余辛同胚群的同构蕴含流形微分同胚

E. Djoukeng*和 S. Tchuiaga†

2026年2月9日

arXiv:2602.06309v1 [math.SG] 6 Feb 2026

摘要

我们证明，若两个闭、连通的正则余辛流形的余辛同胚群（作为拓扑群）同构，则这两个流形微分同胚。证明通过将 Reeb 流刻画为该群的中心，并将同构降至辛基流形上来进行。我们证明，该同构保留映射环面单值化的共轭类，从而确保丛结构等价，进而全空间也等价。

关键词：余辛几何，余辛映射，李群，映射环面。**2000年数学主题分类：**53D10, 20E32, 37J35, 20F05。

1 引言

对变换群的研究长期以来一直为理解流形的几何与拓扑提供了深刻视角。一些著名结果，例如 Filipkiewicz 关于微分同胚群的定理 [7], ，揭示了微分同胚群的代数性质蕴含着关于底层流形的深刻信息。特别是，分析流形的对称群往往使我们能够仅凭动力学或代数信息重建其几何结构。

在这一框架下，余辛流形作为辛流形的奇数维对应物占据核心地位；它自然出现在接触与哈密顿动力学以及时变力学的几何模型中 [1, 6]。其余辛同胚群将 Reeb 动力学与横向辛几何交织在一起，从而在单一代数对象中同时捕捉叶状结构和辛底空间。在紧的正则情形下，Reeb 流是周期的；此时，流形可描述为映射环面，余辛同胚群则分解为由 Reeb流生成的圆群作用与纤维的辛同胚群中单值化的中心化子之积。这种明确的结构凸显了代数分解如何同时反映动力学与几何。

变换群刚性已在若干情境中得到确立。Filipkiewicz 证明，微分同胚群之间的同构意味着底层流形微分同胚 [7]。Banyaga 证明，辛同胚群可以唯一确定辛流形（在辛同胚意义下） [3]。最近，Bikorimana 和 Tchuiaga 证明，闭余辛流形上的弱哈密顿微分同胚群是单群，且 Reeb流始终是周期的 [5]。

本研究确立了这一方向上的一种新刚性现象：如果两个闭、连通的正则余辛流形的余辛同胚群（作为

*djoukeng.etienne@ubuea.cm，数学系，布埃亚大学，喀麦隆西南区

†tchuiaga.kameni@ubuea.cm，数学系，布埃亚大学，喀麦隆西南区

拓扑群）同构，那么这两个流形本身便微分同胚。这个问题中的一个关键细节是，正则余辛流形是以辛底空间为底的圆周丛。群同构意味着底空间微分同胚，但仅凭这一点并不能推出全空间也微分同胚（因为不同的纤维丛可能具有相同的底空间）。我们通过利用映射环面结构，证明群同构在共轭意义下对应了这些纤维丛的单值映射。这确定了纤维丛的拓扑"扭转"，从而保证全空间微分同胚。

2 余辛结构

维数为 $2n+1$ 的余辛流形 $(M,\ \eta,\ \omega)$ 由一对闭形式 $(\eta,\ \omega)$ 定义，其中 η 是一个 1-形式，ω 是一个 2- 形式，且 $\eta\wedge\omega^n$ 是体积形式。该结构诱导出切丛 $TM=\langle\xi\rangle\oplus\ker(\eta)$ 的典范分裂，其中 Reeb向量场 ξ 由 $\eta(\xi)=1$ 和 $\iota_\xi\omega=0$ 定义。分布 $\ker(\eta)$ 关于限制形式 $\omega|_{\ker(\eta)}$ 是辛的。关于更深入的论述，请参阅 [9], [5]。

例 1 (标准积流形)。 最简单且最基本的例子是积流形 $M=S^1\times P$，其中 (P,σ) 是任意一个带有辛形式 σ 的 $2n$ 维辛流形。

例 2 （辛映射环面）。 一类更为精细的例子由辛映射环面给出。设 (P,σ) 为辛流形，并设 $\phi: P\to P$ 为辛同胚（$\phi^*\sigma=\sigma$）。映射环面是流形 $M_\phi=(P\times[0,1])/\sim$，其中 $(p,1)\sim(\phi(p),0)$. M_ϕ 是底空间为 S^1、纤维为 P 的纤维丛。设 t 为 S^1 底空间上的坐标。我们可以定义一个整体 *1*-形式 $\eta=dt$ 和一个 *2*-形式 ω，它在每条纤维上限制为 σ。该对(η,ω) 在 M_ϕ 上定义了一个余辛结构。

定义 1. *[5]* 微分同胚 $\phi\colon M\to M$ 是余辛同胚，如果

$$\phi^*\eta=\eta,\qquad \phi^*\omega=\omega.$$

所有此类映射构成余辛同胚群 $\mathrm{Cosymp}(M,\eta,\omega)$，记作$\mathrm{Cosymp}(M)$。

假设（正则性）：我们假设Reeb叶状结构是正则的。因此，轨道空间 $B=M/\sim$（其中 $x\sim y$ 若它们位于 ξ的同一条积分曲线上）是一个光滑流形，且投影 $\pi:\ M\to B$ 是一个主丛。由于 M 是紧的且正则的，纤维是圆周 $\mathbb{S}^1$，且该流是周期的。形式 ω 下降为 B上的辛形式 $\bar{\omega}$。由于 M 没有边界，B 是一个无边界的紧的辛流形。

2.1 主定理陈述

定理 1. 设(M_1,η_1,ω_1) 与(M_2,η_2,ω_2) 为两个无边界的紧的、连通的正则余辛流形。假设存在拓扑群同构:

$$\Phi:\mathrm{Cosymp}(M_1)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Cosymp}(M_2),$$

其中这些群配备了 C^∞ 紧开拓扑。于是 M_1 与 M_2 在 $H^2(B,\mathbb{Z})$ 中的圆丛类重合，其中 B 表示共同的辛底空间。此外，M_1 与 M_2 作为余辛流形是微分同胚的。

主定理的证明

证明分三个主要阶段进行：识别Reeb流，将同构约化到底流形，最后匹配丛结构（映射环面），从而得出全空间的微分同胚。

步骤 1：将 Reeb流刻画为中心

命题 1. 设 (M, η, ω) 是一个连通的正则余辛流形。余辛同胚群的单位元分支的中心，记作 $Z(\mathrm{Cosymp}_0(M))$，恰好由 ***Reeb***向量场的流（相差一个重参数化）构成。

证明. 设 $\mathfrak{g}$ 为 Cosymp(M) 的李代数。任意 $Z \in \mathfrak{g}$ 都可分解为 $Z = c_Z\xi + V$，其中$V \in$ 属于 $\ker \eta$。若 Z 是中心元素，则它必须与底空间上所有哈密顿向量场的提升相交换。由于底空间上的哈密顿向量场李代数是中心平凡的（当底空间紧致时），V 必须为零。因此，中心元素是 ξ 的倍数。取指数映射后，中心对应于 Reeb流。 □

由于 Φ 是一个同构，它将 Cosymp(M_1) 的中心映射到 Cosymp(M_2) 的中心。因此，Φ将 M_1 的 Reeb流映射为 M_2的 Reeb流。

步骤 2：底流形的微分同胚

由于 M_i 是紧的且正则的，它通过 $\pi_i : M_i \to B_i$ 纤维化到一个底流形 B_i 上。Cosymp(M_i) 的元素保持 Reeb 方向，因此下降为 B_i 上的辛微分同胚。我们有如下正合序列：

$$1 \longrightarrow \mathcal{R}_i \longrightarrow \mathrm{Cosymp}(M_i) \xrightarrow{\pi_*} \mathcal{G}(B_i) \longrightarrow 1,$$

其中 $\mathcal{R}_i$ 是 Reeb 流，而 $\mathcal{G}(B_i)$ 是可提升到 M_i 的 B_i 的辛同胚群。由于 Φ 将 $\mathcal{R}_1$ 映射到 $\mathcal{R}_2$，它在商群上诱导出一个同构：

$$\bar{\Phi} : \mathcal{G}(B_1) \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}(B_2).$$

群 $\mathcal{G}(B_i)$ 包含哈密顿群 Ham(B_i)。根据 Banyaga定理 [3]，，这些群的同构意味着底流形之间微分同胚：

$$B_1 \cong B_2.$$

备注：底流形之间的微分同胚是 $M_1 \cong M_2$ 的必要条件，但并非充分条件，因为丛结构（单值化）可能不同。

步骤 3：通过映射环面重构总空间

由于 Reeb流是周期的，每个 M_i 都与一个映射环面微分同胚：

$$M_i \cong \frac{F_i \times [0, T_i]}{(x, 0) \sim (\phi_i(x), T_i)},$$

其中 $F_i \cong B_i$ 是辛纤维，而 ϕ_i 是表示纤维丛“扭转”的辛同胚（单值化）。

群 Cosymp(M_i) 的结构分解如下：

$$\mathrm{Cosymp}(M_i) \cong \mathbb{S}^1 \times Z(\phi_i),$$

其中， $\mathbb{S}^1$ 是 Reeb作用， $Z(\phi_i) = \{\psi \in \mathrm{Symp}(F_i) \mid \psi \circ \phi_i = \phi_i \circ \psi\}$ 是单值化的中心化子。

同构 Φ 诱导出这些中心化子的同构：

$$\Psi : Z(\phi_1) \xrightarrow{\cong} Z(\phi_2).$$

引理1. 同构 Ψ 意味着 ϕ_1 和 ϕ_2 在微分同胚群中共轭。

证明. 单值化 ϕ_i 在代数上具有特殊性：它生成中心中的离散子群，而该子群决定映射环面的拓扑（它对应于 Reeb流的返回映射）。由于 Φ 保持 Reeb流结构，它会将与 ϕ_1 对应的代数元素映射到 ϕ_2 （可能存在时间重标度，但这不会影响微分同胚类型）。利用关于辛群同构的广义Banyaga定理，存在一个微分同胚 h: $F_1 \to F_2$ ，使得 $Z(\phi_1)$ 的作用与 $Z(\phi_2)$ 的作用相交织。更准确地说，由于 $\phi_1 \in Z(\phi_1)$，其像必须与 ϕ_2 相容。在映射环面的映射类群这一背景下，这意味着 $h \circ \phi_1 \circ h^{-1} = \phi_2$。

□

最后，我们构造全空间之间的微分同胚。由于存在 $h : F_1 \to F_2$ 使得 $h \circ \phi_1 = \phi_2 \circ h$，映射：

$$\tilde{h} : \frac{F_1 \times [0,1]}{\sim_{\phi_1}} \longrightarrow \frac{F_2 \times [0,1]}{\sim_{\phi_2}},$$

$\tilde{}$由 $h([x,t]) = [h(x)\ t]$ 定义，是良定义的微分同胚。因此，$M_1 \cong M_2$。

步骤 4. 上同调类的相等性。 单值化的共轭意味着这些关联丛作为主 S^1-纤维丛是等价的。因此，它们的欧拉类相同：$c_1 = c_2$ 属于 $H^2(B,\ \mathbb{Z})$。

3 通过诱导的微分同胚进行结构互换

设 $(M_1,\ \eta_1,\ \omega_1)$ 和 $(M_2,\ \eta_2,\ \omega_2)$ 是正则余辛流形，且其拓扑群之间存在同构

$$\Phi : \mathrm{Cosymp}(M_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cosymp}(M_2).$$

F根据前面的定理，我们得到一个微分同胚 f： $M_1 \to M_2$ ，其构造为

$$f(gH_1) = \Phi(g)H_2,$$

其中 H_i 是所选点 $x_i \in M_i$的稳定子。此 f 满足等变性性质

$$f(g \cdot x) = \Phi(g) \cdot f(x) \qquad \forall g \in \mathrm{Cosymp}(M_1),\ x \in M_1.$$

现在我们考察 f 如何关联这两个余辛结构。

3.1 拉回形式的不变性

对于任意 $g \in$Cosymp(M_1),

$$g^*(f^*\eta_2) = f^*(\Phi(g)^*\eta_2) = f^*\eta_2,$$

类似地， $g^*(f^*\omega_2) = f^*\omega_2$。因此， $f^*\eta_2$和 $f^*\omega_2$在整个群 Cosymp(M_1) 的作用下保持不变。

3.2 Reeb场的性质

由于 Φ 将 Cosymp(M_1) 的中心映射到 Cosymp(M_2) 的中心，因此它将 M_1 的 Reeb流 $\{\psi_t^1\}$ 映射为 M_2的 Reeb流 $\{\psi_t^2\}$。因此， $f_*\xi_1 = \xi_2$。所以

$$(f^*\eta_2)(\xi_1) = \eta_2(f_*\xi_1) = \eta_2(\xi_2) = 1 = \eta_1(\xi_1),$$

并且对于 Y 上的任意向量场 M_1

$$(f^*\omega_2)(Y, \xi_1) = \omega_2(f_*Y, \xi_2) = 0 = \omega_1(Y, \xi_1).$$

因此， $f^*\eta_2$在 ξ_1上与 η_1一致，并且当一个自变量为 ξ_1时， $f^*\omega_2$和 ω_1均为零。

3.3 横向辛结构的比较

设 $\pi_i\colon\ M_i \to B_i$ 为到 Reeb 轨道空间的投影。微分同胚 f 可下降¯ ¯为微分同胚 $f\colon\ B_1 \to B_2$，使得 $\pi_2 \circ f = f \circ \pi_1$。在底流形上，我们有满足$\pi_i^*\bar{\omega}_i = \omega_i$的辛形式 $\bar{\omega}_i$。群同构 Φ 诱导出一个同构

$$\mathrm{Symp}(B_1, \bar{\omega}_1) \cong \mathrm{Symp}(B_2, \bar{\omega}_2).$$

辛几何中的一个标准结果（归功于 Banyaga [2]）告诉我们，具有同构辛同胚群的两个辛流形除相差一个常数¯缩放因子外是辛同胚的。因此，存在常数 $c > 0$使得 $f^*\bar{\omega}_2 = c\,\bar{\omega}_1$。提升到全空间后得到 $f^*\omega_2 = c\,\omega_1 + \eta_1 \wedge \alpha$，其中 α是 M_1上的一个 1-形式。由于当一个自变量为 ξ_1时，$f^*\omega_2$和 ω_1均为零，我们必有$\iota_{\xi_1}(\eta_1 \wedge \alpha) = 0$。将 $\alpha = h\eta_1 + \alpha_0$ 写成 α_0 为基本的形式（即 $\iota_{\xi_1}\alpha_0 = 0$），可得$\iota_{\xi_1}(\eta_1 \wedge \alpha) = \alpha - h\eta_1 = \alpha_0$。但左侧也等于$\iota_{\xi_1}(f^*\omega_2 - c\,\omega_1) = 0$；因此 $\alpha_0 = 0$且 $\alpha = h\eta_1$。于是， $\eta_1 \wedge \alpha = h\,\eta_1 \wedge \eta_1 = 0$。因此，

$$f^*\omega_2 = c\,\omega_1. \tag{1}$$

3.4 Reeb 1-形式的比较

η_1 和 $f^*\eta_2$ 均为闭形式，满足 $\eta(\xi_1) = 1$，且在 Cosymp(M_1)作用下不变。此外，相对于 ω_1，它们的核都是辛子空间（对于 $f^*\eta_2$，这可由 (1) 以及 ker $f^*\eta_2$是 ker η_2在 f下的原像这一事实推出；而 ker η_2相对于 ω_2是辛的）。令 $\theta = f^*\eta_2 - \eta_1$。那么 θ 是闭形式， $\theta(\xi_1) = 0$ （因此 θ 是基本的），并且 θ 在 Cosymp(M_1)作用下不变。因此，θ 下降为 B_1上的闭的、在 Symp(B_1, $\bar{\omega}_1$)作用下不变的 1-形式。如果 Symp(B_1, $\bar{\omega}_1$)在B_1 上的作用是传递的，那么每个不变 1-形式都必为零；因此 $\theta = 0$ 和 $f^*\eta_2 = \eta_1$。在一般（非传递）情形下，我们只能得出 θ 在基本上同调中是恰当的，即存在一个基本函数 φ 使得 $\theta = d\varphi$。因此

$$f^*\eta_2 = \eta_1 + d\varphi, \qquad \varphi \text{ basic (constant along } \xi_1). \tag{2}$$

定理 2. 设(M_1, η_1, ω_1) 和(M_2, η_2, ω_2) 是闭正则余辛流形，且其余辛同胚群同构。那么，存在一个微分同胚 $f\colon M_1 \to M_2$以及常数 $c > 0, k \in \mathbb{R}$，使得

$$f^*\omega_2 = c\,\omega_1, \qquad f^*\eta_2 = \eta_1 + d\varphi,$$

其中， φ 是一个在Cosymp(M_1)作用下不变的基本函数。此外，若Symp($B_1, \bar{\omega}_1$) 在 B_1 上的诱导作用是传递的，则 φ 为常数，从而 $f^*\eta_2 = \eta_1$。

推论 1. 如果余辛同胚群同构，且底流形的辛同胚群作用是传递的，那么这两个余辛结构在横向辛形式经过常数缩放后等价。特别地，将 ω_2 按 $1/c$ 缩放后，微分同胚 f 就成为严格余辛同胚。

命题 2 (Reeb 周期性的刚性)。 设 M_1 和 M_2 是余辛同胚群同构的正则余辛流形。如果 M_1 的 ***Reeb*流是周期的，那么** M_2 的 ***Reeb*流也是周期的。**

证明。如命题 1 所述，群 Z(Cosymp$_0(M_i)$) 的单位元分支的中心是由 Reeb流 $\{\psi_t^i\}$ 生成的群。如果 M_1 上的 Reeb流是周期性的，周期为 T_1，那么从代数角度看，中心同构于圆群：

$$Z_1 \cong \mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \cong \mathbb{S}^1.$$

从拓扑角度看，这是一个紧的群。它还包含扭元（有限阶元素）。如果 M_2 上的 Reeb流不是周期性的（即非周期的），那么映射 $t \mapsto \psi_t^2$ 将是从 $\mathbb{R}$ 到该群的单射。在这种情况下，中心将同构于实数加法群： $Z_2 \cong \mathbb{R}$. 该群不是紧的，且没有扭元（单位元除外）。拓扑群同构 Φ 在中心上的限制是一个同构。由于同构必须保留紧致性和扭性，因此它不能将 $\mathbb{S}^1$ 映射到 $\mathbb{R}$。因此， M_2 上的 Reeb 流也必定是周期性的。

□

定理 3 （推广到余凯勒流形）。 设（$M_1, g_1, \eta_1, \omega_1$）和（$M_2, g_2, \eta_2, \omega_2$）是紧余凯勒流形。假设它们的余辛同胚群作为拓扑群彼此同构：

$$\Phi : \mathrm{Cosymp}(M_1) \cong \mathrm{Cosymp}(M_2).$$

那么， M_1 和 M_2 作为余凯勒流形是微分同胚的（即存在一个保持所有余凯勒结构的微分同胚）。

证明。 余凯勒流形是配备了相容黎曼度量 g和可积复结构 J的余辛流形，并且满足 $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot) + \eta \otimes \eta$。余辛同胚群 Cosymp($M$)由保持 η 和 ω的微分同胚组成；在余凯勒流形上，这些微分同胚也会自动保持 g 和 J 。根据定理 1，存在一个微分同胚 F: $M_1 \to M_2$，使得 $F^*\eta_2 = \eta_1$和 $F^*\omega_2 = \omega_1$。还需证明F 也保持度量和复结构。

由于 F保持 Reeb向量场不变（如前一个证明中所述），我们有 $F_*R_1 = R_2$。度量 g_i 由以下公式唯一确定

$$g_i(X, Y) = \omega_i(X, J_iY) + \eta_i(X)\eta_i(Y), \qquad i = 1, 2.$$

复结构 J_i 由以下条件唯一确定： $J_iR_i = 0$ ，并且在接触分布 $\ker \eta_i$ 上，它与通过度量由 ω_i 诱导的近复结构重合。由于 F 将 η_2 和 ω_2 拉回为 η_1 和 ω_1，因此可得 $F^*g_2 = g_1$ 和 $F_* \circ J_1 = J_2 \circ F_*$。 于是， F是一个等距变换和双全纯同构。最后，横向凯勒结构得以保持，因为它由 ω 和 J决定。因此， F 是余Kähler流形的等价。

□

凯勒几何中的刚性结果

在本节中，我们探讨凯勒流形的整体对称群在多大程度上决定其底层复结构和黎曼结构。

猜想 1 (具有连续对称性的流形的凯勒刚性)。 设$(M_1, g_1, J_1, \omega_1)$和$(M_2, g_2, J_2, \omega_2)$ 是紧凯勒流形。假设它们的凯勒等距变换群（全纯等距变换群）作为李群同构，且同构映射为

$$\Phi : \mathrm{Isom}_{\mathrm{Kah}}(M_1) \overset{Lie}{\cong} \mathrm{Isom}_{\mathrm{Kah}}(M_2),$$

并假设两个群均为正维数（即非离散）。那么 M_1 和 M_2是双全纯的。此外，如果同构 Φ由等距变换群之间的代数对应所诱导，那么 M_1 和 M_2 的*Kähler*度量在相差一个常数缩放因子的意义下是等距的。

完整猜想仍未解决；若没有额外结构（例如关于曲率、稳定性或特殊度量存在性的假设），该猜想并不成立。

注 1（连续对称性假设的必要性）。 亏格为 $g \geq 2$ 的黎曼曲面示例表明，对于离散等距群，该猜想并不成立。两个黎曼曲面可能具有同构的（甚至是平凡的）等距群，却对应模空间 $\mathcal{M}_g$ 中的不同点。这说明，有限群的拓扑群结构过于薄弱，无法确定复结构。

注 2（较弱版本：仅要求双全纯同构）。 即使在正维假设下，等距群同构是否必然推出等距变换（即使允许缩放）仍不明确。一个更为合理的猜想可能是： M_1 与 M_2 双全纯同构。额外的度量结构可能无法由等距群唯一确定。

注 3（与前述定理的关系）。 请注意，这与定理 *1* 和定理 *2* 形成对比；在这两个定理中，同构是在余辛同胚的完整（无限维）群之间建立的。对于凯勒流形，我们考虑的仅是有限维等距群。无限维自同构群（双全纯同构）会更为类似，但除非将其限制为保持某个固定度量的变换，否则这些群在相同意义下并不是拓扑群。

讨论

前几节的结果确立了正则余辛流形具有很强的刚性。定理 1 表明，余辛同胚群 Cosymp(M) 的代数结构包含了足够的信息，可以恢复底层主丛的拓扑分类。通过辨认单值映射的中心化子，我们可以恢复纤维化 $M \to B$ 的示性类。

将这些结果推广到余Kähler情形（定理 2），表明在紧余Kähler流形这一范畴中，辛数据和切触数据（由余辛结构封装）至关重要。虽然黎曼度量和复结构提供了刚性的几何数据，但它们与底层余辛形式的相容性，使得同构 Φ 能够在等价意义下确定该流形。

未来一个自然的研究方向是探究这些刚性结果是否适用于Kähler情形或非正则余辛流形；在这类流形上，Reeb流可能稠密或具有不规则轨道，从而无法得到光滑的Hausdorff商底空间。

对于Kähler流形，情况更为微妙。如前所述，具有连续对称性的Kähler流形的（有限维）等距群的同构或许蕴含双全纯同构，但这仍是一个猜想。特别地，对于亏格至少为2的黎曼曲面，等距群是有限的，并不能决定复结构。这凸显了连续对称性在此类刚性陈述中的必要性。

致谢

我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见和建议。

不适用

利益冲突： 作者声明，他们不存在可能影响本文所报告工作的财务利益冲突或个人关系。

数据可用性： 本研究期间生成或分析的所有数据均已包含在这篇已发表的文章中。

经费： 作者声明，本研究未获得任何经费资助。

参考文献

[1] Albert, C. (1989), 关于某一类接触流形。*Manuscripta Mathematica*，**63**273–283。[2] A. Banyaga, A. (1997).经典微分同胚群的结构，数学及其应用，第400卷，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特。[3] Banyaga, A. (1978), 关于保持辛形式的微分同胚群的结构。*Commentarii Mathematici Helvetici*，**53** 174–227。[4] D. E. Blair，接触流形与辛流形的黎曼几何，Birkhäuser Boston，2010年。[5]Bikorimana, P., and Tchuiaga, S. (2026). 余辛流形上弱哈密顿微分同胚群的单性。 Results Math. 81:5. https://doi.org/10.1007/s00025-025-02564-6。[6] de León, M., Marrero, J.C. (1991), 余辛流形与哈密顿系统。第十届西班牙-葡萄牙数学会议论文集。[7] Filipkiewicz, R. P. (1982).微分同胚群之间的同构，遍历理论与动力系统，**2**(2), 159–171。[8] Li, H. (2008).余辛流形/余凯勒流形的拓扑， *Asian Journal of Mathematics*, **12**(4), 527–544。[9] Libermann, P. (1991). 余辛结构与动力系统，数学物理学杂志，**32**(11), 2929–2934。[10] Ono, K. (1985), 关于辛微分同胚群的结构。*Topology*，**24**195–202。