平移板和旋转板的无黏与粘性涡脱落比较

Yu Jun Loo [*1] 和 Silas Alben[1]

[1] *Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, MI 48109, USA*

arXiv:2602.06299v1 [physics.flu-dyn] 6 Feb 2026

摘要

我们将采用连续前缘脱落的无黏涡片模型，与直接纳维–斯托克斯模拟进行比较，研究中等雷诺数（Re ≈1000）下大范围的非定常平板运动。我们考察了约 70 种不同的运动学构型，涵盖物体主导和流动主导区间。在物体主导运动中，流体动力学主要由预设的板加速度驱动，无黏模型能够准确再现法向力历程以及诱导涡量场的定性结构。在具有准周期性涡脱落的流动主导构型中，力预测结果吻合良好，但在低攻角下有所降低，这反映出涡脱落动力学对物理和计算参数更加敏感。本研究公式能够实现稳定、连续的前缘涡脱落，从而支持对多种运动进行统一比较，并明确无黏涡片模型可在哪些区间内可靠地用于力预测和物理解释。

1 引言

昆虫和鸟类飞行所展现出的卓越效率，激发了大量近期研究，探讨刚性和柔性扑动平板的推进 [PW04; NOS25; HNK16a; Alb21a; Alb21b; HZL13; LHL20]。这些研究的部分动机在于其对仿生机器人和微型飞行器的控制与设计具有重要意义。秉持相同理念，许多研究者采用计算和实验方法，研究平板在复杂的俯仰–斜坡运动等高度非定常空中机动中所受的气动力 [EWO09; Yu+18; OEW09]。这类机动的相关雷诺数（Re）通常为 $\sim 10^2$–10^4 [EWO09]。在这些雷诺数下探索庞大的参数空间，很快就会变得计算成本过高。因此，许多研究者转而采用无黏涡片模型，作为一种计算效率较高的替代方案，用以模拟并解释这些机动过程中力产生背后的气动机制 [Ram+14; Alb+12; HNK16a]。物体上的力产生，其物理机制通常可以通过将非定常力与物体诱导的涡脱落模式联系起来加以解释 [Alb21a]。因此，通过将整个流体–物体系统提炼为简化的涡结构，涡片模型为解释并准确预测板和翼型所受气动力提供了有前景的途径，而预测依据正是其涡脱落模式。

多项研究从固体在流动中诱发的力和涡结构等方面，对无黏涡片模型与直接纳维–斯托克斯模拟和/或实验进行了比较 [NK94；Dar+16；XM13；Pan+12；She+12；Ram+14；Kno+07；Fau+19]。在 [Pan+12]中，实验测得的扑动翼型时间平均推力与无黏涡片模型的结果吻合极佳。然而，一个关键的注意事项是，只有在无黏模型中纳入前缘涡脱落时，才能获得良好的一致性。在 [Pan+12]和 [She+12]中，若无黏模型未纳入前缘脱落，其结果与直接纳维–斯托克斯模拟计算出的力吻合较差。

这些观察结果促使我们进一步考察涡片模拟中的前缘涡脱落问题，这仍是此类模型面临的核心难题。当发生前缘脱落时，从物体释放的自由涡量往往会停留在物体表面附近；相比之下，从后缘释放的涡量则会迅速被对流带走。因此，计算前缘释放涡量的速度往往涉及所谓的“近奇异积分”，这可能导致严重的数值误差 [Nit21]；由于不存在黏性耗散，这种误差在无黏情形下会持续存在。除这些数值问题外，还存在物理上的模糊性。在无黏流中，边界条件只强制满足不可穿透条件，而不要求满足无滑移条件，因此新脱落的涡量必须沿着边缘切向离开物体。因此，当平板边缘处的流动朝向边缘时，新脱落的涡粒子应被对流到平板哪一侧，可能并不明确。

因此，许多涡片模型会有意停止前缘处的涡量脱落，即使流动正朝向前缘 [Alb10a；Soh24；HNK16b；NOS25]。这种做法在耦合模拟中尤为常见：物体的运动由流体力驱动，而前缘脱落可能导致运动不稳定。当物体的运动是预先指定的（即不与流体力耦合）时，相关研究则围绕所谓的“前缘吸力参数”（LESP）展开：这是一种通过实验确定的量，用于在涡片模拟中判断圆钝边缘物体何时应发生前缘脱落 [Ram+14；Nar+23；Ram+12]。该参数取决于以下两项

*looyujun@umich.edu

：预先指定的运动和物体几何形状。它可以被视为一种建模选择，使涡片模拟能够拟合实验结果或直接纳维–斯托克斯模拟结果。在 [Fau+19]中，例如，临界前缘吸力参数值是根据物体几何形状和所需雷诺数确定的。在实践中，特殊求积规则 [Nit21；Soh24] 以及平滑技术 [Alb10b；AMP13] 通常都是涡片模型准确、稳健地解析近前缘流动所必需的。

近期，本文作者提出了一种涡片模型，使得在流体-物体耦合较强的涡片模拟中，能够稳定地连续发生前缘涡脱落 [LA25]。该模型用于模拟同时经历左右颤振和端对端翻滚的自由下落板。模型预测的板密度参数临界值——即颤振向翻滚转变时的参数值——与实验和直接纳维–斯托克斯模拟结果一致 [LA25]。本文在此基础上改进了公式，并探讨一个相关但不同的问题：采用连续前缘脱落的无黏涡片模型，在多大程度上能够定量再现直接纳维–斯托克斯模拟中的力和涡动力学?

以往对涡片模型与黏性模拟的比较，通常聚焦于少数具有代表性的运动学情形，旨在展示特定流动特征或某种公式的能力。这些研究对于确立无黏公式的物理相关性发挥了重要作用。与此同时，由于前缘脱落的处理往往对运动学情形较为敏感，或依赖于特定模型的假设，因此难以将这类比较以统一的方式扩展到广泛的非定常运动。本文 [LA25] 提出的连续前缘脱落框架降低了这些敏感性，使我们能够开展更系统的评估。在本研究中，我们采用单一涡片模型，将其力预测与直接纳维–斯托克斯模拟进行比较，涵盖 ≈ 70 种不同的板运动，从而在广泛的条件下全面评估模型性能。

要进行有意义的比较，黏性模拟必须准确表示涡片模型所假定的同一零厚度几何形状。事实上，零厚度板与厚度虽小但非零的板所诱导的流动可能大不相同。例如，在 [NKE19], 中，雷诺数为 $\mathrm{Re} = 1000$ 时，零厚度振荡板与厚度非零（为板长的 5%）的振荡板所受时间平均压差阻力之间的相对误差可高达 $\approx 15\%$。零厚度板两侧的压力跃变在所有时刻都更大，这与经典结论一致：在无界域中，板的厚度越小，板所受法向力越大 [PK81]。平板前缘经过圆钝处理时也会出现类似效应，这可能同时改变前缘的分离点和环量强度，从而使法向力系数变化约 25% [Riv+14]。在许多上述将无黏模型与直接纳维–斯托克斯模拟进行比较的研究中，零厚度板实际上是用厚度虽小但非零的板（为板长的≈ 2–6%）近似的。

与此同时，对厚度严格为零的平板进行精确的纳维–斯托克斯模拟，会面临众所周知的数值难题。平板尖端处的压力场和涡量场呈现反平方根奇异性 [Alb21a；KS96], ，要解析这些奇异性，需要采用专门的数值处理方法。以往研究采用了多种方法来应对这些困难，例如在尖端附近聚集网格 [Alb21a；TTW94；NV95], 通过积分涡量来消除奇异行为的黏性粒子方法 [KS96], 以及适用于高雷诺数浸入薄板问题的离散核方法 [Sad+24]。即使采用高阶方法和精细分辨率，计算所得的力仍会因奇异区域的处理方式不同而有显著差异 [NV95；XN14]。遵循 [Alb21a；TTW94；NV95], ，因此我们在平板尖端附近聚集网格，以减轻这些奇异性。

在本研究中，我们考虑厚度严格为零的平板，并使用 [KS96]的基准结果验证黏性求解器。随后，我们采用直接纳维–斯托克斯模拟和一种改进的、具有连续前缘脱落的涡片模型，对若干种非定常薄板运动产生的气动力及其涡量场进行比较。这种比较有助于阐明，无黏模型能够较好近似非定常高雷诺数流动的哪些涡动力学特征。由于无黏涡片模拟的速度比相应的黏性模拟快几个数量级，成本也低得多，因此本研究结果还指出了这类模型可可靠用于快速探索大型运动学参数空间或进行控制的场景。

本文结构如下：第2 节介绍粘性模型（第2.1节）和无黏模型（第2.2节）。第3节比较五种情形下的力和诱导涡量场，分别为薄板振荡（第3.1节）、升沉与俯仰（第3.2节）、抬头（第3.3节）、匀速旋转（第3.4节）和匀速平移（第3.5节）。第4 节总结研究结果，最后在第5节作结。

2 方法与验证

本文介绍零厚度板的粘性和无黏数值模型。两个模型均假设为二维流动，平板由一条单位长度的线段表示。平板的运动完全由两个量刻画：其质心位置和方位角（即与平板相切的直线相对于 x轴所成的有向角），记为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_G(t)&: \text{平板质心} \\ \beta(t)&: \text{平板方位角} \end{aligned}$$

2.1 黏性数值模型

我们考虑一块厚度为零、单位长度的平板，其占据区间 $[-1/2, 1/2]$，位于 x轴上，并在平板的体坐标系中求解二维纳维–斯托克斯方程 [LSB02]，由下式给出

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u} = -\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{A}(t) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

方程(1)的完整推导见附录A。此处，$\boldsymbol{r} = [x, y, 0]^T$、$\boldsymbol{u} = [u, v, 0]^T$为流体速度，$\boldsymbol{A}(t) = [A_x(t)\ A_y(t)\ 0]^T$ 为平板质心的加速度（以体坐标系坐标表示）。$\boldsymbol{\Omega}(t) = [0,\ 0, \Omega(t)]^T$ 为平板绕其质心的角速度向量，$\dot{\boldsymbol{\Omega}}(t) = [0,\ 0,\ \dot{\Omega}(t)]^T$ 为其角加速度向量。根据定义，我们有$\frac{d}{dt}\beta(t) = \Omega(t)$。我们以平板长度 L 对距离进行无量纲化，并以特征速度 U 对速度进行无量纲化，该特征速度在第3节中针对各问题分别定义。于是雷诺数 $= UL/\nu$ 为无量纲逆黏度，我们将其取为1000。这些方程可用变量 u、v、p 简化，得到：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u = -\partial_x p + 2\Omega v + \dot{\Omega} y + \Omega^2 x - A_x, \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v = -\partial_y p - 2\Omega u - \dot{\Omega} x + \Omega^2 y - A_y, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0. \end{cases} \tag{2}$$

此后，我们令 $\boldsymbol{r} = [x, y]^T$, $\boldsymbol{u} = [u, v]^T$和 $\boldsymbol{A}(t) = [A_x(t)\ A_y(t)]^T$。由于离心力 $[\Omega(t)^2 x, \Omega(t)^2 y]^T$ a以及惯性力 $[-A_x(t)\ -A_y(t)]^T$ 均为保守力，因此可以将它们写成某个势能的梯度：

$$[\Omega(t)^2 x - A_x(t), \Omega(t)^2 y - A_y(t)]^T = \nabla(\frac{1}{2}\Omega(t)^2(x^2+y^2) - A_x(t)x - A_y(t)y). \tag{3}$$

因此，由于压力仅在加上一个势能后才是唯一的，我们可以将这些力吸收到 e 压力中，从而得到简化后的方程：

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u = -\partial_x p + 2\Omega v + \dot{\Omega} y, \\ \partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v = -\partial_y p - 2\Omega u - \dot{\Omega} x, \\ \partial_x u + \partial_y v = 0. \end{cases} \tag{4}$$

注意，只有科里奥利力 $[2\Omega v, -2\Omega u]^T$和欧拉力 $[\dot{\Omega} y, -\dot{\Omega} x]^T$仍然存在，因为这些力是非保守力。

介绍完方程后，我们现在简要说明如何对其进行数值求解。我们的平板黏性模型基于 [Alb21a] 中描述的方法，并作了少许修改。在 [WA25] 中也采用了类似模型来研究扑动板的传热，并在雷诺数 Re $\sim$ 150下进行了验证。下面简要回顾其中一些关键细节。方程组（4）在一个长度为 ℓ_x、宽度为 ℓ_y 的矩形网格上求解，分别沿 x 和 y 方向布置。x 和 y 分别离散为 m和 n 个点。这是一种有限差分法，在与平板对齐的交错 MAC（标记-单元）网格上使用二阶模板计算空间导数。网格并非均匀分布，而是在平板两侧及边缘附近加密。更具体地说，假设我们在X 和 Y 上有（分段）均匀间距的网格，使得

$$-l_x/2 < X < l_x/2,\ -l_y/2 < Y < l_y/2.$$

这里 l_x 和 l_y 分别是计算域的长度和宽度。均匀网格ar e 映射到(x, y)上的非均匀网格，方式为：

$$x = \begin{cases} X - \eta_L \frac{l_x-1}{4\pi}\sin(4\pi(X-1/2)/(l_x-1)), & \text{if } -l_x/2 < X < -1/2 \\ X + \eta\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi X), & \text{if } -1/2 < X < 1/2 \\ X - \eta_R\frac{l_x-1}{4\pi}\sin(4\pi(X+1/2)/(l_x-1)), & \text{if } 1/2 < X < l_x/2 \end{cases} \tag{5}$$

$$y = Y + \eta\frac{l_y}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{l_y}Y) \tag{6}$$

这里取 $l_y = l_x = 22$，并取 $\eta = 0.95$。η_L 和 η_R 的选取使平板边缘处的网格长度平滑变化（即，网格长度是 x在 $\pm 1/2$处的光滑函数）。为抑制涡量场和压力场中的反平方根奇异性，并准确计算气动力，必须将网格点集中在平板边缘附近。如 [Alb21a], 所述，这些奇异性也可能阻碍收敛。然而，高度拉伸的网格会增大线性系统 [Alb21a]的条件数。由于纳维–斯托克斯方程是

在平板的体坐标系中求解，因此无论平板的朝向角如何，网格的 x轴都与平板对齐。

以下均 X 和 Y 均以 768 个点离散。最小和最大网格长度约为 4×10^{-4} 和 6×10^{-2} 。 $dt = 2\times10^{-4}$ 的选取使得对于每种运动及其对应的特征速度 U，最大对流 CFL 数 $\approx \ {}^{dt}_{\min\ dx}U \leq 0.5 < 1$。时间导数采用二阶后向差分（BDF2）离散，并使用 SIMPLE 格式的一种变体 [FPS19]迭代求解压力。为加快收敛，我们在 SIMPLE 格式的每次迭代求解压力之前应用六阶 Shapiro 滤波器 [Fal13] 。

2.1.1 边界条件

我们希望在4所示的无界域上求解方程。假设平板初始时静止，则平板的运动完全由板质心的平移速度 $\boldsymbol{U}(t)$ 以及角速度 $\Omega(t)$确定。具体而言，以体坐标系表示的平移速度 $\boldsymbol{U}(t)$为

$$\boldsymbol{U}(t) = R_{-\beta(t)}\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_G(t). \tag{7}$$

向量 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_G(t)$ 表示平板中心在实验室坐标系中的平移速度。旋转$R_{-\beta(t)}$ 变换坐标，将该速度表示在体坐标系中。图 1 展示了这一点。图 a 展示了平板在实验室坐标系中的一个示例，其位置为 $\boldsymbol{X}_G(t) = [X_G(t)\ Y_G(t)]^T$，方位角为 $\beta(t)$，与 x 轴的夹角为该值，并沿方向 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_G(t)$ 运动。图 b 展示了体坐标系中相应的情形。平板占据 $[-1/2, 1/2]\times\{0\}$，用体坐标系表示的物体速度必须经过旋转，使得 $\boldsymbol{U}(t) = R_{-\beta(t)}\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_G(t)$。

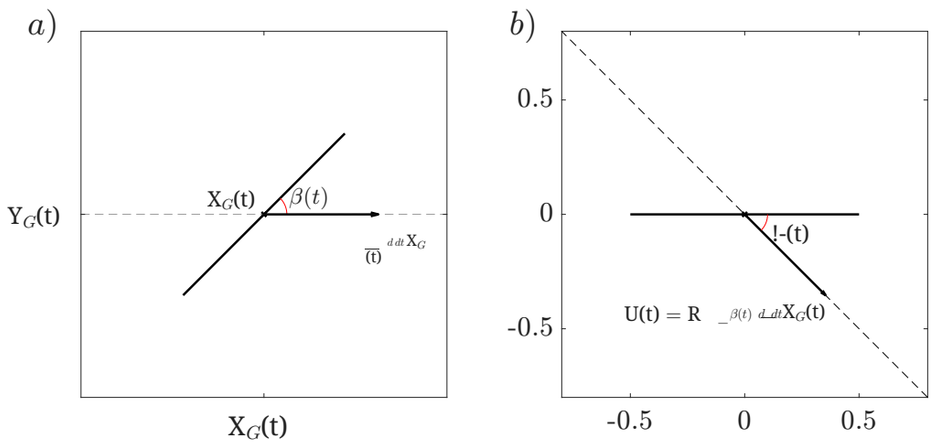


图 1：示意图，展示平板处于 (a) 实验室坐标系和 (b) 体坐标系中的情形。

采用此定义的原因是，对于以速度 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{X}_G(t)$) 运动的平板，在其体坐标系中 e
平板，远场以速度运动

$$\boldsymbol{U}_f(t,x,y) = [U_f(t,x,y), V_f(t,x,y)]^T = -\boldsymbol{U}(t) - [-\Omega(t)y, \Omega(t)x]^T. \tag{8}$$

ˆˆ令 $\boldsymbol{S}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 分别表示沿计算边界（方向为逆时针）的单位切向量和内向单位法向量。我们使用远场速度 $\boldsymbol{U}_f$，分别在 $\boldsymbol{U}_f$ 流入和流出流体域的边界上施加狄利克雷边界条件和诺伊曼边界条件。边界处的切向速度通过诺伊曼边界条件指定。更精确地说，对于计算边界上的每个点，我们令

$$\begin{cases} \partial_{\hat{\boldsymbol{N}}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_f) = 0 & \text{if } \boldsymbol{U}_f \cdot \hat{\boldsymbol{N}} < 0 \\ \partial_{\hat{\boldsymbol{N}}}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_f)\cdot\hat{\boldsymbol{S}} = 0, \ \ (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_f)\cdot\hat{\boldsymbol{N}} = 0 & \text{if } \boldsymbol{U}_f \cdot \hat{\boldsymbol{N}} > 0. \end{cases} \tag{9}$$

为抑制计算域壁面可能产生的任何寄生涡量，我们在计算边界附近采用瑞利阻尼添加吸收海绵层，以补充边界条件 [SR98]。该方法已成功用于抑制不可压缩 [PB16; SR98] 以及可压缩 [HLL08; Hu05]无界域中涡主导流的边界反射。应用这种海绵边界条件时，需要添加阻尼项

$$-\sigma(x,y)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_f) \tag{10}$$

位于（4）右侧，并处于包含边界的狭窄区域（海绵层）内。这里我们取阻尼函数为

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 0.5((x^2+y^2)^{1/2} - R)^3 & \text{if } \ x^2+y^2 > R^2 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

$\sigma(x,\ y)$ 控制吸收层的强度和空间分布 [HLL08], 其中 $R = 8$ 定义了计算域的半径，因此海绵层的最小厚度为 $\epsilon = 3$。请注意，在此圆之外并未求解真正的纳维–斯托克斯方程，因此我们将圆外区域视为边界的一部分，而非计算域。

2.1.2 验证

为验证我们的黏性求解器，我们考虑一块以单位速度瞬时启动、沿垂直于自身方向运动的平板，其雷诺数为 $= 1000$。在图2 中，我们将黏性求解器计算所得的力与 [KS96]的数值结果进行比较。两者结果吻合良好。

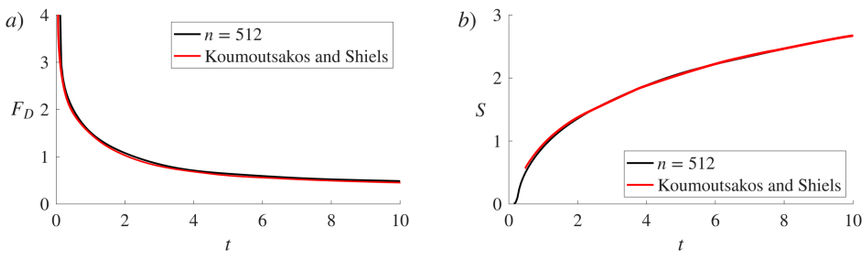


图2: （a）阻力系数 F_D 和（b）回流泡的长度 S 随时间的变化；平板以单位速度瞬时启动，沿垂直于自身方向运动，其雷诺数为 $= 1000$。并与从 [KS96]的图13中获取的数据进行比较。

在图3 中，我们重现了 [KS96]图20所示的涡量等值线。环流泡以黑色勾勒，我们的涡量采用双向对数刻度表示，等值线级别范围从 $\pm 2^{-4}$ 到 $\pm 2^{10}$。这里，涡量等值线采用 [Thy+16] 所述的感知均匀色图“balance”进行可视化（即涡量大小每增加一倍，颜色亮度就固定降低一级）。每个面板均叠加了 [KS96]图20中对应的流线（上半部分）和涡量等值线（下半部分）。每个面板上半部分中，[KS96] 文中的流线以红色虚线表示；每个面板下半部分中，涡量等值线以深蓝色线条表示。 [KS96] 图的上半部分中的环流泡与当前黏性模型重叠。

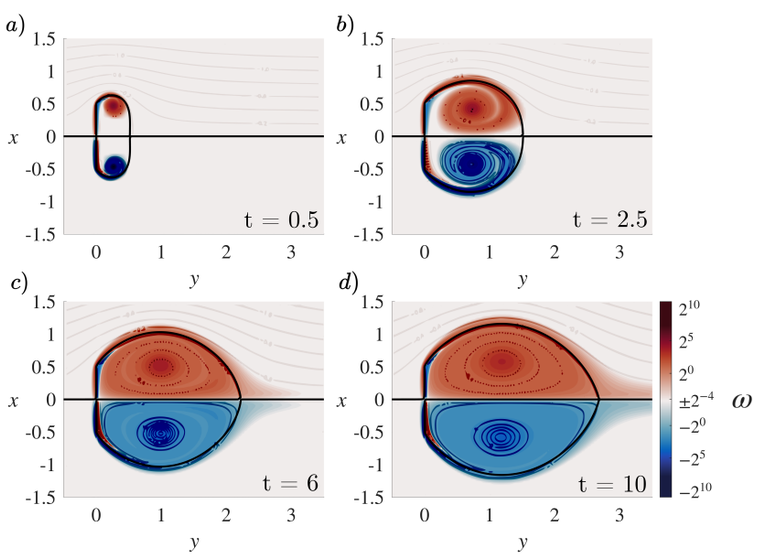


图3: 瞬时启动平板在 $t = 0.5$、2.5、6和10时刻的涡量场（以色标标示），黑色轮廓线表示环流泡，且雷诺数为 $= 1000$。图20中的流线（上半部分）和涡量等值线（下半部分）叠加显示在每个面板上，见 [KS96]。

2.2 无黏数值模型

现在我们介绍无黏模型。该模型本质上与 [LA25], 中的模型相同，但有几处改进，下面将重点说明。这里的讨论与 [LA25] 类似，但我们使用向量记法而非复变量。当黏度趋于零时，平板两侧的两个边界层收缩为沿物体表面的零厚度涡片。当物体厚度趋于零时，这两个涡片合并为一个涡片，称为“束缚”涡片；流体速度沿物体表面的切向分量会在涡片两侧发生不连续跃变 [Eld19]。

在我们的零黏度模型中，涡片不会发生涡量扩散，只有从分离点开始的平流，而我们假设分离点仅位于平板的两个边缘。因此，物体上会延伸出两条“自由”涡片，分别从两个边缘延伸而出。沿物体分布的束缚涡片与

自由涡片共同构成一条连续的涡片，我们在每个时间步计算它。

当物体被加速进入运动时，存在相应的流体运动，该流体运动可由束缚涡片与自由涡片的强度和位置计算得到。随着时间增加，各边缘处自由涡片的长度从零开始增大。束缚涡片与平板重合，由 $\boldsymbol{X}(s,t) = [X(s,t)\ Y(s,t)]^T, -1/2 \le s \le 1/2$给出。注意，

$$\boldsymbol{X}(s,0) = [s,0]^T,\ -1/2 \le s \le 1/2 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{X}(s,t) = \boldsymbol{X}_G(t) + R_{\beta(t)}\boldsymbol{X}(s,0) \tag{13}$$

在本研究中，$\boldsymbol{X}_G(t)$与 $\beta(t)$为给定量，由此确定 $\boldsymbol{X}(s,t)$。从 $s = \pm 1/2$ 边缘发出的自由涡片分别记为 $\boldsymbol{X}_+(s,t) = [X_+(s,t)\ Y_+(s,t)]^T$，$s \in [1/2, s_+ + 1/2]$ 和$\boldsymbol{X}_-(s,t) = [X_-(s,t)\ Y_-(s,t)]$，$s \in [-s_- - 1/2, -1/2]$。此处，$s_\pm$ 分别为正向涡片与负向涡片的长度，且涡片强度 $\gamma_\pm(s,t)$定义在相同区间上。

整个（束缚和自由）涡片的强度记为 $\gamma(s,\ t)$，其中 $s \in [-1/2 - s_-, 1/2 + s_+]$。我们分别将 $\gamma(s,\ t)$ 在负向涡片、正向涡片和束缚涡片上的限制记为 $\gamma_-(s,\ t)$、$\gamma_+(s,\ t)$ 和 $\gamma_b(s,\ t)$。

将涡片强度 γ_b 和 $\gamma_\pm$ 与毕奥-萨伐尔核 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2\pi}\frac{[-y,x]^T}{|\boldsymbol{r}|^2}$ 沿涡片进行卷积，可得到流体速度 $\boldsymbol{u}$ 的下列方程：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = &\int_{-1/2}^{1/2} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}(s,t))\gamma_b(s,t)ds \\ &+ \int_{-s_- - 1/2}^{-1/2} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}_-(s,t))\gamma_-(s,t)ds + \int_{1/2}^{s_+ + 1/2} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}_+(s,t))\gamma_+(s,t)ds.\end{aligned} \tag{14}$$

令 $\Gamma(s,\ t)$ 表示 γ 沿正向和负向涡片的弧长积分，其分段定义如下：

$$\Gamma(s,t) = \begin{cases} \int_{-s_- - 1/2}^{s} \gamma(s',t)\,ds', & s \in [-s_- - 1/2, -1/2] \\ \int_{1/2}^{s} \gamma_+(s',t)\,ds', & s \in [1/2, 1/2 + s_+] \end{cases} \tag{15}$$

并令 $\Gamma_\pm(t)$ 表示正向和负向涡片中的总环量，即

$$\Gamma_+(t) \equiv \int_{1/2}^{1/2+s_+} \gamma_+(s,t)\,ds \quad ; \quad \Gamma_-(t) \equiv \int_{-s_- - 1/2}^{-1/2} \gamma_-(s,t)\,ds. \tag{16}$$

然后，通过用 Γ 对自由涡片的位置重新参数化，我们可以将流体速度方程改写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) = &\int_{-1/2}^{1/2} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}(s,t))\gamma_b(s,t)ds \\ &+ \int_0^{\Gamma_-(t)} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}_-(\Gamma,t))d\Gamma + \int_0^{\Gamma_+(t)} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}_+(\Gamma,t))d\Gamma.\end{aligned} \tag{17}$$

右侧第一项是束缚涡片的贡献，而最后两项分别是负自由涡片和正自由涡片的贡献。因此我们看到，流体速度 $\boldsymbol{u}$ 可以由未知函数 $\Gamma_\pm(t)$ $\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,\ t)$ 和 $\gamma_b(s,\ t)$ 确定。

现在讨论如何求解这些函数。在每个时间步，$\Gamma_\pm(t)$ 的选取应使库塔条件 $\gamma_b(\pm 1/2) = \gamma_\pm(\pm 1/2)$ 得到满足。在附录 B 中，我们将讨论如何进行数值求解。该条件确保涡片强度有限，并且在平板的边缘处连续。在每个时间步，通过求解 Birkhoff-Rott 方程来确定 $\boldsymbol{X}_\pm(t)$，该方程要求自由涡片以涡片两侧流体速度的平均值运动。因此，由（17）可得到经典的 Birkhoff-Rott 方程：

$$\begin{aligned}\partial_t \boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t) = &\int_{-1/2}^{1/2} \boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t) - \boldsymbol{X}(s,t)\big)\gamma_b(s,t)ds \\ &+ \int_0^{\Gamma_-(t)} \boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t) - \boldsymbol{X}_-(\Gamma',t)\big)d\Gamma' + \int_0^{\Gamma_+(t)} \boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t) - \boldsymbol{X}_+(\Gamma',t)\big)d\Gamma'.\end{aligned} \tag{18}$$

经典的 Birkhoff-Rott 方程（对自由涡片采用柯西主值积分）实际上是不适定的，并会在有限的临界时刻出现曲率奇异性 [Moo79; Kra86a; She92]。Krasny 表明，通过引入平滑参数 δ 对方程进行“去奇异化”，可以使 Birkhoff-Rott 方程在数值上越过这一临界时刻继续演化 [Kra86b]。这种正则化是将核$\boldsymbol{K}$（$\boldsymbol{r}$）替换为 $\boldsymbol{K}_\delta$（$\boldsymbol{r}$）$= \boldsymbol{K}$（$\boldsymbol{r}$）$\frac{|\boldsymbol{r}|^2}{|\boldsymbol{r}|^2+\delta^2}$ 应用于自由涡片项中，从而消除被积函数奇异性。该平滑参数会抑制小尺度空间特征的增长，并防止自由涡片上形成曲率奇异性。然而，该平滑参数会不连续地从 δ 在

自由涡片上跳变到束缚涡片上的 0，从而在所得流动速度中于平板边缘处产生对数奇异性。按照 [LA25], 中所述的方法，可以通过正则化束缚涡片的贡献来消除这些对数奇异性，即将核 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X})$ 替换为

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}(\cdot),s)=B_\delta(\min_{s'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s')|)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s))+(1-B_\delta(\min_{s'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s')|))\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s))$$

其中

$$B_\delta(l)=\begin{cases}0,\text{ if } l=0,\\ \frac{\exp(-\delta/l)}{\exp(-\delta/l)+\exp(-\delta/(\delta-l))},\text{ if } 0<l<\delta,\\ 1,\text{ if } l\geq\delta.\end{cases}$$

注意，$\min_{s'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s')|$ 是从 $\boldsymbol{r}$ 到由 $\boldsymbol{X}$参数化曲线的距离。直观地说，$\tilde{\boldsymbol{K}}_\delta$在平板的 $\delta-$邻域内，对未平滑核与光滑核（分别为$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{K}_\delta$）进行插值。也就是说，当$\min_{s'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s')|<\delta$时为 $\tilde{\boldsymbol{K}}\approx\boldsymbol{K}_\delta$，而当$\min_{s'}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s)|\geq\delta$时为 $\tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{K}$。总而言之，我们通过求解下述（blob正则化的）速度平滑 Birkhoff-Rott 方程，确定自由涡片 $\boldsymbol{X}_\pm$ 的位置：

$$\begin{aligned}\partial_t\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t)=&\int_{-1/2}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{K}}_\delta\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t),\boldsymbol{X}(\cdot,t),s\big)\gamma_b(s,t)ds\\&+\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_\delta\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t)-\boldsymbol{X}_-(\Gamma',t)\big)d\Gamma'+\int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_\delta\big(\boldsymbol{X}_\pm(\Gamma,t)-\boldsymbol{X}_+(\Gamma',t)\big)d\Gamma'.\end{aligned}\tag{19}$$

γ_b 通过求解不可穿透条件确定；该条件要求平板处流体速度在平板法向上的分量等于平板的法向速度：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\partial_t\boldsymbol{X}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\Bigg(&\int_{-1/2}^{1/2}\boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}(s,t)-\boldsymbol{X}(s',t)\big)\gamma_b(s',t)ds'\\&+\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,t)-\boldsymbol{X}_-(\Gamma',t)\big)d\Gamma'+\int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,t)-\boldsymbol{X}_+(\Gamma',t)\big)d\Gamma'\Bigg).\end{aligned}\tag{20}$$

我们重点指出方程（20）的两个值得注意之处。第一，与（19）不同，物体对流体速度的贡献没有经过平滑处理，该贡献由奇异积分算子 $C[\gamma_b](\boldsymbol{r})=\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s,t))\gamma_b(s,t)ds$给出。这是因为，用光滑函数替换 $C[\cdot]$ 中的奇异核会使求解 γ_b 变得不适定。事实上，考虑光滑算子$C_\delta[\gamma_b]=\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}_\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s,t))\gamma_b(s,t)ds$。不同于 $\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{K}_\delta$是一个光滑函数。作为具有光滑核的积分算子，很容易证明 C_δ是从 $L^2([-1/2,1/2])\to L^2([-1/2,1/2])$到某空间的紧算子。紧算子不可能具有有界逆。事实上，如果它具有紧逆，那么恒等映射作为有界算子与紧算子的复合，也必然是紧的。但这与众所周知的事实相矛盾：无穷维空间中的单位球不是紧集。因此，由于 C_δ 的逆无界，对于任意 $\delta>0$（无论多么小），在blob正则化的不可穿透条件下求解 γ_b 都是不适定的；由于 C_δ 的逆不连续，不可穿透条件中的任何微小数值误差都会在 γ_b 中被放大，从而无法保证精度或稳定性。

相比之下，(20) 可通过求逆奇异积分算子 $C[\gamma_b](\boldsymbol{r})=\int_{-1/2}^{1/2}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}(s,t))\gamma_b(s,t)ds$ 来求解不可穿透条件。由此可知，$\gamma_b(s,t)$ 所属的函数空间是一维的，其中每个函数对应平板周围不同大小的环量。环量的具体值由开尔文环量定理确定，该定理要求流动中的总环量守恒。由于平板从静止状态开始加速，流动中的初始环量为零。因此，开尔文环量定理给出：

$$\int_{-1/2}^{1/2}\gamma_b(s,t)ds+\Gamma_+(t)+\Gamma_-(t)=0.\tag{21}$$

加入这一额外约束后，我们可以对算子 $C[\cdot]$ 求逆，从而得到唯一的 $\gamma_b(s,t)$。详细讨论见附录B。

(20) 的第二个重要特点是，自由涡片上的平滑参数会随 $s'=s'(\Gamma')$ 变化，其中 $\delta=\delta(s')$ 是自由涡片上的弧长参数。也就是说，$\pm1/2$ 在与平板边缘相连的自由涡片上，我们取

$$\tilde{\delta}(s)=\delta_0+(\delta-\delta_0)(1-e^{-((\pm1/2-s)/\delta)^2}).\tag{22}$$

这里取 $\delta_0=\delta/1000$，其正则化量远小于 δ。注意，$s'=s'(\Gamma')$ 是环量的函数。模型的这一特性不同于 [LA25], ，后者采用了均匀的正则化参数。当 δ 在平板边缘附近逐渐减小至更小的值时，所计算的 γ_b 更接近未正则化版本 [Alb10b；LA25]。我们还发现，这降低了模型对平滑参数远场值的敏感性 δ，因为在平板边缘附近，$\delta(s)\approx0$与 δ的取值无关。

总之，为了消除平板边缘上的对数奇异性，我们在Birkhoff-Rott中同时使用不匹配核（$\tilde{\boldsymbol{K}}_\delta$ 和 $\boldsymbol{K}$）以及不匹配平滑参数（δ 和 $\delta(s')$）

方程（19）以及不可穿透条件（20）。因此，当自由涡片演化时，它们以不同于满足不可穿透条件的流体速度被平流。这种不匹配引入了一个 $O(\delta)$ 误差到不可穿透条件中，从而在求解 $\boldsymbol{X}_{\pm}(s,\ t)$ 时可能导致自由涡片穿透平板。如 [LA25], 所示，该误差可通过围栏法加以控制：在时间步的每个子步中，裁剪点沿平板法向的位移，以防止它们穿过平板。围栏法抑制了由不匹配速度引起的误差，从而得到一种数值格式；对于不同密度的下落平板动力学，该格式被证明至少为时间一阶，相关计算见于 [LA25]。总体而言，由于平板运动被完全给定，本文中的流体动力学较为简单。

在表1 中，我们在第一列列出所求解的耦合方程组，并在第二列列出相应的未知变量。

表1：展示每个时间 t所求解的方程与未知变量的表格。

方程	**未知变量**
$$\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\partial_t\boldsymbol{X}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\Big(\int_{-1/2}^{1/2}\boldsymbol{K}\big(\boldsymbol{X}(s,\ t)-\boldsymbol{X}(s',\ t)\big)\gamma_b(s',\ t)ds'+\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,t)-\boldsymbol{X}_-(\Gamma',t)\big)d\Gamma'+\int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,\ t)-\boldsymbol{X}_+(\Gamma',\ t)\big)d\Gamma'\Big) \quad (23)$$ $$\Gamma_+(t)+\Gamma_-(t)+\int_{-1/2}^{1/2}\gamma_b(s,\ t)ds=0 \quad (24)$$	$\gamma_b(s,\ t)$
$$\gamma_b(\pm1/2)\ =\gamma_{\pm}(\pm1/2) \quad (25)$$	$\Gamma_{\pm}(t)$
$$\partial_t\boldsymbol{X}_{\pm}(\Gamma,\ t)\ =\int_{-1/2}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\delta}\big(\boldsymbol{X}_{\pm}(\Gamma,t)\ \boldsymbol{X}(\cdot,t)\ s\big)\gamma_b(s,t)ds+\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_{\delta}\big(\boldsymbol{X}_{\pm}(\Gamma,\ t)-\boldsymbol{X}_-(\Gamma',\ t)\big)d\Gamma'+\int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_{\delta}\big(\boldsymbol{X}_{\pm}(\Gamma,\ t)-\boldsymbol{X}_+(\Gamma',\ t)\big)d\Gamma' \quad (26)$$	$\boldsymbol{X}_{\pm}(s,\ t)$

流体速度可由以下公式得出：

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)=\int_{-1/2}^{1/2}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\delta}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{X}(\cdot,t),s)\gamma_b(s,t)ds+\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}_-(\Gamma,t))d\Gamma+\int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_{\delta}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}_+(\Gamma,t))d\Gamma. \quad (27)$$

2.2.1 无黏算法

在下面的算法框中，我们概述了用于在每个时间步同时求解 $\boldsymbol{X}_{\pm}(s,\ t)\ \Gamma_{\pm}(t)\ \gamma_b(s,\ t)$ 的数值过程。

算法 1 已知物体 $\boldsymbol{X}(s,\ t)$ 的运动时，每个时间步的无黏涡脱落算法，$k = 1,\ 2,\ \ldots\ldots$**执行步骤**

1： 显式求解自由涡片位置 $\boldsymbol{X}_{\pm}(s,\ t)$

• 使用速度光滑化的 Birkhoff-Rott 方程（26）通过三阶亚当斯–巴什福思法计算当前时间步 $\boldsymbol{X}_{\pm}(s,t$ 处的 $t = dt \cdot k$。**步骤 2：** 对自由涡片进行围栏子步处理。

• 将所有相交的自由涡片点沿法线投影到板面上，以消除交叉。**步骤 3：** 在自由涡片上创建新点

• 使用已知值更新 $\boldsymbol{X}(s,t)$，并再次将任何相交的自由涡片点沿法线投影到平板上，以消除交叉。在每个自由涡片上添加一个新点，其位置恰好位于平板边缘。这些新点标记为各自涡片的新总环量 $\Gamma_{\pm}(t)$，并将在下一步中求解该值。**步骤 4：** 隐式求解新的自由涡片环量 $\Gamma_{\pm}(t)$。

• 构造辅助函数 $F(\Gamma_+,\Gamma_-) = [\gamma_b(1/2) - \gamma_+(1/2)\ \ \gamma_b(-1/2) - \gamma_-(-1/2)]^T$。$F$ 通过结合开尔文环量定理（24）固定规范，对不可穿透条件（23）中的奇异积分求逆，从而得到 $\gamma_b(\pm 1/2)$。附录 B 讨论了具体做法。使用布罗伊登法求解 $F(\Gamma_+,\Gamma_-) = \mathbf{0}$，以同时得到 $\Gamma_{\pm}$ 和 $\gamma_b(s,t)$。初始猜测通过时间上的二阶外推获得。

结束循环

2.2.2 计算气动力

在运动物体的参考系中考虑伯努利方程，并取其在物体两侧的计算结果之差，可得到以下压强跃变方程 [Eld19，第 85] [Alb12]:

$$[p]^{\pm}(s,t) = \partial_t\big(\Gamma_-(t) + \Gamma_b(s,t)\big) + \gamma_b(s,t)(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}(s,t),t) - \partial_t \boldsymbol{X}(s,t)) \cdot \hat{\boldsymbol{s}}. \tag{28}$$

这里，$[p]^{\pm}(s,\ t)$ 是平板两侧的压力跃变，而 $\Gamma_b(s,\ t) = \int_{-1/2}^{s} \gamma_b(s,\ t)\, ds$。因此，无黏平板上的净法向力为

$$C_N(t) = \int_{-1/2}^{1/2} [p]^{\pm}(s,t) ds. \tag{29}$$

2.2.3 计算涡量

毕奥–萨伐尔定律指出，环量为 Γ_0、位于位置 $\boldsymbol{x}_0$ 的斑块正则化点涡所诱导的速度为

$$\frac{1}{2\pi} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\perp}\Gamma_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2 + \delta^2}. \tag{30}$$

沿着 [HNP06],该点涡所诱导的 blob正则化涡量为

$$\omega_\delta(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} \times \frac{1}{2\pi} \frac{(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\perp}\Gamma_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2 + \delta^2} = \frac{\delta^2 \Gamma_0}{\pi(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2 + \delta^2)^2} \tag{31}$$

对于长度为 L、累积环量为 $\Gamma(s)\ \ 0 < s < L$ 且位置由 $\boldsymbol{x}'(\Gamma(s))$ 参数化的涡片情形，我们可以令 $W_\delta(\boldsymbol{x}) = {}_{\pi}{}^{\delta^2}{}_{(|\boldsymbol{x}|^2+\delta^2)^2}$，于是

$$\omega_\delta(\boldsymbol{x}) = \int_0^{\Gamma(L)} W_\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'(\Gamma'))d\Gamma'. \tag{32}$$

3 无黏与粘性模拟的比较

本节将上一节介绍的无黏模型和粘性模型用于五种不同运动，并进行比较，其中一些取自先前的研究：周期振荡（第 3.1 节）、背景流中的升沉和俯仰（第 3.2 节）、抬头（第3.3 节）、匀速旋转（第 3.4 节）以及匀速平移（第 3.5 节）。在没有背景流的情况下，匀速平移和匀速旋转属于流动主导的涡动力学，而其余运动则属于物体主导的涡动力学。当自由涡片运动及其产生的气动力与物体加速度相对应，且瞬时力对先前脱落涡量的演变相对不敏感时，我们将涡动力学归类为物体主导。相反，当物体几乎没有或完全没有加速度，且力主要由自由涡片的自然动力学（例如准周期性涡脱落）决定时，则称涡动力学为流动主导。

本节中的所有结果均针对雷诺数 $= 1000$。为评估所观察到的一致程度是否仅适用于这一雷诺数，附录 C 给出了雷诺数 $= 500$、1000 和 2000 时的代表性比较。

3.1 振荡平板

首先，考虑一块沿垂直于自身的方向振荡的平板，其频率为 $\omega = \frac{2\pi}{KC}$，其中 KC=0.4，0。8，.....，3。6。也就是说，

$$\boldsymbol{X}_G(t) = \frac{\mathrm{KC}}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{\mathrm{KC}}t)[0,1]^T, \tag{33}$$

$$\beta(t) = 0. \tag{34}$$

这里，KC是无量纲周期。振幅与KC成正比，从而确保$\max_t |d\boldsymbol{X}_G(t)/dt|$ =1且Re $= 1000$。由于平板的运动方向始终垂直于自身，压力效应占主导，因此我们可能会认为可以忽略黏性效应。因此，振荡板是一个理想情形，可用于检验无黏模型能否准确模拟直接粘性模拟。

如图4所示，我们展示了 3×3 一组网格图。每幅图对应一个不同的KC值，并分为上、下两个面板。在上、下面板中，我们绘制了粘性（蓝色）和无黏（橙色）模型的净法向力 $C_N(t)$，分别绘制至 $t =$ KC和 $t = 3$ KC。在图5 中，我们展示了 3×3一组对应KC值的涡量图。每幅图中，粘性拍动平板位于单位区间 $[-1/2,\ 1/2] \times \{0\}$ 上，而无黏平板位于其右侧9/2个单位处，即 $[4,\ 5] \times \{0\}$。

图4显示，粘性模型和无黏模型计算得到的法向力吻合良好。图5显示，全局涡量场的吻合程度相对较差。这种差异的一个原因是二维涡动力学的混沌特性 [Are83] ，它会随时间推移将微小差异呈指数级放大。模型之间的微小差异逐渐在全局涡量场中引入误差，随后又被混沌效应放大。不过总体而言，粘性模型和无黏模型中平板边缘附近最近脱落的涡量都吻合良好。这一点可以从 KC $=$ 1.6–3.6 对应的面板中看出，在 KC $=$ 0.4–1.2 对应的面板中也有一定程度的体现。图6展示了 KC $= 3.6$、时刻为 $t = 1.4$、2.7、4.1、5.4（即跨越 1.5 个拍动周期）时振荡板涡量场的快照。在早期时刻，涡量场吻合良好，但到 $t = 4.1$ 时，这些微小差异已经被放大，平板上方碰撞偶极子的位置也大不相同。考察图4中的 $KC = 3.6$，可以看到两个模型中的 $C_N(t)$相似，但相移随时间推移而增大。看来，平板所受的气动力与平板物体附近的局部涡量场紧密耦合，而对全局涡量动力学不太敏感。 [中也有类似观察

KS96]；由于物体所受净法向力是一个积分量，因此它可能较少受到远场流动某些细节的影响，例如涡核的大小和位置。

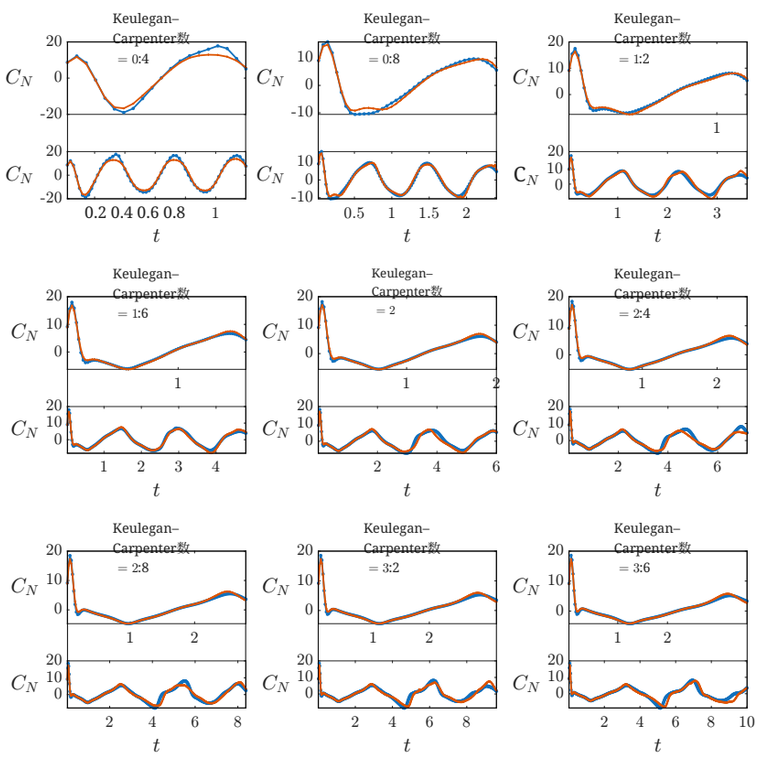


图4：粘性（蓝色）和无黏（橙色）模型在时间 $t =$KC（上图）和时间 $t = 3$KC（下图）内的净法向力。

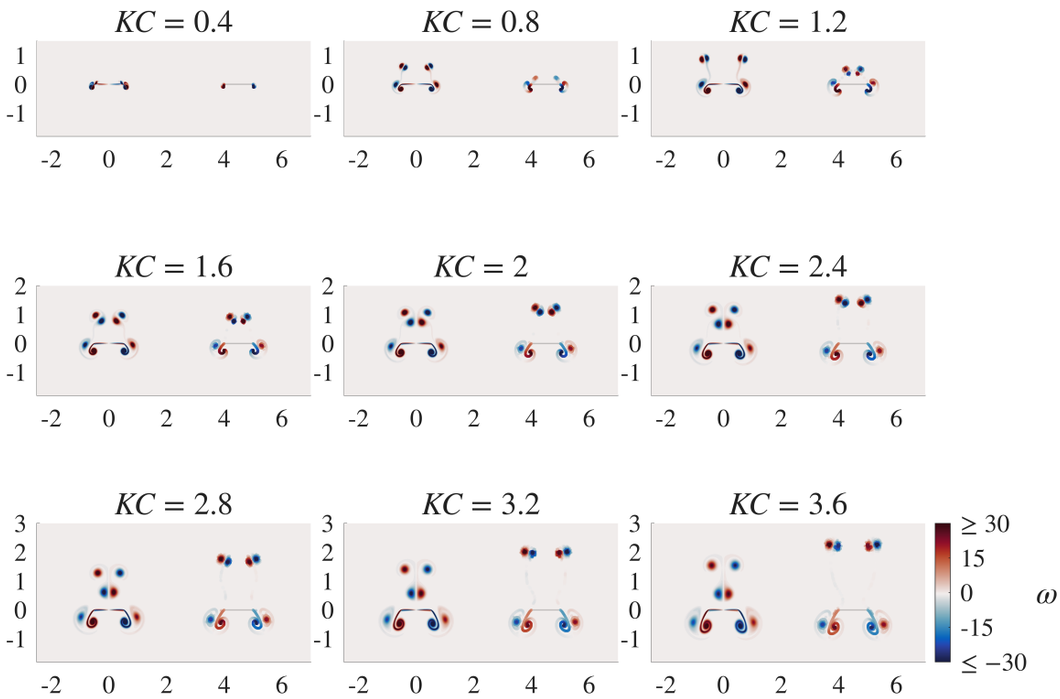


图 5：振荡板在 KC ω时的涡量，KC 为 $= 0.4$、.....、3。6，无黏模型（右）和粘性模型（左）。

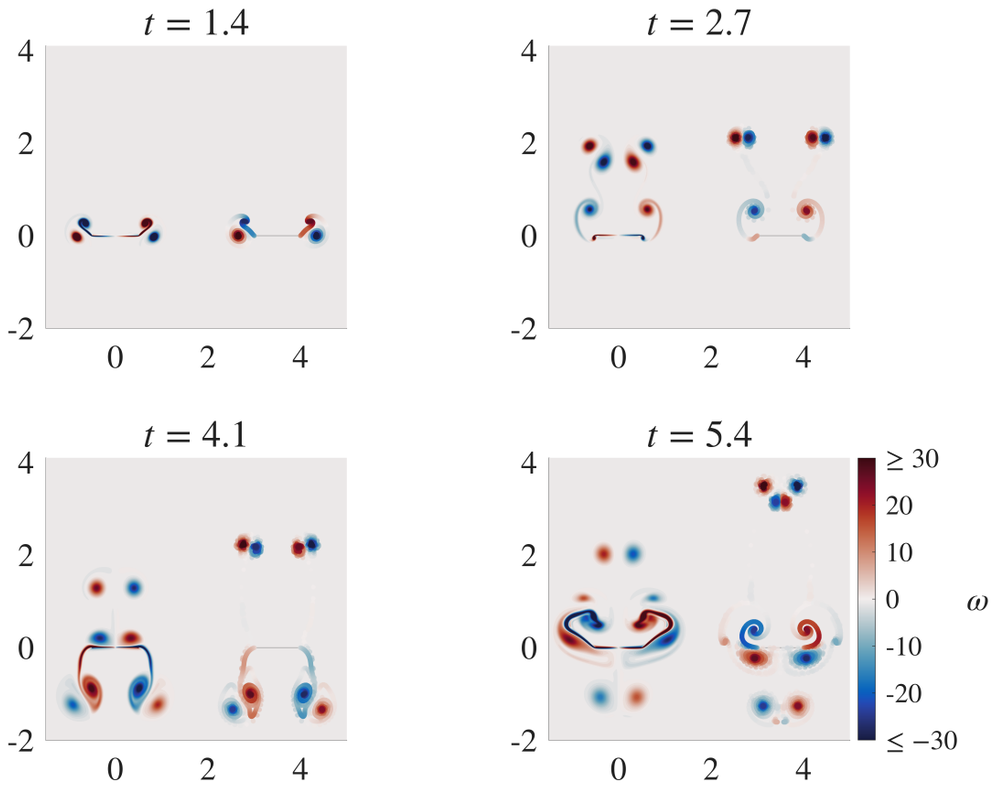


图 6：振荡板在 KC $= 3.6$ 时，无黏模型（右）和粘性模型（左）在 $t = 1.4$、2。7、4。1、和 5.4 时刻的涡量场。

3.2 升沉和俯仰

3.2.1 纯升沉和俯仰

现在，我们考察平板在与其时间平均取向平行的均匀流中的升沉和俯仰运动，这是动物运动的一种模型 [Lig69]。引入平行于平板的运动（而非垂直运动）后，预计黏度的影响会增大，从而导致吻合度相对较差。对于升沉板，有

$$\boldsymbol{X}_G(t) = -[0, \frac{\mathrm{St}\ \mathrm{KC}}{2}\sin(\frac{2\pi}{\mathrm{KC}}t)]^T - [t, 0]^T, \tag{35}$$

$$\beta(t) = 0. \tag{36}$$

同样，对于绕前缘俯仰的平板，有

$$\boldsymbol{X}_G(t) = -[1/2 - \cos(\beta(t))/2, -\sin(\beta(t))/2]^T - [t, 0]^T, \tag{37}$$

$$\beta(t) = -\arcsin\left(\frac{\mathrm{St}\ \mathrm{KC}}{2}\right)\sin(\frac{2\pi}{\mathrm{KC}}t). \tag{38}$$

请注意，包含 $[-t, 0]^T$这一术语等同于引入背景流 $[1, 0]^T$。这里我们考察斯特劳哈尔数 St $= 0.2$ 和 0.4，以及 Keulegan–Carpenter数 KC $= 0.5$、1、1.5 和 2 时，进行俯仰和升沉运动的翼型。图7 展示了平板进行这些运动时的快照。图 a–d 展示了平板分别以 St $= 0.4$、KC $= 0.5$、1、1。5和2 进行俯仰运动（黑色）和升沉运动（红色）的快照。图 e–h 展示了平板以 St $= 0.4$、KC $= 1$ 进行俯仰-升沉复合运动，且相位偏移分别为$\alpha = 0°$、$90°$、$180°$和$270°$ 时的相同情况。下一节3.2.2 将讨论俯仰-升沉复合运动。

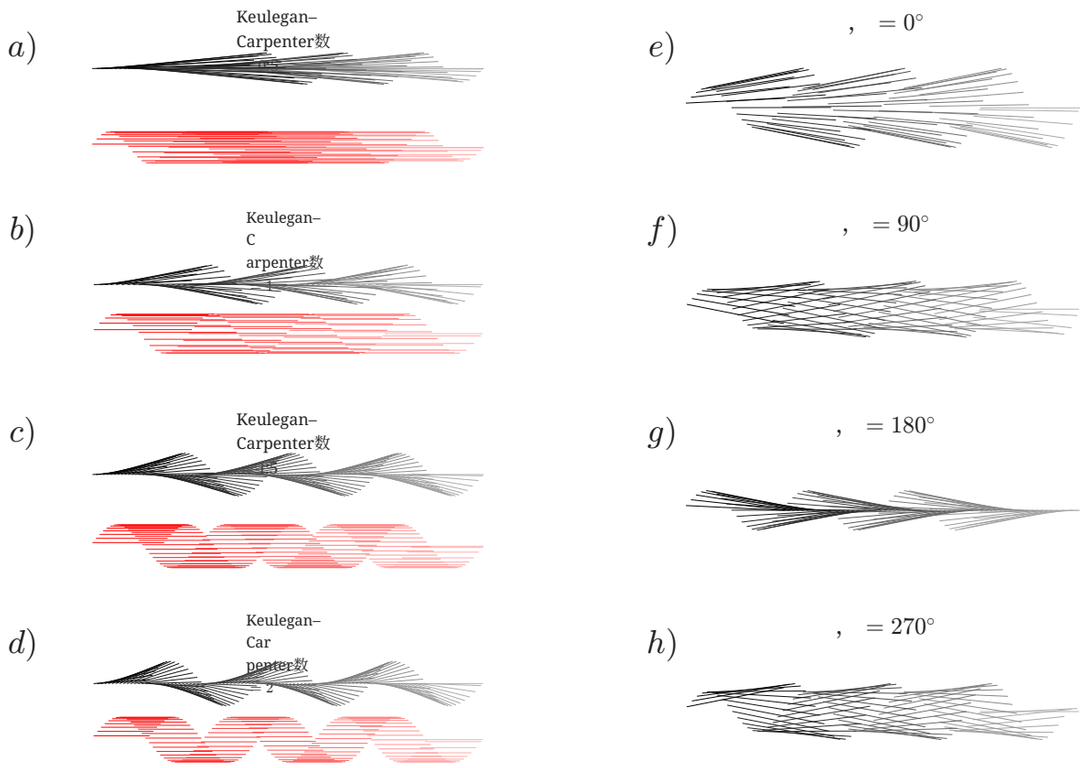


图 7: （a–d）分别为斯特劳哈尔数 St $= 0.4$、Keulegan–Carpenter数 KC $= 0.5$，1、1.5、2 时，平板进行俯仰（黑色）和升沉（红色）运动的快照。（e–g）分别为斯特劳哈尔数 St $= 0.4$、Keulegan–Carpenter数 KC $= 1$ 及相位偏移 $\alpha = 0°$，$90°$，$180°$，$270°$ 时，平板进行俯仰-升沉复合运动的快照。随着时间推移，平板的阴影由浅变深。

与上一节相同，KC 表示无量纲周期。因此，增大 KC 会降低无量纲频率，进而增强所产生的前缘涡 [Riv+14；And+98]。相比之下，实验表明，改变斯特劳哈尔数对前缘涡形成的影响较小 [Riv+14]。图 8 和图 10 分别展示了俯仰板和升沉板的 $C_N(t)$。两图均采用 2×4 网格布局，每列对应一个不同的 KC 值，且从左至右递增；上、下排分别对应 St $= 0.2$ 和 0.4。与前文相同，每个面板分为上下两个子面板，分别展示粘性（蓝色）和无黏（橙色）情况下截至 $t =$ KC 和 $t = 3$KC 时的净法向力 C_N （即 1 个和 3 个拍动周期）。图 9 和图 11 分别展示了俯仰板和升沉板在粘性流动和无黏流动中、时刻为 $t =$ KC 时对应的涡量场。在每个面板中，粘性板和无黏板分别位于 $[-1/2, 1/2] \times \{0\}$和 $[-1/2, 1/2] \times \{1 + 1.2\,\mathrm{KC}\}$。

在黏性模拟中，人们常常观察到涡旋在前缘卷起，随后形成小的涡偶极子，这些涡偶极子沿板面移动，然后在后缘释放。这是

在图的下排中显而易见9，在斯特劳哈尔数 $= 0.4$。事实上，在全部四个图幅中，均可观察到平板上方一个刚释放的偶极子，并且在无黏模型与黏性模型中，平板下方都形成一个小的前缘涡。这种涡生成形式在没有前缘脱落的涡片模型中被忽略，并可能显著影响由此产生的力 [Pan+12]。一项与本研究类似的研究针对俯仰平板的单一情形开展，其斯特劳哈尔数 $= 0.4$ 和Keulegan–Carpenter数 $= 0.5$ 在 [She+12]针对一个无黏模型在无前缘脱落时，计算所得的力的一致性比本模型采用连续前缘脱落时相对更差。

然而与此同时，无黏模型中缺少黏性扩散，意味着这些前缘涡不会消散。在黏性模型中，当这些前缘涡移动到平板后缘附近时，它们几乎已经完全消散，因此不会影响尾迹拓扑。当 KC 较小（因而前缘涡较弱）时，黏性模型中的这一点尤为明显。俯仰平板对应的图 $= 0.2$、KC $= 0.5$ 和 1 的面板中可以清楚地观察到这一现象；见图 9 ，其中黏性尾迹拓扑几乎完全由后缘脱落的涡量决定。

随着 KC 增大，图 9和11中的涡片从呈片状逐渐转变为呈离散涡旋状。这是因为涡量快照取自时间 3KC，因此 KC 越大，涡片卷起的时间就越长（这是开尔文–亥姆霍兹不稳定性导致的）。更具体地说，注意，斑块正则化毕奥–萨伐尔核具有对称性 $K_\delta(\boldsymbol{x}) = {}^1\,\mathrm{KC}\,K_{\delta/\mathrm{KC}}(\boldsymbol{x}/\mathrm{KC})$。如果接着考虑重新缩放的时间、空间和正则化参数 $\tilde{t} = t/\mathrm{KC}$、$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/\mathrm{KC}$ 和 $\tilde{\delta} = \delta/\mathrm{KC}$，则升沉板的运动可写为

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_G(t) = -[0, \frac{\mathrm{St}}{2}\sin(2\pi\tilde{t})]^T - [\tilde{t}, 0]^T, \tag{39}$$

$$\tilde{\beta}(t) = 0. \tag{40}$$

注意，运动现在与 KC 无关。因此，对于固定的 St，改变 KC 对最终动力学的影响，等同于将平板长度缩放 ${}^1\,\mathrm{KC}$ 倍，并以表观正则化参数 $\tilde{\delta} = {}^\delta\,\mathrm{KC}$ 使其演化。俯仰情形也类似。因此，凭直觉来看，对于固定的 δ，减小 KC 会增强片层的表观正则化 ${}^\delta\,\mathrm{KC}$。众所周知，增大正则化参数延迟了涡片卷起，使其看起来更像片状结构 [Kra86a；LA25]。另一方面，KC 较大时，δ 相对于 KC 更小，因此涡片更接近点状结构。一般而言，调节 δ 可以使无黏与黏性涡尾流更加吻合。

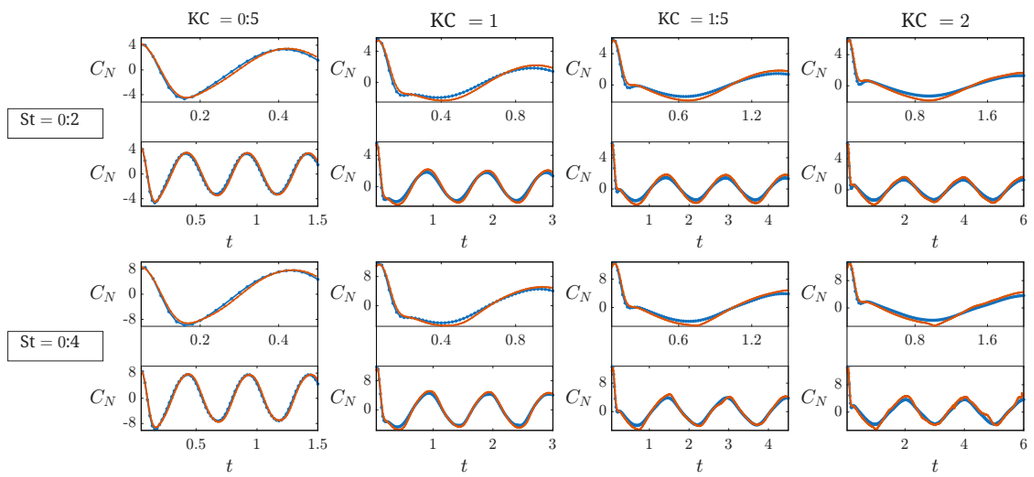


图8：在四种KC值下，粘性（蓝色）和无黏（橙色）流动中俯仰平板所受的净法向力。上排显示St $= 0.2$ 时的结果，下排显示St $= 0.4$时的结果。每个图分为上、下两个面板，分别显示截至时间 $t =$ KC和 $t = 3$KC的净法向力 C_N。

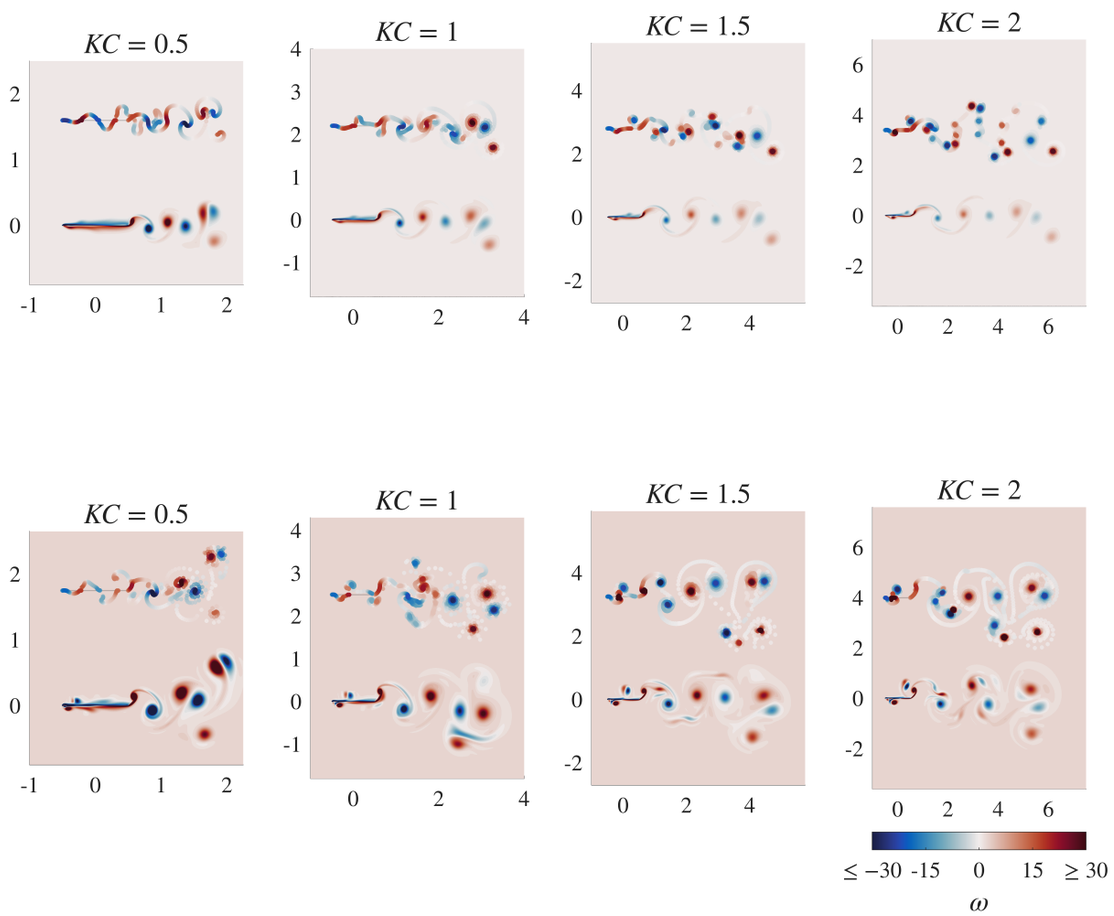


图9：四种 KC值下，粘性（下排）和无黏（上排）模型中俯仰平板在时刻 $t = 3$KC 的涡量 ω 。上排显示 St $= 0.2$ 时的结果，下排显示 St $= 0.4$ 时的结果。

升沉板的涡量场在无黏模型与黏性模型之间吻合得相对较差。事实上，对于升沉板，前缘会沿 x 和 y 两个方向移动；而俯仰平板的前缘只沿 x 方向移动。升沉板的前缘涡动力学要复杂得多。平板反向运动时，前缘会释放出强偶极子（例如，图 $= 0.5$ 中的 KC $= 0.2$ 和 St，见图11）。前缘涡常会与平板物体相撞，进而通过复杂的边界层相互作用形成次生涡，而无黏模型无法体现这一过程。由于升沉板流动对前缘涡动力学更为敏感，无黏模型的整体准确度通常低于其在俯仰运动中的表现。此外，升沉板流动似乎对斯特劳哈尔数更为敏感。在图10和11中，无黏模型在 St $= 0.2$ （上排）时比在 St $= 0.4$时更准确。斯特劳哈尔数较低时，前缘涡量的幅值较小，前缘释放的偶极子动力学也较不混乱。相比之下，俯仰平板的斯特劳哈尔数对无黏模型准确度的影响较弱——在这两个斯特劳哈尔数下都能达到较高准确度。

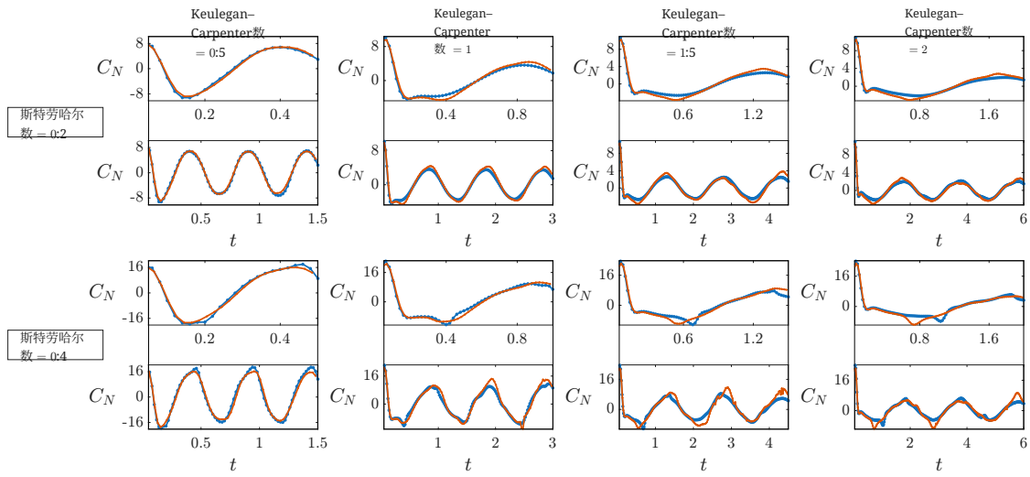


图10：在四种KC值下，粘性（蓝色）和无黏（橙色）流动中升沉板所受的净法向力。上排显示 St $= 0.2$ 时的结果，下排显示 St $= 0.4$时的结果。每个面板分为上、下两个子面板，分别显示截至时间 $t =$KC 和 $t = 3$KC 的法向力 C_N 。

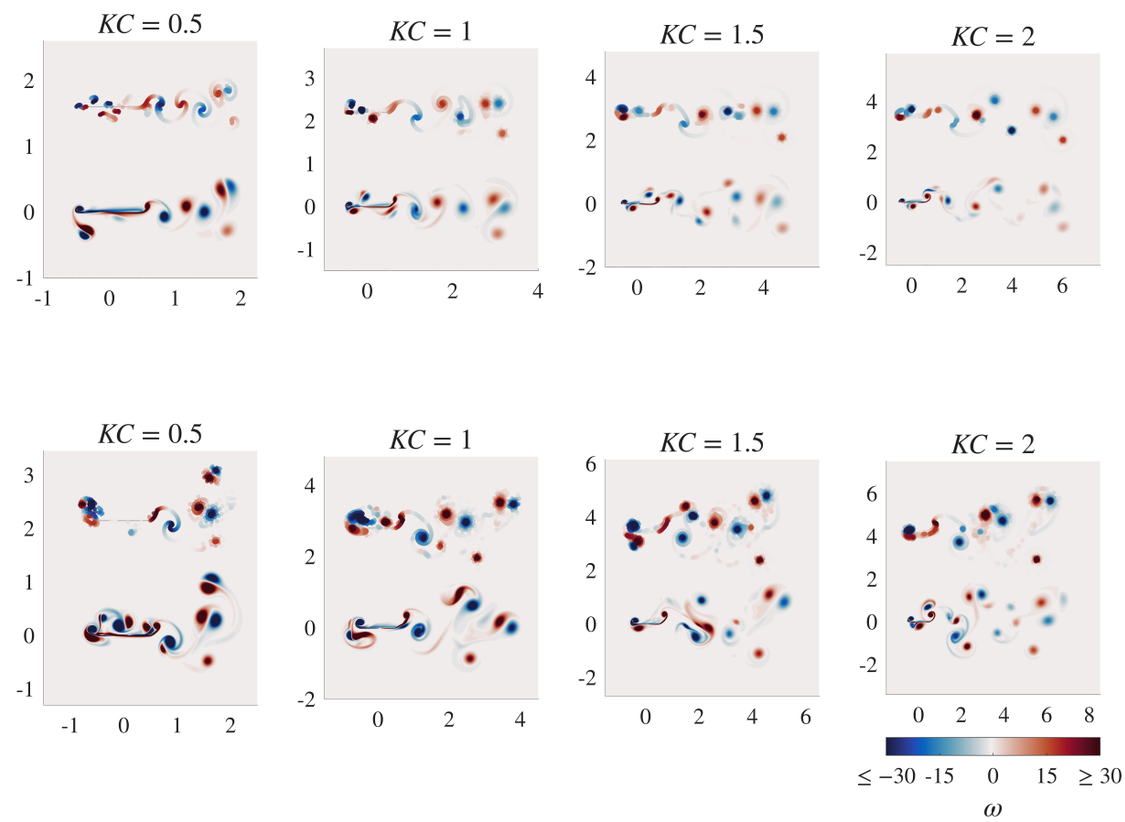


图11：在四种KC值下，粘性（下方）和无黏（上方）模型中的升沉板在时间 $t = 3$KC 时的涡量 ω 。上排显示 St $= 0.2$ 时的结果，下排显示 St $= 0.4$时的结果。

3.2.2 混合升沉和俯仰

现在，我们将前面介绍的纯升沉和俯仰运动叠加起来，针对单一 KC $= 1$，考察升沉和俯仰之间四种不同的相位差，分别为 $\alpha = 0°$， $90°$， $180°$，和 $270°$。也就是说，我们设定

$$\boldsymbol{X}_G(t) = -[t, \frac{\text{St KC}}{2}\sin(\frac{2\pi}{\text{KC}}t)]^T - [1/2 - \cos(\beta(t))/2, -\sin(\beta(t))/2]^T \tag{41}$$

and

$$\beta(t) = -\arcsin(\frac{\text{St KC}}{2})\sin(\frac{2\pi}{\text{KC}}t + \alpha) \tag{42}$$

运动如图7e–g所示。 $\alpha = 0°$ 对应于升沉与俯仰同相，而 $\alpha = 180°$为反相。 $\alpha = 90°$ 和 $270°$ 分别相差四分之一周期和四分之三周期。在后一种

运动中，平板在俯仰轴处更沿其轨迹切向运动，从而减小法向阻力。这种情况最接近游动金枪鱼和鲭鱼相对刚性的新月形或“月牙形”尾鳍的运动，许多作者对此进行了研究，其中包括Lighthill，他将俯仰轴处平板斜率与轨迹斜率之比称为“比例羽化”参数 [Lig69;Cho74], 指的是飞机机翼的“羽化”。

图 12 展示了这些运动对应的净法向力，采用 2×4 面板网格排列。从左到右，各列分别对应 $\alpha=0°$、$90°$、$180°$、以及 $270°$。每个面板包含上下两个子面板，显示 C_N 粘性（蓝色）和无黏（橙色）模拟所得净法向力，时间范围分别截至 $t=$ KC 和 $t=3$KC。上排对应 St $=0.2$，下排对应 St $=0.4$。当 $\alpha=0°$ 时，力最大；当 $\alpha=180°$时，力最小。这可能是因为如图7e–g 所示，这两种情况的法向运动幅度分别最大和最小。

人们可能会认为，无黏模型在 $\alpha=270°$ 时准确性最低，因为此时平板运动更偏向切向。在这种情况下，黏性效应可能会主导流场，从而导致计算所得的力出现更大偏差。然而，从图12来看，情况似乎并非如此。事实上，在 α 范围内，计算所得的力的误差大致均匀。

值得注意的是，在粘性模型中，涡量是在平板板面上因无滑移条件而产生的；无滑移条件是一种纯粘性边界条件。然而，在无黏模型中，涡量的产生则是为了在平板板面上满足不可穿透条件，同时遵循开尔文定理和库塔条件。尽管涡量的来源以及由此产生力的机制看起来有所不同，但两种模型似乎都会产生相似的气动力。

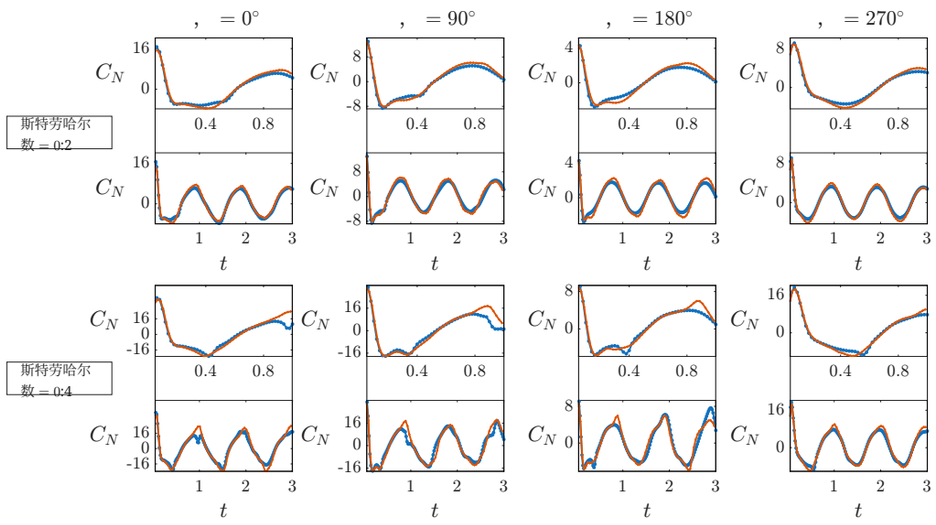


图 12：粘性（蓝色）和无黏（橙色）流动中升沉与俯仰平板所受的净法向力，KC $=1$ 和 α 在各列中变化。上排显示 St $=0.2$ 时的结果，下排显示 St $=0.4$时的结果。每幅图分为上、下面板，分别显示截至时间 $t=$ KC 和 $t=3$KC 的净法向力 C_N。

3.3 抬头

迄今讨论的示例中，前缘涡相对较弱。现在我们转而研究前缘涡强得多的运动，重点关注抬头运动。这种构型已在文献中得到广泛研究 [EWO09；EW10]。在此，我们考察一系列全面的固定攻角抬头运动， $45°$。我们取

$$\boldsymbol{X}_G(t)=[t,0]^T+(I-R_{\beta(t)})[1/2-X_p,0]^T \tag{43}$$

$$\beta(t)=\alpha_0\frac{G(t)}{\max_{0\le\tau\le t_4}G(\tau)} \tag{44}$$

其中

$$G(t)=\ln\left(\frac{\cosh(a_s(t-t_1))\cosh(a_s(t-t_4))}{\cosh(a_s(t-t_2))\cosh(a_s(t-t_3))}\right). \tag{45}$$

此处， $\alpha_0=\frac{\pi}{4}$，$a_s=11$，$t_1=1$，$t_2=t_1+\frac{\alpha_0}{2K}$，$t_3=t_2+1.12$，$t_4=t_3+\frac{\alpha_0}{2K}$ 与 [EW10], I中的做法相同，2×2 是 $R_{\beta(t)}=\begin{bmatrix}\cos(\beta(t)) & -\sin(\beta(t))\\ \sin(\beta(t)) & \cos(\beta(t))\end{bmatrix}$。

通俗地说，板的角度从 $t=0$ 到 t_1为零。从 $t=t_1$ 到 t_2，板的角度从0近似线性地上升至 α_0 （因此角速度为 $\approx 2K$）。从 $t=t_2$ 到 t_3，板的方位保持在 α_0不变。在图13a中，我们展示了平板方位角的演变。在分图b中，我们以红色、蓝色和黑色展示了平板进行抬头运动的快照，分别对应于时间区间 $[0,t_1]$、$[t_1,t_2]$、$[t_2,t_3]$。我们考虑 $K=0.2$、0.4、...、1以及俯仰轴位置$X_p=0$、0.25、0.5。 $X_p=0$ 对应于绕前缘俯仰， $X_p=0.5$对应于绕板中心俯仰。

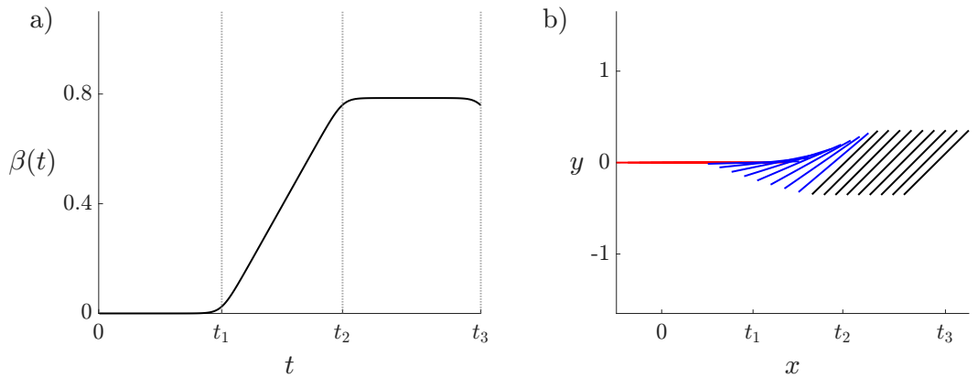


图13：(a) 执行抬头运动的平板的方位角 $\beta(t)$；(b) 平板执行抬头运动时的位置快照，枢轴 $X_p = 0.5$ 以红色、蓝色和黑色标示，分别对应时间区间 $[0, t_1]$，$[t_1, t_2]$，$[t_2, t_3]$。

图14展示了一个 3×5 网格，其中绘制了净法向力 C_N 随时间的变化。每幅图对应于 K 和 X_p 的一组不同取值，无黏法向力和粘性法向力分别以橙色和蓝色表示。图15 展示了一个 3×5 网格，给出最终时刻的对应涡量场，粘性板和无黏板分别位于 $[-1/2, 1/2] \times \{0\}$ 和 $[-1/2, 1/2] \times \{2.5\}$。

抬头运动是平板绕俯仰轴进行的旋转运动。在抬头过程中（图 13b 中的蓝色快照），旋转运动使板的速度产生了一个垂直于平板的大分量。因此，抬头机动似乎是由压力主导的运动。由此，和振荡板的情况很相似，我们预计无黏模型能够准确捕捉由此产生的气动力。图 14显示，这通常成立。这些图中的误差大致均匀，但在 $X_p = 0.5$ 和 $K \geq 0.4$时最大。这些 (K, X_p) 取值下出现偏差的一个原因是，粘性模型和无黏模型预测的平板附近局部涡量场略有不同。在图 $K = 0.8$ 和 $X_p = 0.5$ 对应的面板中，这一点最为明显，见图 15。上方平板（无黏模型）的后缘下方有一个小偶极子。当平板以 $t = t_1$抬头时，在 $X_p = 0.5$和 $K \geq 0.4$ 的条件下，平板下方会释放一个偶极子。然而，在粘性模型中，平板下方不会形成偶极子。这可能是由于前缘处的黏性效应通过耗散抑制了前缘集中偶极子的形成。在更大的雷诺数 $\mathrm{Re} = 2000$下，平板进行略有不同的俯仰运动 [MEA17]时，前缘确实会形成偶极子。

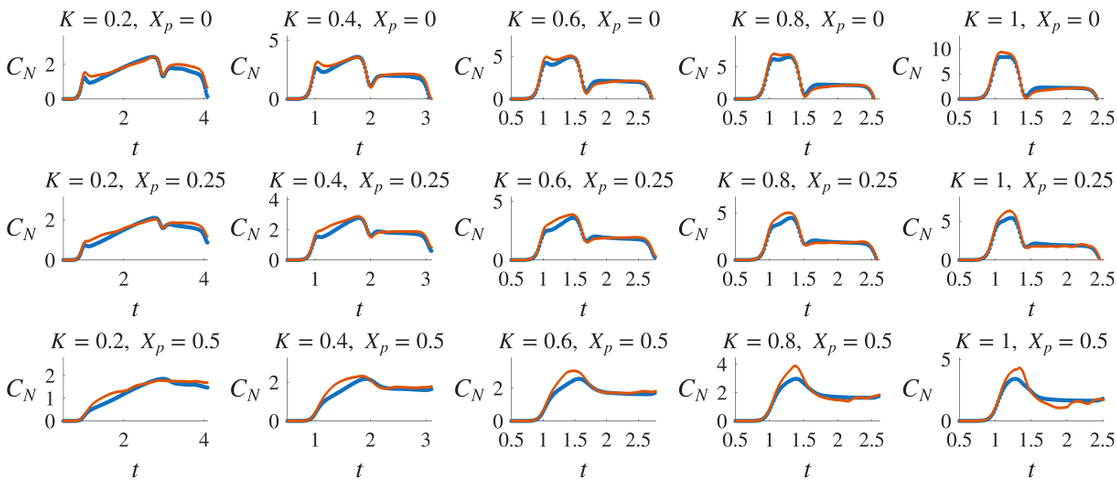


图14：粘性（蓝色）和无黏（橙色）模型在抬头运动至时间 $t = t_3$ 时的净法向力。俯仰角速度 K 从左列到右列逐渐增大，俯仰轴位置 X_p 从上排到下排逐渐增大。

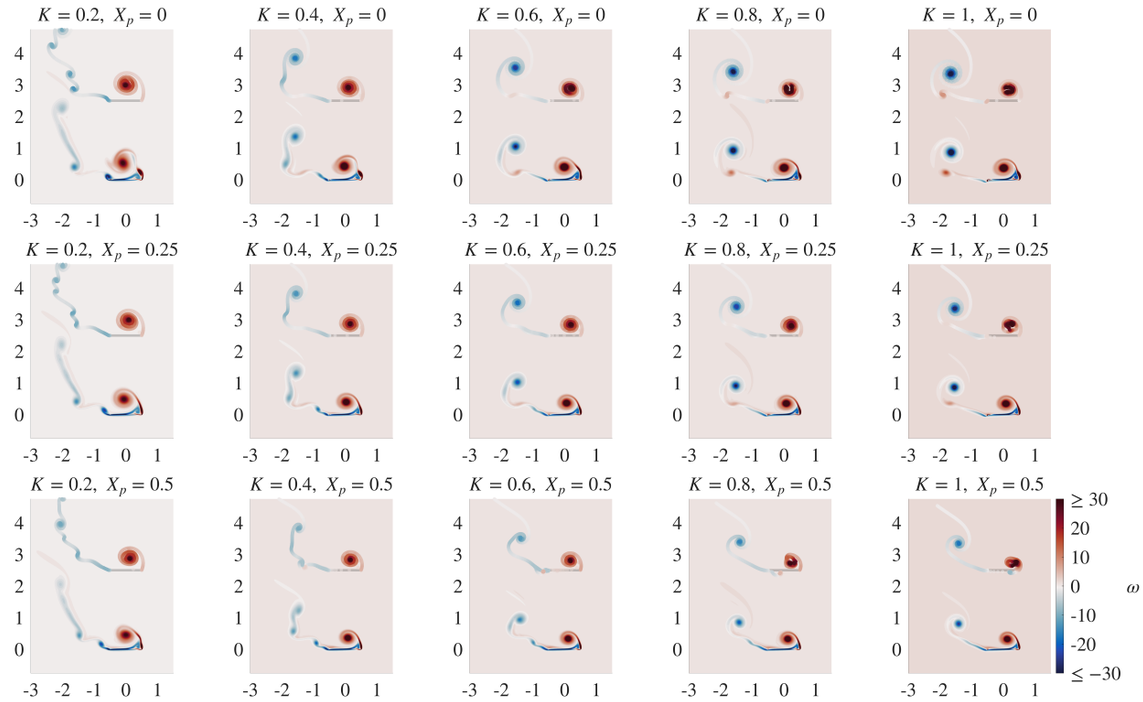


图15：涡量 ω 在时刻 $t = t_3$ ，平板在粘性（下）和无黏（上）模型中进行抬头机动。

3.4 匀速旋转

现在，我们考虑比抬头示例中旋转幅度更大的运动：平板绕原点匀速旋转。更准确地说，我们考虑平板沿半径为 R 的圆形路径绕原点运动，并在运动过程中旋转，使平板与从原点指向平板的位移向量之间的夹角 θ 保持不变（见图 16a ）。对于每个 (R, θ)，我们考察有无背景流 $[-U_b, 0]^T$ 时产生的力和涡动力学。如果背景流足够强，前缘和后缘会周期性交换。图 4×3 16 中其余的 组面板展示了本节考察的 12 种运动。每种运动都用一个三元组 (R, θ, U_b) 标记，并展示平板在上述参数下匀速旋转的快照，直至 $t = 10$，即本节考察的最终时刻。在对应于 $U_b = 1$ (即最下面两行) 的面板中，我们展示平板以速度 $U_b = 1$ 向右平移的情形，这等效于背景流 $[-U_b, 0]^T$。

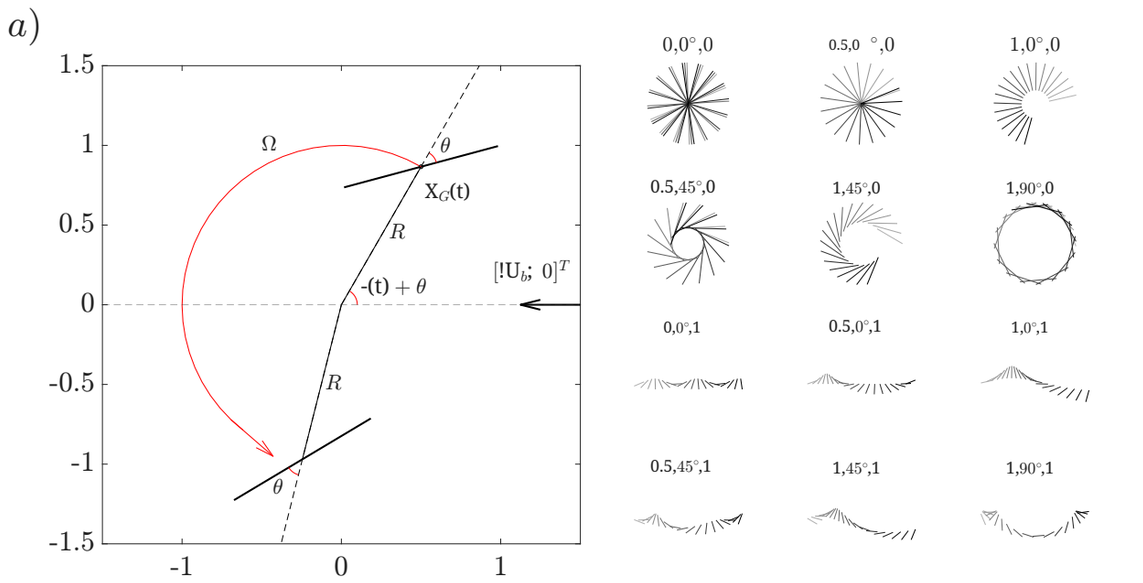


图16：a）示意图显示均匀旋转平板，其角速度为Ω，与穿过原点及其质心、长度为 R 的线段成角 θ ，背景流为 $[-U_b, 0]^T$。其余面板以元组（R, θ, U_b）标注，并展示给定参数下均匀旋转平板直至 $t = 10$的快照。

这类运动部分源于其与垂直轴风力涡轮机（VAWTs）的相关性。研究表明，二维黏性模型能够以合理的精度捕捉气动力 [LP16；Nob+14]。对于涉及多台涡轮机的配置而言，这一点尤为重要，因为完全解析的模拟在计算上可能代价过高 [NZM18]。秉持同样的思路，

人们对低阶模型的兴趣日益浓厚，这类模型旨在以更低的计算成本表征主要气动力，从而有望实现对大型涡轮机阵列的计算研究 [NR22；Yua+20]。

平板旋转的角速度 Ω 选为 $\Omega = \frac{1}{R^2+\frac{1}{4}+R\cos(\theta)}$，使得板尖端的~~最大速度在~~ R 变化时保持为 ≈ 1 。更具体地，我们设定

$$\boldsymbol{X}_G(t) = [R\cos(\Omega t), R\sin(\Omega t)]^T + t[U_b, 0]^T \tag{46}$$

$$\beta(t) = \Omega t - \theta. \tag{47}$$

对于 $\theta = 0°$，我们选取 $R = 0$、0.5 和 1；对于 $\theta = 45°$，我们选取 $R = 0.5$ 和 1；对于 $\theta = 90°$，我们选取$R = 1$，总共得到六组（R, θ）组合。请注意，$t[U_b, 0]^T$项对应于背景流速U_b，我们为每组（R, θ）组合分别设为 0 和 1，因此总共有 12 种情况。

图 17 展示了 4×3 净法向力的图阵列 C_N，每个面板均标注了相应的（R, θ）值。顶部和底部的两行分别对应于 $U_b = 0$ 和 1，分别表示不存在和存在背景流的情况。粘性模型和无黏模型的预测分别以蓝色和橙色显示。在时间 $t = 4$下，诱导涡量场的对应对比见图 18，每个面板左侧和右侧分别显示粘性流和无黏流。

相对而言，当 $U_b = 1$ （下方两行）时，粘性力与无黏力的一致性优于 $U_b = 0$时。在没有背景流的情况下，力的大小约小一个数量级（图17），因此从绝对意义上说，在 $U_b = 0$ 和 1 时，两者的一致程度相近。图 18 显示，在 $U_b = 0$ 时，涡量场的一致性略好于 $U_b = 1$时。存在背景流时，物体运动更加复杂，如图16所示，这可能导致涡动力学更加复杂，难以用无黏模型近似。尽管如此，这些结果表明，两个模型总体上具有较高的一致性。

力的差异可追溯到平板附近局部涡量场的不同。例如，在图17 中，对应于（R，θ）=（1，45°）且 $U_b = 1$ 的面板（下排，中间列）显示，在所考察的示例中，力的一致性最差，尤其是在 $U_b = 1$ 附近的 $t \approx 4$。查看图18 中对应的面板可以发现，在 $t = 4$ 时，平板左侧边缘在平板上方而非下方脱落出正涡量。

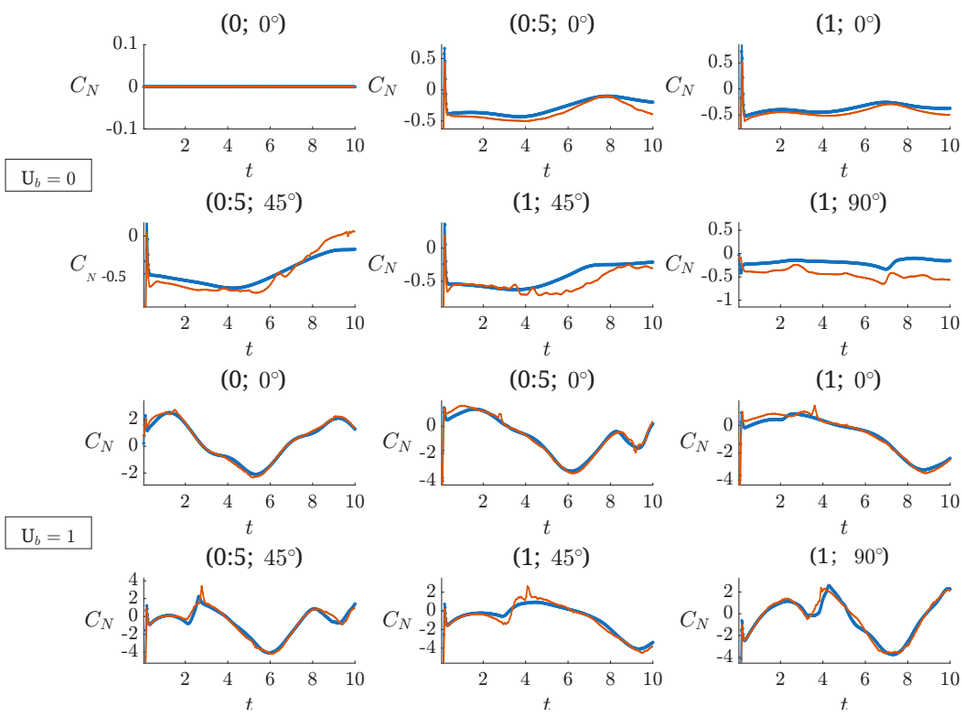


图 17：均匀旋转平板在时间 $t = 10$ 内的净法向力，分别对应粘性（蓝色）和无黏（橙色）模型。每个面板均标注了相应的（R，θ）值，顶部两行和底部两行分别对应有背景流和无背景流（$-U_b$）时的运动。

当 $\theta = 0°$时，旋转轴位于穿过平板板体的直线上。因此，平板板体上任意一点的速度始终垂直于其运动方向；在这种情况下，我们预计法向力（压力力）相较于粘性力更强。因此，我们可以预期，无黏模型与黏性模型所产生的涡结构会吻合良好。图 19 展示了这样一个例子。四幅图显示了黏性模型在 $t = 1.5$、3、4.5、6 时的涡量场，并叠加了相应无黏涡片的轮廓。即使在 $t = 6$时，脱落涡与平板板体碰撞并与粘性边界层相互作用，脱落涡核的位置仍显示出良好的、

尽管有所减弱，吻合度依然良好。

无黏模型在带背景流的旋转运动中的稳健性与准确性表明，它可能是预测垂直轴风力机（VAWT）效率与涡脱落模式的有效工具。在 [Yua+20] 中，例如，一个与本研究类似的二维无黏模型与黏性效应相耦合，用以预测垂直轴风力机后方诱导的流动。

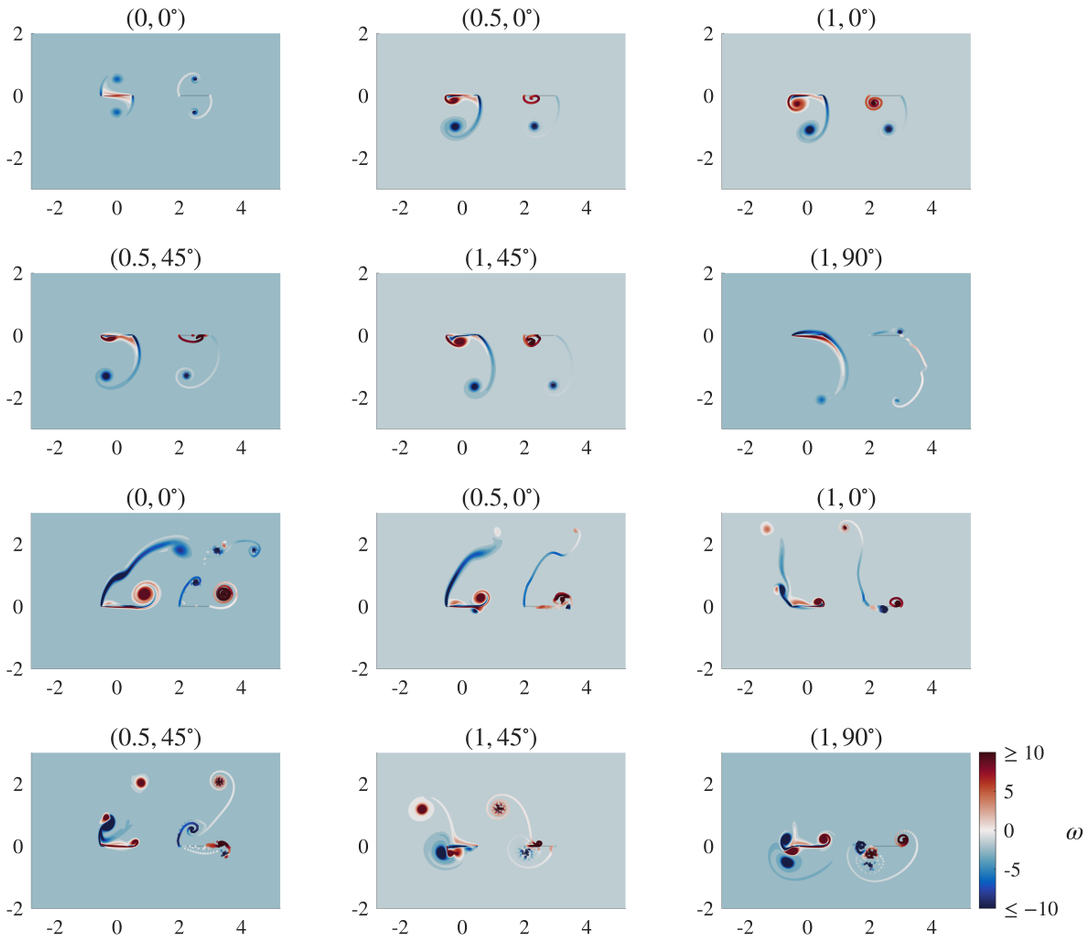


图18：涡量 ω，时刻为 $t = 4$，平板以匀角速度绕半径为 R 的圆旋转，并与连接旋转轴和板中心的直线成角 θ，分别对应无黏（右）和粘性（左）模型。上面两行和下面两行分别显示背景流速为 $U_b = 0$ 和1时的涡量场。

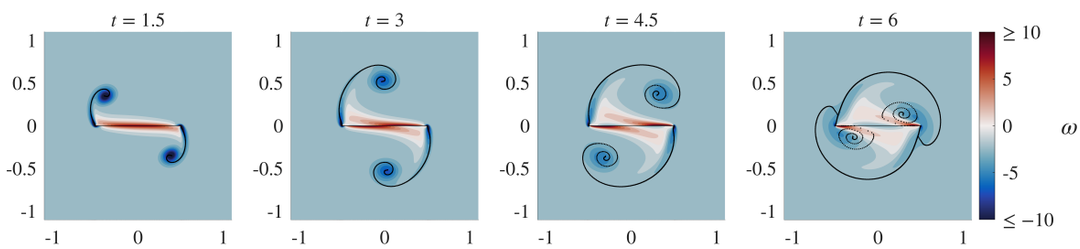


图19：涡量 ω，时刻为 $t = 1.5$、3、4.5和6，均匀旋转平板的参数为（R，θ，U_b）=（0，0°，0），采用黏性模型，并叠加无黏涡片（黑线）。

在 [LA25]，中研究的重力驱动自由下落板，我们观察到，当密度比超过临界值时，平板会进入自旋转状态，其角速度随时间近似呈立方增长，随后趋于终端值。尽管这一行为是通过经验观察发现的，但目前无黏与粘性旋转板前缘脱落模型之间的一致性，为其物理起源提供了进一步证据。对此标度律可以作如下直观解释。考虑角动量平衡 $I\beta = \tau$ 其中 I 为平板的转动惯量，τ 为气动力矩。在平板下落过程中，在达到终端速度之前，其平移速度满足 $U(t) \sim gt$。对于具有有限攻角的薄板，力矩的主要贡献来自与前缘涡脱落相关的压力（在准定常近似下，其随速度的平方变化），

由此得到 $\tau \sim U^2$。结合这些标度关系可得 $\ddot{\beta} \sim t^2$，积分后意味着 $\dot{\beta} \sim t^3$，这与数值计算中观察到的立方增长一致。

3.5 稳态平移及 δ 的影响

前述示例主要都是由物体的加速度驱动的。如上一节所述，在这类物体主导区间中，无黏模型似乎确实能够准确模拟净法向力和局部涡量场。现在我们转而考察一种流动主导情形：平板以单位速度沿与 x 轴夹角为 θ 的方向平移。也就是说，

$$\boldsymbol{X}_G(t) = [t\cos(\theta), t\sin(\theta)]^T \tag{48}$$

$$\beta(t) = 0 \tag{49}$$

其中 $\theta = 10°$，……，$90°$。瞬时启动后，平板的加速度为零。在所考察的中等雷诺数下（$\mathrm{Re} = 1000$），涡层卷起是流动的显著特征，而产生的力主要由这种流体失稳决定。已知钝体（包括圆柱和翼型）的此类流动对雷诺数十分敏感，力的周期、相位和振幅会随 Re 发生剧烈变化 [YSK09；SM05；YB11]。因此，与此前考察的物体主导示例不同，我们不应期待粘性模型和无黏模型之间达到同等程度的一致性。与此前考察的示例不同，这里我们还改变平滑参数δ，该参数决定涡团的核心尺寸，详见第 2.2节。

图 20 展示了一个 3×3 网格图，其中显示了平板上的净法向力 C_N。上下两个子图分别显示截至时间 $t = 3$ 和 $t = 10$ 的净法向力。粘性模型和无黏（$\delta = 0.1$）模型中，平板上的法向力分别以蓝色和橙色绘出。此外，我们还纳入了同一无黏模型在不同 δ取值下产生的法向力：0.15（黄色）和0.2（紫色）。图21展示了对应的涡量图，其中粘性模型和平板无黏模型中的平板分别位于 $[-1/2, 1/2]\times\{0\}$ 和 $[-1/2, 1/2]\times\{3\}$ 处。

人们可能会认为，平移角度越小，两者的比较差异就越大。确实，当平板与流动方向平行时（即 $\theta \approx 0°$），黏性效应占主导。相反，当平板垂直于运动方向时，相对于黏性效应，压力效应近乎达到最大，因此两者的一致性更好。图20 和 21 似乎证实了这一预期：随着 θ 减小，净法向力和涡量图的一致性都会变差。尽管如此，从图 21各面板上方的曲线可以看出，在早期时刻，两种模型的力总体上仍吻合良好。然而，随着时间推移，涡脱落相位和结构的差异不断累积，最终导致两者的力出现偏离。例如，当 $10° \le \theta \le 30°$ 时，无黏模型中的准周期性涡脱落会早得多地发生。黏度似乎能稳定从前缘脱落的涡量，并使其重新附着，从而延迟前缘涡的形成，如图 $\theta = 10°$21的第一个面板（$\theta = 10°$）所示。在图 20 对应的面板中，无黏模型较早开始脱落，使净法向力出现了粘性模型中没有的高频分量。然而，当 $\theta = 20°$时，情况正好相反。在无黏模型中，前缘涡形成一个环流泡，在无黏模拟的大部分时段内都保持附着（而在粘性模型中，它约在 $t = 3$ 时脱落）。涡脱落细节上的这一差异，使这里的吻合程度比其他 θ 取值下更差。图 $\theta = 20°$ 21中上方面板的平板（无黏）上可见附着的前缘环流泡，但下方面板的平板（粘性）上的环流泡已经开始脱落。

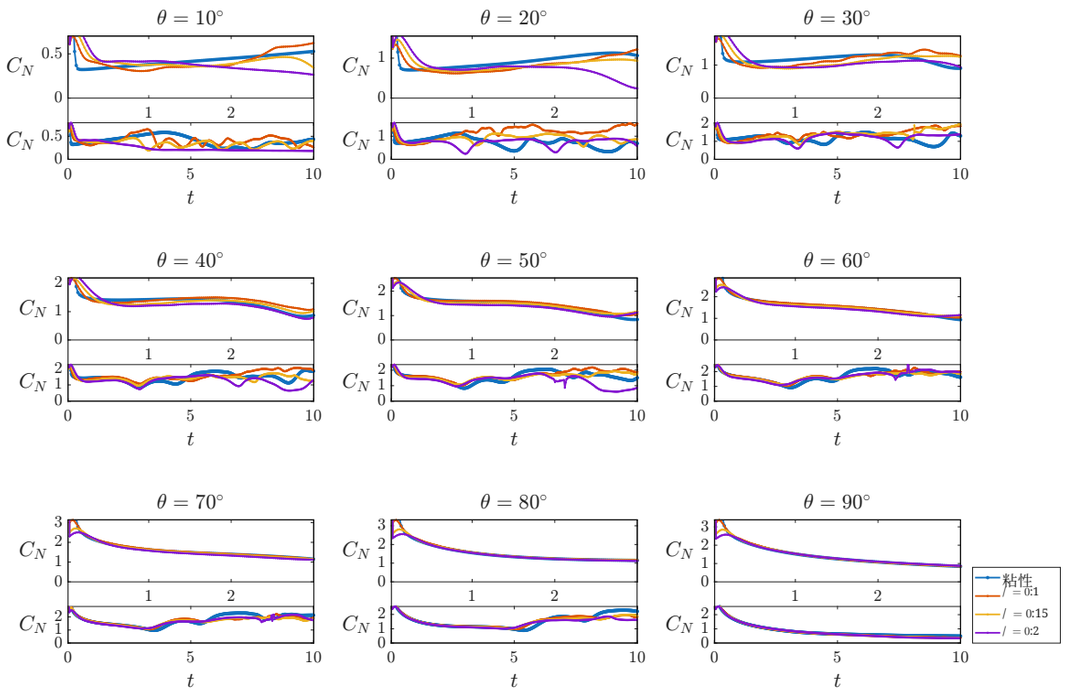


图20：瞬时启动板以单位速度沿相对于 x 轴角度为 $\theta = 10°, \ldots, 90°$ 的方向运动时产生的净法向力，时间截至 $t = 3$（上）和 $t = 10$（下）。

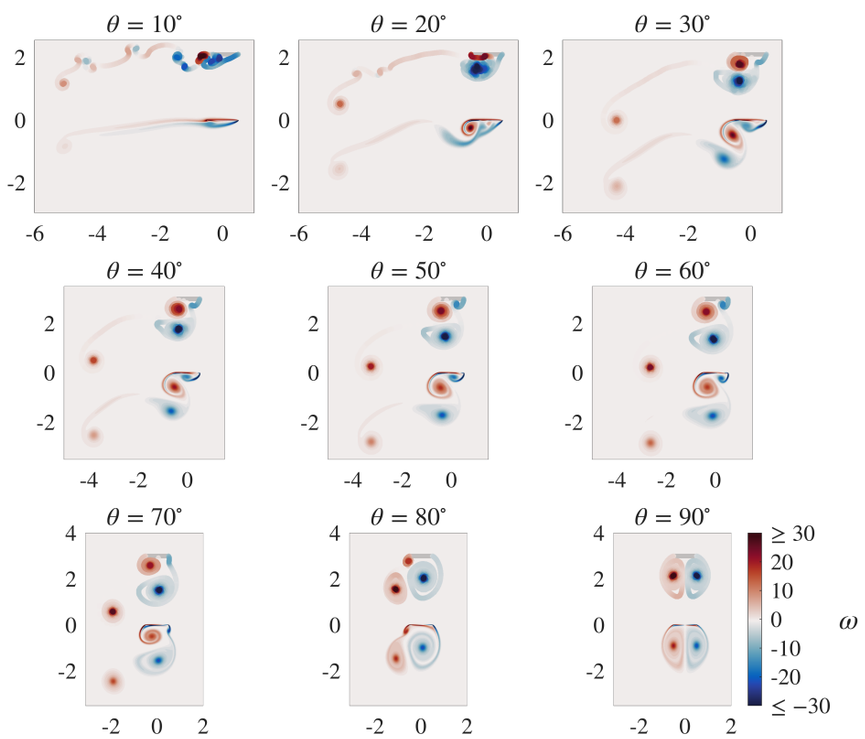


图21：瞬时启动板以单位速度沿相对于 x 轴角度为 $\theta = 10°, \ldots, 90°$ 的方向运动时，在时间 $t = 5$ 的涡量 ω；无黏模型（下）和粘性模型（上）。

˜当 θ 较大时， δ 对无黏模型的影响很小。确实，如第2.2节所述，在不可穿透条件中，将 $\delta(s)$ 在平板附近逐渐减至0（但在平流过程中保持均匀），可确保每一时刻脱落的总环量不会显著受 δ影响。然而，当 θ 较小时，物体与自由涡片之间的紧密相互作用会使这种影响更加明显。具体而言，每个斑块正则化点涡的作用在半径为 $O(\delta)$ 的范围内会减弱。因此，在低攻角下，增大 δ 会产生类似于黏度的稳定作用。例如，在图20的第一个面板（$\theta = 10°$）中，当 $\delta = 0.2$时，净法向力没有振荡，因为脱落涡量相对较弱，前缘涡对束缚涡量和力的影响也较弱。在较高攻角（$\theta \geq 30°$）下，改变 δ 的影响要温和得多，不过误差会随时间累积，导致差异逐渐增大。有趣的是，δ 还会对瞬时启动产生正则化作用，将力奇异性平滑到一个时间尺度$t \approx \delta$上。相反，随着 δ 减小，无黏模型对瞬时启动的表现会更加忠实。在所考察的所有情形中，无黏模型（取 $\delta = 0.1$）在涡脱落于 $t \approx 3$开始之前都保持良好的一致性，如图20上方面板所示。这一趋势与以下观察结果一致：

该模型对于物体主导流动最为可靠。

即使脱落模式相似，细微误差也会随时间累积。图22 展示了这一效应。图中给出了 4×4 涡量图网格，对应于 $\theta = 70°$。前三行显示了无黏模型在 $t = 2.5$、5、7.5 和 10，以及 $\delta = 0.1$、0.15 和 0.2 时的涡量，其中 0。1 是本研究大部分情况下采用的数值。最后一行显示了雷诺数为 $= 1000$ 时黏性模型的相同结果。如图所示，当 t较小时，所有无黏模型都与黏性模型吻合良好（例如 $t = 2.5$ 和 5）。然而，在较晚时刻（例如 $t = 7.5$ 和 10），已经出现了细微差异。例如，在黏性模型中，右侧边缘处的次级正涡量在 $t = 7.5$ 时卷起，形成了靠近右侧边缘的几个较小正涡核。从左侧边缘脱落的涡核也明显大于任何一个无黏模型中的涡核。此前各节所考察的运动中，这些差异较小；在那些情况下，涡脱落是由物体运动而非自然涡片动力学触发的，而后者会出现在平板的准周期性涡脱落中。此处的动力学对从黏性模型变为无黏模型更为敏感。

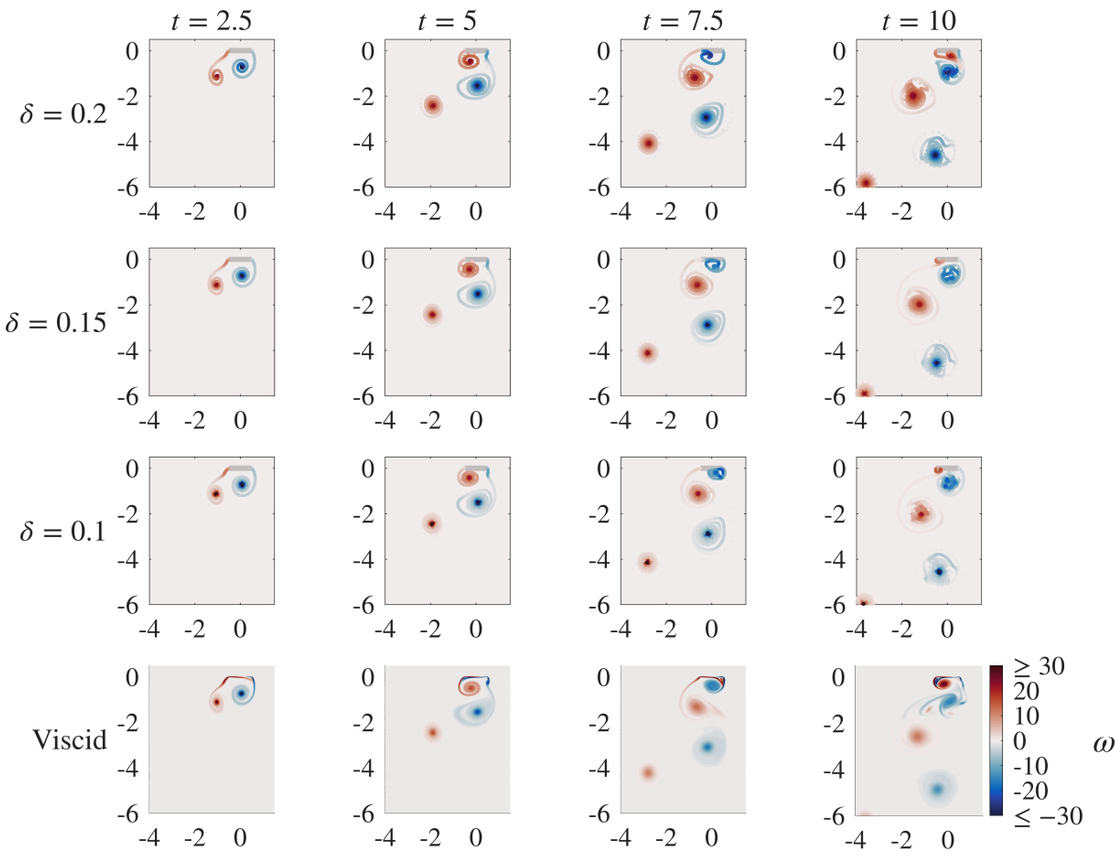


图22：黏性模型和无黏模型中，瞬时启动并以单位速度沿与 x 轴成 $\theta = 70°$ 角方向运动的平板在时刻 $t = 2.5$、5、7.5 和 10 的涡量 ω；无黏模型的参数为 $\delta = 0.1$、0.15、0.2。

4 汇总统计

在表 2 中，我们列出了 L^1 所考虑的所有平板运动的平均误差。我们将定义在 L^1 上的时变函数 f的范数 $[0,T]$ 为 $\|f\|_{L^1} := \int_0^T |f(t)|dt$ 并使用梯形法则计算。在前文各节中，我们比较了黏性模型与无黏模型中平板净法向力随时间的变化 $C_N(t)$。我们将无黏模型与黏性模型的法向力之间的相对 L^1 误差定义为

$$\frac{2\|C_N^{viscous} - C_N^{inviscid}\|_{L^1}}{\|C_N^{viscous}\|_{L^1} + \|C_N^{inviscid}\|_{L^1}} \tag{50}$$

这一量可用于衡量无黏模型对不同类型运动下雷诺数 $= 1000$ 结果的预测准确度。对于我们定义为流动主导的运动——匀速平移以及无背景流的匀速旋转——最大 L^1 误差超过 50%。对于物体主导运动，平均 L^1 误差介于 $11 - 19\%$ 之间。

表2：对于每种平板运动类型，雷诺数为 $= 1000$ 时，无黏涡片模拟与纳维–斯托克斯模拟之间净法向力的相对 L^1 误差。 L^1 范数在完整模拟时间区间内计算。

运动类型	最小 L^1误差	平均 L^1误差	最大 L^1误差
振荡平板	0.092	0.18	0.29
升沉板	0.063	0.19	0.30
俯仰板	0.097	0.18	0.25
升沉与俯仰混合运动	0.13	0.18	0.21
抬头运动	0.084	0.11	0.17
带背景流的匀速旋转	0.083	0.15	0.21
无背景流的匀速旋转	0.15	0.31	0.84
匀速平移	0.10	0.20	0.51

5 结论

在本研究中，我们针对中等雷诺数（Re $= 1000$）下广泛的非定常平板运动，对具有连续前缘脱落的无黏涡片模型与直接纳维–斯托克斯模拟进行了系统比较。我们评估了无黏公式在多大程度上能够复现粘性力预测及相关涡动力学。结果表明，在物体主导区间内，力主要由预设的板加速度驱动，无黏模型能够较准确地捕捉法向力历程，以及平板附近诱导涡量场的定性结构。在这些情况下，涡片公式能够较好地再现平板边缘附近的涡脱落模式，黏性效应造成的差异相对较小。相比之下，对于流动主导动力学（即物体匀速运动），在低攻角下，粘性与无黏力预测的一致性较低。在 Re $= 1000$ 下，此类构型的涡脱落对物体附近流动的细节十分敏感；钝体领域已有充分文献记载这种敏感性。在这些区间内，涡的位置和演化上的细微差异可能导致最终受力出现显著差异。尽管无黏模型仍能捕捉整体受力趋势，但由于缺少黏性耗散以及与雷诺数相关的效应，定量一致性必然受到限制。

本研究的核心结果是，允许前缘涡连续脱落，能够在广泛的非定常运动范围内实现稳定、可靠且总体准确的无黏性模拟。这些结果阐明了无黏涡片模型能够提供准确力预测的适用范围，也明确了其局限性更加明显的情形。这些发现支持将此类模型用作高效工具，用于理解非定常高雷诺数流动中的力产生机制，并探索大范围参数空间；同时也强调了黏性模拟对于捕捉流动主导动力学的重要性。

致谢

本研究获得了 NSF-DMS 应用数学项目的资助，项目编号为 DMS- 2204900。

利益声明

作者声明不存在利益冲突。

A 平移旋转参考系中的纳维–斯托克斯方程

本节将详细推导平移旋转参考系中的纳维–斯托克斯方程。主要思路可参见 [LSB02] 以及经典力学的标准教材，例如 [Mor08],；为求完整并统一符号，本文也在此给出推导。

A.1 纯平移

我们首先考虑较简单的情形：纯平移的非旋转参考系。令 $\boldsymbol{R}(t)$ 表示 te
该平移坐标系原点相对于绝对静止参考系的位置，并定义 e

$$\boldsymbol{U}(t) := \dot{\boldsymbol{R}}(t), \qquad \boldsymbol{A}(t) := \dot{\boldsymbol{U}}(t).$$

设 $\boldsymbol{r}$ 表示流体微团在绝对参考系中的位置，并设 $\boldsymbol{r}'$ 表示其在t中的位置 he
平移坐标系。然后

$$\boldsymbol{r}' := \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}, \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}.$$

设 $\boldsymbol{u}$ 表示流体微团在绝对参考系中的速度，$\boldsymbol{v}$ 表示其在平移坐标系中的速度。对 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{R}$ 关于时间求导可得

$$\boldsymbol{u}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}'+\dot{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{U}. \tag{51}$$

再次求导可得

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}+\boldsymbol{A}. \tag{52}$$

绝对静止参考系中的纳维–斯托克斯方程为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u}. \tag{53}$$

由于 $\boldsymbol{U}(t)$ 在空间上均匀，因此有 $\Delta\boldsymbol{u}=\Delta\boldsymbol{v}$。将 (52) 代入 (53)，并将 $\boldsymbol{v}$ 重新标记为 $\boldsymbol{u}$，将 $\boldsymbol{r}'$重新标记为 $\boldsymbol{r}$，可得

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=-\nabla p+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}. \tag{54}$$

这是纯平移、非旋转参考系中的纳维–斯托克斯方程。

A.2 混合平移与旋转

现在考虑一个与物体固连的旋转参考系。设 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x},\ t)$ 表示相对于上述平移坐标系、从位置 $\boldsymbol{x}$ 出发的流体微团的位置。设 $\mathcal{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3\}$ 为一个相对于上述平移（非旋转）坐标系˙以角速度 $\boldsymbol{\Omega}(t)$ 旋转的正交归一参考系。与前述相同，平移坐标系相对于绝对静止参考系的速度为 $\boldsymbol{U}(t)$，加速度为 $\boldsymbol{A}(t)\ =\boldsymbol{U}(t)$。

请注意，$\mathcal{B}$ 参考系中的观察者认为 $\boldsymbol{b}_i$ 基向量在时间上是固定的，而平移坐标系中的观察者则认为它们随时间变化。因此，两个参考系中的观察者必须定义不同的时间导数。令 $\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}$ 表示在旋转参考系 $\mathcal{B}$中取的时间导数，其定义满足 —

$$\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0},\qquad i=1,2,3,$$

（即，参考系 $\mathcal{B}$ 相对于该导数是恒定的）。明确地，对于任意向量

$$\boldsymbol{B}=B^1\boldsymbol{b}_1+B^2\boldsymbol{b}_2+B^3\boldsymbol{b}_3,$$

我们定义

$$\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{B}:=\dot{B}^1\boldsymbol{b}_1+\dot{B}^2\boldsymbol{b}_2+\dot{B}^3\boldsymbol{b}_3.$$

不带上标的导数定义方式类似，因此表示 e
平移坐标系中的标准时间导数。

暂且假设以下恒等式成立：

$$\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}=\frac{d}{dt}-\boldsymbol{\Omega}\times(\cdot). \tag{55}$$

令 $\boldsymbol{u}$ 表示平移坐标系中的流体微团速度，并令 $\boldsymbol{v}$ 表示在旋转参考系 $\mathcal{B}$ 中测得的速度，其定义为

$$\boldsymbol{v}:=\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{r},\qquad \boldsymbol{u}:=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}.$$

那么（55）意味着

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{56}$$

因此

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}.$$

再求一次导数可得

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=\Big(\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}+\boldsymbol{\Omega}\times\cdot\Big)\Big(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}\Big) \tag{57}$$

$$=\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}+2\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathcal{B}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}), \tag{58}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathcal{B}}$ 表示在旋转参考系中对 $\boldsymbol{\Omega}$ 求得的时间导数。因此

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}=\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}+2\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathcal{B}}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}). \tag{59}$$

根据链式法则，

$$\frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial t}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

梯度算子与参考系无关，而拉普拉斯算子在坐标的正交归一变换下保持不变。

由于平移坐标系满足（54），纳维–斯托克斯方程可写为

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{A}. \tag{60}$$

利用（56）以及 $\Delta(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})$ 这一事实，$=0$我们可以将 $\Delta\boldsymbol{u}$ 替换为 $\Delta\boldsymbol{v}$。
将（59）代入（60）后得到

$$\frac{\partial}{\partial t}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + 2\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathcal{B}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{v} - \boldsymbol{A}. \tag{61}$$

最后，将 $\mathcal{B}$ 视为典范基（省略上标 $\mathcal{B}$，并将 $\boldsymbol{v}$ 重新标记为 $\boldsymbol{u}$），我们得到

$$\partial_t\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\boldsymbol{u} = -\nabla p - 2\,\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{u} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}. \tag{62}$$

这正是方程（1）。附加的科里奥利、欧拉和离心加速度项都源于旋转基的时间依赖性，即恒等式（55）。
为了完成推导，还需证明方程（55）。为此，我们断言，对于 $i=1$，2、3，我们有

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}_i \tag{63}$$

注意，该方程立即由坐标系 $\mathcal{B}$ 以角速度 $\boldsymbol{\Omega}$旋转这一假设推出。事实上，这可由以下两个观察得到。首先，从 $\boldsymbol{b}_i$ 到旋转轴（即穿过 $\boldsymbol{\Omega}$ 的直线）的距离为 $|\boldsymbol{b}_i|\sin(\theta_i) = \sin(\theta_i)$，其中 θ_i 是 $\boldsymbol{b}_i$ 与 $\boldsymbol{\Omega}$ 所成的角。因此，由于该点的角速度为 $|\boldsymbol{\Omega}|$，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i$ 的大小为 $|\boldsymbol{\Omega}|\sin(\theta_i)$。其次，由于该点绕包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 的直线旋转，因此它必定垂直于同时包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 和$\boldsymbol{b}_i$的平面运动。因此，根据右手定则，$\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i$ 必定是与 $\widehat{\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}_i}$ 成比例的向量，其中上标帽表示该向量已归一化。结合这两个观察可得

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{b}_i = |\boldsymbol{\Omega}|\sin(\theta_i)\widehat{\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}_i} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}_i. \tag{64}$$

公式（55）现在即可得出。事实上，对于任意 $\boldsymbol{B} = B^1\boldsymbol{b}_1 + B^2\boldsymbol{b}_2 + B^3\boldsymbol{b}_3$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\boldsymbol{B} &= \frac{d}{dt}\Big(B^1\boldsymbol{b}_1 + B^2\boldsymbol{b}_2 + B^3\boldsymbol{b}_3\Big) && (65)\\
&= \dot{B}^1\boldsymbol{b}_1 + \dot{B}^2\boldsymbol{b}_2 + \dot{B}^3\boldsymbol{b}_3 + B^1\dot{\boldsymbol{b}}_1 + B^2\dot{\boldsymbol{b}}_2 + B^3\dot{\boldsymbol{b}}_3 && (66)\\
&= \dot{B}^1\boldsymbol{b}_1 + \dot{B}^2\boldsymbol{b}_2 + \dot{B}^3\boldsymbol{b}_3 + \boldsymbol{\Omega}\times\big(B^1\boldsymbol{b}_1 + B^2\boldsymbol{b}_2 + B^3\boldsymbol{b}_3\big) && (67)\\
&= \frac{d}{dt}^{\mathcal{B}}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{B}. && (68)
\end{aligned}$$

B 库塔条件的数值实现

库塔条件这一原则要求，在空间中的每一点、每一时刻，流体速度都应有界。正如 [LA25] 中所讨论的，这在数学上等价于要求涡强度γ 在平板边缘处连续：

$$\gamma_b(\pm 1/2, t) = \gamma_\pm(\pm 1/2, t) \tag{69}$$

本附录简要讨论如何在数值算法 1 的第 4 步中施加库塔条件。我们发现，这种方式施加库塔条件能够提高数值模型的精度和稳定性。不可穿透条件可写为以下形式：

$$C[\gamma_b](s,t) = \int_{-1/2}^{1/2}\tilde{C}(\boldsymbol{X}(s,t) - \boldsymbol{X}(s',t)\gamma_b(s',t)ds' = f(s,t) \tag{70}$$

其中

$$\tilde{C}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{x})$$

and

$$f(s,t) = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{U} - \frac{1}{2\pi}\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\left(\int_0^{\Gamma_-(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,t) - \boldsymbol{X}_-(\Gamma',t)\big)d\Gamma' + \int_0^{\Gamma_+(t)}\boldsymbol{K}_{\tilde{\delta}(s')}\big(\boldsymbol{X}(s,t) - \boldsymbol{X}_+(\Gamma',t)\big)d\Gamma'\right)$$

一般而言，方程（70）的解在边缘 [LA25]处具有反平方根奇异性。因此 γ_b（s，t）$=\frac{\sigma(s_4\ t)_{s2}}{\sqrt{1/}}$。现在可以使用变量替换 $s=-\frac{1}{2}\cos(\alpha)$，从而得到

$$\int_0^\pi\tilde{C}(\boldsymbol{X}(\alpha,t) - \boldsymbol{X}(\alpha',t)\sigma(\alpha',t)d\alpha' = f(\alpha,t) \tag{71}$$

我们利用配点法确定 σ 平板上的 [Gol90]。令$\alpha_j = j\frac{\pi}{n}$其中 $j=0,\ldots,\ n$为 $[0,\pi]$上的均匀网格，且$\alpha_{j+1/2} = (j+1/2)\frac{\pi}{n}$其中 $j=0,\ \ldots,\ n-1$为均匀网格的中点。令 $w_j,\quad j=0,\ \ldots,\ n$为均匀网格上的求积权重。令 $s_j = -\frac{1}{2}\cos(\alpha_j)$。

因此，我们可以将方程（71）离散化，形成一个 $n \times (n+1)$ 欠定线性方程组

$$\sum_{j=0}^{n} \tilde{C}(\boldsymbol{X}(\alpha_{k+1/2}, t) - \boldsymbol{X}(\alpha_j, t))\sigma(\alpha_j, t)w_j = f(\alpha_{k+1/2}, t) \tag{72}$$

其中 $k = 0, \ldots, n-1$。回想开尔文环量定理要求

$$\int_{-1/2}^{1/2} \gamma_b(s,t)ds + \Gamma_+(t) + \Gamma_-(t) = 0.$$

再次变换变量后，开尔文定理被离散化为

$$\sum_{j=0}^{n} \sigma(\alpha_j, t)w_j = -\Gamma_+(t) - \Gamma_-(t).$$

现在我们有 $n+1$ 个方程和 $n+1$ 个未知数，因此可以对所得线性系统求逆，从而对 $j = 0, \ldots, n$得到$\sigma(\alpha_j, t)$。为使 $\gamma_b(\pm 1/2, t)$保持有限，我们必然要求 $\sigma(\pm 1/2, t) = 0$。因此，对于 $j = 0$ 和 n，我们令$\sigma(\alpha_j, t) = 0$。最后，我们通过如下观察由 σ 得到 γ_b

$$\int_0^{\alpha} \sigma(\alpha', t)d\alpha' = \Gamma_b(\alpha, t) = \Gamma_b(s, t) = \int_0^{s} \gamma_b(s', t)ds'$$

其中 $s = -\frac{1}{2}\cos(\alpha)$。因此

$$\frac{d}{ds}\int_0^{\alpha} \sigma(\alpha', t)d\alpha' = \gamma_b(s, t).$$

对左端的导数和积分进行离散，得到右端的 $\gamma_b(s_j,\ t)\ \ j = 0,\ \ldots\ldots,\ \ n$，其中包括用于库塔条件的 $\gamma_b(\pm 1/2,\ \ t)$。

C 雷诺数敏感性

本研究中给出的所有比较均在雷诺数 $= 1000$下进行，这对应于长度为 ≈ 3 cm的物体在水中、或长度为12 cm的物体在空气中以约每秒一个物体长度运动。总体而言，获得了良好的一致性。为评估所观察到的一致性是否特定于该雷诺数，我们针对一类代表性运动在三个雷诺数下进行了额外比较。

图23 比较了无黏涡片模型与直接纳维–斯托克斯模拟对抬头机动所预测的法向力历程，其中 $K = 0.2$，枢轴点为 $X_p = 0$、0.25和0.5，雷诺数为 $= 500$、1000和2000。在该范围内，无量纲净法向力 C_N 在黏性模型中变化不大，且接近无黏模型的结果。表3给出了 L^1，即无黏模型相对于第4节所定义的纳维–斯托克斯模拟的误差。图和表表明，在该范围内雷诺数的影响很小；雷诺数每增加一倍，误差约减小1–2%。

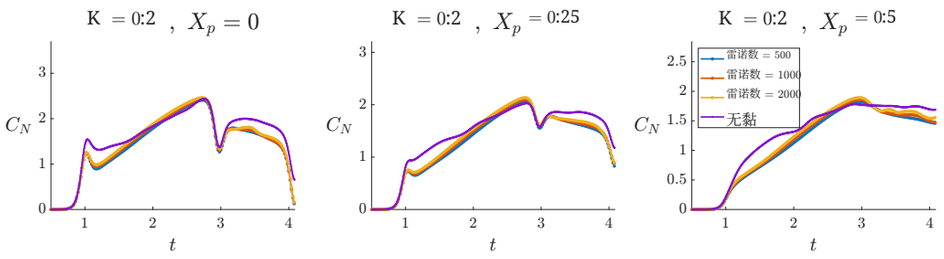


图 23：当 $X_p = 0$、0.25、0.5 和 $KC = 0.2$ 时，雷诺数 Re =500、1000、2000 下抬头机动产生的诱导力。

表 3：不同枢轴位置 X_p 和雷诺数 Re下进行抬头机动时，无黏模型与黏性模型之间的相对 L^1 误差。

X_p	$Re = 500$	$Re = 1000$	$Re = 2000$
0	0.11	0.098	0.091
0.25	0.11	0.094	0.086
0.5	0.12	0.096	0.079

这些结果表明，在相当宽的雷诺数范围内，采用连续前缘涡脱落的无黏涡片模型可能能够提供有用的力预测。

参考文献

[Lig69] MJ Lighthill.《水生动物推进水动力学》。载于：《流体力学年度评论》1.1 (1969), 第 413–446 页。[Cho74] MG Chopra.《月牙形尾鳍游泳推进水动力学》。载于：《流体力学杂志》64.2 (1974), 第 375–392 页。[Moo79] Derek William Moore.《演化涡片形状中奇点的自发出现》。载于：《伦敦皇家学会会刊》。*A*辑：数学与物理科学365.1720 (1979), 第 105–119 页。[PK81] A Plotkin 和 CG Kennell.《地面效应中薄翼型的厚度诱导升力》。载于：《美国航空航天学会杂志》19.11 (1981), 第 1484–1486 页。[Are83] Hassan Aref.《二维流动中的可积、混沌与湍流涡运动》。载于：《流体力学年度评论》15 (1983), 第 345–389 页。[Kra86a] Robert Krasny.《采用点涡近似研究涡片中的奇点形成》。载于：《流体力学杂志》167(1986), 第 65–93 页。 DOI: 10.1017/S0022112086002732

[Kra86b] Robert Krasny. “周期性涡片卷起的去奇异化”。载于：《计算物理学杂志》65.2（1986），第292–313页。[Gol90] Michael A. Golberg. “柯西奇异积分方程数值求解导论”。载于：1990年。 URL: https://api.semanticscholar.org/CorpusID:118863621。[She92] M. J. Shelley. “利用谱精度涡方法研究涡片运动中的奇点形成”。载于：《流体力学杂志》244（1992），第493–526页。 DOI: 10.1017/S0022112092003161。[NK94] Monika Nitsche 和 Robert Krasny. “圆管边缘涡环形成的数值研究”。载于：《流体力学杂志》276（1994），第139–161页。[TTW94] HR Tamaddon-Jahromi、P Townsend 和 MF Webster. “垂直于来流的平板周围非定常黏性流动”。载于：《计算机与流体》23.2（1994），第433–446页。[NV95] Fady M Najjar 和 SP Vanka. “法向平板周围非定常分离流动的模拟”。载于：《流体数值方法国际期刊》21.7（1995），第525–547页。[KS96] P. Koumoutsakos 和 D. Shiels. “瞬时启动并均匀加速的平板周围法向黏性流动的模拟”。载于：《流体力学杂志》328（1996），第177–227页。DOI: 10.1017/S0022112096008695。[And+98] Jamie M Anderson 等. “高推进效率的振荡翼型”。载于：《流体力学杂志》360（1998），第41–72页。[SR98] Donald N Slinn 和 JJ Riley. “不可压缩分层流中湍流边界层模拟模型”。载于：《计算物理学杂志》144.2（1998），第550–602页。[LSB02] Linzhong Li、SJ Sherwin 和 Peter W Bearman. “用于旋转和平移物体流固耦合的移动参考系算法”。载于：《流体数值方法国际期刊》38.2（2002），第187–206页。[PW04] DI Pullin 和 Z Jane Wang. “加速平板上的非定常力及其在昆虫悬停飞行中的应用”。载于：《流体力学杂志》509（2004），第1–21页。[Hu05] Fang Q Hu. “非均匀平均流中线性化欧拉方程的完全匹配层吸收边界条件”。载于：《计算物理学杂志》208.2（2005），第469–492页。[SM05] SP Singh 和 S Mittal. “低雷诺数下的涡激振荡：滞后与涡脱落模式”。载于：《流体与结构杂志》20.8（2005），第1085–1104页。[HNP06] Darryl D Holm、Monika Nitsche 和 Vakhtang Putkaradze. “欧拉-α与涡团对涡丝和涡片运动的正则化”。载于：《流体力学杂志》555（2006），第149–176页。[Kno+07] Kevin Knowles 等. “扑翼微型飞行器空气动力学的综合计算与实验研究”。载于：2007年。[HLL08] Fang Q Hu、XD Li 和 DK2406542 Lin. “基于完全匹配层技术的非线性欧拉方程和纳维–斯托克斯方程吸收边界条件”。载于：《计算物理学杂志》227.9（2008），第4398–4424页。[Mor08] David Morin.《经典力学导论：附问题与解答》。剑桥大学出版社，2008年。[EWO09] Jeff Eldredge、Chengjie Wang 和 Michael Ol. “抬头—低头翼面机动的典型情形计算研究”。载于：第39届美国航空航天学会流体动力学会议。2009年，第3687页。[OEW09] Michael V Ol、Jeff D Eldredge 和 Chengjie Wang. “平板的大幅度俯仰：对栖停和扑翼的抽象”。载于：《微型飞行器国际期刊》1.3（2009），第203–216页。[YSK09] Serhiy Yarusevych、Pierre E Sullivan 和 John G Kawall. “低雷诺数流动中翼型的涡脱落”。载于：《流体力学杂志》632（2009），第245–271页。

[Alb10a] Silas Alben. “无黏流体中下落的柔性薄片”。载于：《流体物理学》22.6（2010年6月），第061901页。 ISSN：1070-6631。 DOI：10.1063/1.3432128。电子印本：https://pubs.aip.org/aip/ pof / article - pdf / doi / 10 . 1063 / 1 . 3432128 / 16734676 / 061901 \ _1_online . pdf。 URL：https://doi.org/10.1063/1.3432128。[Alb10b] Silas Alben. “分离点附近涡片正则化”。载于：《计算物理学杂志》229.13（2010），第5280–5298页。 ISSN：0021-9991。 DOI：https : / / doi . org / 10 . 1016 / j . jcp . 2010 . 03 . 044。 URL：https : / / www . sciencedirect . com / science / article / pii / S0021999110001634。[EW10] Jeff Eldredge 和 Chengjie Wang. “快速俯仰平板的高保真模拟与低阶建模”。载于：第40届流体动力学会议及展览。2010年，第4281页。[YB11] Serhiy Yarusevych 和 Michael SH Boutilier. “低雷诺数下翼型的涡脱落”。载于：《美国航空航天学会杂志》49.10（2011），第2221–2227页。[Alb12] Silas Alben. “柔性细丝与点涡之间的吸引作用”。载于：《流体力学杂志》697（2012），第481–503页。 DOI：10.1017/jfm.2012.78。[Alb+12] Silas Alben 等. “自由游动柔性翼的动力学”。载于：《流体物理学》24.5（2012）。[Pan+12] Yulin Pan 等. “利用边界元法预测具有前缘分离的扑动翼性能”。载于：《流体力学杂志》698（2012），第446–467页。 DOI：10.1017/jfm.2012.119。[Ram+12] Kiran Kumar Ramesh 等. “利用前缘吸力参数对前缘涡进行理论建模”。载于：第30届美国航空航天学会应用空气动力学会议。2012年，第3027页。[She+12] J. X. Sheng 等. “扑动平板涡尾流的模拟”。载于：《流体与表面中的自然运动》。Stephen Childress 等编。纽约：Springer New York，2012年，第255–262页。 ISBN：978-1-4614-3997-4。[AMP13] Silas Alben、LA Miller 和 Jifeng Peng. “喷流推进游动的高效运动学”。载于：《流体力学杂志》733（2013），第100–133页。[Fal13] Fabrice Falissard. “用于天气预报、计算流体力学和气动声学的真正多维显式与隐式广义 Shapiro 滤波器”。载于：《计算物理学杂志》253（2013），第344–367页。[HZL13] Ru-Nan Hua、Luoding Zhu 和 Xi-Yun Lu. “扑动柔性平板的运动”。载于：《流体物理学》25.12（2013）。[XM13] X Xia 和 K Mohseni. “二维俯仰平板的升力评估”。载于：《流体物理学》25.9（2013）。[Nob+14] Rosario Nobile 等. “垂直轴增功风力涡轮机的非定常流动模拟：一项二维研究”。载于：《风能工程与工业空气动力学杂志》125（2014），第168–179页。[Ram+14] Kiran Ramesh 等. “采用新型脱落判据的离散涡方法：间歇性前缘涡脱落情况下非定常翼型流动的研究”。载于：《流体力学杂志》751（2014），第500–538页。[Riv+14] David E Rival 等. “前缘几何形状变化的沉降剖面上涡脱落的特征长度尺度”。载于：《流体实验》55.1（2014），第1660页。[XN14] Ling Xu 和 Monika Nitsche. “瞬时启动的黏性流绕有限平板流动的标度行为”。载于：《流体力学杂志》756（2014），第689–715页。[Dar+16] Darwin Darakananda 等. “非定常分离流的涡片/点涡动力学模型”。载于：第54届美国航空航天学会航空航天科学会议。2016年，第2072页。[HNK16a] Yangyang Huang、Monika Nitsche 和 Eva Kanso. “振荡流中的悬停”。载于：《流体力学杂志》804（2016），第531–549页。[HNK16b] Yangyang Huang、Monika Nitsche 和 Eva Kanso. “振荡流中的悬停”。载于：《流体力学杂志》804（2016），第531–549页。 DOI：10.1017/jfm.2016.535。[LP16] HF Lam 和 HY Peng. “通过二维和三维计算流体力学模拟研究垂直轴风力涡轮机的尾流特性”。载于：《可再生能源》90（2016），第386–398页。[PB16] Chandra Shekhar Pant 和 Amitabh Bhattacharya. “用于稳健大涡模拟热羽流的黏性海绵层公式”。载于：《计算机与流体》134（2016），第177–189页。[Thy+16] Kristen M Thyng 等. “海洋学的真实色彩：有效且准确进行色图选择的指南”。载于：《海洋学》29.3（2016），第9–13页。[MEA17] Joseph Moubogha Moubogha、Uwe Ehrenstein 和 Jacques Andr´e Astolfi. “俯仰平板上的力：实验与数值研究”。载于：《应用海洋研究》69（2017），第27–37页。[NZM18] Saeed Nazari、Mahdi Zamani 和 Sajad A Moshizi. “串列布置的两台直叶片垂直轴风力涡轮机的二维与三维计算流体力学技术比较”。载于：《风力工程》42.6（2018），第647–664页。[Yu+18] Yuelong Yu 等. “大幅度俯仰斜坡运动下平板非定常气动力和力矩的实验研究与建模”。载于：《流体力学杂志》846（2018），第82–120页。

[Eld19] Jeff Eldredge。《非定常无黏流的数学建模》。2019年8月。 ISBN：978-3-030- 18319-6。 DOI：10.1007/978-3-030-18319-6。[Fau+19] Thierry M. Faure 等。“一种改进的离散涡方法算法及其脱落判据，用于预测大攻角下的气动力系数”。载于：《应用数学建模》69（2019年），第32–46页。 ISSN：0307-904X。 DOI：https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.12.013。URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X18306085。[FPS19] Joel H Ferziger、Milovan Peri´c 和 Robert L Street。《流体动力学计算方法》。Springer，2019年。[NKE19] Artem N Nuriev、Airat M Kamalutdinov 和 Andrey G Egorov。“薄板振荡引起的流体流动的数值研究及相关流体动力学力的评估”。载于：《流体力学杂志》874（2019年），第1057–1095页。[LHL20] Kui Liu、Haibo Huang 和 Xi-Yun Lu。“自推进扑翼板间歇运动的流体动力学优势”。载于：《物理评论E》102.5（2020年），053106页。[Yua+20] Zheng Yuan 等。“一种用于垂直轴风力涡轮机尾流模拟的快速二维数值方法”。载于：《能源》14.1（2020年），49页。[Alb21a] Silas Alben。“扑动平板二维晶格的集体运动。第1部分：数值方法、单板情形与晶格输入功率”。载于：《流体力学杂志》915（2021年），A20。[Alb21b] Silas Alben。“扑动平板二维晶格的集体运动。第2部分：晶格流动与推进效率”。载于：《流体力学杂志》915（2021年），A21。[Nit21] Monika Nitsche。“近奇异积分的评估及其在涡片流动中的应用”。载于：《理论与计算流体动力学》35.5（2021年），第581–608页。[NR22] Ilia Nikiforov 和 Ziaur Rahman。“有限涡量稳态理想二维流动的数值方法及其在垂直轴风力涡轮机空气动力学中的应用”。载于：Wind Energy 25.8（2022年），第1464–1484页。[Nar+23] Shreyas Narsipur 等。“栖停与悬停机动的离散涡建模”。载于：《理论与计算流体动力学》37.4（2023年），第445–464页。[Sad+24] John E Sader 等。“黏性流体中具有尖锐直边的物体产生的起始涡”。载于：《流体力学杂志》992（2024年），A15。[Soh24] Sung-Ik Sohn。“自由下落板非定常涡流的模拟”。载于：《理论与计算流体动力学》（2024年2月），第1–21页。 DOI：10.1007/s00162-024-00686-1。[LA25] Yu Jun Loo 和 Silas Alben。“具有前缘涡脱落的下落平板”。载于：《物理评论：流体》10.10（2025年），104701页。[NOS25] Monika Nitsche、Anand U Oza 和 Michael Siegel。“流体动力学相互作用的扑翼板串列编队的稳定性”。载于：《流体力学杂志》1013（2025年），A14。[WA25] Xiaojia Wang 和 Silas Alben。“涡旋如何增强振荡板的传热”。载于：《流体力学杂志》1013（2025年），A47。 DOI：10.1017/jfm.2025.10201。