bigcup_{i \in I} \mathbf{R}_i \,|\, \bigcup_{i \in I} \Gamma_i \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Delta_i$。我们通常会在$\subseteq$根据 $\subseteq$取序列链的极限时，才使用这个并运算。

在本节余下部分，我们固定一个序列 $\mathcal{S}_0 = \mathbf{R}_0 \,|\, \Gamma_0 \Rightarrow \Delta_0$，它在 ℓKt2 中不可证明，即 $\ell\mathrm{Kt2} \nvdash \mathcal{S}_0$。

定义 5.4 （证明搜索分支）。 我们将 $\mathcal{S}_0$ 扩展为一个由不可证序列式组成的序列 $\mathfrak{S} = (\mathcal{S}_i)_{i<\omega}$，定义如下：

- 如果没有推理步骤以 $\mathcal{S}_i$ 为结论且以 α_i 为活动，则只需令 $\mathcal{S}_{i+1} := \mathcal{S}_i$（因此 $\mathcal{S}_{i+1}$ 仍不可证）。
- 否则，令 r_i 为以 $\mathcal{S}_i$ 为结论且以 α_i 为活动的推理步骤。
- 根据 $\mathcal{S}_i$ 不可证这一假设，r_i 的某个前提必定不可证。我们令 $\mathcal{S}_{i+1}$ 为某个不可证前提。[10]

如前所述，由于公式（9）中的宏规则是单调且自底向上的，我们确实有一条链 $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_1 \subseteq \cdots$。因此，我们令 $\mathcal{S}_\omega = \mathbf{R}_\omega \,|\, \Gamma_\omega \Rightarrow \Delta_\omega$为该序列的（无限）极限，即 $\bigcup_{i<\omega} \mathcal{S}_i$。

重要的是，我们有：

命题 5.5。 $\Gamma_\omega \cap \Delta_\omega = \varnothing$。

证明。 如果 Γ_ω 与 Δ_ω 相交，那么根据单调性，也会有某个 Γ_i 与 Δ_i相交。这意味着 $\mathcal{S}_i$ 可以通过同一规则步骤（以及弱化）推导出来，这与其不可证性相矛盾。✓

[10]选哪一个都无关紧要；为明确起见，若有多个选择，我们可以取最左边的那个。

5.3.**构造反模型：从证明搜索得到的预结构**。 证明搜索分支产生了一个预结构，也就是说，它是一个缺少集合域（因而也缺少对命题符号的解释）的结构，而我们的最终反模型 $\mathcal{S}_0$正是建立在这个预结构之上的。现在我们来定义这个预结构：

定义 5.6（预结构）。 我们通过以下数据定义 $\mathfrak{R}^-$：

- 世界的集合就是 Wl。
- 我们将可及关系定义为$\mathbf{R}_\omega$，即若 $vRw \in \mathbf{R}_\omega$，则 $v\mathbf{R}_\omega w$。

当 $\mathcal{S}_0$ 只包含一阶公式（即不含量词）时，上述预结构很容易导出一个真正的反模型（参见例如 [Tak87，第 8.17] 定理，其中对一阶直觉主义谓词逻辑作了类似阐述）。在我们的二阶设定中，扩展 $\mathfrak{R}^-$ 的关键难点在于确定一个恰当的谓词／集合论域。

5.4. **提取部分赋值**。 与其他反模型构造一样，其思路是找到一个结构，使 Γ_ω 中的所有公式都为真，并使 Δ_ω 中的所有公式都为假。这一要求可用于约束谓词的取值，但问题在于这些信息并不完整：某些公式的真值无法由 $\Gamma_\omega, \Delta_\omega$确定。试图以某种方式确定这些真值可能会导致矛盾，尤其是由于 $\rightarrow$的逆变性。

Sch¨utte 将这种赋值称为半赋值 （在 [Sch60], 中），或部分赋- 值 （在 [Sch77]中）。[11] Girard [Gir87]进一步将这一概念扩展为无切证明的真正三值语义。为减少技术上的展开，我们不明确使用部分赋值，而是分别使用由证明搜索分支 $\mathfrak{S}$ 的左侧 Γ_ω 和右侧 Δ_ω所诱导的真谓词与假谓词。

我们构造证明搜索分支时，旨在确保以下关键性质，这对应于 Sch¨utte 对半赋值的定义 [Sch60，定义 6。1]（后来在 [Sch77，第 11 节2]中称为部分赋值）：

命题 5.7（部分赋值）。如下：

(1) $v : A \rightarrow B \in \Gamma_\omega \implies (v : A \in \Delta_\omega$ 或 $v : B \in \Gamma_\omega)$。*(2)* $v : A \rightarrow B \in \Delta_\omega \implies (v : A \in \Gamma_\omega$ 且 $v : B \in \Delta_\omega)$ *(3)* $v : \Box A \in \Gamma_\omega \implies \forall w \in$ 左弱化 $(vR_\omega w \implies w : A \in \Gamma_\omega)$ *(4)* $v : \Box A \in \Delta_\omega \implies \exists w \in$ 左弱化 $(vR_\omega w$ 且 $w : A \in \Delta_\omega)$ *(5)* $v : \blacksquare A \in \Gamma_\omega \implies \forall u \in$ 左弱化$(uR_\omega v \implies u : A \in \Gamma_\omega)$ *(6)* $v : \blacksquare A \in \Delta_\omega \implies \exists u \in$ 左弱化$(uR_\omega v$ 且 $u : A \in \Delta_\omega)$ *(7)* $v : \forall X A \in \Gamma_\omega \implies \forall C \in Fm\, v : A[C/X] \in \Gamma_\omega$。*(8)* $v : \forall X A \in \Delta_\omega \implies \exists C \in Fm\, v : A[C/X] \in \Delta_\omega$。

证明。若 $v : A \in \Gamma_\omega$，则对于某个 i，有 $v : A \in \Gamma_i$。现在，根据证明搜索分支的定义以及我们所采用的活动枚举方式（参见约定 5.2），任意一个以 $v : A$ 为主公式的活动 α，都会在某个阶段 $j > i$ 应用。上述性质穷尽了给定主公式所对应的所有活动可能性，以及从 i 扩展证明搜索分支的所有可能方式。✓

[11]请注意，Sch¨utte 在 [Sch60] 中所称的“部分赋值”略有不同，它包含一种半赋值的扩张，使其在语义子句下闭合。我们沿用当前术语，因为它似乎更具启发性，也不太可能引起混淆。

回到 Sch¨utte 的部分赋值，我们可以把 $v\colon A\in\Gamma_\omega$ 理解为：相对于 $\mathfrak{R}^-$（或由谓词对其作适当扩张后），A 在世界 v 为真。对称地，$v\colon A\in\Delta_\omega$ 表示 A 在世界 v 为假。

5.5. **通过可能值构造相容反模型**。为了定义一个恰当的集合域，Prawitz 在 [Pra68b] 中的想法是，直接取所有 与证明搜索分支相容的可能性，即所谓的可能值。我们在此也采用类似的想法，不过同样避免显式定义可能值。回想一下，我们已经固定了一个不可证序列 $\mathcal{S}_0$，并将其扩展为证明搜索分支 $\mathfrak{S}=(\mathcal{S}_i)_{i<\omega}$。

定义5.8（可能扩张）。公式 C（相对于 $\mathfrak{S}$）的**可能扩张** 是满足以下条件的集合 $\mathsf{C}\subseteq\mathsf{Wl}$:

- $v:C\in\Gamma_\omega \implies v\in\mathsf{C}$; and,
- $v:C\in\Delta_\omega \implies v\notin\mathsf{C}$.

若 C 是 C 的可能扩张，则记作 $\mathsf{C}\geq_{\mathfrak{S}}C$。

显然，值得指出的是，每个公式 C 都有一个**最小（可能）扩张** $\lfloor C\rfloor:=\{v\in\mathsf{Wl}\mid v\colon C\in\Gamma^\omega\}$。现在，只需将所有可能扩张都作为集合，就可以从我们的预结构得到一个单关系结构:

定义 5.9 (反模型)。我们通过加入以下缺失数据，将 $\mathfrak{R}^-$ 扩展为一个结构 $\mathfrak{R}$：

- 集合域 $\mathcal{W}\subseteq\mathcal{P}(\mathsf{Wl})$ 包含所有可能扩张（针对所有公式）。
- 我们为每个 $P\in\mathsf{Pr.}$[12]设定 $P_{\mathfrak{R}}:=\lfloor P\rfloor$

关于该结构，我们所需的关键技术性结果，将公式在可能扩张上的求值与以下要求联系起来：Γ_ω 为真且 Δ_ω 为假。与证明搜索所诱导的部分赋值相容，正是这一点使我们得以证明 $\mathfrak{R}$ 事实上是完备的。

引理 5.10 (相容性)。对于公式 $A(\vec{X})$（所有自由变量均在 $\vec{X}=X_1,\ldots,X_n$中）以及 $\vec{C}=C_1,\ldots,C_n$，我们有:

(1) $v:A(\vec{C})\in\Gamma_\omega \implies v\vDash_{\mathfrak{R}}A(\vec{\mathsf{C}})$ *whenever* $\vec{\mathsf{C}}\geq_{\mathfrak{S}}\vec{C}$.

(2) $v:A(\vec{C})\in\Delta_\omega \implies v\nvDash_{\mathfrak{R}}A(\vec{\mathsf{C}})$ *whenever* $\vec{\mathsf{C}}\geq_{\mathfrak{S}}\vec{C}$.

其中我们用 $\vec{\ }\mathsf{C}$公理 $\geq_{\mathfrak{S}}\vec{C}$表示$\mathsf{C}_1\geq_{\mathfrak{S}}C_1,\ldots,\mathsf{C}_n\geq_{\mathfrak{S}}C_n$。

在证明这一点之前，我们先指出一个直接的推论。若 $\vDash_{\mathfrak{R}}\mathbf{R}\,|\,\Gamma\Rightarrow\Delta$，则记作 $\subseteq\mathbf{R}_\omega$，并且对于每个 $v\colon A\in\Gamma$（或 $v\colon A\in\Delta$），我们分别有 $v\vDash_{\mathfrak{R}}A$（或$v\nvDash_{\mathfrak{R}}A$）。作为上述引理 5.10 的一个特例，我们有:

命题 5.11。$\nvDash_{\mathfrak{R}}\mathcal{S}_0$。

引理 *5.10* 的证明。对 $A(\vec{X})$进行归纳法:

[12]事实上，在可能的扩展中，命题符号的解释并不重要，但为明确起见，我们选择最小的解释。

• 假设 $A(\vec{X}) = X$，并固定 C 和 C公理 $\geq_{\mathfrak{S}} C$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : C \in \Gamma_\omega & \Longrightarrow & v \in \mathsf{C} & \text{since } \mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C \\ & \Longrightarrow & v \vDash_{\mathfrak{R}} \mathsf{C} & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \\ v : C \in \Delta_\omega & \Longrightarrow & v \notin \mathsf{C} & \text{since } \mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C \\ & \Longrightarrow & v \nvDash_{\mathfrak{R}} \mathsf{C} & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \end{array}$$

• 假设 $A(\vec{X}) = A_0(\vec{X}) \to A_1(\vec{X})$，并固定 $\vec{C}$ 和 $\vec{\mathsf{C}}$公理 $\geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : A(\vec{C}) \in \Gamma_\omega & \Longrightarrow & v : A_0(\vec{C}) \in \Delta_\omega \text{ or } v : A_1(\vec{C}) \in \Gamma_\omega & \text{by Proposition 5.7} \\ & \Longrightarrow & v \nvDash_{\mathfrak{R}} A_0(\vec{\mathsf{C}}) \text{ or } v \vDash_{\mathfrak{R}} A_1(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by IH} \\ & \Longrightarrow & v \vDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \\ v : A(\vec{C}) \in \Delta_\omega & \Longrightarrow & v : A_0(\vec{C}) \in \Gamma_\omega \text{ and } v : A_1(\vec{C}) \in \Delta_\omega & \text{by Proposition 5.7} \\ & \Longrightarrow & v \vDash_{\mathfrak{R}} A_0(\vec{\mathsf{C}}) \text{ and } v :\nvDash_{\mathfrak{R}} A_1(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by IH} \\ & \Longrightarrow & v \nvDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \end{array}$$

• 假设 $A(\vec{X}) = \Box A'(\vec{X})$，并固定 $\vec{C}$ 和 $\vec{\mathsf{C}}$公理 $\geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : A(\vec{C}) \in \Gamma_\omega & \Longrightarrow & \forall w \in \mathsf{Wl}\,(v\mathbf{R}_\omega w \implies w : A'(\vec{C}) \in \Gamma_\omega) & \text{by Proposition 5.7} \\ & \Longrightarrow & \forall w \in \mathsf{Wl}\,(v\mathbf{R}_\omega w \implies w \vDash_{\mathfrak{R}} A'(\vec{\mathsf{C}})) & \text{by IH} \\ & \Longrightarrow & v \vDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \\ v : A(\vec{C}) \in \Delta_\omega & \Longrightarrow & \exists w \in \mathsf{Wl}\,(v\mathbf{R}_\omega w \text{ and } w : A'(\vec{C}) \in \Delta_\omega) & \text{by Proposition 5.7} \\ & \Longrightarrow & \exists w \in \mathsf{Wl}\,(v\mathbf{R}_\omega w \text{ and } w \nvDash_{\mathfrak{R}} A'(\vec{\mathsf{C}})) & \text{by IH} \\ & \Longrightarrow & v \nvDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{R}} \end{array}$$

• 当 $A(\vec{X}) = \blacksquare A'(\vec{X})$ 时的情况与上面类似。

• 假设 $A(\vec{X}) = \forall X A'(X, \vec{X})$，并固定 $\vec{C}$ 和 $\vec{\mathsf{C}}$公理 $\geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$。我们有：$v : A(\vec{C}) \in \Gamma_\omega \implies \forall C \in \mathsf{Fm}\ v : A'(C, \vec{C}) \in \Gamma_\omega$根据命题 5.7$\Longrightarrow \forall C \in \mathsf{Fm}\ \forall \mathsf{C}$公理 $\geq_{\mathfrak{S}} C\, v \vDash_{\mathfrak{R}} A'(\mathsf{C}\ \vec{\mathsf{C}}$公理$)$ 根据归纳假设$\Longrightarrow v \vDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}$公理$)$ 根据 $\vDash_{\mathfrak{R}}$ 的定义$v : A(\vec{C}) \in \Delta_\omega \implies \exists C \in \mathsf{Fm}\ v : A'(C, \vec{C}) \in \Delta_\omega$根据命题 5.7 $\Longrightarrow \exists C \in \mathsf{Fm}\ v \nvDash_{\mathfrak{R}} A'(\lfloor C \rfloor, \vec{\mathsf{C}}$公理$)$ 根据归纳假设$\Longrightarrow v \nvDash_{\mathfrak{R}} A(\vec{\mathsf{C}}$公理$)$ 根据 $\vDash_{\mathfrak{R}}$ ✓的定义

5.6. 综上所述：通过全赋值实现全面性。鉴于命题 5.11，为了得到完备性结果，我们还需证明 $\mathfrak{R}$ 是完备的。由于 $\mathfrak{R}$ 已经定义，我们可以用一种有些倒推的方式来做到这一点：

定义 5.12（解释全面性）。定义 $[C] := \{v \in \mathsf{Wl} \mid v \vDash_{\mathfrak{R}} C\}$。

现在，引理 5.10 还有另一个有用的推论：

命题 5.13。对于所有公式 C，$[C]$ 是 C 的一个可能扩张。

证明。只需在引理 5.10 中令 $A(\vec{X}) = C$ 且 $\vec{C} = \varnothing = \vec{X}$ 即可。 ✓

推论 5.14。$\mathfrak{R}$ 是完备的，因此也是一个关系模型。

用 Sch¨utte 的术语来说，$[-]$ 对应于公式的全赋值 [Sch60，定义 7.2]。请注意此处非谓述性 的关键作用：我们只能用一种包含所有可能扩张（包括其自身）的结构 $\mathfrak{R}$ 来定义 $[C]$。

现在我们已经证明了本节的主要结果：

定理 *5.1* 的证明。 采用逆否法。本节始终设 $\mathcal{S}_0 := \cdot \mid \cdot \Rightarrow v\colon A$，并由推论 5.14 和命题 5.11 得出结论。✓

6. Completeness via proof search: the intuitionistic case

现在我们转而讨论直觉主义情形下的无割完备性。由于我们已详细介绍过经典情形，本节将重点说明直觉主义情形与经典情形的差异。下面总结几个要点：

- 并非 IKt2 或 mIKt2 的所有规则都可以变为可逆规则。对于前者，这是因为我们缺少右结构规则，因此，例如，$\to_l$ 不可逆。对于后者，这是因为右逻辑规则不可逆。
- 因此，我们将构造证明搜索树，而非证明搜索分支。考虑到直觉主义结构具有偏序的形态，这一点并不令人意外。
- 在反模型构造的每个分支点，我们都需要处理极限序列，因此，我们的证明系统必须从现在起处理真正的无穷相继式。

通过直接使用演算系统 mℓIKt2（而非ℓIKt2），可以更容易地构造出适当的证明搜索树，并从中提取反模型。多后件演算的无割完备性结果也见于 [Tak87，第 52-59] 页，讨论的是克里普克模型上的一阶直觉主义谓词逻辑；以及 [Pra70]，讨论的是 Beth 模型上的二阶直觉主义谓词逻辑。请注意，在我们的设定中，借助命题 4.5，我们还得到了单后件演算 ℓIKt2 的无割完备性；借助命题 3.11，这一结果甚至适用于所有双关系模型。总之，本节的主要结果如下：

定理 6.1（直觉主义无割完备性）。 $\forall \mathfrak{P} \vDash_{\mathfrak{P}} A \implies \mathrm{m}\ell\mathsf{IKt2} \setminus \text{无割} \vdash A$.

推论 6.2。 $\forall \mathfrak{B} \vDash_{\mathfrak{B}} A \implies \ell\mathsf{IKt2} \setminus \text{无割} \vdash A$。

本节其余部分的结构与上一节相同。

6.1. **建立证明搜索**。 现在，我们将 mℓIKt2 解释为（可能是）无穷相继式 $\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta$，其中部分或全部 $\mathbf{R}$ Γ，Δ 可能是（可数）无穷的。我们称这样的序列式在 mℓIKt2 中是**可证明的**，或是 mℓIKt2 的一个**定理**，若存在有限的$\mathbf{R}' \subseteq \mathbf{R}$、$\Gamma' \subseteq \Gamma$ 和 $\Delta' \subseteq \Delta$，使得 $\mathbf{R}' \mid \Gamma' \Rightarrow \Delta'$ 按通常意义在 mℓIKt2 中可证明。请注意，序列式的无穷性并不影响其上的推理步骤仍由有限数据的活动所决定这一事实，参见约定 5.2。

第 5.1 节中关于构造 mℓIKt2 证明的所有讨论仍然适用，不过我们只考虑公式（9）中的左宏规则，因为右宏规则在 mℓIKt2 中不可导出。因此，我们将约定 5.2 中活动的枚举限制为具有左侧主公式的活动。现在，我们的证明搜索算法将在两个阶段之间交替进行：左侧阶段应用左规则，右侧阶段应用右规则。我们将再次把证明搜索改写为反模型构造，建立一个谓词结构，其中左侧阶段决定直觉主义世界之内的解释，而右侧阶段则决定一个树结构，从而导出相应的偏序。

更形式化地说，**LHS阶段**从某个在 mℓIKt2 中不可证的（可能是无穷的）序列$\mathcal{S}_0$ 开始，其定义与定义 5.4 中的证明搜索分支完全相同，生成一个由不可证序列组成的分支 $(\mathcal{S}_i)_{i<\omega}$。也就是说，在 i^{th}阶段，它应用具有活动 α_i 和结论 $\mathcal{S}_i$ 的步骤（如果该步骤存在），并令 $\mathcal{S}_{i+1}$

为某个不可证前提（或分别为 $\mathcal{S}_i$）。与第5.2节一样，该阶段是单调的：$i \leq j \implies \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}_j$。因此，根据弱化，所应用的步骤也是可逆的。再次记作 $\mathcal{S}_\omega = \bigcup \mathcal{S}_i$，注意，如果 $\mathcal{S}_\omega$ 是可证的，那么根据无穷序列式的可证性定义，对于某个 $i < \omega$，$i<\omega$也将是 $\mathcal{S}_i$，因此我们有：

观察 6.3。 如果 mℓIKt2 $\nvdash \mathcal{S}_0$ 且 $\mathcal{S}_\omega$ 是从 $\mathcal{S}_0$开始的 *LHS*阶段的极限，那么也有 mℓIKt2 $\nvdash \mathcal{S}_\omega$。

右侧阶段 从一个（可能是无限的）序列 $\mathcal{S} = \mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow \Delta$ 开始，该序列在 mℓIKt2 中不可证明，并且自底向上简单地应用 mℓIKt2 的一个右逻辑步骤。这样的步骤由在 Δ 中选择一个主公式所确定（新符号可重新命名）。同样，唯一的前提必须保持不可证明。注意，通过检查右逻辑步骤可知，右侧阶段总是终止于一个序列 $\mathcal{S}' = \mathbf{R}' \,|\, \Gamma' \Rightarrow \Delta'$，其中 Δ' 是一个单元素集。注意，右侧阶段对于右侧并非单调的，但对于左侧仍保持单调，即我们仍有 $\mathbf{R}' \supseteq \mathbf{R}$以及 $\Gamma' \supseteq \Gamma$，但通常没有 $\Delta' \supseteq \Delta$。因此，它通常不是可逆的。

6.2. **证明搜索树**。 如前所述，我们的证明搜索树将在 RHS阶段出现分支。由于 RHS阶段由 RHS 中主标记公式的选择决定，我们将据此为树结构中的节点命名。记 $\sigma, \tau,$ 等遍历 $\ell\mathrm{Fm}^{<\omega}$。我们用 :: 表示有限序列的拼接。记 $\sqsubseteq$ 为 $\ell\mathrm{Fm}^{<\omega}$上的前缀序，即 $\sigma \sqsubseteq \tau$ 当且仅当 τ 可写作 $\sigma :: \sigma'$。当然，$\sqsubseteq$ 确实是一个偏序。

本节余下部分中，我们固定一个（可能是无限的）序列 $\mathcal{S}_0^\varepsilon = \mathbf{R}_0^\varepsilon \,|\, \Gamma_0^\varepsilon \Rightarrow \Delta_0^\varepsilon$，它在 m$\ell$IKt2 中不可证明。

定义6.4（证明搜索树）。 **证明搜索树** $\mathfrak{S}$ 由一棵树$T \subseteq \ell\mathrm{Fm}^{<\omega}$ 和序列式 $\{\mathcal{S}_i^\sigma = \mathbf{R}^\sigma \,|\, \Gamma_i^\sigma \Rightarrow \Delta_i^\sigma\}_{\sigma \in T, i<\omega}$ 构成，定义如下：

- 对于任意序列 $\mathcal{S}_0^\sigma$，应用左侧阶段构造一条链 $\mathcal{S}_0^\sigma \subseteq \mathcal{S}_1^\sigma \subseteq \cdots$ 由不可证序列组成。定义 $\mathcal{S}^\sigma = \mathbf{R}^\sigma \,|\, \Gamma^\sigma \Rightarrow \Delta^\sigma$ 为这条链的极限 $\mathcal{S}_\omega^\sigma$（同样必定不可证，参见观察 6.3）。
- 对于每个公式 $v\colon\ A \in \Delta^\sigma$, σ 在 T 中都有一个子节点 $\sigma :: (v\colon\ A)$。我们将 $\mathcal{S}^\sigma{}_{::(w:A)}{}_0$ 定义为结论为 $\mathcal{S}^\sigma$ 、主公式为 $v : A$ 的推理步骤的（唯一）前提（在新符号的重命名意义下唯一）。

再一次，由于构造 $\mathfrak{S}$ 时只纳入了不可证序列，和经典情形中的命题 5.5 一样，我们有一个重要结论：

命题 6.5。 $\Gamma^\sigma \cap \Delta^\sigma = \varnothing$，对所有 $\sigma \in T$。

6.3. **迈向反模型：由证明搜索构造预结构**。 与第 5.3 节一样，我们构造的证明搜索树 $\mathfrak{S}$会生成一个“预结构”，也就是缺少集合域（因而也缺少命题符号的解释）的谓词结构：

定义 6.6（预结构）。 我们将谓词结构 $\mathfrak{P}^-$ 定义如下：

- 直觉主义世界的集合就是 $T \subseteq \ell\mathrm{Fm}^{<\omega}$。
- 偏序就是 $\sqsubseteq$ 在 T上的限制。
- 模态世界的集合就是 Wl。
- 在 $\sigma \in T$处的可及关系就是$\mathbf{R}^\sigma$，也就是说，如果 $vRw \in \mathbf{R}^\sigma$，那么 $v\mathbf{R}^\sigma w$。

注意，由于左部和右部阶段的单调性，$\sigma \sqsubseteq \tau \implies \mathbf{R}^\sigma \subseteq \mathbf{R}^\tau$。

6.4. **提取部分赋值**。 这部分论证与第5.4节中的经典情形类似，不过这里要建立与我们的谓词语义相容的专门局部性质：

命题 6.7 （部分赋值）。 我们有如下结果：

(1) $v\colon A\to B\in\Gamma^\sigma \implies \forall \tau\sqsupseteq\sigma\,(v\colon A\in\Delta^\tau$或 $v\colon B\in\Gamma^\tau)$ (2) $v\colon A\to B\in\Delta^\sigma \implies \exists \tau\sqsupseteq\sigma\,(v\colon A\in\Gamma^\tau$且 $v\colon B\in\Delta^\tau)$ (3) $v\colon \Box A\in\Gamma^\sigma \implies \forall \tau\sqsubseteq\sigma\,\forall w\in$左弱化 $(v\mathrm{R}^\tau w \implies w\colon A\in\Gamma^\tau)$ (4) $v\colon \Box A\in\Delta^\sigma \implies \exists \tau\sqsupseteq\sigma\,\exists w\in$左弱化 $(v\mathrm{R}^\tau w$且 $w\colon A\in\Delta^\tau)$ (5) $v\colon \blacksquare A\in\Gamma^\sigma \implies \forall \tau\sqsupseteq\sigma\,\forall u\in$左弱化 $(u\mathrm{R}^\tau v \implies u\colon A\in\Gamma^\tau)$ (6) $v\colon \blacksquare A\in\Delta^\sigma \implies \exists \tau\sqsupseteq\sigma\,\exists u\in$左弱化 $(u\mathrm{R}^\tau v$且 $u\colon A\in\Delta^\tau)$ (7) $v\colon \forall X A\in\Gamma^\sigma \implies \forall \tau\sqsupseteq\sigma\,\forall C\in\mathsf{Fm}\ v\colon A[C/X]\in\Gamma^\tau$(8) $v\colon \forall X A\in\Delta^\sigma \implies \exists \tau\sqsupseteq\sigma\,\exists C\in\mathsf{Fm}\ v\colon A[C/X]\in\Delta^\tau$

证明。 我们分别考察以下各个情形：

(1) 设 $\tau\sqsupseteq\sigma$。根据单调性，我们有 $v\colon A\to B\in\Gamma^\tau$，因此根据相应 $\to_l$ 步骤中 Γ^σ 的方向，可以得到$v\colon A\in\Delta^\tau$ 或 $v\colon B\in\Gamma^\tau$。(2) 若 $v\colon A\to B\in\Delta^\sigma$，则只需令 $\tau=\sigma::(v\colon A\to B)$。(3) 设 $\tau\sqsupseteq\sigma$且 $v\mathrm{R}^\tau w$。根据单调性，我们有 $v\colon \Box A\in\Gamma^\tau$，因此根据相应的 $\Box_l$ 步骤，也有$w\colon A\in\Gamma^\tau$。(4) 若 $v\colon \Box A\in\Delta^\sigma$，则只需令 $\tau=\sigma::(v\colon \Box A)$，并令 w 为相应 $\Box_r$ 步骤中的新世界变量。(5)（与(3)类似）。(6)（与(4)类似）。(7) 设 $\tau\sqsupseteq\sigma$ 且 $C\in\mathsf{Fm}$。根据单调性，我们有 $v\colon \forall X A\in\Gamma^\tau$，因此根据相应的 $\forall_l$ 步骤，也有 $v\colon A[C/X]\in\Gamma^\tau$。(8) 若$v\colon \forall X A\in\Delta^\sigma$，则只需令 $\tau=\sigma::(v\colon \forall X A)$，并令 C 为相应 $\forall_r$ 步骤中的命题特征变量。✓

6.5. **经由可能值得到的相容反模型**。我们继续将第5节的机制改写到直觉主义情形。回想一下，我们已经固定了一个不可证序列 $\mathcal{S}_0^\varepsilon$，并将其扩展为证明搜索树 $\mathfrak{S}$，参见定义6.4，其中特别包括极限序列$(\mathcal{S}^\sigma)_{\sigma\in T}$。我们相应地按直觉主义情形改写定义5.8：

定义 6.8 （可能外延）。 公式 C （相对于$\mathfrak{S}$）的一个**可能扩张** 是一个族$\mathsf{C}=\{\mathsf{C}^\sigma\subseteq \mathsf{Wl}\}_{\sigma\in T}$，满足：

- $\sigma\sqsubseteq\tau \implies \mathsf{C}^\sigma\subseteq\mathsf{C}^\tau$；并且，
- $v:C\in\Gamma^\sigma \implies v\in\mathsf{C}^\sigma$；并且，
- $v:C\in\Delta^\sigma \implies v\notin\mathsf{C}^\sigma$。

若C是 C相对于 $\mathfrak{S}$的可能扩张，则记为$\mathsf{C}\geq_{\mathfrak{S}} C$。

注意，每个公式 C 仍然存在一个**最小（可能）扩张** $\lfloor C\rfloor$，其中 $\lfloor C\rfloor^\sigma := \{v\in$ 左弱化 $\mid v\colon C\in\Gamma^\sigma\}$。请注意，关于 $\sqsubseteq$ 的单调性继承自证明搜索过程中左部的单调性：若 $\sigma\sqsubseteq\tau$，则 $\Gamma^\sigma\subseteq\Gamma^\tau$，因而$\lfloor C\rfloor^\sigma\subseteq\lfloor C\rfloor^\tau$，对任意公式 C均成立。我们再次得到一个谓词结构，其集合包含所有可能外延：

定义6.9 (反模型)。 我们通过补入以下缺失数据，将 $\mathfrak{P}^-$ 扩展为一个结构 $\mathfrak{P}$：

- 模态谓词类 $\mathcal{W}$ 包含所有可能扩张的公式。对于每个扩张 C，其解释 C^σ 如定义 6.8 所定义。
- 我们将每个 $P \in \mathbf{Pr}$ 与可能扩张 $\lfloor P \rfloor$对应起来。

我们再次需要一个关键的相容性结果：

引理 6.10 (相容性)。 对于公式 $A(\vec{X})$ 和 $\vec{C}$，我们有：

(1) $v : A(\vec{C}) \in \Gamma^\sigma \implies \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}})$ *whenever* $\vec{\mathsf{C}} \geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$.
(2) $v : A(\vec{C}) \in \Delta^\sigma \implies \sigma, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}})$ *whenever* $\vec{\mathsf{C}} \geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$.

同样，在证明之前，我们先指出一个直接推论。若 $\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow \Delta$，则记作 $\sigma \vDash_{\mathfrak{P}}$，其中 $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}^\sigma$，并且对每个 $v\colon\ A \in \Gamma$（或每个 $v\colon\ A \in \Delta$），都有$\sigma,\ v \vDash_{\mathfrak{P}} A$（或 $\sigma,\ v \nvDash_{\mathfrak{P}} A$，分别如此）。作为上述引理 6.10 的一个特例，我们有：

命题 6.11. $\varepsilon \nvDash_{\mathfrak{P}} \mathcal{S}_0^\varepsilon$。

引理 *6.10* 的证明。对 $A(\vec{X})$进行归纳：

- 假设 $A(\vec{X}) = X$，并固定 C 和 $\mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : C \in \Gamma^\sigma & \implies & v \in \mathsf{C}^\sigma & \text{since } \mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C \\ & \implies & \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} \mathsf{C} & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{P}} \\ v : C \in \Delta^\sigma & \implies & v \notin \mathsf{C}^\sigma & \text{since } \mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C \\ & \implies & \sigma, v \nvDash_{\mathfrak{P}} \mathsf{C} & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

- 假设 $A(\vec{X}) = A_0(\vec{X}) \to A_1(\vec{X})$，并固定 $\vec{C}$和 $\vec{\mathsf{C}} \geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : A(\vec{C}) \in \Gamma^\sigma & \implies & \forall \tau \sqsupseteq \sigma \left[v : A_0(\vec{C}) \in \Delta^\tau \text{ or } v : A_1(\vec{C}) \in \Gamma^\tau \right] & \text{由命题 6.7} \\ & \implies & \forall \tau \sqsupseteq \sigma \left[\tau, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A_0(\vec{\mathsf{C}}) \text{ or } \tau, v \vDash_{\mathfrak{P}} A_1(\vec{\mathsf{C}}) \right] & \text{由归纳假设} \\ & \implies & \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{根据 } \vDash_{\mathfrak{P}} \text{的定义} \\ v : A(\vec{C}) \in \Delta^\sigma & \implies & \exists \tau \sqsupseteq \sigma \left[v : A_0(\vec{C}) \in \Gamma^\tau \text{ and } v : A_1(\vec{C}) \in \Delta^\tau \right] & \text{由命题 6.7} \\ & \implies & \exists \tau \sqsupseteq \sigma \left[\tau, v \vDash_{\mathfrak{P}} A_0(\vec{\mathsf{C}}) \text{ and } \tau, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A_1(\vec{\mathsf{C}}) \right] & \text{由归纳假设} \\ & \implies & \sigma, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{由 } \vDash_{\mathfrak{P}} \text{的定义} \end{array}$$

- 假设 $A(\vec{X}) = \Box A'(\vec{X})$，并固定 $\vec{C}$和 $\vec{\mathsf{C}} \geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$。我们有：

$$\begin{array}{rcll} v : A(\vec{C}) \in \Gamma^\sigma & \implies & \forall \tau \sqsupseteq \sigma \forall w \in \mathsf{WI} \left[v \mathbf{R}^\tau w \implies w : A'(\vec{C}) \in \Gamma^\tau \right] & \text{by Proposition 6.7} \\ & \implies & \forall \tau \sqsupseteq \sigma \forall w \in \mathsf{WI} \left[v \mathbf{R}^\tau w \implies \tau, w \vDash_{\mathfrak{P}} A'(\vec{\mathsf{C}}) \right] & \text{by IH} \\ & \implies & \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{P}} \\ v : A(\vec{C}) \in \Delta^\sigma & \implies & \exists \tau \sqsupseteq \sigma \exists w \in \mathsf{WI} \left[v \mathbf{R}^\tau w \text{ and } w : A'(\vec{C}) \in \Delta^\tau \right] & \text{由命题 6.7} \\ & \implies & \exists \tau \sqsupseteq \sigma \exists w \in \mathsf{WI} \left[v \mathbf{R}^\tau w \text{ and } \tau, w \nvDash_{\mathfrak{P}} A'(\vec{\mathsf{C}}) \right] & \text{由归纳假设} \\ & \implies & \sigma, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{根据 } \vDash_{\mathfrak{P}} \text{的定义} \end{array}$$

- 当 $A(\vec{X}) = \blacksquare A'(\vec{X})$ 时，情况与上面类似。

- Suppose $A(\vec{X}) = \forall X A'(X, \vec{X})$, and fix $\vec{C}$ and $\vec{\mathsf{C}} \geq_{\mathfrak{S}} \vec{C}$. We have:

$$\begin{array}{rll}
v : A(\vec{C}) \in \Gamma^\sigma & \Longrightarrow \forall \tau \sqsupseteq \sigma \, \forall C \in \mathsf{Fm}\ v : A'(C, \vec{C}) \in \Gamma^\tau & \text{by Proposition 6.7} \\
& \Longrightarrow \forall \tau \sqsupseteq \sigma \, \forall \mathsf{C} \geq_{\mathfrak{S}} C\ \tau, v \vDash_{\mathfrak{P}} A'(\mathsf{C}, \vec{\mathsf{C}}) & \text{by IH} \\
& \Longrightarrow \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{P}} \\
v : A(\vec{C}) \in \Delta^\sigma & \Longrightarrow \exists \tau \sqsupseteq \sigma \, \exists C \in \mathsf{Fm}\ v : A'(C, \vec{C}) \in \Delta^\tau & \text{by Proposition 6.7} \\
& \Longrightarrow \exists \tau \sqsupseteq \sigma \, \exists C \in \mathsf{Fm}\ \tau, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A'(\lfloor C \rfloor, \vec{\mathsf{C}}) & \text{by IH} \\
& \Longrightarrow \sigma, v \nvDash_{\mathfrak{P}} A(\vec{\mathsf{C}}) & \text{by definition of } \vDash_{\mathfrak{P}} \quad \checkmark
\end{array}$$

6.6. **将所有内容整合起来：通过全赋值实现全面性**。同样，鉴于命题 6.11，对于我们的完备性结果，仍需证明 $\mathfrak{P}$ 是完备的。我们采用与经典情形相同的非谓述方法。

定义 6.12（解释全面性）。定义 $[C] := \{[C]^\sigma\}_{\sigma \in T}$，其中：

$$[C]^\sigma := \{v \in \mathsf{WI} \mid \sigma, v \vDash_{\mathfrak{P}} C\}$$

现在，引理 6.10 还有一个有用的推论：

命题 6.13。 $[C]$ 是 C 关于 $\mathfrak{S}$ 的一个可能扩张。

证明。只需令 $A(\vec{X}) = C$，并在引理 6.10 中令 $\vec{C} = \varnothing$。 ✓

推论 6.14。 $\mathfrak{P}$ 是完备的，因此也是一个谓词模型。

现在，我们已经得出了本节的主要结果：

定理 *6.1* 的证明。采用逆否法。本节中令 $\mathcal{S}_0^\varepsilon := \cdot \mid \cdot \Rightarrow v\colon A$，并由推论 6.14 和命题 6.11 得出结论。✓

7. Simulating labelled proofs axiomatically

本节的目标是证明带标签序列演算 ℓIKt2 和 ℓKt2 分别相对于 IKt2 和 Kt2 的可靠性。为此，我们证明：(i) 每个序列都可以解释为我们语法中的一个公式；(ii) 每条规则都可以解释为公理化中的一条可容许规则。本节的主要结果是：

定理 7.1 (公理化可靠性)。我们有如下结果：

(1) 若 $\ell\mathsf{IKt2} \vdash A$，则 $\mathsf{IKt2} \vdash A$。

(2) 若 $\ell\mathsf{Kt2} \vdash A$，则 $\mathsf{Kt2} \vdash A$。

7.1. **公式解释**。多叉树 是一个有向无环图，其底层无向图是一棵树。因此，它是连通的，也就是说，任意两个不同节点之间都恰好存在一条无向边路径。**带标签的多叉树序列** 是一个带标签的序列$\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta$，其中$\mathbf{R}$编码了一棵带标签的多叉树，并且 Γ和 Δ 中出现的所有标签都由$\mathbf{R}$（作为无向图）连通。

根据 [CLRT21，引理 5，2]在 ℓKt中对带标签的多叉树序列（进而也包括带标签公式）的任何推导，都只包含带标签的多叉树序列；这一结论可以推广到我们的系统：

引理 7.2。任何在 ℓKt2 （或 ℓIKt2）中可证的带标签多叉树序列，都有一个在 ℓKt2 （或分别在 ℓIKt2 ）中的推导，其中只包含带标签多叉树序列。

此后我们将只处理带标签多叉树序列。在 [CLRT21]中，这用于将带标签序列转换为嵌套序列；另一方面，嵌套序列可以直接解释为时态语言 [GPT11]中的表达式。这里我们定义一种将带标签多叉树序列直接解释为时态公式的方法。

我们写作 $u \ \mathbf{R}\!\leftrightsquigarrow\ v$，表示 u 和 v 在由$\mathbf{R}$编码的底层无向图中相连。如果 $uRv \in \mathbf{R}$（或 $vRu \in \mathbf{R}$），我们将集合$\mathbf{R}^{u\setminus v}$记作由原子 $xRy \in \mathbf{R}$ 组成的集合，其中 x 在$\mathbf{R} \setminus \{uRv\}$（或分别在$\mathbf{R} \setminus \{vRu\}$）中与 u 相连。

定义 7.3（左解释）。对于出现在$\mathbf{R}$ 或 Γ中的标签 u，其**左（公式）解释**$\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma)$在 u处定义为：

$$\bigwedge_{u:B\in\Gamma} B \wedge \bigwedge_{uRv\in\mathbf{R}} \Diamond \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Gamma) \wedge \bigwedge_{vRu\in\mathbf{R}} \blacklozenge \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Gamma)$$

如果 $\mathbf{R} = \varnothing$或 $\Gamma = \varnothing$，则这是定义良好的，我们令 $\mathsf{lfm}^u(\cdot \mid \cdot) = \top$。注意，这一翻译利用了式（2）和（3）中用二阶量词给出的 $\wedge$、$\top$、$\Diamond$ 和 $\blacklozenge$ 的定义。

定义 7.4（右解释）。对于出现在$\mathbf{R}$ 或 Δ中的标签 u，在 u处的**右（公式）解释** $\mathsf{rfm}^u(\mathbf{R} \mid \Delta)$为：

$$\bigvee_{u:B\in\Delta} B \vee \bigvee_{uRv\in\mathbf{R}} \Box \mathtt{rfm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Delta) \vee \bigvee_{vRu\in\mathbf{R}} \blacksquare \mathtt{rfm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Delta)$$

如果$\mathbf{R} = \varnothing$或 $\Delta = \varnothing$，则这是良定义的，我们令 $\mathsf{rfm}^u(\cdot \mid \cdot) = \bot$。注意，这种转换利用了公式 (2) 中以二阶量词定义的 $\vee$ 和 $\bot$。

定义 7.5（经典公式解释）。对于$\mathbf{R}$、Γ 或 Δ中的标签 u，在 u处的**（经典）公式解释** $\mathsf{cfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta)$在 u处定义为：$\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \to \mathsf{rfm}^u(\mathbf{R} \mid \Delta)$

在直觉主义情形下，序列左侧与右侧之间的不对称性意味着公式解释需要更仔细地分析$\mathbf{R}$的多叉树结构：

定义 7.6（直觉主义公式解释）。对于出现在$\mathbf{R}$ 或 Γ中的标签 u，或者对于 $u = w$，在 u 处的**（直觉主义）公式解释** $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w : A)$定义如下：

- $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \to A$，当 $u = w$时。
- $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus v} \mid \Gamma) \to \Box\mathsf{ifm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Gamma \Rightarrow w : A)$，当存在 v 使得$v \ \mathbf{R}^{\setminus\{uRv\}}\!\!\leftrightsquigarrow\ w$ 并且 $uRv \in \mathbf{R}$ 时。
- $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus v} \mid \Gamma) \to \blacksquare\mathsf{ifm}^v(\mathbf{R}_{v\setminus u} \mid \Gamma \Rightarrow w : A)$，当存在 v 使得$v \ \mathbf{R}^{\setminus\{vRu\}}\!\!\leftrightsquigarrow\ w$ 并且 $vRu \in \mathbf{R}$ 时。

若 $\mathbf{R} = \varnothing$，则仅当 $u = w$时才有定义，例如，$\mathsf{ifm}^w(\cdot \mid \Rightarrow w : A) = A$。

事实 7.7。左解释的一个性质：

- $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, u : B) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \wedge B$
- 并且如果存在 x 使得 $uRx \in \mathbf{R}$ 且 $x \ \mathbf{R}\!\leftrightsquigarrow\ w$ 局部公式$^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, w : B) =$ 局部公式$^u(\mathbf{R}_{u\setminus x} \mid \Gamma, w : B) \wedge \Diamond$局部公式$^x(\mathbf{R}_{x\setminus u} \mid \Gamma, w : B)$
- 并且如果存在 x，使得 $xRu \in \mathbf{R}$ 并且 $x \ \mathbf{R}\!\leftrightsquigarrow\ w \, \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, w : B) = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus x} \mid \Gamma, w : B) \wedge \blacklozenge \mathtt{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\setminus u} \mid \Gamma, w : B)$

事实 7.8。 如果 v 不出现在 $\mathbf{R}$ 中：

- $\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A) = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma)$
- $\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : C) = \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w : C)$

7.2. 公式上下文。 由于后件公式的位置不同，公式翻译也会随之改变，因此我们定义两种"公式上下文"。它们是具有特定形式的公式，其中包含一个唯一的原子公式 $\{\}$，称为空位，可用公式代入。以下这种公式上下文具有左侧解释的形式。我们称之为合取上下文。

$$F^\wedge\{\} ::= \{\} \mid A \wedge F^\wedge\{\} \mid \Diamond F^\wedge\{\} \mid \blacklozenge F^\wedge\{\}$$

我们将 $F^\wedge\{A\}$ 记作把公式 A 代入 $F^\wedge\{\}$ 中的空位。我们还将空代入 $F^\wedge\{\varnothing\}$ 定义为 $F^\wedge\{\top\}$。我们也用 $F^\wedge$ 代替 $F^\wedge\{\varnothing\}$。

对于完整公式解释，我们定义一个蕴含上下文 $F^\rightarrow\{\}$：

$$F^\rightarrow\{\} ::= \{\} \mid A \rightarrow F^\rightarrow\{\} \mid \Box F^\rightarrow\{\} \mid \blacksquare F^\rightarrow\{\}$$

注意，我们可以按如下方式在这些上下文之间进行转换：

- $F^\wedge\{\} = \{\}$ 当且仅当 $F^\rightarrow\{\} = \{\}$
- $F^\wedge\{\} = A \wedge F^{\wedge\prime}\{\}$ 当且仅当 $F^\rightarrow\{\} = A \rightarrow F^{\rightarrow\prime}\{\}$
- $F^\wedge\{\} = \Diamond F^{\wedge\prime}\{\}$ 当且仅当 $F^\rightarrow\{\} = \Box F^{\rightarrow\prime}\{\}$
- $F^\wedge\{\} = \blacklozenge F^{\wedge\prime}\{\}$ 当且仅当 $F^\rightarrow\{\} = \blacksquare F^{\rightarrow\prime}\{\}$

蕴含上下文 $F^\rightarrow\{A\}$ 的代入定义为：将公式 A 代入空位（此处我们不需要对空上下文进行代入）。

这使得我们可以将这些上下文相互转换，从而有助于交换后件公式标签的切割规则和 $\rightarrow_l$ 规则。

这里我们表明，序列的公式解释可以写成上下文的形式。

引理 7.9。 设 u 是$\mathbf{R}$的支集中的一个标签。那么，存在 F 使得

(1) $\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A) = F^\wedge\{A\}$；以及

(2) $\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v\colon A) = F^\rightarrow\{A\}$。

证明。 我们对路径 $u \overset{R}{\leftrightsquigarrow} v$进行归纳

对于基例，我们有 $u = v$。

$\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u\colon A) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \wedge A$ 且 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow u\colon A) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \rightarrow A$ 因此，(1) 中可取 $F^\wedge\{\} = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \wedge \{\}$；于是，(2) 中 $F^\rightarrow\{\} = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \rightarrow \{\}$。

对于归纳情形，存在一个标签 x 使得 uRx 或 xRu，且 $x \overset{R}{\leftrightsquigarrow} v$。

$\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus x}\,|\,\Gamma) \wedge \Diamond \mathsf{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\setminus u}\,|\,\Gamma, v\colon A)$，且 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon B) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus x}\,|\,\Gamma) \rightarrow \boxdot \mathsf{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\setminus u}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon B)$，其中 $\Diamond = \Diamond$ 且 $\boxdot = \Box$ if $uRx \in \mathbf{R}$，并且 $\Diamond = \blacklozenge$ 且 $\boxdot = \blacksquare$ if $xRu \in \mathbf{R}$。

根据归纳假设，存在 F_1 s.t. $\mathsf{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\setminus u}\,|\,\Gamma, v\colon A) = F_1^\wedge\{A\}$ 且 $\mathsf{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\setminus u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v\colon A) = F_1^\rightarrow\{A\}$

因此，对于 (1)，我们可以设 $F^\wedge\{\} = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus x}\,|\,\Gamma) \wedge \Diamond F_1^\wedge\{\}$，从而对于 (2)，$F^\rightarrow\{\} = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\setminus x}\,|\,\Gamma) \rightarrow \Box F_1^\rightarrow\{\}$。✓

引理 7.10. 给定一个序列 $\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A \Rightarrow w\colon B$，其中标签 u 属于 $\mathbf{R}$的支集。那么，存在 F_1, F_2, F_3 使得

(1) $\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B) = F_1^\rightarrow\{F_2^\wedge\{A\} \rightarrow F_3^\rightarrow\{B\}\}$; *and*

(2) $\mathsf{IKt2} \vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, w : B \Rightarrow v : A) \leftrightarrow F_1^{\rightarrow}\{F_3^{\wedge}\{B\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}\}$.

证明. (1) 的证明：我们对路径 $u \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} w$进行归纳。

- $u = w$：若 $\mathsf{ifm}^w(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A \Rightarrow w\colon B) = \mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A) \to B$根据引理 7.9(1)，存在 F_2，使得 $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A) = F_2^{\wedge}\{A\}$。因此，
$$\mathtt{ifm}^w(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B) = F_2^{\wedge}\{A\} \to B$$
- 存在一个标签 x，使得 uRx 或 $xRu \in \mathbf{R}$ 且 $x \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} w$：那么，有两种可能的情况：
  - $v \in \mathbf{R}^{u\backslash x}$：那么，根据事实 7.8

$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ v\colon A \Rightarrow w\colon B)$
$$= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma, v : A) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow w : B)$$
其中，$\boxdot = \Box$ 若 $uRx \in \mathbf{R}$ 且 $\boxdot = \blacksquare$ 若 $xRu \in \mathbf{R}$。
根据引理 7.9(1)，存在 F_2 s.t. $\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma,\ v\colon A) = F_2^{\wedge}\{A\}$。
根据引理 7.9(2)，存在 F_3' s.t. $\mathsf{ifm}^{w_1}(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow w : B) = F'^{\rightarrow}_3\{B\}$。令 $F_3^{\rightarrow}\{\,\} = \boxdot F'^{\rightarrow}_3\{\,\}$，我们得到
$$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v\colon A \Rightarrow w\colon B) = F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}$$

- $v \in \mathbf{R}^{x\backslash u}$：那么，根据事实 7.8

$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ v\colon A \Rightarrow w\colon B)$
$$= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B)$$
其中，$\boxdot = \Box$ 若 $uRx \in \mathbf{R}$ 且 $\boxdot = \blacksquare$ 若 $xRu \in \mathbf{R}$。
根据归纳假设，存在 F_1', F_2, F_3 使得
$$\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B) = F_1'^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}\}$$
Set $F_1^{\rightarrow}\{\,\} = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot F_1'^{\rightarrow}\{\,\}$ and we get
$$\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow w : B) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}\}$$

（2）的证明：我们对路径 $u \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} w$ 进行归纳法。

- $u = w$:
  - either $u = v$:
$$\begin{aligned}\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u : A \Rightarrow u : B) &= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u : A) \to B\\ &= (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \wedge A) \to B\\ \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u : B \Rightarrow u : A) &= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, u : B) \to A\\ &= (B \wedge \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma)) \to A\\ &\leftrightarrow B \to \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma) \to A\end{aligned}$$
  - or there is a label y such that uRy or yRu, and $y \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} v$

$$\begin{aligned}\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v : A \Rightarrow u : B) &= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma, v : A) \to B\\ &= (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \wedge \otimes\mathtt{lfm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma, v : A)) \to B\end{aligned}$$

$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \ w\colon\ B \Rightarrow v\colon\ A)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash y}\,|\,\Gamma, w:B) \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)\\
&= (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \wedge B) \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)\\
&\qquad\qquad \leftrightarrow B \to \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)
\end{aligned}
$$

其中 $\boxplus = \Box$ 若 $uRy \in \mathbf{R}$ 且 $\boxplus = \blacksquare$ 若 $yRu \in \mathbf{R}$。

- 存在一个标签 x 使得 uRx 或 $xRu \in \mathbf{R}$ 且 $x \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} w$ 且 $v \in \mathbf{R}^{u\backslash x}$：– 或者 $u = v$:

$\mathsf{ifm}^v(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \ v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ B)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\backslash x}\,|\,\Gamma, v:A) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash v}\,|\,\Gamma \Rightarrow w:B)\\
&\qquad = (\mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\backslash x}\,|\,\Gamma) \wedge A) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash v}\,|\,\Gamma \Rightarrow w:B)
\end{aligned}
$$

$\mathsf{ifm}^v(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \ w\colon\ B \Rightarrow v\colon\ A)$

$$
\begin{aligned}
&\qquad = \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, w:B) \to A\\
&= (\diamondsuit\mathtt{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash v}\,|\,\Gamma, w:B) \wedge \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\backslash x}\,|\,\Gamma)) \to A\\
&\qquad\qquad \leftrightarrow \diamondsuit\mathtt{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash v}\,|\,\Gamma, w:B) \to \mathtt{lfm}^v(\mathbf{R}_{v\backslash x}\,|\,\Gamma) \to A
\end{aligned}
$$

– or there is a label y such that uRy or yRu, and $y \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} v$

$\mathtt{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v:A \Rightarrow w:B)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma, v:A) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow w:B)\\
&\quad = (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \wedge \circledast\mathtt{lfm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma, v:A))\\
&\qquad\qquad \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow w:B)
\end{aligned}
$$

$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \ w\colon\ B \Rightarrow v\colon\ A)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash y}\,|\,\Gamma, w:B) \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)\\
&\quad = (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \wedge \diamondsuit\mathtt{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, w:B))\\
&\qquad\qquad \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)\\
&\qquad\qquad \leftrightarrow \diamondsuit\mathtt{lfm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, w:B)\\
&\qquad\qquad\qquad \to \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x\backslash y}\,|\,\Gamma) \to \boxplus\mathtt{ifm}^y(\mathbf{R}_{y\backslash u}\,|\,\Gamma \Rightarrow v:A)
\end{aligned}
$$

其中 $\boxdot = \Box$ 若 $uRx \in \mathbf{R}$ 且 $\boxdot = \blacksquare$ 若 $xRu \in \mathbf{R}$, 并且其中 $\boxplus = \Box$ 若 $uRy \in \mathbf{R}$ 且 $\boxplus = \blacksquare$ 若 $yRu \in \mathbf{R}$。

- 存在一个标签 x 使得 uRx 或 $xRu \in \mathbf{R}$ 且 $x \overset{\mathbf{R}}{\leftrightsquigarrow} w$ 且 $v \in \mathbf{R}^{x\backslash u}$:

若$\mathsf{m}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ \ v\colon\ \ A \Rightarrow w\colon\ \ B)$

$$
\begin{aligned}
&= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, v:A \Rightarrow w:B)\\
&\qquad\qquad = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot F_1'^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\to}\{B\}\}
\end{aligned}
$$

其中 $\boxdot = \Box$ 如果 $uRx \in \mathbf{R}$ 并且 $\boxdot = \blacksquare$ 如果 $xRu \in \mathbf{R}$。

By inductive hypothesis, $\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, w:B \Rightarrow v:A)$ is equivalent to $F_1'^{\rightarrow}\{F_3^{\wedge}\{B\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}\}$, so:

$$\begin{aligned}\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma,\ w:\ B \Rightarrow v:\ A)&\\ &= \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot\mathtt{ifm}^x(\mathbf{R}_{x\backslash u}\,|\,\Gamma, w:B \Rightarrow v:A)\\ &\leftrightarrow \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R}_{u\backslash x}\,|\,\Gamma) \to \boxdot F_1'^{\rightarrow}\{F_3^{\wedge}\{B\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}\}\end{aligned}$$

✓

7.3. **技术引理**。以下引理刻画了我们在证明序列规则的可靠性时所需的上下文的行为。请注意，我们可以将其中大多数引理视为模态规则和公理（例如必然化或模态算子的函子性）的推广。

引理 7.11。若 $\mathsf{IKt2} \vdash A$ 则 $\mathsf{IKt2} \vdash F^{\rightarrow}\{A\}$。

证明。我们对 $F^{\rightarrow}\{\ \}$ 的结构进行归纳法。

基例 $F^{\rightarrow}\{\} = \{\}$ 立即成立。

若 $F^{\rightarrow}\{A\} = B \to F_1^{\wedge}\{A\}$：根据归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\wedge}\{A\}$。由公理 $F_1^{\rightarrow}\{A\} \to B \to F_1^{\rightarrow}\{A\}$ 应用肯定前件规则 mp：$\mathsf{IKt2} \vdash B \to F_1^{\rightarrow}\{A\}$。

若 $F^{\rightarrow}\{A\} = \Box F_1^{\rightarrow}\{A\}$ 或 $\blacksquare F_1^{\rightarrow}\{A\}$：由归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A\}$。由必然化$\Box$或必然化$\blacksquare$，分别得到 $\mathsf{IKt2} \vdash \Box F_1^{\rightarrow}\{A\}$ 或 $\blacksquare F_1^{\rightarrow}\{A\}$。✓

引理 7.12. $\mathsf{IKt2} \vdash F^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F^{\rightarrow}\{A\} \to F^{\rightarrow}\{B\}$

证明。我们对 $F^{\rightarrow}\{\}$的结构进行归纳。

基例 $F^{\rightarrow}\{\} = \{\}$ 由以下事实得出：$(A \to B) \to A \to B$ 是直觉主义命题逻辑的一个定理。

我们有 3 个归纳情形：

- $F^{\rightarrow}\{\} = C \to F_1^{\rightarrow}\{\}$。由归纳假设 $\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{B\}$。因此，通过命题推理可得 $\mathsf{IKt2} \vdash (C \to F_1^{\rightarrow}\{A \to B\}) \to (C \to F_1^{\rightarrow}\{A\}) \to (C \to F_1^{\rightarrow}\{B\})$。
- $F^{\rightarrow}\{\} = \Box F_1^{\rightarrow}\{\}$。根据归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{B\}$。应用必然化$\Box$，得到 $\mathsf{IKt2} \vdash \Box(F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{B\})$。根据 $\mathsf{D}_\Box$ 和肯定前件规则，$\mathsf{IKt2} \vdash \Box F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to \Box F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \Box F_1^{\rightarrow}\{B\}$。
- $F^{\rightarrow}\{\} = \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{\}$。根据归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{B\}$。应用必然化$\blacksquare$，得到 $\mathsf{IKt2} \vdash \blacksquare(F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{B\})$。根据 $\mathsf{D}_\blacksquare$ 和肯定前件规则，$\mathsf{IKt2} \vdash \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{B\}$。✓

引理 7.13. $\mathsf{IKt2} \vdash F^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F^{\wedge}\{A\} \to F^{\wedge}\{B\}$

证明。我们对 $F^{\wedge}\{\}$ 的结构进行归纳。

基例 $F^{\wedge}\{\} = \{\}$ is 可由以下事实得出：$(A \to B) \to A \to B$ is 是直觉主义命题逻辑的一个定理。

我们有 3 个归纳情形：

- $F^{\wedge}\{\} = C \wedge F_1^{\wedge}\{\}$ 因此 $F^{\rightarrow}\{\} = C \to F_1^{\rightarrow}\{\}$。根据归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\wedge}\{A\} \to F_1^{\wedge}\{B\}$，所以通过命题推理可得 $\mathsf{IKt2} \vdash (C \to F_1^{\rightarrow}\{A \to B\}) \to (C \wedge F_1^{\wedge}\{A\}) \to (C \wedge F_1^{\wedge}\{B\})$。
- $F^{\wedge}\{\} = \Diamond F_1^{\wedge}\{\}$ 和 $F^{\rightarrow}\{\} = \Box F_1^{\rightarrow}\{\}$。根据归纳假设，$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\wedge}\{A\} \to F_1^{\wedge}\{B\}$。应用必然化$\Box$，得到 $\mathsf{IKt2} \vdash \Box(F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to F_1^{\wedge}\{A\} \to F_1^{\wedge}\{B\})$。根据 $\mathsf{D}_\Box$，$\mathsf{D}_\Diamond$，再由肯定前件规则得到 $\mathsf{IKt2} \vdash \Box F_1^{\rightarrow}\{A \to B\} \to \Diamond F_1^{\wedge}\{A\} \to \Diamond F_1^{\wedge}\{B\}$

- $F^\wedge\{\} = \blacklozenge F_1^\wedge\{\}$ 和 $F^\rightarrow\{\} = \blacksquare F_1^\rightarrow\{\}$。根据归纳假设，IKt2 $\vdash$ $F_1^\rightarrow\{A\to B\}\to F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\wedge\{B\}$ 应用必然化$\blacksquare$，得到 IKt2 $\vdash \blacksquare(F_1^\rightarrow\{A\to B\}\to F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\wedge\{B\})$。根据 D$\blacksquare$，D$\blacklozenge$，再由肯定前件规则得到 IKt2 $\vdash \blacksquare F_1^\rightarrow\{A\to B\}\to\blacklozenge F_1^\wedge\{A\}\to\blacklozenge F_1^\wedge\{B\}$。✓

引理 7.14. IKt2 $\vdash F^\wedge\{A\to B\}\to F^\rightarrow\{A\}\to F^\wedge\{B\}$.

证明。 我们通过对 $F^\wedge\{\}$ 的结构进行归纳。

基例 $F^\wedge\{\} = \{\}$ 由 $(A\to B)\to A\to B$ 是直觉主义命题逻辑的定理这一事实得出。

我们有3个归纳情形：

- $F^\wedge\{\} = C\wedge F_1^\wedge\{\}$ 因此 $F^\rightarrow\{\} = C\to F_1^\rightarrow\{\}$ 根据归纳假设，有 IKt2 $\vdash F_1^\wedge\{A\to B\}\to F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\}$，从而命题推理给出 IKt2 $\vdash (C\wedge F_1^\wedge\{A\to B\})\to (C\to F_1^\rightarrow\{A\})\to (C\wedge F_1^\rightarrow\{B\})$。
- $F^\wedge\{\} = \Diamond F_1^\wedge\{\}$ 因此 $F^\rightarrow\{\} = \Box F_1^\rightarrow\{\}$。根据归纳假设，IKt2 $\vdash F_1^\wedge\{A\to B\}\to F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\}$。应用必然化$\Box$，得到 IKt2 $\vdash \Box(F_1^\wedge\{A\to B\}\to F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\})$。根据公理 D$\Diamond$ 和肯定前件规则，IKt2 $\vdash \Diamond F_1^\wedge\{A\to B\}\to\Diamond(F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\})$。由命题 2.11(5)，利用蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash \Diamond F_1^\rightarrow\{A\to B\}\to\Box F_1^\rightarrow\{A\}\to\Diamond F_1^\rightarrow\{B\}$。
- $F^\wedge\{\} = \blacklozenge F_1^\wedge\{\}$ 因此 $F^\rightarrow\{\} = \blacksquare F_1^\rightarrow\{\}$ 根据归纳假设，IKt2 $\vdash F_1^\wedge\{A\to B\}\to F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\}$。应用必然化$\blacksquare$，得到 IKt2 $\vdash \blacksquare(F_1^\wedge\{A\to B\}\to F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\})$。根据公理 D$\blacklozenge$ 和肯定前件规则，IKt2 $\vdash \blacklozenge F_1^\wedge\{A\to B\}\to\blacklozenge(F_1^\rightarrow\{A\}\to F_1^\wedge\{B\})$。结合命题 2.11(6)，利用蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash \blacklozenge F_1^\rightarrow\{A\to B\}\to\blacksquare F_1^\rightarrow\{A\}\to\blacklozenge F_1^\rightarrow\{B\}$。✓

引理 7.15. IKt2 $\vdash (F^\wedge\{A\}\to F^\rightarrow\{B\})\to F^\rightarrow\{A\to B\}$。

证明。 我们按照 $F^\wedge\{\}$ 的结构进行归纳。

基例 $F^\wedge\{\} = \{\}$ 可由以下事实得出：$(A\to B)\to A\to B$ 是直觉主义命题逻辑的一个定理。

我们有 3 种归纳情形：

- $F^\wedge\{\} = C\wedge F_1^\wedge\{\}$ 因此 $F^\rightarrow\{\} = C\to F_1^\rightarrow\{\}$。根据归纳假设 IKt2 $\vdash (F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\})\to F_1^\rightarrow\{A\to B\}$，并通过命题推理可得 IKt2 $\vdash ((C\wedge F_1^\wedge\{A\})\to(C\to F_1^\rightarrow\{B\}))\to(C\to F^\rightarrow\{A\to B\})$。
- $F^\wedge\{\} = \Diamond F_1^\wedge\{\}$ 且 $F^\rightarrow\{\} = \Box F_1^\rightarrow\{\}$。根据归纳假设 IKt2 $\vdash (F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\})\to F^\rightarrow\{A\to B\}$。应用必然化$\Box$，可得 IKt2 $\vdash \Box(F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\}\to F_1^\rightarrow\{A\to B\})$。然后，D$\Box$并运用肯定前件规则可得 IKt2 $\vdash \Box(F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\})\to\Box F_1^\rightarrow\{A\to B\}$。结合命题 2.11(3)，由蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash (\Diamond F_1^\wedge\{A\}\to\Box F_1^\rightarrow\{A\})\to\Box F_1^\rightarrow\{A\to B\}$。
- $F^\wedge\{\} = \blacklozenge F_1^\wedge\{\}$ 因此 $F^\rightarrow\{\} = \blacksquare F_1^\wedge\{\}$。根据归纳假设，IKt2 $\vdash (F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\})\to F^\rightarrow\{A\to B\}$。应用必然化$\blacksquare$，得到 IKt2 $\vdash \blacksquare(F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\}\to F_1^\rightarrow\{A\to B\})$。然后，由 D$\blacksquare$和肯定前件规则可得 IKt2 $\vdash \blacksquare(F_1^\wedge\{A\}\to F_1^\rightarrow\{B\})\to\blacksquare F_1^\rightarrow\{A\to B\}$。根据命题 2.11(4)，蕴涵的传递性给出 IKt2 $\vdash (\blacklozenge F_1^\wedge\to\blacksquare F^\rightarrow\{A\})\to\blacksquare F_1^\rightarrow\{A\}$。✓

引理 7.16。 IKt2 $\vdash \forall X F^\rightarrow\{A\}\to F^\rightarrow\{\forall X A\}$ 每当 X 不在 $F^\rightarrow\{\}$中自由出现时。

证明。 我们对 $F^{\rightarrow}\{\}$使用归纳法。基例 $F^{\rightarrow}\{\} = \{\}$ 直接可得。

我们有 3 种归纳情形：

- $F^{\rightarrow}\{\} = C \to F_1^{\rightarrow}\{\}$ 且 $X \notin \mathrm{FV}(C)$：归纳假设给出 IKt2 $\vdash \forall X F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。结合 $\mathsf{D}_\forall$ 和 V IKt2 $\vdash \forall X(C \to F_1^{\rightarrow}\{A\}) \to C \to \forall X F_1^{\rightarrow}\{A\}$，根据蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash \forall X(C \to F_1^{\rightarrow}\{A\}) \to C \to F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。

- $F^{\rightarrow}\{\} = \Box F_1^{\rightarrow}\{\}$：根据归纳假设，我们有 IKt2 $\vdash \forall X F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。应用必然化$_\Box$和 $\mathsf{D}_\Box$，可得 IKt2 $\vdash \Box\forall X F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \Box F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。结合例 2.10，根据蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash \forall X \Box F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \Box F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。

- $F^{\rightarrow}\{\} = \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{\}$：根据归纳假设，我们有 IKt2 $\vdash \forall X F_1^{\rightarrow}\{A\} \to F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。应用 $\mathsf{nec}_\blacksquare$和 $\mathsf{D}_\blacksquare$，得到 IKt2 $\vdash \blacksquare\forall X F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$。结合例 2.10(4)，由蕴涵的传递性可得 IKt2 $\vdash \forall X \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{A\} \to \blacksquare F_1^{\rightarrow}\{\forall X A\}$. ✓

7.4. **IKt2 的公理化可靠性** ℓIKt2。 为了证明定理 7.1(1)，我们将确立一个更强的陈述：

引理 7.17 (解释的可靠性)。 若 ℓIKt2 $\vdash \mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A$ 则 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A)$，对于 u 出现在 $\mathbf{R}$ 或 $u = w$中的标签。

这是通过对 ℓIKt2 中证明 $\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A$ 进行归纳来证明的，其中基例和归纳情形均由以下引理给出。回想一下，我们可以假设证明中出现的任何序列 $\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A$ 都是多树标记序列；特别是， $\Gamma \cup \{w\colon A\}$ 中的标签由 $\mathbf{R}$ 连接。

引理 7.18 (局部可靠性)。 设 $\{\mathbf{R} \mid \Gamma_i \Rightarrow x_i\colon A_i\}_{i<n}\, \mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow x\colon A$ 是ℓIKt2 的一个规则实例，其中 $n = 0$、1 或2，并设 $u \in \mathbf{R}$ 或 $u = x$。

若对所有 $i < n$，IKt2 $\vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma_i \Rightarrow x_i\colon A_i)$ 成立，则IKt2 $\vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow x\colon A)$成立。

对于 ℓIKt2的大多数规则，其证明与 IK [Str13]，的嵌套序列证明相似，但采用当前的公式解释。我们着重说明证明中的一些技术细节。

规则 $\to_l$ 需要特别注意上下文如何被解释为公式，因为两个前提在右侧可能带有不同的标签。右侧标签决定了公式解释的定义方式（定义 7.6），尤其决定关系原子 $xRy \in \mathbf{R}$ 应读作 $\Box$ （当 xRy 属于从 u 到 w 的路径时），还是读作 $\Diamond$ （否则）。因此，在模拟 $\to_l$ 的公理化证明中，需要交互公理 $\mathsf{I}_{\Diamond\Box}\colon (\Diamond A \to \Box B) \to \Box(A \to B)$ 和 $\mathsf{I}_{\blacklozenge\blacksquare}\colon (\blacklozenge A \to \blacksquare B) \to \blacksquare(A \to B)$。

在时态情形中，处理规则 $\Box_l$ 比通常在模态情形中更为微妙，因为计算公式解释时，上下文中指定的关系原子 vRw 可以正向或反向读取。因此，公理化证明在模拟 $\Box_l$ 时需要伴随公理 $\mathsf{A}_{\blacklozenge\Box}\colon \blacklozenge\Box A \to A$ 和 $\mathsf{A}_{\Diamond\blacksquare}\colon \Diamond\blacksquare A \to A$ 。

通过公式解释来理解，规则 $\forall_r$ 还体现了与模态之间一些有趣的相互作用。具体而言，公理化证明在模拟 $\forall_r$ 时需要分配公理 $\forall X \Box A \to \Box\forall X A$ （例 2.10）。

以下引理（引理 7.19 至推论 7.31）通过对 ℓIKt2 的规则逐一进行分类讨论，给出了引理 7.18 的证明。

引理 7.19 （同一规则的可靠性）。 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid v\colon\ A \Rightarrow v\colon\ A)$

证明。 根据引理 7.10，我们可以写作 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid v\colon\ A \Rightarrow v\colon\ A) = F^{\rightarrow}\{A \to A\}$。显然，$A \to A$ 是直觉主义命题逻辑的定理，因此也是 IKt2 的定理。根据引理 7.11，$\mathsf{IKt2} \vdash F^{\rightarrow}\{A \to A\}$。✓

引理 7.20 （w_l 的可靠性）。 若 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon\ C)$，则 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ C)$

证明。 我们可以写作 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ 且 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\ :\ A \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ 由引理 7.10 得出。

直觉主义命题逻辑 $\vdash A \to \top$ 因此，由引理 7.11 和 7.13 以及肯定前件规则，我们有 $\mathsf{IKt2} \vdash F_2^{\wedge}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{\top\}$。

直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$ 因此，通过代入，$\mathsf{IKt2} \vdash (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{\top\}) \to (F_2^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\})$。

B另引理 7.11 和 7.12 以及 m p

$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\} \to F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$. ✓

引理 7.21 （c_l 的可靠性）。 如果 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon\ A, v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ C)$ 那么 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ C)$

证明。 我们可以写作 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon\ A, v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A \wedge A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}\}$，而根据引理 7.10，$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon\ A \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}\}$。

由于直觉主义命题逻辑 $\vdash A \to (A \wedge A)$，根据引理 7.11 和 7.13 以及肯定前件规则 $\mathsf{IKt2} \vdash F_2^{\wedge}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{A \wedge A\}$。

直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$，因此 $\mathsf{IKt2} \vdash (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{A \wedge A\}) \to (F_2^{\wedge}\{A \wedge A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\})$ 也成立。

根据引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则，我们有

$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A \wedge A\} \to F_2^{\rightarrow}\{B\}\} \to F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{B\}\}$。 ✓

引理 7.22 （$\to_r$ 的可靠性）。 如果 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ A \Rightarrow v\colon\ B)$ 那么 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon\ A \to B)$

证明。 我们可以将 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ A \Rightarrow v\colon\ B) = F_1^{\rightarrow}\{(A \wedge F_2^{\wedge}\{\top\})$ 写作，而 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon\ A \to B) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\top\} \to A \to B\}$ 则由引理 7.10 得出。

根据直觉主义命题逻辑 $\vdash ((A \wedge C) \to B) \to C \to A \to B$，我们有 $\mathsf{IKt2} \vdash ((F_2^{\wedge}\{\top\} \wedge A) \to B) \to F_2^{\wedge}\{\top\} \to A \to B$，

并由引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则

$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\rightarrow}\{(F_2^{\wedge}\{\top\} \wedge A) \to B\} \to F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\top\} \to A \to B\}$. ✓

引理 7.23 （$\forall_l$ 的可靠性）。如果 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ A[B/X] \Rightarrow w\colon\ C)$ 那么 $\mathsf{IKt2} \vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ \forall XA \Rightarrow w\colon\ C)$

证明。我们可以根据引理 7.10 写出 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ A[B/X] \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A[B/X]\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ 和 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon\ \forall XA \Rightarrow w\colon\ C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\forall XA\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$。

$\mathsf{IKt2} \vdash \forall XA \to A[B/X]$，因此由引理 7.11 和 7.13 以及肯定前件规则可得 $\mathsf{IKt2} \vdash F_2^{\wedge}\{\forall XA\} \to F_2^{\wedge}\{A[B/X]\}$。

作为直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$，我们有 $\mathsf{IKt2} \vdash (F_2^{\wedge}\{\forall XA\} \to F_2^{\wedge}\{A[B/X]\}) \to (F_2^{\wedge}\{A[B/X]\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{\forall XA\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\})$。

由肯定前件规则以及引理 7.11 和 7.12，我们有

$\mathsf{IKt2} \vdash F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A[B/X]\} \to F_3^{\wedge}\{C\}\} \to F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\forall X A\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$. ✓

引理 7.24 （$\forall_r$的可靠性）。 如果 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon A[P/X])$ 则 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon \forall X A)$。

证明。 根据引理 7.9，我们可以写作 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon A[P/X]) = F^{\to}\{A[P/X]\}$，而 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow v\colon \forall X A) = F^{\to}\{\forall X A\}$，且 P 不出现在 $F^{\to}\{\forall X A\}$ 中。

根据全称概括规则，若 IKt2 $\vdash F^{\to}\{A[P/X]\}$，则 IKt2 $\vdash \forall X F^{\to}\{A\}$

根据引理 7.16，我们有 IKt2 $\vdash \forall X F^{\to}\{A\} \to F^{\to}\{\forall X A\}$。

因此，根据肯定前件规则，若 IKt2 $\vdash F^{\to}\{A[P/X]\}$，则 IKt2 $\vdash F^{\to}\{\forall X A\}$ ✓

引理 7.25 （$\Box_l$ 与 $\blacksquare_l$的可靠性）。 若 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma,\ w\colon A \Rightarrow x\colon C)$则 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma,\ v\colon \Box A \Rightarrow x\colon C)$。

证明。 这需要对$\mathbf{R}$的多树结构进行仔细分析。

- 若 $u\ \mathrm{R}\rightsquigarrow v$ 不包含 vRw 且 $x \in \mathrm{R}^{w\setminus v}$: $\mathsf{ifm}^u(\mathrm{R}\ vRw \mid \Gamma, w\colon A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{\Box((A \wedge D) \to F_2^{\to}\{C\})\}\mathsf{ifm}^u(\mathrm{R}\ vRw \mid \Gamma, v\colon \Box A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{\Box A \to \Box(D \to F_2^{\to}\{C\})\}$对某个公式 D 以及上下文 F_1, F_2，由引理 7.9 和 7.10。利用命题推理 IKt2 $\vdash ((A \wedge D) \to F_2^{\to}\{C\}) \to A \to (D \to F_2^{\to}\{C\})$，应用必然化$\Box$和 F$\Box$得到 IKt2 $\vdash \Box((A \wedge D) \to F_2^{\to}\{C\}) \to \Box A \to \Box(D \to F_2^{\to}\{C\})$ 我们可以应用引理 7.11 和 7.12 得到 IKt2 $\vdash F_1^{\to}\{\Box((A \wedge D) \to F_2^{\to}\{C\})\} \to F_1^{\to}\{\Box A \to \Box(D \to F_2^{\to}\{C\})\}$

- 若 $u\ \mathbf{R}\rightsquigarrow v$ 不包含 vRw 且 $x \in \mathbf{R}^{v\setminus w}$: $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma, w\colon A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\Diamond(A \wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\}\}\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma, v\colon \Box A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\Box A \wedge \Diamond D\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$对于某个公式 D 和上下文 F_1, F_2, F_3，由引理 7.9 和 7.10 得出。根据命题 2.11，我们有 IKt2 $\vdash (\Box A \wedge \Diamond D) \to \Diamond(A \wedge D)$。由引理 7.11 和 7.13 以及肯定前件规则，IKt2 $\vdash F_2^{\wedge}\{\Box A \wedge \Diamond D\} \to F_2^{\wedge}\{\Diamond(A \wedge D)\}$。

  我们有直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$，因此也有 IKt2 $\vdash (F_2^{\wedge}\{\Box A \wedge \Diamond D\} \to F_2^{\wedge}\{\Diamond(A \wedge D)\}) \to (F_2^{\wedge}\{\Diamond(A \wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{\Box A \wedge \Diamond D\} \to F_3^{\to}\{C\})$。

  根据引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则，有 IKt2 $\vdash F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\Diamond(A \wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\}\} \to F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\Box A \wedge \Diamond D\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$。

- 若 $u\ \mathbf{R}\rightsquigarrow v$ 包含 vRw，且 $x \in \mathbf{R}^{w\setminus v}$: 若 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma, w\colon A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A \wedge \blacklozenge D\} \to F_3^{\to}\{C\}\}\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma, v\colon \Box A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\blacklozenge(\Box A \wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$

  对于某个公式 D 和上下文 F_1、F_2、F_3，由引理 7.9 和 7.10 得出。

  命题推理给出 IKt2 $\vdash (\Box A \wedge D) \to D$。应用必然化$\blacksquare$和 F$\blacklozenge$，我们得到 IKt2 $\vdash \blacklozenge(\Box A \wedge D) \to \blacklozenge D$。

  类似地，命题推理给出 IKt2 $\vdash (\Box A \wedge D) \to \Box A$，应用必然化$\blacksquare$和 F$\blacklozenge$，我们得到 IKt2 $\vdash \blacklozenge(\Box A \wedge D) \to \blacklozenge\Box A$。

  使用 A$\blacklozenge\Box$ 公理 $\blacklozenge\Box A \to A$和 $\to$-传递性，我们得到 IKt2 $\vdash \blacklozenge(\Box A \wedge D) \to A$。

  结合这两者并进行命题推理，我们得到 IKt2 $\vdash \blacklozenge(\Box A \wedge D) \to (A \wedge \blacklozenge D)$。由引理 7.11 和 7.13 以及肯定前件规则，我们得到 IKt2 $\vdash F_2^{\wedge}\{\blacklozenge(\Box A \wedge D)\} \to F_2^{\wedge}\{A \wedge \blacklozenge D\}$。

通过命题推理可得 IKt2 $\vdash (F_2^{\wedge}\{A\wedge\blacklozenge D\} \to F_3^{\to}\{C\})\to(F_2^{\wedge}\{\blacklozenge(\square A\wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\})$。由引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则，得 IKt2 $\vdash F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A\wedge\blacklozenge D\} \to F_3^{\to}\{C\}\} \to F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{\blacklozenge(\square A \wedge D)\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$。

- 若 $u\ \mathrm{R}\!\!\leftsquigarrow v$ 包含 vRw 和 $x \in \mathrm{R}^{v\backslash w}$：根据引理 7.9 和 7.10，若对某个公式 D 及上下文 F_1, F_3，$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \,|\, \Gamma, w\colon A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\})\}$ 且 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \,|\, \Gamma, v\colon \square A \Rightarrow x\colon C) = F_1^{\to}\{\blacksquare((\square A \wedge D) \to F_3^{\to}\{C\})\}$。首先，利用 A$\blacklozenge\square$ 公理 $\blacklozenge\square A \to A$ 和命题推理，IKt2 $\vdash (A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\})) \to (\blacklozenge\square A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\}))$。利用命题 2.11，IKt2 $\vdash (\blacklozenge\square A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\})) \to \blacksquare(\square A \to D \to F_3^{\to}\{C\})$。通过命题推理、必然化 $\blacksquare$ 和 F$\blacksquare$g，得到 IKt2 $\vdash \blacksquare(\square A \to D \to F_3^{\to}\{C\}) \to \blacksquare((\square A \wedge D) \to F_3^{\to}\{C\})$。应用 $\to$-传递性，我们得到 IKt2 $\vdash (A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\})) \to \blacksquare((\square A \wedge D) \to F_3^{\to}\{C\})$。根据引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则，我们得到 IKt2 $\vdash F_1^{\to}\{A \to \blacksquare(D \to F_3^{\to}\{C\})\} \to F_1^{\to}\{\blacksquare((\square A \wedge D) \to F_3^{\to}\{C\})\}$。✓

引理7.26（$\square_r$ 和 $\blacksquare_r$的可靠性）。若 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\ vRw \,|\, \Gamma \Rightarrow w\colon A)$ 则IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow v\colon \square A)$。

证明。前提和结论都将写成同一个公式解释 $F^{\to}\{\square A\}$。注意，$\square$中不可能还有其他公式，因为前提中的标签是新鲜的。因此，这条规则可以直接导出。✓

注记 7.27。请注意，在几乎所有规则中，我们都能够导出一个与所翻译规则直接对应的公式。所有规则中，只有 $\forall_r$ 例外，它直接对应于全称化规则。相比之下，切规则也可以作为单条规则导出，正如下一个引理所示。

引理 7.28。如果 IKt2 $\vdash$ 在$^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow v\colon A)$ 且 IKt2 $\vdash$ 在$^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma, v\colon B \Rightarrow w\colon C)$，那么 IKt2 $\vdash$ 在$^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma, v\colon A \to B \Rightarrow w\colon C)$

证明。根据引理 7.10，我们可以写作 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow v\colon A) = F_1^{\to}\{F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\to}\{A\}\}$ 以及 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma', v\colon B \Rightarrow w\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{B\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$ 以及 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma, \Gamma', v\colon A \to B \Rightarrow w\colon C) = F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A \to B\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$。

注意，直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B \to C) \to ((D \to E) \to E) \to (D \to B) \to (C \to E) \to (A \to E)$，因此根据代入，IKt2 $\vdash (F_2^{\wedge}\{A \to B\} \to F_2^{\to}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{B\}) \to ((F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\to}\{C\}) \to F_3^{\to}\{C\}) \to (F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\to}\{A\}) \to (F_2^{\wedge}\{B\} \to F_3^{\to}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{A \to B\} \to F_3^{\to}\{C\})$ 也成立。

根据引理 7.14 和引理 7.15 以及肯定前件规则，IKt2 $\vdash (F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\to}\{A\}) \to (F_2^{\wedge}\{B\} \to F_3^{\to}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{A \to B\} \to F_3^{\to}\{C\})$。

根据引理 7.11 和 7.12 以及肯定前件规则，我们还可以得到 IKt2 $\vdash F_1^{\to}\{F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\to}\{A\}\} \to F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{B\} \to F_3^{\to}\{C\}\} \to F_1^{\to}\{F_2^{\wedge}\{A \to B\} \to F_3^{\to}\{C\}\}$。✓

推论 7.29（$\to_l$的可靠性）。如果 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow v\colon A)$ 并且 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma', v\colon B \Rightarrow w\colon C)$，那么 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma, \Gamma', v\colon A \to B \Rightarrow w\colon C)$

证明。我们利用这样一个事实：总能对 $\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow w\colon C$的公式解释进行多次应用关于 w 的引理 7.20，推导出$\mathbf{R} \,|\, \Gamma, \Gamma' \Rightarrow w\colon C$的公式解释。✓

引理 7.30. 若 IKt2 $\vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow v\colon A)$ 且 IKt2 $\vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma, v\colon A \Rightarrow w\colon C)$，则 IKt2 $\vdash \mathtt{ifm}^u(\mathbf{R} \,|\, \Gamma \Rightarrow w\colon C)$

证明。 我们可以将 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v\colon A) = F_1^{\rightarrow}\{F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}\}$、$\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, v{:}A \Rightarrow w\colon C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ 和 $\mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w\colon C) = F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\rightarrow\}F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ 写作引理 7.10。

我们利用直觉主义命题逻辑 $\vdash (A \to B \to C) \to ((D \to E) \to E) \to (D \to B) \to (C \to E) \to (A \to E)$ 这一事实，并代入得到 IKt2 $\vdash (F_2^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{A\}) \to ((F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}) \to (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{\rightarrow\}F_3^{\rightarrow}\{C\})$。

由引理 7.14 可得 $F_2^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\} \to F_2^{\wedge}\{A\})$。
由引理 7.15 可得 $(F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to F_3^{\rightarrow}\{C\}$
并应用肯定前件规则，得到 IKt2 $\vdash (F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}) \to (F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}) \to (F_2^{\wedge}\{\rightarrow\}F_3^{\rightarrow}\{C\})$

利用引理 7.11 和 7.12 并应用肯定前件规则，我们可以推出 IKt2 $\vdash F_1^{\rightarrow}\{F_3^{\wedge}\{\top\} \to F_2^{\rightarrow}\{A\}\} \to F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{A\} \to F_3^{\rightarrow}\{C\}\} \to F_1^{\rightarrow}\{F_2^{\wedge}\{\rightarrow\}F_3^{\rightarrow}\{C\}\}$ ✓

推论 7.31 (切规则的可靠性)。 若 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v\colon A)$ 且 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma', v\colon A \Rightarrow w\colon C)$，则 IKt2 $\vdash \mathsf{ifm}^u(\mathbf{R}\,|\,\Gamma, \Gamma' \Rightarrow w\colon C)$

证明。 我们利用这样一个事实：通过多次应用引理 7.20（对 w），总能从$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow w$ 的公式解释推出$\mathbf{R}\,|\,\Gamma, \Gamma' \Rightarrow w$ 的公式解释： C C✓

引理 *7.17* 的证明。 我们对 $\mathcal{S}$ 的证明进行归纳。

若 $\mathcal{S}$ 是通过应用同一规则得到的，则应用引理 7.19，得到 $\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S})$ 的一个公理化证明，其中 u 遍历 $\mathcal{S}$ 中出现的标签。

设 $\mathcal{S}$ 的证明中的最后一条规则是以前提 $\mathcal{S}_1$ 为前提的单前提规则。根据归纳假设，我们得到 $\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S}_1)$ 的公理化证明，其中 u 遍历 $\mathcal{S}_1$ 中出现的标签。注意，$\mathcal{S}_1$ 中出现的所有标签也都出现在 $\mathcal{S}$ 中。适当地应用上述引理，我们得到 $\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S})$ 的 IKt2 证明，其中 u 遍历 $\mathcal{S}$ 中出现的标签。

设 $\mathcal{S}$ 的证明中最后一条规则是以 $\mathcal{S}_1$ 和$\mathcal{S}_2$为前提的双前提规则。根据归纳假设，我们有$\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S}_1)$与$\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S}_2)$的证明，其中$u$ 遍历 $\mathcal{S}$中出现的标签。通过应用适当的引理，我们得到$\mathsf{ifm}^u(\mathcal{S})$的公理化证明（$u$ 遍历 $\mathcal{S}$中的标签）。✓

7.5. **公理化可靠性（针对 ℓKt2）**。我们将经典系统的定理7.1(2)作为直觉主义系统的推论加以恢复，并再次先加强该陈述：

引理 7.32 （解释的可靠性）。 若 ℓKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$，则Kt2 $\vdash \mathtt{cfm}^u$（$\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$）对出现在$\mathbf{R}$、 Γ 或 Δ中的任意标签 u 成立。

该结果经由Kt2的一个替代系统得出，即带有双重否定消去规则的 ℓIKt2：

$$(\neg\neg)\ \frac{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v : \neg\neg A}{\mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow v : A}$$

该附加规则（$\neg\neg$）的可靠性直接由 Kt2 的定义得出，该定义包含公理 $\neg\neg A \to A$。

引理 7.33。 若 ℓKt2 $\vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma \Rightarrow \Delta$，则 ℓIKt2 $+ (\neg\neg) \vdash \mathbf{R}\,|\,\Gamma, \neg\Delta^{13} \Rightarrow x\colon \bot$对于$\mathbf{R}$中出现的任意标签 x， Γ 或 Δ。

[13] If $\Delta = v_1 : A_1, \ldots, v_n : A_n$ then $\neg\Delta = v_1 : \neg A_1, \ldots, v_n : \neg A_n$.

证明。 由引理 4.3， ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon \bot \Rightarrow w\colon A$ 当 v 与 w 在$\mathbf{R}$中相连时。

- $\mathsf{id}\dfrac{}{\mathbf{R} \mid v : A \Rightarrow v : A} \to_l \dfrac{\mathsf{id}\dfrac{}{\mathbf{R} \mid v : A \Rightarrow v : A} \quad \dfrac{\text{Lemma 4.3}}{\mathbf{R} \mid v : \bot \Rightarrow x : \bot}}{\mathbf{R} \mid v : A, v : \neg A \Rightarrow x : \bot}$
- $\to_l \dfrac{\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, v : A \quad \mathbf{R} \mid \Gamma', v : B \Rightarrow \Delta'}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \Gamma', v : A \to B \Rightarrow \Delta, \Delta'}$ (and similarly for cut)

  根据归纳假设， ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma,\ \neg\Delta,\ v\colon \neg A \Rightarrow v\colon \bot$ 以及 ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma',\ v\colon\ B,\ \neg\Delta' \Rightarrow x\colon\ \bot$。

$$\to_r \dfrac{\to_r \dfrac{\dfrac{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta, v : \neg A \Rightarrow v : \bot}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow v : \neg\neg A}(\neg\neg)}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow v : A} \quad \mathbf{R} \mid \Gamma', v : B, \neg\Delta' \Rightarrow x : \bot}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \Gamma', v : A \to B, \neg\Delta, \neg\Delta' \Rightarrow x : \bot}$$

<style 同一规则='1'>R $\mid \Gamma$<style 同一规则='4'>, $v\colon\ A \Rightarrow \Delta$<style 同一规则='8'>, $v\colon\ B$

- $\to_r \dfrac{}{\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta,\ v\colon\ A \to B}$

  根据归纳假设， ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma,\ v\colon A,\ \neg\Delta,\ v\colon \neg B \Rightarrow v\colon \bot$。

$$\to_r \dfrac{\to_r \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{R} \mid \Gamma, v : A, \neg\Delta, v : \neg B \Rightarrow v : \bot}{\mathbf{R} \mid \Gamma, v : A, \neg\Delta \Rightarrow v : \neg\neg B}(\neg\neg)}{\mathbf{R} \mid \Gamma, v : A, \neg\Delta \Rightarrow v : B}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow v : A \to B} \quad \dfrac{\text{Lemma 4.3}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta, v : \bot \Rightarrow x : \bot}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta, v : \neg(A \to B) \Rightarrow x : \bot}$$

- 非分支左规则：$\mathbf{R} \mid \Gamma, v'\colon \underline{A' \Rightarrow \Delta}\ \mathbf{R} \mid \Gamma, v\colon A \Rightarrow \Delta$

  根据归纳假设， ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma, v'\colon A', \neg\Delta \Rightarrow x\colon \bot$。

  只需在 ℓIKt2 中应用相同的规则：

$$\dfrac{\mathbf{R} \mid \Gamma, v' : A', \neg\Delta \Rightarrow x : \bot}{\mathbf{R} \mid \Gamma, v : A, \neg\Delta \Rightarrow x : \bot}$$

- $\Box_r \dfrac{\mathbf{R},\ vRw \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, w\colon\ A}{\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta,\ \ v\colon\ \ \Box A}\ w$ 新鲜 （ $\blacksquare_l$ 和 $\forall_l$也同理）

  根据归纳假设， ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R}\ vRw \mid \Gamma,\ \neg\Delta,\ w\colon \neg A \Rightarrow w\colon \bot$。

$$\to_r \dfrac{\to_r \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbf{R}, vRw \mid \Gamma, \neg\Delta, w : \neg A \Rightarrow w : \bot}{\mathbf{R}, vRw \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow w : \neg\neg A}(\neg\neg)}{\mathbf{R}, vRw \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow w : A}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow v : \Box A} \Box_r \quad \dfrac{\text{Lemma 4.3}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta, v : \bot \Rightarrow x : \bot}}{\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta, v : \neg\Box A \Rightarrow x : \bot}$$

✓

引理 7.32 的证明。 根据引理 7.33，由于 ℓKt2$\vdash \mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta$，因此也有 ℓIKt2$+(\neg\neg) \vdash \mathbf{R} \mid \Gamma,\ \neg\Delta \Rightarrow x\colon \bot$。

我们已在上一节证明了 ℓIKt2 规则的局部可靠性。接下来只需证明$\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon \neg\neg A$ $_{(\neg\neg)}$ $\mathbf{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A$ 的局部可靠性。

假设 $\mathsf{Kt2} \vdash \mathsf{cfm}^u(\mathrm{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon \neg\neg A) = \mathsf{lfm}^u(\mathrm{R} \mid \Gamma) \to \mathsf{rfm}^u(\mathrm{R} \mid w\colon \neg\neg A)$，我们需要证明 $\mathsf{Kt2} \vdash \mathsf{cfm}^u(\mathrm{R} \mid \Gamma \Rightarrow w\colon A) = \mathsf{lfm}^u(\mathrm{R} \mid \Gamma) \to \mathsf{rfm}^u(\mathrm{R} \mid w\colon A)$。对路径 $u \mathrm{R}\rightsquigarrow v$ 使用归纳法，证明 $\mathsf{Kt2} \vdash \mathsf{rfm}^u(\mathrm{R} \mid w\colon \neg\neg A) \to \mathsf{rfm}^u(\mathrm{R} \mid w\colon A)$

- 如果 $u = v$：由 $\mathsf{Kt2} \vdash \neg\neg A \to A$，可立即得出。
- 如果存在 v 使得 $uRv \in \mathbf{R}$ 且 $v \mathbf{R}\rightsquigarrow w$：由归纳假设，$\mathsf{Kt2} \vdash \mathsf{rfm}^v(\mathbf{R} \mid w\colon \neg\neg A) \to \mathsf{rfm}^v(\mathbf{R} \mid w\colon A)$。因此，根据必然化 $\Box$、 D$\Box$ 和肯定前件规则，$\mathsf{Kt2} \vdash \Box\mathsf{rfm}^v(\mathbf{R} \mid w\colon \neg\neg A) \to \Box\mathsf{rfm}^v(\mathbf{R} \mid w\colon A)$
- 若存在 v 使得 $vRu \in \mathbf{R}$ 且 $v \mathbf{R}\rightsquigarrow w$：类似地，将 $\Box$ 替换为 $\blacksquare$。

由此，我们得出

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Kt2} \vdash \mathtt{cfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta \Rightarrow u : \bot)\\
&\quad = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma, \neg\Delta) \to \mathtt{rfm}^u(\mathbf{R} \mid u : \bot)\\
&\quad = (\mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \wedge \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \neg\Delta)) \to \bot\\
&\quad \leftrightarrow \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \to \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \neg\Delta) \to \bot\\
&\quad = \mathtt{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \Gamma) \to \mathtt{rfm}^u(\mathbf{R} \mid \Delta)
\end{aligned}$$

根据 lfm() 和 rfm() 的定义，$\neg\mathsf{lfm}^u(\mathbf{R} \mid \neg\Delta) = \mathsf{rfm}^u(\mathbf{R} \mid \Delta)$。 ✓

8. Perspectives

现在，我们已经完成了论证，为主定理3.3、3.14和4.2提供了依据：这些定理是根据图1a中的图示，在经典情形下，以及图1b中的图示，在直觉主义情形下，由我们提出的结果推导而来的。让我们花些时间思考：（i）我们所介绍的经典理论与直觉主义理论之间的关系；以及（ii）二阶（直觉主义）时态逻辑的一些有趣子系统。

8.1. 关联经典逻辑与直觉主义逻辑：否定翻译。我们介绍了二阶时态逻辑的经典版本和直觉主义版本，因此，运用已知技术探究它们之间的关系是很自然的。具体而言，经典逻辑通过**负**（或**双重否定**）翻译来解释为直觉主义逻辑。由于我们的语言以负片段形式构建，*G¨odel-Gentzen* 翻译的定义尤为简单；它与除原子公式之外的所有构造都可交换。[14] 下面我们来展开讨论。回顾一下，我们记作$\bot := \forall X X$ 以及 $\neg A := A \to \bot$。

定义8.1（（高阶模态）负翻译）。对每个公式 A，定义其**负翻译** A^N 如下：

$$\begin{aligned}
P^N &:= \neg\neg P & (\Box A)^N &:= \Box A^N\\
X^N &:= \neg\neg X & \blacksquare A)^N &:= \blacksquare A^N\\
(A \to B)^N &:= A^N \to B^N & (\forall X A)^N &:= \forall X A^N
\end{aligned}$$

[14]请注意，我们本可以采用其他负翻译，例如 Kolmogorov 或 Kuroda，但这种研究超出了本文的范围。与谓词逻辑中的情况一样，我们猜想，所有这些翻译在 IKt2 上都是等价的。

本小节的主要目的是证明 $\cdot^N$ 翻译的可靠性，也就是说，它确实将经典二阶时态逻辑嵌入直觉主义逻辑：

定理 8.2。$\mathsf{Kt2} \vdash A \implies \mathsf{IKt2} \vdash A^N$。

在证明这一点之前，我们首先需要一些（预期的）辅助结果：

引理 8.3（负性）。IKt2 证明如下：

$$\begin{array}{c} \neg\neg\neg A \to \neg A \\ \neg\neg(A \to B) \to \neg\neg A \to \neg\neg B \\ \neg\neg\forall X A \to \forall X \neg\neg A \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg\neg\Box A \to \Box\neg\neg A \\ \neg\neg\blacksquare A \to \blacksquare\neg\neg A \end{array}$$

证明。左边的三项是众所周知的（例如参见 [TS00，第2.3节和第11.5节9]）。$\Box$的证明，即 $\neg\neg\Box A \to \Box\neg\neg A$ 在 IK 中的证明，见于 [DM22a] 和 [DM23，引理 10],；因此在这里也可得到相同结论，因为在正联结词的非谓述编码下，IKt2 包含 IK，参见第2.3节。为保持自足性，我们在此重复该证明：

$A \to \neg\neg A$	by IPL reasoning
$\Box A \to \Box\neg\neg A$	by $\mathsf{nec}_\Box$ and $\mathsf{D}_\Box$
$\Box A \to \Diamond\neg A \to \Diamond\bot$	by definition of $\neg$ and $\mathsf{D}_\Diamond$
$\Box A \to \Diamond\neg A \to \bot$	by $\mathsf{N}_{\Diamond\bot}$
$\neg\neg\Box A \to \Diamond\neg A \to \bot$	by IPL reasoning
$\neg\neg\Box A \to \Diamond\neg A \to \Box\bot$	by definition of $\bot$ and C
$\neg\neg\Box A \to \Box(\neg A \to \bot)$	by $\mathsf{I}_{\Diamond\Box}$
$\neg\neg\Box A \to \Box\neg\neg A$	by definition of $\neg$

对 $\mathsf{N}_{\Diamond\bot}$ 和 $\mathsf{I}_{\Diamond\Box}$ 的引用来自公式（4），此前已在第2节中导出。黑色版本 $\neg\neg\blacksquare A \to \blacksquare\neg\neg A$ 现在只需利用对称性即可得到。✓

命题 8.4。$\mathsf{IKt2} \vdash \neg\neg A^N \leftrightarrow A^N$ 与 $\mathsf{IKt2} \vdash \bot \leftrightarrow \bot^N$。

证明概要。 $A^N \to \neg\neg A^N$ 已是直觉主义命题逻辑的推论。对于相反方向，$\neg\neg A^N \to A^N$，我们通过对 A的结构运用归纳法，并在每一步使用前述负性引理 8.3。

$\bot \to \bot^N$ 是概括C公理的一个实例，因为 $\bot = \forall X X$。对于相反方向，$\bot^N \to \bot$，注意 $\bot^N = \forall X \neg\neg X$。根据概括公理C公理，我们因此得到 $\bot^N \to \neg\neg\bot$，从而确实可借直觉主义命题逻辑推理得到 $\bot^N \to \bot$。✓

现在，负翻译的可靠性不难确立：

定理 *8.2*的证明。通过对 A的Kt2证明运用归纳法：

- IKt2 的每个公理的 $\cdot^N$翻译仍然是 IKt2 的一个公理实例。对于 Kt2 的其余公理，即 $\neg\neg A \to A$，注意到 $(\neg\neg A \to A)^N = ((A^N \to \bot^N) \to \bot^N) \to A^N$，根据命题 8.4，该式可在 IKt2 中证明。
- Kt2 的两个推理规则的 $\cdot^N$翻译也分别是 IKt2 的推理规则实例。✓

8.2. **专门化到子逻辑**。二阶（直觉主义）时态逻辑有若干值得关注的子逻辑。正如预期的那样，本文的结果使我们能够继承某些子逻辑的类似结果。具体而言，将图 1a 和 1b 中的宏观概览专门化到我们语法的无模态片段后，我们便能得到一种证明论刻画，即以下逻辑的切规则可容许性：

• 经典二阶命题逻辑。 ℓKt2 现在可专门化为通常的二阶命题逻辑序列演算（例如参见 [Gir87，第3.A节。1], [RS24，第5节。1]或 [Tak87，定义 15。3]）。需要指出的是，这在某种程度上只是一个玩具结果，因为众所周知，由于布尔值语义，即使是布尔概括公理模式，设 $C = \bot$ 或 $C = \top$ 属于 C公理，也足以支持证明搜索。

• 直觉主义二阶命题逻辑。 ℓIKt2 现在特化为直觉主义命题逻辑通常的二阶序列演算（即带单元素集右侧约束的经典演算）。多 后件变体（即 mℓI Kt2 的无模态片段）的切规则可容许性由 Prawitz 在 [Pra70], 中得到，其相对于 Beth 模型的完备性亦借助类似技术获得。凭借我们的否定 公式语法，我们得到了相对于 Kripke 模型的完备性（即 $W = \varnothing$ 的谓词模型）以及通常单后件演算的切规则可容许性，参见命题 4.5。

人们自然会想，本文的结果是否同样能引出一种对不含黑模态的二阶（直觉主义）模态 逻辑的处理。基于这一语法的逻辑在文献中已得到远为充分的探讨： [Fin70、Bul69、Kap70、TC06、KT96、BHK18、BBK23]。然而，我们的 $\Diamond$ 不仅借助 $\Box$ 和 $\forall$、而且也借助 $\blacksquare$ 来定义，这一事实使情况变得复杂。人们可以设想将我们的带标签系统限制为不含黑模态的公式，但第7节中的公理化翻译会引入 $\Diamond$s，从而引入 $\blacksquare$s。事实上，为规避这一问题而添加一个原生的 $\Diamond$ ，再加上第7节中所用的任何模态推理，仍不一定能得到切规则可容许性，原因颇为微妙： $\blacksquare$-自由公式的无切标记证明仍可能需要带有

$\blacksquare$，这是由于其中涉及概括步骤（即 $\forall_l$）。这体现了二阶逻辑的非分析性 。例如，下面是一个无切的 ℓIKt2 证明，证明负性的一种情形，其中涉及 $\Box$ 和 $\bot$，参见引理 8.3：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \,|\, v : P \Rightarrow v : P}\,\mathsf{id}}{vRw \,|\, w : \blacksquare P \Rightarrow v : P}\,\blacksquare_l}{vRw \,|\, w : \forall X X \Rightarrow v : P}\,\forall_l}{vRw \,|\, v : \Box\bot \Rightarrow v : P}\,\Box_l}{vRw \,|\, v : \Box\bot \Rightarrow v : \forall X X}\,\forall_r}{vRw \,|\, \cdot \Rightarrow v : \neg\Box\bot}\,\to_r \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{vRw \,|\, w : \bot \Rightarrow w : \bot}\,\mathsf{id}}{vRw \,|\, v : \Box\bot \Rightarrow w : \bot}\,\Box_l}{vRw \,|\, v : \forall X X \Rightarrow w : \bot}\,\forall_l}{\dfrac{vRw \,|\, v : \neg\neg\Box\bot \Rightarrow w : \bot}{\cdot \,|\, v : \neg\neg\Box\bot \Rightarrow v : \Box\bot}\,\Box_r}\,\to_l$$

这是一个不含 $\blacksquare$ 的定理的无切证明（特别是不含任何 $\Diamond$，无论是原生的还是其他形式），但仍然用到了 $\blacksquare$。如何在不使用 $\blacksquare$ 的情况下直觉主义地证明这个定理?

请注意，经典逻辑中不会出现同样的问题，因为该定理是双重否定消去公理的一个实例。我们猜想，第5节中的同一证明搜索论证在经典逻辑下也适用于 $\blacksquare$-自由片段。再次以经典逻辑视角考察第7节的公理化翻译，请注意，只要我们将 $\Diamond A := \neg\Box\neg A$解释为.....， $\blacksquare$-自由序列的公式翻译仍然是 $\blacksquare$-自由的。从公理角度看，除二阶经典

命题逻辑 CPL2 := 直觉主义命题逻辑2$+\neg\neg A \to A$以及条目 2 中的白模态公理外，我们还要求 B： $\forall X \Box A \to \Box \forall X A$ （参见例 2.10）。请指出，由此得到的公理化系统 CPL2 $+\mathsf{D}_\Box$ $+\mathsf{D}_\Diamond$ +必然化$_\Box$ +B，与 [BHK18]，中提出的二阶（经典）模态逻辑方案几乎一致，唯一不同之处在于他们只允许无量词概括。若能更正式地发展我们针对纯模态情形（不含黑模态）的论证，并将由此得到的逻辑与 [BHK18] 的逻辑进行比较，将会很有意思。

9. Conclusions

本文构建了经典和直觉主义基础上的二阶时态逻辑扩展的公理体系、语义与证明论。最终，我们证明了若干自然的定义分别所刻画的直觉主义理论或经典理论彼此等价，彰显了各自逻辑的稳健性。在此过程中，我们确立了基本的元逻辑结果，即公理化相对于某些（双）关系语义的可靠性与完备性；还得到了证明论结果，即基于带标签序列的相关演算系统具有切规则可容许性。对于这两类结果，我们都采用了证明搜索方法，并通过图 1a 和 1b 中的“宏观概览”同时确立了它们。最后，我们讨论了若干其他有趣的研究方向。

二阶逻辑能够通过编码 Knaster-Tarski 式定义（例如参见 [BFPS81，第 1] 章；更高层次的讨论见 [RS24，第5节3]），定义正公式的最小和最大不动点。在包含模态的二阶逻辑中，只要加入一个全局模态（例如 $\boxtimes$），也能做到这一点，其中 $\boxtimes A$应读作“处处 A”。特别地，算子$X \mapsto A(X)$的最小不动点（其中 X 仅以正向方式出现在 $A(X)$中）如下给出：

$$\mu X A(X) \;:=\; \forall X(\boxtimes(A(X) \to X) \to X)$$

这种编码已出现在 [Sti96 的第 5]，节，其中指出，二阶模态语法可以表达所有的模态 μ演算 [Koz82]。按照本文所采用的公理、语义和证明理论方法，研究通过全局模态扩展我们的逻辑将会很有意思。在存在时态模态的情况下，这种扩展将涵盖双向 模态μ演算 [Var98]。值得注意的是，近期已有研究通过循环证明 [AEL$^+$25]对这一逻辑进行了证明理论处理。

最后，从证明即程序的视角出发，按照 Curry-Howard 的思路（例如参见 [SU06]），重新表述二阶直觉主义时态逻辑将是很自然的做法。逻辑 CK（IK 的子逻辑）及其若干扩展，已经从证明即程序的视角得到研究，并被转译为模态 λ 演算 [BPR01, DP01]（参见 [Kav16]的综述）。模态类型论也独立发展起来，成为封装带效应计算的一种方法 [Mog89], ，并在 [GCK$^+$22、Shu23], 中获得了范畴论基础，且已在主流程序设计语言中实现 [TWD$^+$25, LWD$^+$24]。近期，Kavvos 的一项提案也将伴随模态 $\blacklozenge$ 和 $\Box$用于把关系语义与模态逻辑的类型论方法联系起来 [Kav24]。为此，开发 IKt2 的一种自然演绎表述并配以相应的项标注，进而证明其强规范化，将会很有意义。自然，Girard 提出的可约性候选方法 [Gir72], 应当适用。与此同时，这样的工作将

进一步巩固二阶（直觉主义）时态逻辑的证明论基础。

References

[AB93] Sergei N Artemov 和 Lev D Beklemishev。关于可证性逻辑中的命题量词。 *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34(3):401–419，1993。[AEL+25] Bahareh Afshari、Sebastian Enqvist、Graham E. Leigh、Johannes Marti 和 Yde Venema。双向模态 μ-演算的证明系统。 *J. Symb. Log.*, 90(3):1211– 1260，2025。[BBK23] Patrick Blackburn、Torben Bra¨uner 和 Julie Lundbak Kofod。带命题量词的基本混合逻辑的公理系统。载于 *International Workshop on Logic, Language Information and Computation* 118 134 2023 ，，，第 – 页。施普林格，。[BBW06] Patrick Blackburn、Johan van Benthem 和 Frank Wolter。 *Handbook of modal logic*, 第3卷。爱思唯尔，2006。[BFPS81] Wilfried Buchholz、Solomon Feferman、Wolfram Pohlers 和 Wilfried Sieg。 *IteratedInductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-Theoretical Studies*, 第 *Lecture Notes in Mathematics*卷第897册。施普林格出版社，柏林、海德堡、纽约，1981。[BH15] Francesco Belardinelli 和 Wiebe van der Hoek。认知量化布尔逻辑：表达能力与完备性结果。载于 *24th International Joint Conferences on Artificial Intelligence (IJCAI 2015)* 2748 2754 2015 ，第 – 页。AAAI出版社，。

[BH16] Francesco Belardinelli 和 Wiebe van der Hoek。二阶命题模态逻辑的语义分析。载于 *Proceedings of the AAAI Conference on ArtificialIntelligence*, 第30卷，2016。[BHK18] Francesco Belardinelli、Wiebe van der Hoek 和 Louwe B. Kuijer。二阶命题模态逻辑：表达能力与完备性结果。 *Artificial Intelligence* 263 3 45, 2018 ，：–，10月。[B´ıl07]

Marta B´ılkov´a。模态逻辑中的一致插值与命题量词。*Studia Logica*, 第1–31页，2007。[BN10] Bianca Boretti 和 Sara Negri。关于普里奥尔线性时间的有限化。 *New Essays in Logic and Philosophy of Science College Publications London* 67 79, 2010 ，，，第 – 页。[BPR01]

Gianluigi Bellin、Valeria de Paiva 和 Eike Ritter。基本构造性模态逻辑的扩展 Curry-Howard 对应。载于 *Proceedings of methods for modalities* ，第2卷，2001。[Bul

69] Robert A. Bull。关于带命题量词的模态逻辑。 *The journal of symbolic logic* 34 2 257 263, 1969 ，( ): –。[Bus86]

Samuel R. Buss。 *Bounded Arithmetic* 3 *Studies in Proof Theory. Lecture Notes* 1986 1985 ，第卷，载于。Bibliopolis，那不勒斯，。普林斯顿大学博士论文的修订版。[Bus98] Samuel R. Buss，编。 *Handbook of Proof Theory* 137 *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 1998 ，第卷，载于。爱思唯尔，阿姆斯特丹、纽约和牛津，。[CLRT21] Agata Ciabattoni、Tim S. Lyon、Revantha Ramanayake 和 Alwen Tiu。时态逻辑中从展示演算到加标证明再返回。 *ACM Transactions on ComputationalLogic (TOCL)*, 22(3):1–31，2021。[CN10] Stephen Cook 和 Phuong Nguyen。 *Logical Foundations of Proof Complexity*。《逻辑中的前沿》。剑桥大学出版社，2010。[DM22a] Anupam Das 和 Sonia Marin。布劳威尔遇见克里普克：模态逻辑构造化，2022 *The Proof Theory Blog* 24 2023 `https://prooftheory.blog/2022/08/19/brouwer-meets-kripke-constructivising-modal-logic/`。发表于网络（检索于5月）。[DM22b] Damir D. Dzhafarov 和 Carl Mummert。 *Reverse Mathematics: Problems Reductions and Proofs*。《可计算性理论与应用》。施普林格，。[DM23] Anupam Das 和 Sonia Marin。关于直觉主义菱形算子（及其缺失）。载于 *International Conference on Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related In-Methods* 283 301 2023 ，第 – 页。施普林格，。[DON18] Tiziano Dalmonte、Nicola Olivetti 和 Sara Negri。非正规模态逻辑：双邻域语义及其加标演算。载于 *Advances in Modal Logic 2018*，2018。

[DP01] Rowan Davies 和 Frank Pfenning。分阶段计算的模态分析。 *Journal of the ACM (JACM)* 48 3 555 604, 2001 , ( ): –。[Ewa86]

William B. Ewald。直觉主义时态逻辑与模态逻辑。 *The Journal of Symbolic Logic*, 51 1 166( ): –179, 1986。[Fin70] Kit Fine。模态逻辑中的命题量词。 *Theoria*, 36(3):336–346, 1970。[Fit02] Melvin Fitting。一阶 S5 的插值。 *The Journal of Symbolic Logic*, 67 2 621 634, 2002 ( ): –。[Gab91] Dov M. Gabbay。 *Labelled deductive systems*。《牛津逻辑指南》。Clarendon Press, 1991。[GCK+22] Daniel Gratzer、Evan Cavallo、GA Kavvos、Adrien Guatto 和 Lars Birkedal。模态与参数伴随。 *ACM Transactions on Computational Logic (TOCL)*, 23 3 1( ): –29, 2022。[Gha17] Meghdad Ghari。证成逻辑的加标序列演算。 *Annals of Pure and Applied Logic* 168 1 72 111, 2017 , ( ): –。[Gir72]

Jean-Yves Girard。 *Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur* 1972 。博士论文，巴黎第七大学，。[Gir87] Jean-Yves Girard。 *Proof Theory and Logical Complexity* 1 *Studies in Proof*，第卷，载于。*Theory* 1987 Bibliopolis，那不勒斯，。由 Humanities Press 发行，Atlantic Highlands，新泽西州。[GLT89] Jean-Yves Girard、Yves Lafont 和 Paul Taylor。 *Proofs and Types* 7 *Cam-*，第卷，载于。剑 *bridge Tracts in Theoretical Computer Science* 桥大学出版社，英国剑桥，1989。[GNO21] Marianna Girlando、Sara Negri 和 Nicola Olivetti。基于邻域语义的优先条件逻辑的一致加标演算。 *Journal of Logic andComputation*, 31(3):947–997, 2021。[GPT11] Rajeev Gor´e、Linda Postniece 和 Alwen F Tiu。时态逻辑嵌套相继式演算中展示公设与深度推理之间的对应关系。*Methods in Computer Science* 7 2011 *Logical* , , 。

[Gre99] Carsten Grefe。 *Fischer Servi's intuitionistic modal logic and its extensions*。博士论文，柏林自由大学，1999。[GSC25] Jim de Groot、Ian Shillito 和 Ranald Clouston。CK 与 IK 之间直觉主义模态逻辑的语义分析。载于 *2025 40th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS)* 169 182 2025 ，第 – 页。IEEE，。

[Hen50] Leon Henkin。类型论中的完备性。 *The Journal of Symbolic Logic*, 15 2 81( ): –91, 1950。[Kap70] David Kaplan。带可量化命题变量的 S5。 *Journal of Symbolic Logic*, 35 2( ):355, 1970。[Kav16] G Alex Kavvos。模态 {\lambda}-演算的多重世界：I. 必然性、可能性与时间的 Curry-Howard 对应。 *arXiv preprint arXiv:1605.08106*, 2016。[Kav24] G. Alexandros Kavvos。二维克里普克语义 I：预层。载于 Jakob Rehof 编的 *9th International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction* 299 *LIPIcs* 14 1 14 23 ，第卷，页码：–：。Schloss Dagstuhl - Leibniz 信息学中心，2024。[Koz82] Dexter Kozen。关于命题 μ-演算的结果。载于 Mogens Nielsen 和 Erik Meineche Schmidt 编的 *Automata, Languages and Programming*，第348–359页，柏林、海德堡，1982。施普林格出版社。[KS19] Roman Kuznets 和 Lutz Straßburger。Maehara式模态嵌套演算。 *Archive for Mathematical Logic* 58 3 359 385, 2019 , ( ): –。[KT96]

Michael Kaminski 和 Michael Tiomkin。二阶命题模态逻辑的表达能力。 *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37(1):35–43, 1996。[LWD+24] Anton Lorenzen、Leo White、Stephen Dolan、Richard A Eisenberg 和 Sam Lindley。通过模态内存管理改造 OCaml。 *Proceedings of the ACM onProgramming Languages*, 8(ICFP):485–514, 2024。[Lyo25] Tim S. Lyon。通过结构细化为直觉主义语法逻辑构建嵌套序列，2025。[LZQ22] Zhen Lin、Qing-Zhe Zha 和 Ji-Hong Qian。直觉主义时态逻辑中否定翻译的证明论方法。 *Studia Logica*, 110(5):1067–1093, 2022。

[Mae54] Shˆoji Maehara。《在经典逻辑中表示直觉主义逻辑》。*Nagoya Mathematical Journal*，7:45–64，1954年。[Mil78] Robin Milner。程序设计中的类型多态理论。 *Journal of Computer and System Sciences* 17 3 348 375, 1978 ，( ): –。[Mil25] Dale Miller。 *Proof Theory and Logic Programming: Computation as Proof Search*。剑桥大学出版社，2025年。[Mog89] Eugenio Moggi。计算λ演算与单子。载于 *Proceedings of the Fourth Annual Symposium on Logic in Computer Science (LICS '89), Pacific Grove, California USA June 5-8 1989* 14 23 1989 ，，，，第–页。IEEE计算机学会，。[Neg05] Sara Negri。模态逻辑中的证明分析。 *Journal of Philosophical Logic*，34(5):507–544，2005年。[Neg14] Sara Negri。超越几何理论的证明分析：从规则系统到系统规则。 *Journal of Logic and Computation*，26(2):513–537，2014年。[Orl21] Eugenio Orlandelli。带有确定描述的量化模态逻辑的加标演算。 *Journal of Logic and Computation*，31(3):923–946，2021年。[Par97] Michel Parigot。二阶经典自然演绎中强规范化的证明。 *The Journal of Symbolic Logic*，62(4):1461–1479，1997年。[Pra68a] Dag Prawitz。二阶逻辑的完备性与Gentzen 主定理。 *Theoria*，34:126–150，1968年。[Pra68b] Dag Prawitz。高阶逻辑的主定理。 *Journal of Symbolic Logic*，33(3):452–457，1968年。[Pra70] Dag Prawitz。带有二阶量化规则的直觉主义逻辑的一些结果。载于 *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*，第60卷，第259–269页。爱思唯尔，1970年。[Pri57] Arthur N Prior。 *Time and modality*。牛津大学出版社，1957年。[PS86] Gordon Plotkin and Colin Stirling。直觉主义模态逻辑的框架。载于 *Proceedings of the 1986 Conference on Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge* 86, 399 406 1986 ，TARK '，第–页。Morgan Kaufmann Publishers Inc.，。[Rey74] John C. Reynolds。迈向类型结构理论。载于*ming* 19 *Lecture Notes in Computer Science* 408 425, *Symposium on Programm* ，卷，第–页，法国巴黎，1974年。施普林格出版社。[RS24] Michael Rathjen and Wilfried Sieg。证明论。载于 Edward N. Zalta 和 Uri Nodelman 编， *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*。形而上学研究实验室，斯坦福大学，2024年冬季版，2024年。[Rus96] Alessandra M. Russo。 *Modal logics as labelled deductive systems*。博士论文，伦敦帝国学院计算系，1996年。[Sch60] Kurt Sch ¨ utte。简单类型论的句法与语义性质。， ( ): –。[Sch77] Kurt Sch ¨ utte。第卷。 *Proof Theory* 225 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* 1977 施普林格出版社，柏林、海德堡及纽约，版，。J. N. Crossley 修订的英文译本，原德文版《证明论》，第103卷，1960年。[Ser77] Gis`ele Fischer Servi。以直觉主义为基础的模态逻辑。 *Studia Logica*，36 3 141( ): –149，1977年。[Ser84] Gis ` her Servi。一些直觉主义模态逻辑的公理化。， ( ): –194，1984年。[Shu23] Michael Shulman。多模态伴随类型理论的语义。 *The Journal of Symbolic Logic* 25 4 305 326, 1960 *Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università Politecnica di Torino* 42 3 179 *Electronic Notes in Theoretical Informatics and Computer Science* 3 2023 ，，。[Sim94] Alex K. Simpson。 *The Proof Theory and Semantics of Intuitionistic Modal Logic*。博士论文，爱丁堡大学，1994年7月。[Sim09] Stephen G. Simpson。 *Subsystems of Second Order Arithmetic*。《逻辑视角》。剑桥大学出版社，第二版，2009年。[Sti96] Colin Stirling。博弈与模态μ演算。载于 *Tools and Algorithms for the Construction and Analysis of Systems (TACAS 1996)* 1055 *Lecture Notes in Computer Science* 298 312 1996 ，第卷，第–页。施普林格，。

[Str13] Lutz Straßburger。直觉主义模态逻辑嵌套序列中的切消去。载于 *International conference on foundations of software science and computational structures* 209 224 2013，第–页。施普林格，。

[SU06] Morten H. Sørensen and Pawel Urzyczyn。*Lectures on the Curry-Howard isomorphism* 149 2006，第卷。爱思唯尔，。[Tai66] William W. Tait。二阶谓词逻辑中Gentzen 主定理的非构造性证明。*Bulletin of the American Mathematical Society*，72(6):980–983，1966年。[Tak67] Moto-o Takahashi。简单类型论中切消去的一个证明。*Journal of the Mathematical Society of Japan* 19 4 399 410, 1967，( ): –。[Tak87] Gaisi Takeuti。*Proof Theory* 81 *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics* 2 1987，第卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，版，。[TC06] Balder Ten Cate。二阶命题模态逻辑的表达力。*Journal of Philosophical Logic* 35 2 209 223, 2006，( ): –。[TS00] Anne S. Troelstra and Helmut Schwichtenberg。*Basic Proof Theory*。剑桥理论计算机科学丛书第43号。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2000年。[TWD+25] Wenhao Tang, Leo White, Stephen Dolan, Daniel Hillerstr¨om, Sam Lindley, and Anton Lorenzen。模态效应类型。*Proceedings of the ACM on Programming Lan-guages*，9(OOPSLA1):1130–1157，2025年。[Var98] Moshe Y. Vardi。利用双向自动机推理过去。载于 *Automata，Languages and Programming，25th International Colloquium，ICALP'98，Aalborg，Denmark July 13-17 1998 Proceedings* 1443 *Lecture Notes in Computer Science* 628 641 1998，，，，第卷，第–页。施普林格，。[Vig00] Luca Vigan`o。*Labelled non-classical logics*。施普林格科学与商业媒体，2000年。[V¨a 24] Jouko V¨a¨an¨anen。二阶与高阶逻辑。载于 Edward N. Zalta 和 Uri Nodelman 编，*The Stanford Encyclopedia of Philosophy*。形而上学研究实验室，斯坦福大学，2024年冬季版，2024年。[Wij90] Duminda Wijesekera。构造性模态逻辑 I。*Annals of Pure and Applied Logic*，50 3 271( ): –301，1990年。