arXiv:2602.06261v1 [math.DS] 5 Feb 2026

含多个正系数与负系数的一阶中性延迟微分方程的振荡结果

Ábel Garab[1,2,3] 和 Gergő Tóth[1,3]1塞格德大学 Bolyai研究所，Aradi vértanúk tere 1，塞格德，H–6720，匈牙利2HUN-REN–SZTE分析与应用研究组，塞格德大学 Bolyai研究所3塞格德大学国家卫生安全实验室，匈牙利塞格德

2026年2月9日

摘要

我们给出了以下形式的中性延迟微分方程的所有解均发生振荡的充分判据

$$\left[x(t)-\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)x(t-r_i(t))\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}P_i(t)x(t-\tau_i(t))-\sum_{i=1}^{N_q}Q_i(t)x(t-\delta_i(t))=0,$$

这类方程同时含有正项与负项，并具有时变时滞。我们的结果改进并推广了文献中已有的若干判据，这些判据仅适用于常时滞或不含负系数等受限情形。在对缓变参数作出额外假设的条件下，我们推导出更精确的振荡条件。我们通过一些说明性例子展示了这些结果的适用性。

1 引言

在本文中，我们考虑具有若干变时滞的如下形式的线性中性延迟微分方程（中立型延迟微分方程）

$$\left[x(t)-\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)x(t-r_i(t))\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}P_i(t)x(t-\tau_i(t))-\sum_{i=1}^{N_q}Q_i(t)x(t-\delta_i(t))=0, \tag{1.1}$$

对于 $t\geq t_0$，其中 R_i、 P_j、 Q_k、 r_i、 τ_j和 δ_k 为连续非负函数， R_i、 τ_j、 $\delta_k\in C^1$以及 r_i、 τ_j、 $\delta_k\leq D\in(0,\infty)$在区间 $[t_0,\infty)$上对所有 $1\leq i\leq N_r$、 $1\leq j\leq N_p$、 $1\leq k\leq N_q$和 $N_q\leq N_p$成立。此外，我们假设对所有 $1\leq i\leq N_q$ 和$t\in(t_0,\infty)$，有 $\delta_i(t)\leq\tau_i(t)$以及 $\delta_i'(t)<1$ 。

时滞微分方程（延迟微分方程）对如下系统进行建模：当前变化率不仅依赖于当前状态，还依赖于过去状态。其中，中立型延迟微分方程构成一个子集，其延迟项也出现在导数中。

中立型延迟微分方程在生物学 [5, 15, 18, 19, 22]，、物理学和工程学[20, 33——35, 40]，甚至经济学[4, 12, 26]，等诸多领域都有应用，这里仅举几例。

关键词：振荡、中性方程、正项和负项、多个时滞、变时滞。2020 *MSC* 分类：34K11，34K40。

关于延迟微分方程理论的全面引言，请参阅书籍 [17] 和 [7]。若想了解更具应用性的研究方法，我们建议读者研读 [10] 和 [36]。

过去六七十年来，延迟微分方程的振动理论一直备受关注。专著 [1,9,16] 很好地概述了上世纪该领域的主要成果。这些著作都用整整一章介绍中立型延迟微分方程的振动与非振荡判据。

如果一个函数在 1.1 的解集 $[t_0 - D, \infty)$ 上连续，在区间 (t_0, ∞) 上连续可微，并且在该区间上满足（1.1），那么我们称它是方程（1.1）的解。若标量微分方程的一个解有任意大的零点，则称该解振荡。若方程的每个解都振荡，则称该微分方程振荡。若存在一个$T > t_0$ 使得 $x(t) > 0$ 对所有 $t > T$都成立，则称方程（1.1）的解 x 最终为正。线性方程振荡，当且仅当它没有最终正解。

已有多项研究探讨了方程（1.1）特殊情形的振荡判据。例如， [16, 第 6 节9] 考虑了时变时滞和系数函数，但不允许存在负项（即 $Q_k \equiv 0$ 对所有 k），而 [1, 第 3.3–3 节5] 则同时涉及一个正系数函数和一个负系数函数（更准确地说， $N_r = N_p = N_q = 1$），以及常时滞。

关于方程（1.1）振荡性质的研究仍取得了不少进展。例如， [2]研究了类似方程解的相邻零点之间的距离；近来还有论文研究动态方程 [14] 以及类似形式的非线性方程的振荡 [29]。然而，对于一般形式的（1.1）的振荡，人们知之甚少。本文旨在填补这一空白。这里提及 [11, 25, 28] 的结果：这些结果允许存在正、负系数函数，但仅考虑常时滞。其方法和所得振荡判据与我们的工作不可比较。

我们的第一个主要结果（定理3.1）推广了 Győri 和 Ladas 的结果 [16,第 6 节。9]该结果证明，只要相应的一阶非中立型延迟微分方程具有振荡性，NDDE（1.1）就具有振荡性。我们将这一结论与后一个方程的经典振荡判据相结合，从而得到（1.1）具有振荡性的显式判据。第二个主要结果（定理4.2）基于一个比较型结果（定理4.1）和一种迭代方法。它将 Agarwal、Bohner 和 Li 的一个结果 [1,定理 3.4。9] 推广到多个常时滞的情形。我们还证明，当满足一个与慢变性相关的性质时，这两个主要定理都可以加强（见推论3.4 和4.3）。

本文其余部分安排如下。下一节将阐明一些补充记号，并证明两个贯穿全文使用的辅助结果。第3节介绍与一般情形相关的主要结果，其中时滞可以随时间变化。第4节讨论与常时滞情形相关的结果。最后，我们在第5节给出一些说明性例子，并讨论所得振荡判据之间的关系。

2 预备知识

在本节中，我们设定一些记号并证明两个辅助结果。按照惯例，令 $\mathbb{N}$ 和$\mathbb{R}$ 分别表示非负整数集与实数集。

下面这个简单命题是引理2.2所需要的，它在我们所有结果的证明中起着关键作用。

命题 2.1。 假设 τ 和 δ 都是定义在 $[t_0, \infty)$上的连续可微函数，且对于某个正常数 D，有 $0 \le \delta(t) \le \tau(t) \le D$，使得对所有 $t \ge t_0$， $\delta'(t) < 1$ 成立。那么对于任意 $t \ge t_0$，存在唯一的 $c(t) \in [0, D]$，使得

$$c(t) = \tau(t) - \delta(t - c(t)). \tag{2.1}$$

此外，函数 $t \mapsto c(t)$ 可微且满足

$$1 - c'(t) = \frac{1 - \tau'(t)}{1 - \delta'(t - c(t))}. \tag{2.2}$$

证明。定义如下连续函数

$$F\colon \mathbb{R} \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad F(c, t) \coloneqq c - \tau(t) + \delta(t - c). \tag{2.3}$$

由于 $F(0,\ t) \le 0$, $F(D,\ t) \ge 0$，且

$$\frac{\partial F}{\partial c}(c, t) = 1 - \delta'(t) > 0,$$

因此，对于任意 $t \ge t_0$，存在唯一的 $c \in [0, D]$ 满足（2.1）。应用隐函数定理可得，c 可微，且 $F(c(t)\ t) = 0$。对其关于 t 求导，得到（2.2）。

□

记号

回顾 $N_p \ge N_q$。为方便记号，定义 $Q_i \equiv 0$，$\delta_i \equiv 0$，对所有$N_q < i \le N_p$。

根据命题 2.1，对于每一对 $(\delta_i,\ \tau_i)\,(i \in \{1, 2, \dots, N_p\})$，令 c_i 表示满足下列条件的唯一可微函数

$$c_i(t) = \tau_i(t) - \delta_i(t - c_i(t)), \quad \text{and} \quad c_i(t) \in [0, D] \quad \text{for all } t \ge t_0 + D. \tag{2.4}$$

注意，对于 $N_q < i \le N_p$，$c_i = \tau_i$。此外，对于每个 $1 \le i \le N_p$，引入函数

$$\bar{P}_i(t) \coloneqq P_i(t) - Q_i(t - c_i(t))(1 - c_i'(t)), \qquad t \ge t_0 + D. \tag{2.5}$$

下面的引理给出了一个便于使用的代换，后文将多次用到。它通过允许多个负系数函数和多个时变时滞，对 [16, 引理 6.9.1.]和 [1, 引理 3.3.1]进行了推广。

引理 2.2. 设 c_i 和 P_i 由 (2.4)–(2.5)定义，并且 $P_i(t) \ge 0$ 对所有 $t \ge t_0 + D$均成立。假设 x 是方程 (1.1)的一个最终正解，且满足以下性质：

$$\forall T_0 \in (t_0, \infty)\ \exists \xi > T_0 :\ \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(\xi) > 0, \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1}^{N_r} R_i(t) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t - c_i(t)}^{t} Q_i(s)\, ds \le 1. \tag{2.7}$$

定义

$$y(t) \coloneqq x(t) - \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t) x(t - r_i(t)) - \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t - c_i(t)}^{t} Q_i(s) x(s - \delta_i(s))\, ds. \tag{2.8}$$

则 $y'(t) \le 0$ 以及 $x(t) \ge y(t) > 0$。

证明与 [1, 引理 3.3.1] 的证明类似。

证明。 假设 $x(t)$ 是方程 (1.1) 的一个解，且 $x(t) > 0$ 对所有 $t \geq T \geq t_0 + D$。对 $y(t)$求导可得

$$y'(t) = \left[x(t) - \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)x(t - r_i(t))\right]' - \sum_{i=1}^{N_q} Q_i(t)x(t - \delta_i(t)) + \sum_{i=1}^{N_q} Q_i(t - c_i(t))x\Big(t - c_i(t) - \delta_i(t - c_i(t))\Big)(1 - c_i'(t)).$$

根据方程（1.1）以及 P_i 和 c_i 的定义，我们得到

$$y'(t) = -\sum_{i=1}^{N_p} \Big[P_i(t) - Q_i(t - c_i(t))(1 - c_i'(t))\Big]x(t - \tau_i(t)),$$

或者等价地

$$y'(t) = -\sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(t)x(t - \tau_i(t)). \tag{2.9}$$

因此 $y'(t) \leq 0$ 对于 $t \geq T$。还需证明 $y(t)$ 的正性。根据（2.6）、（2.9）以及 $x(t)$ 的正性，只需证明 $y(t)$ 非负。

我们区分两种情形。

情形 1. 假设 $x(t)$ 无界。那么存在一个序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $s_n \to \infty$,$x(s_n) \to \infty$，使得

$$x(t) \leq x(s_n) \quad \text{for all } t \leq s_n.$$

因此,

$$y(s_n) = x(s_n) - \sum_{i=1}^{N_r} R_i(s_n)x(s_n - r_i(s_n)) - \sum_{i=1}^{N_q} \int_{s_n - c_i(s_n)}^{s_n} Q_i(s)x(s - \delta_i(s))\,ds$$
$$\geq x(s_n)\left(1 - \sum_{i=1}^{N_r} R_i(s_n) - \sum_{i=1}^{N_q} \int_{s_n - c_i(s_n)}^{s_n} Q_i(s)\,ds\right) \geq 0$$

对所有 n 根据性质（2.7）。由 y 的单调性，我们得出 $y(t) \geq 0$。

情形 2。 假设 $x(t)$有界。令

$$M_x := \limsup_{t\to\infty} x(t) \quad \text{and} \quad M_y := \lim_{t\to\infty} y(t) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

那么存在一个序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$，满足 $s_n \to \infty$ 且 $x(s_n) \to M_x$。此外，令 $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$x(\xi_n) := \max\{x(s) : s_n - 2D \leq s \leq s_n\}.$$

显然， $\xi_n \to \infty$，并且在必要时取一个收敛子列（不改变记号）后，我们可以假设

$$\lim_{n\to\infty} x(\xi_n) \leq M_x.$$

现在，考虑这个差

$$x(s_n) - y(s_n) = \sum_{i=1}^{N_r} R_i(s_n)x(s_n - r_i(s_n)) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{s_n - c_i(s_n)}^{s_n} Q_i(s)x(s - \delta_i(s))\,ds.$$

根据 ξ_n 的定义，我们有

$$x(s_n) - y(s_n) \le x(\xi_n) \left(\sum_{i=1}^{N_r} R_i(s_n) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{s_n - c_i(s_n)}^{s_n} Q_i(s)\, ds \right).$$

利用不等式（2.7），我们得到

$$x(s_n) - y(s_n) \le x(\xi_n), \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$

令 $n \to \infty$，则得 $M_x - M_y \le M_x$，从而 $M_y \ge 0$. 由于 $y'(t) \le 0$，由此可知 $y(t) \ge M_y \ge 0$，对 $t \ge T$。 □

3 结果 – 可变时滞

首先，我们考虑最一般的情形，其中（1.1）中的所有时滞函数均依赖于时间，并满足引言中所列的性质。现在，我们将把本方程与一个简单的滞后型时滞微分方程联系起来。这给出了 [16,定理 6.9.1]的推广。

定理 3.1. 设 $P_i^*(t)$ 与 $c_i^*(t)$ 为任意的，使得 $0 \le P_i^*(t) \le P_i(t)$ 且 $c_i^*(t) \ge c_i(t)$对所有 $t \in [t_0 + D, \infty)$ 以及 $1 \le i \le N_p$。此外，假设它们满足

$$\forall T_0 \in (t_0, \infty)\ \exists \xi > T_0 : \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(\xi) > 0, \tag{3.1}$$

and

$$\sum_{i=1}^{N_r} R_i(t) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t - c_i^*(t)}^{t} Q_i(s)\, ds \le 1. \tag{3.2}$$

如果每一个解

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t) x(t - \tau_i(t)) = 0 \tag{3.3}$$

振荡，则方程 (1.1)的每一个解也振荡。

证明。 假设 (3.3) 的每一个解都振荡。为得出矛盾，假设 (1.1) 有一个最终正解 x。注意到条件 (3.1)–(3.2) 蕴含不等式 (2.6) 和 (2.7) 成立。定义 y 为 (2.8)。如引理 2.2 的证明中所见，

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(t) x(t - \tau_i(t)) = 0.$$

利用 $y(t) \le x(t)$ 以及 $P_i^*(t) \le P_i(t)$ 这一事实，我们得到

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t) y(t - \tau_i(t)) \le 0,$$

其中 y 由引理 2.2可知最终为正。根据 [16,推论 3.2。2], 该不等式蕴含存在一个最终正解 z，满足

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t) z(t - \tau_i(t)) = 0.$$

这就构成了一个矛盾，从而完成了我们的证明。 □

由于通常没有函数 c_i的显式公式，直接应用前面的定理和推论可能比较困难。因此，我们给出进一步的充分条件。回顾一下， D 是所有时滞的上界。

推论 3.2。 假设存在 Δ_j，使得 $\delta_j'(t) \le \Delta_j < 1$且 $\tau_i'(t) < 1$对所有$t \ge t_0$、 $j \in \{1, \dots N_q\}$、$i \in \{1, \dots, N_p\}$均成立。令

$$\bar{P}_i^*(t) := P_i(t) - \frac{1-\tau_i'(t)}{1-\Delta_i} \sup_{s\in[t-D,t]} Q_i(s) > 0, \qquad (1 \le i \le N_p)$$

and

$$\sum_{i=1}^{N_r} R_i(t) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-D}^{t} Q_i(s)\, ds \le 1, \tag{3.4}$$

此外，假设的每个解都

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t) x(t-\tau_i(t)) = 0$$

振荡。那么，(1.1)的每个解都振荡。

证明。 不等式（3.4）蕴含（3.2），而条件（3.1）由以下不等式得到

$$\begin{aligned} 0 < P_i(t) - \frac{1-\tau_i'(t)}{1-\Delta_i} \sup_{s\in[t-D,t]} Q_i(s) &\le P_i(t) - \frac{1-\tau_i'(t)}{1-\delta_i'(t-c_i(t))} Q_i(t-c_i(t)) \\ &= P_i(t) - (1-c_i'(t)) Q_i(t-c_i(t)) = \bar{P}_i(t). \end{aligned}$$

根据定理 3.1，该结论立即成立。 □

定理 3.1 或推论3.2 可与任意一阶线性时滞微分方程振荡判据结合，应用于如下形式的方程 $x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) x(t-\tau_i(t)) = 0$，从而得到方程（1.1）所有解振荡的具体充分判据。感兴趣的读者可在综述论文 [27, 37] 中找到许多此类判据，或在较新的文献中找到，例如 [3, 6, 8, 13, 21, 31, 32, 38, 39]及其参考文献。下一个推论中，我们将定理 3.1 与一些经典结果结合起来。

推论 3.3. 假设存在函数 $0 \le P_i^* \le P_i$ 和 $c_i^* \ge c_i$ 使条件(3.1)–(3.2) 成立。设 $\tau_{\min}(t) := \min^{1\le i\le N_p} \tau_i(t)$。若满足以下任一条件，则方程 (1.1) 的每个解都振荡。

$$\tau_i(t) \equiv \tau_i \quad \textit{are positive constants and} \quad \liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-\tau_i}^{t} \bar{P}_i^*(s)\, ds > \frac{1}{e}, \tag{A_1}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t)\tau_i(t) > \frac{1}{e}, \tag{B_1}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{\min}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(s)\, ds > \frac{1}{e}, \tag{C_1}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\tau_{\min}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(s)\, ds > 1. \tag{D_1}$$

证明。 根据 [24, 推论 1], [9, 推论 2.6。2], [23, 定理 2.7。1], 以及 [23, 注 2.7。3], 各条件分别保证了方程 (A_1)、(B_1)、(C_1) 和 (D_1) 的每个解都振荡。因此，由定理 3.1可知，方程 (1.1) 的每个解都振荡。

□

下一个推论将用到所谓的慢变性质。若对所有 $h \in \mathbb{R}$，表达式 $|f(t+h) - f(t)|$ 在 t 趋于无穷时趋于零，则称函数 f 在无穷远处（加法意义下）慢变。我们回顾 [30, p. 30] 给出的连续慢变函数的一种刻画：连续函数 f 在无穷远处慢变，当且仅当它可以分解为两个函数之和，其中一个函数连续且收敛到有限值，另一个函数可导，且其导数在 $t \to \infty$时趋于零。

推论*3.4*。假设存在函数 $0 \le P_i^* \le P_i$ 和 $c_i^* \ge c_i$，使得条件 *(3.1)–(3.2)* 成立。此外，设 $\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_i(t)}^{t} \bar{P}_i^*(s)\, ds > 0$, $1 \le i \le N_p$, $\bar{P}_i^*(t)$ 和$\tau_i(t)$ 对所有 $i \in \{1, 2, \dots, N_p\}$ 都一致连续且有界。若以下条件中任意一个成立，则方程 *(1.1)* 的每个解都振荡。

(a) $\tau_i(t) \equiv \tau_i$ 是正常数，$\sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-\tau_i}^{t} \bar{P}_i^*(s)\, ds$ 在无穷远处慢变 *and*

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-\tau_i}^{t} \bar{P}_i^*(s)\, ds > \frac{1}{e}. \tag{A_2}$$

(b) $\sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t)\tau_i(t)$ 在无穷远处慢变，并且

$$\limsup_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(t)\tau_i(t) > \frac{1}{e}. \tag{B_2}$$

(c) 存在一个一致连续函数 $\hat{\tau}\colon [t_0, \infty) \to [0, \infty)$ 使得 $0 \le \hat{\tau}(t) \le \tau_i(t)$对所有 $t \ge t_0$ 和 $1 \le i \le N_p$ 均成立，并且 $\int_{t-\hat{\tau}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(s)\, ds$ 在无穷远处慢变，并且

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\hat{\tau}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i^*(s)\, ds > \frac{1}{e}. \tag{C_2}$$

证明。 根据 [13, 定理 2.2。(a)/(b)/(c)], 任一条件 (A_2)、(B_2) 或 (C_2) 均意味着 (3.3) 的每个解都振荡，因此应用定理 3.1可得 (1.1) 的每个解都振荡。

□

存在一些特殊情形，此时函数 $c_i(t)$ 可以表示为显式的闭式表达式——参见例 5.1。特别地，当函数 δ_i 全为常数时，便属于这种情形。

事实上，如果时滞函数 δ_i 全为常数，那么 $c_i(t)$ 可以显式表示为$c_i(t) = \tau_i(t) - \delta_i$，且 (2.5) 可化简为

$$\bar{P}_i(t) := P_i(t) - Q_i(t - \tau_i(t) + \delta_i)(1 - \tau_i'(t)), \qquad t \in [t_0 + D, \infty). \tag{3.5}$$

到目前为止得到的结果可以进一步强化，概括如下定理。

定理 3.5。 如果时滞 δ_k 对于 $1 \le k \le N_q$均为常数，则定理 *3.1* 和推论 *3.3*及 *3.4*在如下选择下成立

$$\bar{P}_i^*(t) := P_i(t) - Q_i(t - \tau_i(t) + \delta_i)(1 - \tau_i'(t)) \quad \textit{and} \quad c_i^*(t) := \tau_i(t) - \delta_i.$$

4 结果——常时滞

本节专门讨论（1.1）中的所有时滞均为常数的特殊情形，即我们研究中立型时滞微分方程

$$\left[x(t)-\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)x(t-r_i)\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}P_i(t)x(t-\tau_i)-\sum_{i=1}^{N_q}Q_i(t)x(t-\delta_i)=0, \tag{4.1}$$

对于 $t\geq t_0$，其中 $N_q\leq N_p$，系数函数 R_i、P_j 和 Q_k 对所有 $1\leq i\leq N_r$、$1\leq j\leq N_p$ 和 $1\leq k\leq N_q$ 均非负且连续，而 $R_i\in C^1$，常时滞 r_i、τ_j、δ_k 均非负，且有上界 D，并且对所有 $1\leq k\leq N_q$ 都满足 $\delta_k\leq\tau_k$。

在这种情况下，(3.5) 可简化为 $\bar{P}_i(t)=P_i(t)-Q_i(t)\geq 0$。下面的比较定理通过允许多个时滞推广了 [1, 定理 3.4.1] 它也为我们的第二个主要结果——定理 4.2奠定基础。

定理 4.1。 假设对所有 $1\leq i\leq N_p$，$\tau_i>0$，此外，

$$\bar{P}_i(t)=P_i(t)-Q_i(t-\tau_i+\delta_i)\geq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)+\sum_{i=1}^{N_q}\int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t}Q_i(s)\,ds\leq 1,$$

且满足以下条件之一

$$\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)>0 \tag{4.2}$$

or

$$\sum_{i=1}^{N_p}\int_{t-\tau_i}^{t}\bar{P}_i(s)\,ds>0 \tag{4.3}$$

对所有 $t\geq t_0+D$。那么，方程 (4.1) 的每个解都振荡，当且仅当相应微分不等式的每个解都

$$\left[x(t)-\sum_{i=1}^{N_r}R_i(t)x(t-r_i)\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}P_i(t)x(t-\tau_i)-\sum_{i=1}^{N_q}Q_i(t)x(t-\delta_i)\leq 0 \tag{4.4}$$

振荡。

证明。 证明遵循 [1, 定理 3.4.1] 的主要思路。为求完整起见，我们在此给出详细证明。

充分性部分显然。我们将证明必要性。假设 x 是 (4.4) 的最终正解。按照引理 y 2.2 中使用常时滞的方式定义 。类似于其中给出的论证可得

$$y'(t)\leq-\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)x(t-\tau_i)$$

当 t 足够大时。在 $[t,\infty)$ 上积分可得

$$y(t)\geq\int_t^{\infty}\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(s)x(s-\tau_i)\,ds.$$

根据 y 的定义，我们得到

$$x(t) \geq \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)x(t-r_i) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t} Q_i(s)x(s-\delta_i)\, ds + \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)x(s-\tau_i)\, ds \tag{4.5}$$

当 $t \geq t_1$ 对于充分大的 t_1。现在，令

$$E \coloneqq \{u \in C([t_1 - D, \infty), \mathbb{R}^+) : 0 \leq u(t) \leq 1, \text{ for all } t \geq t_1 - D\}.$$

定义算子 F 如下:

$$(Fu)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(t)} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)u(t-r_i)x(t-r_i) \right. \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t} Q_i(s)u(s-\delta_i)x(s-\delta_i)\, ds \\ \qquad \left. + \displaystyle\int_t^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)u(s-\tau_i)x(s-\tau_i)\, ds \right], & t_1 \leq t, \\ \dfrac{t-t_1+D}{D}(Fu)(t_1) + 1 - \dfrac{t-t_1+D}{D}, & t_1 - D \leq t < t_1. \end{cases}$$

容易看出， F 将 E 映射到其自身。此外，对所有 $u \in E$: $(Fu)(t) > 0$，对所有 $t \in [t_1 - D, t_1)$。定义序列 $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $u_0 \equiv 1, u_{k+1} = Fu_k$。由数学归纳法，根据 (4.5) 可推得，对所有 $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$。定义 $u(t) \coloneqq \lim_{k\to\infty} u_k(t)$，并利用勒贝格控制收敛定理，可得对于 $t \geq t_1$

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{1}{x(t)} \Bigg[& \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)\, u(t-r_i)\, x(t-r_i) \\ & + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t} Q_i(s)\, u(s-\delta_i)\, x(s-\delta_i)\, ds \\ & + \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)\, u(s-\tau_i)\, x(s-\tau_i)\, ds \Bigg], \end{aligned}$$

and

$$u(t) = \frac{t-t_1+D}{D}u(t_1) + 1 - \frac{t-t_1+D}{D} > 0$$

对于 $t_1 - D \leq t < t_1$。定义 $w = ux$，则当 $t_1 - D \leq t < t_1$时， $w(t) > 0$ ，且

$$\begin{aligned} w(t) = & \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)w(t-r_i) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t} Q_i(s)w(s-\delta_i)\, ds \\ & + \int_t^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)w(s-\tau_i)\, ds \end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 $t \geq t_1$。通过求导可知， w 是（4.1）的非负解。还需证明 w（t） > 0对所有 $t \in [t_1 - D, \infty)$成立。假设存在 $t^* \geq t_1$ 使得 w（t） > 0 对于$t_1 - D \leq t < t^*$ 以及 w（t^*） $= 0$成立。那么由（4.6）可得

$$\begin{aligned} 0 = w(t^*) = & \sum_{i=1}^{N_r} R_i(t^*)w(t^*-r_i) + \sum_{i=1}^{N_q} \int_{t^*-\tau_i+\delta_i}^{t^*} Q_i(s)w(s-\delta_i)\, ds \\ & + \int_{t^*}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)w(s-\tau_i)\, ds. \end{aligned}$$

鉴于 w的非负性， $R_i\left(t^*\right)=0$ （$1 \leq i \leq N_r$）， $Q_i(t)=0$对所有 $t \in\left[t^*-\tau_i+\delta_i, t^*\right]$和 $1 \leq i \leq N_q$成立；此外， $P_i(t) w\left(t-\tau_i\right)=0$ 对所有 $t \geq t^*$成立，并且 $1 \leq i \leq N_p$，这与（4.2）或（4.3）矛盾。 □

现在我们已经建立了中立型延迟微分方程与相应不等式之间的联系，可以着手证明第二个主要结果。为方便记号，令

$$\tau_0 \coloneqq \min_{1\leq i\leq N_p} \tau_i, \quad \text{and} \quad r_0 \coloneqq \min_{1\leq i\leq N_r} r_i,$$

并引入函数

$$\Omega_{i,j}(t) \coloneqq \frac{R_j(t-\tau_i)\bar{P}_i(t)}{\bar{P}_i(t-r_j)} \tag{4.7}$$

对于 $1 \leq j \leq N_r$、 $1 \leq i \leq N_p$ 以及所有使其有意义的 $t \geq t_0+D$。

定理 4.2. 假设对所有 $1 \leq i \leq N_p$，都有 $P_i>0$ ，并且存在常数$\omega \in(0, \infty)$，使得

$$\omega \leq \min_{i,j}\left\{\inf_{s\geq t_0+D} \Omega_{i,j}(s)\right\} \quad \textit{and} \quad \omega<\frac{1}{N_r}. \tag{4.8}$$

此外，假设

$$\sum_{i=1}^{N_r} R_i(t)+\sum_{i=1}^{N_q} \int_{t-\tau_i+\delta_i}^{t} Q_i(s)\, ds \leq 1 \tag{4.9}$$

对所有 $t \geq t_0+D$、 $1 \leq i \leq N_p$均成立。若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\frac{\left(N_r \omega\right)^m}{1-N_r \omega} \liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-mr_0-\tau_i}^{t} \bar{P}_i(s)\, ds>\frac{1}{e}, \tag{A_3}$$

or

$$\frac{\left(N_r \omega\right)^m}{1-N_r \omega} \liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} (mr_0+\tau_i)\bar{P}_i(t)>\frac{1}{e}, \tag{B_3}$$

or

$$\frac{\left(N_r \omega\right)^m}{1-N_r \omega} \limsup_{t\to\infty} \int_{t-mr_0-\tau_0}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(s)\, ds>1, \tag{D_3}$$

那么，方程(4.1)的每个解都振荡。

该定理推广并改进了 [1,定理 3.4。9] 该定理仅考虑了以下情形$N_r=N_p=N_q=1$ 和 $m=1$。注意，如果所有时滞都是常数， $P_i(t)>0$ 并且$\omega>0$ 满足（4.8），那么定理4.2 ——仅取 $m=0$ 时——给出的条件比推论3.3 更有效（参见例子5.4 和5.5）。

证明。证明过程与 [1, 定理 3.4.9]的证明类似。

令 $m \in \mathbb{N}$ 满足以下不等式之一：（A_3）、（B_3）或（D_3）。为导出矛盾，假设（4.1）存在一个最终正解 x。令 y 由（2.8）定义——请记住，此处 $c_i=\tau_i-\delta_i$，其中 $\delta_i=0$ 对于 $N_q<i \leq N_p$成立。与引理2.2 中一样，我们得到

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(t) x\left(t-\tau_i\right)=0. \tag{4.10}$$

将（2.8）应用于 $x(t-\tau_i)$ 并代入上述等式，得到

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)y(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_r}\bar{P}_i(t)R_j(t-\tau_i)x(t-\tau_i-r_j)$$
$$+\sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_q}\bar{P}_i(t)\int_{t-\tau_j+\delta_j}^{t}Q_j(s-\tau_i)x(s-\tau_i-\delta_j)=0.$$

略去最后一项，并利用 $\Omega_{i,\ j}$ 的定义，我们得到不等式

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)y(t-\tau_i)+\sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_r}\Omega_{i,j}(t)\bar{P}_i(t-r_j)x(t-\tau_i-r_j)\le 0.$$

利用 ω 的定义，我们有

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)y(t-\tau_i)+\omega\sum_{i=1}^{N_p}\sum_{j=1}^{N_r}\bar{P}_i(t-r_j)x(t-\tau_i-r_j)\le 0,$$

并由方程（4.10）易知

$$\sum_{j=1}^{N_r}y'(t-r_j)=-\sum_{j=1}^{N_r}\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t-r_j)x(t-\tau_i-r_j).$$

将这些结果结合起来，我们得到

$$\left[y(t)-\omega\sum_{i=1}^{N_r}y(t-r_i)\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)y(t-\tau_i)\le 0.$$

Now，定理4.1 表明存在一个最终正函数 $\tilde{y}$ 满足 es

$$\left[\tilde{y}(t)-\omega\sum_{i=1}^{N_r}\tilde{y}(t-r_i)\right]'+\sum_{i=1}^{N_p}\bar{P}_i(t)\tilde{y}(t-\tau_i)=0. \tag{4.11}$$

引入

$$z(t):=\tilde{y}(t)-\omega\sum_{i=1}^{N_r}\tilde{y}(t-r_i),$$

由此可得

$$\tilde{y}(t)=z(t)+\omega\sum_{i=1}^{N_r}\tilde{y}(t-r_i).$$

通过迭代，我们得到

$$\tilde{y}(t)=z(t)+\omega\sum_{i_1=1}^{N_r}z(t-r_{i_1})+\omega^2\sum_{i_1=1,i_2=1}^{N_r}z(t-r_{i_1}-r_{i_2})+\dots$$
$$+\omega^K\sum_{i_1=1,\dots,i_K=1}^{N_r}z\left(t-\sum_{l=1}^{K}r_{i_l}\right)+\omega^{K+1}\sum_{i_1=1,\dots,i_{K+1}=1}^{N_r}\tilde{y}\left(t-\sum_{l=1}^{K+1}r_{i_l}\right),$$

其中 $K>m$ 且 t 足够大。根据引理 2.2 可得 $z'(t)\le 0$ 以及$z(t)>0$。利用 z 的单调性以及 $\tilde{y}$ 的正性，可得不等式

$$\tilde{y}(t)\ge\sum_{i=0}^{K}(N_r\omega)^i z(t-ir_0).$$

现在，省略去掉前 m 项，再次利用单调性，并利用 $N_r\omega \in (0,1)$，我们推得

$$\tilde{y}(t) \geq (N_r\omega)^m \frac{1-(N_r\omega)^{K-m+1}}{1-N_r\omega} z(t-mr_0).$$

结合方程 (4.11) 可得，$z(t)$ 是微分不等式的一个最终正解

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{p}_i(t) z(t-mr_0-\tau_i) \leq 0,$$

其中

$$\tilde{p}_i(t) := (N_r\omega)^m \frac{1-(N_r\omega)^{K-m+1}}{1-N_r\omega} \bar{P}_i(t).$$

应用 [16, 推论 3.2。2] 可得，微分方程

$$v'(t) + \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{p}_i(t) v(t-mr_0-\tau_i) = 0 \tag{4.12}$$

也有一个最终正解。另一方面，当 K足够大时，(A_3)、(B_3) 和 (D_3) 意味着

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-mr_0-\tau_i}^{t} \tilde{p}_i(t)\, ds > \frac{1}{e}, \tag{4.13}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{N_p} (mr_0+\tau_i)\tilde{p}_i(t) > \frac{1}{e}, \tag{4.14}$$

and

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-mr_0-\tau_0}^{t} \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{p}_i(t)\, ds > 1, \tag{4.15}$$

分别成立。另一方面，众所周知，不等式 (4.13)、(4.14) 和 (4.15) 中的每一个都足以保证方程 (4.12) 的所有解振荡（分别参见 [24, 推论 1]，[9, 推论 2.6。2] 和 [23, 注 2.7。3]，）。这就产生了矛盾，从而完成证明。

□

值得注意的是，只要系数函数满足与慢变性质相关的一项额外条件，就可以将下极限替换为上极限，从而显著强化前一定理中的条件。我们在下一个推论中对这一结果作出表述，以此总结本文的结果。

推论 4.3。假设不等式 (4.8)–(4.9) 成立，函数 P_i 有界、一致连续，并满足 下极限 $\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_i}^{t} \bar{P}_i(s)\, ds > 0$ 对所有 $1 \leq i \leq N_p$均成立。对于 $m \in \mathbb{N}$，定义

$$A_m(t) := \frac{(N_r\omega)^m}{1-N_r\omega} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{t-mr_0-\tau_i}^{t} \bar{P}_i(s)\, ds,$$

and

$$B_m(t) := \frac{(N_r\omega)^m}{1-N_r\omega} \sum_{i=1}^{N_p} \bar{P}_i(t)(mr_0+\tau_i).$$

如果某个 若满足下列条件之一，则方程 (4.1)的每个解都振荡 :

A_m 在无穷远处慢变，且 $\limsup_{t\to\infty} A_m(t) > \frac{1}{e}$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$;B_m 在无穷远处慢变，且 $\limsup_{t\to\infty} B_m(t) > \frac{1}{e}$ 对某个 $m \in \mathbb{N}$.

证明。 反证过程与定理4.2中的类似。唯一的差别在于，我们在最后应用 [13, 定理 2.2 (a)–(b)] 以得到矛盾。 □

5 个例子

本节给出若干例子，以说明我们的结果的适用性。在第一个例子中，可以直接应用定理 3.1。

例 5.1。 考虑方程

$$\left[x(t) - \frac{1}{4}x\Big(t - \frac{1}{2}\Big)\right]' + 2x\left(t - \left(\frac{1}{2}\cos t + 1 + e^{-t+1+\frac{1}{2}\cos t}\right)\right) - e^{-t}x\big(t - e^{-t}\big) = 0$$

对于 $t \geq 0$。这里取 $N_r = N_p = N_q = 1$, $R_1(t) = \frac{1}{4}$, $P_1(t) = 2$, $Q_1(t) = e^{-t}$, $r_1(t) = \frac{1}{2}$,$\tau_1(t) = \frac{1}{2}$余弦 $t + 1 + e^{-t+1+\frac{1}{2}}$余弦 t，以及 $\delta_1(t) = e^{-t}$。相应的隐式关系给出显式解 $c_1(t) = \frac{1}{2}$余弦$t + 1$。可以证明， $\bar{P}_1(t) = 2 - e^{c_1(t)-t}(1 - c_1'(t))$，其在 $t \to \infty$时趋于 2。因此，存在 $T_0 > 0$，使得对所有 $t \geq T_0$，均有 $P_1(t) \geq 1$。应用推论 3.3，我们得到

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau_1(t)}^{t} \bar{P}_1(s)\,ds \geq \liminf_{t\to\infty} \tau_1(t) \geq \liminf_{t\to\infty} c_1(t) = \frac{1}{2} > \frac{1}{e},$$

因为 $c_1(t) \leq \tau_1(t)$。因此，每个解都振荡。

下一个示例说明了定理4.2在时滞为常数的情况下的适用性，以及适当选择 m的重要性。

例 5.2。 考虑中立型时滞微分方程

$$\left[x(t) - \frac{1}{2}x\Big(t - \frac{\pi}{2}\Big)\right]' + \left(\frac{3}{4}\sin(4t) + \frac{5}{4}\right)x(t-0.1) + \frac{1}{10}x(t-0.01) - \frac{1}{4}x(t-0.05) = 0$$

对于 $t \geq 0$。该方程具有（4.1）的形式，其中 $N_r = N_q = 1$、 $N_p = 2$、 $R_1(t) = \frac{1}{2}$， $P_1(t) = \frac{3}{4}\sin 4t + \frac{5}{4}$ P_2 $t = \frac{1}{10}$ Q_1 $t = \frac{1}{4}$ $r_1 = \frac{\pi}{2}$ $\tau_1 = 0.1$ $\tau_2 = 0.01$ $\delta_1 = 0.05$ sin( ), ( ), ( ), , , 以及 , 由此可得 $\bar{P}_1(t) = \frac{3}{4}\sin(4t) + 1$， $\bar{P}_2(t) = \frac{1}{10}$以及 $\Omega_{1,1}(t) = \Omega_{2,1}(t) = \frac{1}{2}$。对于 ω，一个合适的选择是 12。于是，条件（B_3）左端为

$$2^{1-m}\left[\left(\frac{m\pi}{2} + 0.1\right)\frac{1}{4} + \left(\frac{m\pi}{2} + 0.01\right)\frac{1}{10}\right].$$

取 $m = 2$，我们有

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi + 0.1}{4} + \frac{\pi + 0.01}{10}\right) \approx 0.563 > \frac{1}{e}.$$

因此，条件 (B_3) 得到满足，从而每个解都会振荡。我们注意到，也可以选择 $m = 1$ 或 $m = 3$ 得出相同的结论，而其他 m 值则无法通过 (B_3) 判定其振动性。作为比较，条件 (D_3) 同样给出了在 $m \in \{1, 2, 3\}$ 时振荡的充分条件，而若令 $1 \leq m \leq 5$，则 (A_3) 可保证振荡。

在下面的例子中，我们利用系数函数的慢变性质。

例 5.3. 考虑方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{2}x(t-0.15)\right]'+1.1x(t-0.05)$$
$$+(2\cos(\ln t)+2.05)x(t-0.01)-x(t-0.02)=0,$$

对于 $t\geq 1$。该中立型时滞微分方程具有形式 (4.1)，其中 $N_r=N_q=1$, $N_p=2$, $R_1(t)=\frac{1}{2}$, $P_1(t)=1.1$, $P_2(t)=P_2(t)=2\cos(\ln t)+2.05$, $Q_1(t)=1$, $r_1=0.15$, $\tau_1=0.05$, $\tau_2=0.01$, $\delta_1=0.02$, $\bar{P}_1(t)=0.1$。此外，当 $t\to\infty$ 时，$\Omega_{1,1}(t)=\frac{1}{2}$ 且 $\Omega_{2,1}(t)\to\frac{1}{2}$，因此我们可以选取 ω 小于但任意接近 1/2。即使选取 $\omega=\frac{1}{2}$，不等式 (B_3) 对任何 $m\in\mathbb{N}$ 都不成立，因为

$$\frac{(\frac{1}{2})^m}{1-\frac{1}{2}}\liminf_{t\to\infty}\left[0.1(0.15m+0.05)+(2\cos(\ln(t))+2.05)\,(0.15m+0.01)\right]$$
$$=2^{1-m}(0.0225m+0.0055)<\frac{1}{e}\quad\text{for all } m\in\mathbb{N}.$$

注意到，由于函数 P_1 和 P_2 缓慢变化，条件（A_3）和（B_3）等价，因此（A_3）也不能保证所有解都振荡。

另一方面，这些函数有正的下界，因此我们可以尝试应用推论 4.3。令 $\omega=\frac{1}{2}$ 和 $m=1$，则有

$$\limsup_{t\to\infty}B_1(t)=0.668>\frac{1}{e}$$

因此，取略小于 $\omega_{1,2}$ 的值，我们可以得出结论：每个解都振荡。取 $m=2$ 或 $m=3$ 也可得出相同结论。然而，类似的简单计算表明，对于所有 上极限$_{t\to\infty}B_m(t)<1$ 以及所有 $m\in\mathbb{N}$，都有 $\omega<\frac{1}{2}$，因此不满足（D_3），定理 4.2 无法在此处应用。

最后，人们可能会想知道，对于常时滞，推论 3.3 还是定理4.2 更强，但对此并没有明确的答案。下面两个例子将说明这一点。

例 5.4. 考虑方程

$$\left[x(t)-e^{-t}x(t-2\pi)\right]'+3x(t-1)+(\sin t+1.5)x(t-2)-x\left(t-\frac{1}{2}\right)=0,\qquad t\geq 1$$

具有常时滞。该方程具有（4.1）的形式，其中 $N_r=N_q=1$, $N_p=2$, $R_1(t)=e^{-t}$, $P_1(t)=3$, $P_2(t)=\sin(t)+1.5$, $Q_1(t)=1$, $r_1=2\pi$, $\tau_1=1$, $\tau_2=2$, $\delta_1=\frac{1}{2}$，由此可得 $\bar{P}_1(t)=2$, $\bar{P}_2(t)=\sin(t)+1.5$。一方面，当 t 趋于无穷大时，$\Omega_{1,1}(t)=\Omega_{2,1}(t)=e^{-t}\to 0$，因此我们无法应用定理 4.2。另一方面，若令 $P_i^*=P_i$ 且 $c_i^*=\tau_i-\delta_i(i=1,2)$，则推论 3.3 的所有条件均得到满足。因此，不等式（A_1）的左端具有如下形式：

$$\liminf_{t\to\infty}\left(\int_{t-1}^{t}2\,ds+\int_{t-2}^{t}\sin(s)+1.5\,ds\right)>3,$$

which 明显大于 $\frac{1}{e}$，因此推论 3.3 表明每个解都振荡。

例 5.5。 考虑中立型时滞微分方程

$$\left[x(t)-\frac{1}{3}x(t-2)\right]'+(\cos 2t+2)x\left(t-\frac{1}{2}\right)-\left[\cos\left(2t+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\right]x\left(t-\frac{1}{4}\right)=0,$$

其形式为 (4.1)，其中 $N_r = N_p = N_q = 1$, $R_1(t) = \frac{1}{3}$, $P_1(t) = \cos 2t + 2$, $Q_1(t) = \cos(2t+\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}$, $r_1 = 2$, $\tau_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_1 = \frac{1}{4}$, $\tau_1 = \frac{1}{4}$, $\bar{P}_1(t) = \frac{1}{2}$, $\Omega_{1,1}(t) = \frac{1}{3}$，因此 $\omega := \frac{1}{3}$。将其代入推论 3.3 中 (A_1)–(D_1) 任一条件的左端，得到 1 4，该值小于 $\frac{1}{e}$。因此，推论 3.3 并不蕴含振动性。然而，定理 4.2 中的条件 (A_3) 在 $m = 2$ 下成立（它归结为 $0.375 > \frac{1}{e} \approx 0.368$），因此定理 4.2 表明每个解都振荡。

致谢

本研究获得匈牙利国家研究、发展与创新（NRDI）基金资助，项目编号为 FK 142891] ，以及国家卫生安全实验室的资助，项目编号为 RRF- 2.3.1-21-2022-00006]。Á.G. 获得匈牙利科学院亚诺什·博尧伊研究奖学金资助。

参考文献

[1] R. P. Agarwal、M. Bohner与W.-T. Li，《非振动与振荡：泛函微分方程理论》，《纯粹与应用数学》第267卷，Marcel Dekker。纽约：Marcel Dekker，2004年。[2] E. R. Attia，论具有多个时滞的一阶线性中立型微分方程解的零点间距离上界。AIMS Math. 9 (9): 23564–23583，2024年。https://doi.org/10.3934/math.20241145。[3] E. R. Attia与B. M. El-Matary，关于具有若干变时滞的一阶微分方程相邻零点间距离上界的新结果。《J. Inequal. Appl.》2023年：文章编号103。https://doi.org/10.1186/s13660-023-03017-w。[4] I. Balázs与T. Krisztin，具时滞价格模型的全局稳定性。J. Dyn. Differ. Equations 31 (3):1327–1339，2019年。https://doi.org/10.1007/s10884-017-9583-5。[5] C. T. H. Baker、G. A. Bocharov、C. A. H. Paul与F. A. Rihan，细胞增殖若干基本模式中时间滞后的建模与分析。J. Math. Biol. 37 (4): 341–371，1998年。https://doi.org/10.1007/s002850050133。[6] G. E. Chatzarakis与I. Jadlovská，一阶偏差微分方程的改进迭代振动检验。《Opuscula Math.》38 (3): 327–356，2018年。https://doi.org/10. 7494/OpMath.2018.38.3.327。[7] O. Diekmann、S. A. van Gils、S. M. Verduyn Lunel与H.-O. Walther，《时滞方程：泛函分析、复分析与非线性分析》，应用数学科学第110卷。Springer-Verlag，纽约，1995年。https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4206-2。[8] J. G. Dix，具变时滞的一阶时滞微分方程的改进振荡判据。Electron. J. Differ. Equ. 2021：第32号，1–12，2021。[9] L. Erbe，《泛函微分方程振动理论》。Routledge，第1版，1995年。https://doi.org/10.1201/9780203744727。

[10] T. Erneux, 《应用时滞微分方程》，Surv. Tutor. Appl. Math. Sci.第3卷。纽约：施普林格，2009年。https://doi.org/10.1007/978-0-387-74372-1。[11] E. M. Elabbasy、T. S. Hassan与S. H. Saker，具有若干正系数与负系数的非线性中立型时滞微分方程的振荡与非振动。庆北数学杂志 47 (1): 1–20，2007年。[12] Á. Garab、V. Kovács与T. Krisztin，具多个时滞的价格模型的全局稳定性。离散连续动力系统 36 (12): 6855–6871，2016年。https://doi.org/10.3934/dcds. 2016098。[13] Á. Garab与I. P. Stavroulakis，具若干变时滞的一阶线性时滞微分方程的振荡判据。《Appl. Math. Lett.》106：文章编号106366，2020年。https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106366。[14] S. R. Grace、S. S. Negi与S. Abbas，具超线性中立项的非线性时滞动力方程的新振荡结果。应用数学与计算 412：文章编号126576，2022年。https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126576。[15] K. Gopalsamy、X.-Z. He与L. Wen，关于周期中立型逻辑斯蒂方程。格拉斯哥数学杂志 33 (3): 281–286，1991年。https://doi.org/10.1017/S001708950000834X。[16] I. Győri与G. Ladas，《时滞微分方程振荡理论：及其应用》。牛津数学专著。牛津：克拉伦登出版社，1991年。[17] J. K. Hale与S. M. Verduyn Lunel，《泛函微分方程引言》，应用数学科学第99卷。纽约：Springer-Verlag，1993年。[18] C. Huang、X. Ding与Q. Wang，具时变时滞的中立型尼科尔森吹蝇方程的渐近稳定性分析。电子定性微分方程理论期刊 2025：第26号，1–15，2025年。https://doi.org/10.14232/ejqtde.2025.1.26。[19] C. Huang、X. Ding与Q. Wang，中立型尼科尔森吹蝇模型的正周期稳定性。动力系统定性理论 24 (3)：文章编号140，2025年。https://doi.org/ 10.1007/s12346-025-01295-x。[20] F. Kádár与G. Stépán，一个源于流体动力学的时滞微分代数方程隐式系统。电子定性微分方程理论期刊 2023年：文章编号28。https: //doi.org/10.14232/ejqtde.2023.1.28。[21] R. Koplatadze，具时滞自变量的一阶微分方程的振荡判据。Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., Rep. 50: 35–40，2024年。[22] Y. Kuang，《时滞微分方程：及其在种群动力学中的应用》，Math. Sci. Eng.第191卷。马萨诸塞州波士顿：学术出版社，1993年。[23] G. S. Laddem、V. Lakshmikantham与B. G. Zhang，《偏差自变量微分方程振荡理论》。Marcel Dekker, Inc.，1987年。[24] B. Li，一阶时滞微分方程的振荡。美国数学会会刊 124 (12): 3729–3737，1996年。https://doi.org/10.1090/S0002-9939-96-03674-X。[25] Z. Luo与J. Shen，具正系数与负系数的中立型微分方程的振荡与非振动。捷克数学杂志 54 (1): 79–93，2004年。https://doi.org/10.1023/B:CMAJ.0000027249.11074.27。

[26] A. Matsumoto 与 F. Szidarovszky，时滞微分非线性经济模型。载于经济学、金融学与社会科学中的非线性动力学。纪念 J. B. Rosser Jr. 的论文集。第五届经济与金融动态模型研讨会（MDEF）精选论文，乌尔比诺，意大利，2008年9月25日至27日，第195–214页。多德雷赫特：施普林格，2010年。https://doi.org/10.1007/978-3-642-04023-8_11.[27] G. M. Moremedi 与 I. P. Stavroulakis，关于具有单调或非单调自变量的时滞方程振荡的综述。载于微分方程与差分方程及其应用。ICDDEA，阿马多拉，葡萄牙，2017年6月5日至9日，第441–461页。查姆：施普林格，2018年。https://doi.org/10.1007/978-3-319-75647-9_36.[28] N. Parhi 与 S. Chand，关于具有正系数与负系数的受迫一阶中立型微分方程。《Math. Slovaca》50 (1): 81–94，2000年。[29] S. Pinelas 与 S. S. Santra，具有多个时滞的非线性中立型一阶微分方程振荡的充要条件。《J. Fixed Point Theory Appl.》20 (1): 文章编号 27，2018年。https://doi.org/10.1007/s11784-018-0506-9.[30] M. Pituk，具有缓变系数的线性时滞微分方程的振荡。《Appl. Math. Lett.》73: 29–36，2017年。https://doi.org/10.1016/j.aml.2017.04.019.[31] M. Pituk 与 J. I. Stavroulakis，基本解的第一个正根是线性时滞微分方程的最优振荡界。《J. Math. Anal. Appl.》507 (1): 文章编号 125789，2022年。https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125789.[32] M. Pituk、I. P. Stavroulakis 与 J. I. Stavroulakis，具有单调自变量的线性时滞微分方程振荡界的显式值。《Commun. Contemp. Math.》25 (3): 文章编号 2150087，2023年。https://doi.org/10.1142/S0219199721500875.[33] V. Răsvan，一类由中立型泛函微分方程描述的控制系统的绝对稳定性。非线性泛函微分方程，国际会议论文集“Equa-Diff 73”，布鲁塞尔与新鲁汶，1973年，第381–396页，1973年。[34] V. Răsvan，源于水利工程的中立型泛函微分方程中的临界情形。《Opuscula Math.》42 (4): 605–633，2022年。https://doi.org/10.7494/OpMath. 2022.42.4.605.[35] V. Răsvan、D. Danciu 与 D. Popescu，关于同步中出现的若干中立型泛函微分方程。载于时滞与互联：方法论、算法与应用。第四届 DelSys 研讨会精选论文，吉夫叙尔伊韦特，法国，2015年11月25日至27日，第19–32页。查姆：施普林格，2019年。https://doi.org/10.1007/ 978-3-030-11554-8_2.[36] H. Smith，时滞微分方程导论及其在生命科学中的应用，《Texts Appl. Math.》第57卷。纽约：施普林格，2011年。https://doi. org/10.1007/978-1-4419-7646-8.[37] I. P. Stavroulakis，关于含多个偏差自变量的微分方程振荡的综述。《J. Inequal. Appl.》2014: 文章编号 399，2014年。https://doi.org/10.1186/ 1029-242X-2014-399.[38] Z. Zhuang、Q. Wang 与 H. Wu，一阶时滞微分方程的部分尖锐振荡判据。应用数学与计算，409: 文章编号 126422，2021。https://doi. org/10.1016/j.amc.2021.126422.

[39] Z. Zhuang、Q. Wang 与 H. Wu，一阶时滞微分方程基于迭代的新振荡判据。 应用数学与计算 **390**：文章编号 125632，2021。 https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125632.[40] L. Zhang 与 G. Stépán，标量隐式中立型时滞微分方程的 Hopf 分岔分析。 电子定性微分方程理论期刊，2018：文章编号 62，2018年。 https://doi.org/10.14232/ejqtde.2018.1.62.