arXiv:2602.06315v1 [math.NT] 6 Feb 2026

通过 θ 提升构造GL_n 上的惠特克函数

SHIH-YU CHEN 和 YAO CHENG

Abstract. 文献中，建立阿基米德局部域上惠特克函数显式公式或传播公式的主要方法有两种：一种基于 Jacquet积分，另一种通过分析偏微分方程组。本文通过显式的 theta对应引入第三种方法。作为示例，我们推导了GL$_n$(ℂ)上惠特克函数显式公式的新情形，并计算相关的 Asai 局部 ζ 积分。

1. Introduction

惠特克函数的显式公式在自守形式和自守 L-函数的研究中发挥着关键作用。特别是，这些公式为研究 L-函数特殊值的代数性提供了重要工具，例如德利涅猜想关于临界 L-值的猜想或其自守类比，也有助于构造 p-adic$L$-函数。在这些背景下，足够显式的公式使我们能够计算在这些问题的表述中自然出现的局部 ζ 积分。这在阿基米德情形中尤为重要，因为惠特克函数的解析复杂性使这类计算格外微妙且困难。

从传播现象的角度来看，文献中得到的许多惠特克函数显式公式，都可以纳入一个统一框架来理解。本文通过 theta 对应理论，研究局部域上一般线性群的惠特克函数。更确切地说，对于特征零局部域 F 上的约化对偶对 (GL$_n$，GL$_{n+1}$)，我们证明，对 GL$_n$(F) 的一般表示π 进行显式 θ 提升，可以用一个传播公式来描述，该公式将$\theta(\pi)$ 的惠特克函数与 π 的惠特克函数联系起来。从这一角度来看，文献中的若干显式公式可以解释为此类传播公式的实例。其中包括：非阿基米德局部域上球惠特克函数的 Shintani公式[Shi76] ；阿基米德局部域上球惠特克函数的 Ishii 和 Stade 公式 [Sta95, IS07] ；针对 GL$_3$(ℝ) 的 Manabe–Ishii–Oda 公式 [MIO04] 和 Miyazaki 公式 [Miy09] （另见 [Bum84]）；针对 GL$_3$(ℂ) 的 Hirano–Oda 公式 [HO09] 和 Hirano–Ishii–Miyazaki 公式 [HIM12] ；以及针对 GL$_n$(ℝ) 主系列表示的 Ishii–Oda 公式 [IO14] 。

这类显式公式的一个重要应用是计算阿基米德局部 ζ 积分。上述公式的一个共同特点是，在阿基米德情形下，它们表示为 Γ-函数的乘积与比值的 Mellin 逆变换。文献中通常将这类积分表示称为“Mellin–Barnes 型”，它们尤其适用于显式计算涉及惠特克函数的局部 ζ 积分。例如，Stade 和 Ishii–Stade [Sta02, IS13]计算了 GL$_n$ ×GL$_m$ 的球表示的 Rankin–Selberg zeta 积分，其中$m = n$， $n-1$、以及 $n-2$。对于 GL$_n$(ℝ) 的主系列表示，Stade [Sta99]和 Ishii

日期：2026年2月9日。

[Ish18]计算了 Bump–Friedberg ζ 积分。Ishii [Ish19]计算了 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_4$ 和 GL_4 的球表示的 Pollack–Shah ζ 积分。Hirano–Ishii–Miyazaki[HIM22] 研究了 $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$, 上的 Rankin–Selberg zeta 积分，而 Ishii–Miyazaki[IM22] 则处理了 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$ 上的 Rankin–Selberg zeta 积分。最近，Hirano– Ishii–Miyazaki [HIM25]计算了 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ 上的 Bump–Friedberg ζ 积分。作为本文所获 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 新显式公式的一项应用，我们计算了相应的 Asai 局部 ζ 积分；这类积分在文献中受到的探讨较少。

研究惠特克函数的一种基础方法是基于 Jacquet积分。在 [Jac67],Jacquet 引入了定义在局部域上的 Chevalley 群上的惠特克函数及其积分表示，如今这些积分表示称为 Jacquet积分。此后，许多作者在准分裂约化群的框架下推广并进一步发展了他的结果和技术。Jacquet积分在惠特克泛函的存在性与全纯性方面发挥重要作用，也是局部 γ-因子 Langlands–Shahidi 方法的基础。关于这些发展的综述及更多参考文献，请参见 [Sha85, 引言] 和 [Sha10, §3]。在 [IM22], 中，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的极小 K-型惠特克函数通过 Jacquet积分归一化，并据此进行了显式计算。由此得到的公式对于证明全虚数域上 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$ 的临界 L-值的整性至关重要，正如 Hara– Miyazaki–Namikawa [HMN25] 所示。惠特克函数的相关传播现象也出现在另一种框架中：在 [Hum25], 中，Humphries 引入了 GL_n 在阿基米德局部域上的新形式 K-型这一概念；它们通常不同于 Vogan 的极小 K-型，并由此推导出联系惠特克新形式的传播公式，这些新形式同样通过 Jacquet积分归一化。

在阿基米德局部域上求得惠特克函数显式公式或传播公式的另一种经典方法，是分析这些函数所满足的偏微分方程组。对于一般线性群，这种方法产生了上文提到的结果 [MIO04, Miy09, HO09, HIM12, IO14] ，以及 Hirano–Ishii–Miyazaki 的近期工作 [HIM26]，针对 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$。对于其他准分裂约化群，通过此方法得到的显式公式包括 Koseki–Oda 的工作 [KO95] ，针对 $U(2,1)$；Miyazaki–Oda [MO93], 、Moriyama [Mor02], 和 Ishii [Ish05]关于 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ 的结果；以及 Ishii [Ish13] 关于 $\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{R})$ 的结果。

有别于基于 Jacquet积分或微分方程的方法，我们提出第三种途径：通过显式 theta对应来求得惠特克函数的显式公式。theta提升的存在性和非零性通常通过抽象论证确立；然而，对于一般表示，几乎等秩情形下的 theta提升可通过关联惠特克函数的传播公式具体实现。我们将这一方案应用于 II型约化对偶对，并预期类似结果也适用于 I型约化对偶对。例如，通过考察对偶对 $(\mathrm{GO}^{2,2}(\mathbb{R}), \mathrm{GSp}_4(\mathbb{R}))$ 和 $(U(1,1)\ U(2,1))$，我们重新得到上文提及的 $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{R})$ 和 $U(2,1)$ 的离散系列表示的惠特克函数显式公式；这两个对偶对分别由[CI 23]和 [Che25],研究。

1.1. 主要结果。 设 F 是一个特征零局部域。考虑约化对偶对 $(\mathrm{GL}_n(F), \mathrm{GL}_{n+1}(F))$。设 ω 为 $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 在 Schrödinger模型 $\mathscr{S} = \mathscr{S}(M_{n,\ n+1}(F))$ 上的 Weil 表示。设 π 和 Π 分别是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的不可约泛型表示。我们将相应惠特克函数的空间记为 $\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$和 $\mathscr{W}(\Pi,\ \psi_{n+1})$。以下是本文的第一个主要结果。

定理1.1（定理3.2）。假设 $\Pi = \pi \times 1$。那么存在一个非零交织映射

$$\mathscr{S} \otimes \mathscr{W}(\pi, \psi_n) \longrightarrow \mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1}), \quad \varphi \otimes W \longmapsto \mathcal{W}_{\varphi \otimes W}$$

由绝对收敛积分给出

$$\mathcal{W}_{\varphi\otimes W}(g) = \int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} \int_{N_{n+1}(F)} \omega(h, ug)\varphi(\varepsilon_n) W(h)\psi_{n+1}^{-1}(u)\, du\, dh.$$

这里 $\varepsilon_n = (I_n, 0_{n,\,1})$。

假设 F 是阿基米德的。令 K_n 和 K_{n+1} 分别表示 $\mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的标准极大紧子群。令 τ（分别为 Υ）表示 π（分别为 Π）的最小 K_n 型（分别为 K_{n+1} 型）。令 $\mathscr{H} \subset \mathscr{S}$ 表示 Howe 意义下的联合调和子空间。这是一个 $(K_n \times K_{n+1})$-不变子空间，并且具有无重数分解。特别地，$(K_n \times K_{n+1})$-型 $\tau^\vee \boxtimes \Upsilon$ 出现在 $\mathscr{H}$ 中。π 的最小 K_n 型惠特克函数记为 W_π，它是一个非零的 $\tau^\vee$ 值惠特克函数，属于一维空间

$$\left(\mathscr{W}(\pi, \psi_n) \otimes \tau^\vee\right)^{K_n}.$$

对 Π 也采用类似的记号和约定。本文的第二个主要结果是一个将 W_Π 与 W_π 联系起来的传播公式。

定理1.2 (定理 4.1)。假设 $\Pi = \pi \times 1$ 和 F 是阿基米德的。令

$$\varphi_{\tau,\Upsilon} \in \left(\mathscr{S} \otimes (\tau \boxtimes \Upsilon^\vee)\right)^{K_n \times K_{n+1}} \cap \mathscr{H}$$

为一个非零的联合调和函数。则 Π 的一个极小 K_{n+1}型惠特克函数由下式给出

$$\begin{aligned} W_\Pi(g) = |\det(g)|_F^{n/2} \int_{T_n^+} \int_{N_{n+1}(F)} & du\, dt \\ & \left\langle \varphi_{\tau,\Upsilon}(t^{-1}\varepsilon_n ug), W_\pi(t)\right\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u)\delta_{B_n(F)}^{-1}(t)|\det(t)|_F^{-(n+1)/2}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里，$\langle \cdot, \cdot \rangle_\tau$ 是 τ 与 $\tau^\vee$ 之间自然的 K_n 不变双线性配对。

注1.1。实际上，可以从任意一个 $\varphi \in \left(\mathscr{S} \otimes (\tau \boxtimes \Upsilon^\vee)\right)^{K_n \times K_{n+1}}$ 开始，它不一定是联合调和函数。若式（*1.1*）中的惠特克函数非零，则它是 Π的一个极小 K_{n+1}型惠特克函数。

本文结构如下。第 2 节介绍全文所用的记号。第 3 节回顾 II 型约化对偶对的 theta对应，并建立关于显式 θ提升的主要结果（定理3.2）。第 4 节证明阿基米德局部域上极小 K 型惠特克函数的传播公式（定理 4.1）。第 5.1 节和第 5.2 节将主要结果用于重新推导文献中的一些经典公式。第 5.3 节利用传播公式推导阿基米德Whittaker函数的新显式公式。最后，第 6 节利用这些新的显式公式计算 Asai 局部 ζ 积分。

2. Notation

2.1. 在本文中，始终令 F 表示一个特征零的局部域。因此，F 要么是 $\mathbb{C}$、$\mathbb{R}$，要么是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张。当 F 为非阿基米德时，记 F 的赋值环为 $\mathfrak{o}$，$\mathfrak{o}$ 的极大理想为 $\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}$ 的一个固定生成元为 ϖ，并记 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的基数为 q。

令 $|\cdot|_F$ 表示 F 上的标准绝对值。因此， $|x|_{\mathbb{C}} = x\bar{x}$， $|x|_{\mathbb{R}} =$ 取 $\{x, -x\}$ 的最大值；当 F 为非阿基米德时，$|\cdot|_F$ 满足 $|\varpi|_F = q^{-1}$。固定 F 上的一个非平凡加性特征 ψ。为方便起见，我们假设当 $F = \mathbb{C}$ 时， $\psi(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}(x+\bar{x})}$；当 $F = \mathbb{R}$ 时， $\psi(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$；并且当 F 为非阿基米德时， ψ_F 在 $\mathfrak{o}$ 上平凡，但在 $\mathfrak{p}^{-1}$ 上非平凡。

令 $M_{n,m}(F)$ 表示元素属于 F 的 $n\times m$ 矩阵空间。$M_{n,n}(F)$ 中的单位矩阵记为 I_n，而 $M_{n,m}(F)$ 中的零矩阵记为 $0_{n,m}$。我们用 $\mathscr{S}(M_{n,m}(F))$ 表示 $M_{n,m}(F)$ 上 Bruhat-Schwartz 函数构成的空间。

2.2. 令 $B_n = T_nN_n$ 表示 GL_n 的上三角波莱尔子群，其中 T_n 是对角环面， N_n 是其幺幂根。定义泛型特征 $\psi_n : N_n(F) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ 如下

$$u = (u_{ij}) \mapsto \psi(u_{12} + u_{23} + \cdots + u_{n-1,n}). \tag{2.1}$$

将 F^+ 记为 $F^\times$ 对其由绝对值等于 1 的元素构成的子群取商所得的商。当 F 是阿基米德时，我们将 F^+ 与 $\mathbb{R}_+$ 等同；当 F 是非阿基米德时，则将 F^+ 与 $\langle\varpi\rangle \simeq \mathbb{Z}$ 等同。令 T_n^+ 表示 $T_n(F)$ 中由对角矩阵构成的子群，其对角元素属于 F^+。

令 $K_n \subset \mathrm{GL}_n(F)$ 表示标准极大紧子群，即当 $F = \mathbb{C}$ 为 $K_n = \mathrm{U}_n(\mathbb{R})$ 时，当 $F = \mathbb{R}$ 为 $K_n = \mathrm{O}_n(\mathfrak{o})$ 时，以及当 F 为非阿基米德时为 $K_n = \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$。注意，我们有岩泽分解 $\mathrm{GL}_n(F) = N_n(F)\ T_n^+\ K_n$。

2.3. 本文中，$\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示在 F 为阿基米德时，指 Casselman-Wallach 意义下（[Cas89a]）中等增长的光滑容许 Fr´echet 表示；在 F 为非阿基米德时，指有限长度的光滑表示。我们常滥用记号，用同一符号表示一个表示及其作用空间。若 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示，则其对偶表示记为$\pi^\vee$。当 F 为阿基米德时， K-型的 π指 π的 K_n-型。

若 π_1，.....， π_r分别是 $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$ ..... $\mathrm{GL}_{n_r}(F)$ 的表示，且满足 $n_1+\cdots+n_r = n$，我们记

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$$

为关于 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的标准抛物子群（其由分块上三角矩阵组成）从 $\pi_1\widehat{\boxtimes}\cdots\widehat{\boxtimes}\pi_r$ 抛物诱导到 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的表示，其 Levi 子群同构于

$$\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F).$$

^此处及下文，当 F 为阿基米德时， $\boxtimes$ 表示完备射影张量积；当 F 为非阿基米德时，表示通常的（外部）张量积。

2.4. 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个表示。 π 的 Whittaker 泛函（相对于 ψ_n）是满足以下条件的连续泛函 $\lambda_{\psi_n} : \pi \to \mathbb{C}$

$$\lambda_{\psi_n}(\pi(u)v) = \psi_n(u)\lambda_{\psi_n}(v) \quad \text{for } u \in N_n(F) \text{ and } v \in \pi.$$

如果 π 上的 Whittaker 泛函空间是一维的，则称 π 是一般的，并将 $\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$ 记为 π 的 Whittaker 模型；它由以下函数组成

$$W_v(h) = \lambda_{\psi_n}(\pi(h)v) \quad \text{for } h \in \mathrm{GL}_n(F) \text{ and } v \in \pi.$$

$\mathrm{GL}_n(F)$在 $\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$上的作用由右平移 ρ给出。众所周知，当 π 不可约时， π 上的Whittaker泛函空间至多是一维的。

[1]本文中的所有归纳法均为归一化的。

令 $\mathcal{C}^\infty(N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F);\psi_n)^{\mathrm{mg}}$ 表示光滑函数空间

$$W:\mathrm{GL}_n(F)\to\mathbb{C}$$

满足：

- $W(uh)=\psi_n(u)W(h)$，对任意 $u\in N_n(F)$ 和 $h\in \mathrm{GL}_n(F)$；
- 当 F 为阿基米德时，W 具有中等增长，即对于李群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的泛包络代数中的任意 X，存在 $C>0$ 和 $d\geq 0$ 使得

$$|XW(h)|_{\mathbb{C}}\leq C\|h\|^d,$$

对任意 $h\in \mathrm{GL}_n(F)$，其中

$$\|h\|:=\mathrm{tr}({}^t\bar{h}h)^{1/2}+\mathrm{tr}({}^t\bar{h}^{-1}h^{-1})^{1/2}.$$

注意

$$\mathscr{W}(\pi,\psi_n)\subset\mathcal{C}^\infty(N_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(F);\psi_n)^{\mathrm{mg}}.$$

令 $\mathscr{C}(N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F);\psi_n^{-1})$ 表示由满足以下条件的光滑函数构成的空间

$$f:\mathrm{GL}_n(F)\to\mathbb{C}$$

满足：

- $f(uh)=\psi_n^{-1}(u)f(h)$，对于 $u\in N_n(F)$ 和 $h\in \mathrm{GL}_n(F)$；
- 当 F 是阿基米德时，f 模 $N_n(F)$ 快速衰减，即对于李群 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的泛包络代数中的任意 X 以及 $d\geq 0$，我们有

$$\sup_{k\in K_n,t\in T_n}|Xf(tk)|_{\mathbb{C}}\|t\|^d<\infty;$$

- 当 F 是非阿基米德时，f 模 $N_n(F)$ 具有紧支撑。

3. Theta correspondence

3.1. II 型对偶对。 设 n,m 为两个正整数。数对 $(\mathrm{GL}_n,\mathrm{GL}_m)$ 构成 Howe 意义下的一个 II 型不可约约化对偶对（[How79], [MVW87]）。因此，该对偶对具有一个 Weil 表示（$\omega_{n,m}$, $\mathscr{S}(M_{n,m}(F))$），其作用由下式给出

$$\omega_{n,m}(h,g)\varphi(x)=|\det(h)|_F^{-m/2}|\det(g)|_F^{n/2}\varphi(h^{-1}xg),$$

其中 $(h,g)\in \mathrm{GL}_n(F)\times\mathrm{GL}_m(F)$，且 $\varphi\in\mathscr{S}(M_{n,m}(F))$。

现在设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约表示，并假设 π 是 $\omega_{n,m}$ 的一个商。Howe 的一个著名结果（[How89], [MVW87]）断言，存在唯一的不可约表示 $\sigma:=\theta_{n,m}(\pi)$，它是 $\mathrm{GL}_m(F)$ 的表示，并满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_n(F)\times\mathrm{GL}_m(F)}(\omega_{n,m},\pi\widehat{\boxtimes}\sigma)\neq 0. \tag{3.1}$$

此外，(3.1) 中的 Hom 空间是一维的，且 π 与 σ 唯一确定彼此。因此，条件 (3.1) 在作为 $\omega_{n,m}$ 的商出现的 $\mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\mathrm{GL}_m(F)$ 的不可约表示集合之间建立了一个双射。

3.2. **抽象 θ 提升**。 一个更微妙的问题是如何明确描述这个双射，即确定哪些 π 会作为 $\omega_{n,m}$ 的商出现，以及对于这样的 π，如何明确描述 $\theta_{n,m}(\pi)$。“ 明确 ” 一词可以有多种理解。理想情况下，可以根据某种表示参数化方式来计算这个双射，例如朗兹分类或其变体。不过，也存在其他描述方式。对于对偶对 $(\mathrm{GL}_n,\mathrm{GL}_m)$，Mœglin ([Moe89, 命题 III 9]) 和 Adams-Barbasch ([AB95, 定理 2.6]) 在 F 为阿基米德时研究了这个问题；而 Minguez ([Min08, 定理1]) 则在 F 为非阿基米德时研究了这个问题。

本文特别关注 $m = n+1$ 的情形，以下均假设此情形成立。在此情形下，我们还记

$$\omega = \omega_{n,n+1}, \quad \theta = \theta_{n,n+1} \quad \text{and} \quad \mathscr{S} = \mathscr{S}(M_{n,n+1}(F)). \tag{3.2}$$

现在，我们有如下结果:

定理 3.1 (Mœglin、Admas-Barbasch 和 Minguez)。 每个不可约表示 π 都是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个商。当 F 是阿基米德时， $\theta(\pi)$ 是 $\pi^\vee \times 1$ 中包含 $\pi^\vee \times 1$ 的极小 K-型的唯一子商。另一方面，当 F 是非阿基米德且 π 是 $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ 的朗兰兹商，其中每个 π_j 都是本质平方可积表示时，那么 $\theta(\pi)$ 是 [2] 的朗兰兹商

$$1 \times \pi_r^\vee \times \cdots \times \pi_1^\vee.$$

这里，1 表示 $\mathrm{GL}_1(F)$ 的平凡表示。

由此可得以下推论:

推论 3.1. 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约泛型表示。假设 $\pi^\vee \times 1$ 不可约。那么 $\theta(\pi) = \pi^\vee \times 1$。

证明。 这可由不可约性假设以及 GL_n 的标准模猜想立即推出。□

3.3. **Gomez–Zhu 风格的大 θ 提升上的惠特克泛函** `。 设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约表示。由定理 3.1， $\pi^\vee$ 是 ω 的一个商，因此由 $\pi^\vee$ 定义的大 θ 提升 [3] $\Theta(\pi^\vee)$

$$\Theta(\pi^\vee) := \left(\omega \,\widehat{\otimes}\, \pi\right)_{\mathrm{GL}_n(F)}$$

是 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个非零光滑表示。关于 $\Theta(\pi^\vee)$ 上的惠特克泛函空间，我们有如下结果。

命题3.1. 我们有

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{N_{n+1}(F)} \left(\Theta(\pi^\vee), \psi_{n+1}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{N_n(F)} \left(\pi, \psi_n\right).$$

特别地， π 是一般的，当且仅当 $\Theta(\pi^\vee)$是一般的。首先，注意到根据 [GZ14，命题 4.9]，（其证明可不作修改地推广到我们的情形），我们有一个 $\mathrm{GL}_n(F)$-交织同构

$$\mathscr{C}(N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F); \psi_n^{-1})_{\mathrm{GL}_n(F),\, \pi^\vee} \simeq \mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\pi, \psi_n)^* \otimes \pi^\vee,$$

[2]我们遵循 [Min08 第 6] 节开头所述的约定。[3]当 F 是阿基米德时，大 θ 提升定义为 $\left(\omega \,\widehat{\otimes}\, \pi\right)_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 的最大豪斯多夫商。然而，Geng-Xue 的一篇近期预印本（[GX26]）表明，$\left(\omega \,\widehat{\otimes}\, \pi\right)_{\mathrm{GL}_n(F)}$ 本身已经是豪斯多夫的。

其中左侧是最大的 $\pi^\vee$-同型商，而 $\mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\pi,\psi_n)^*$ 是 $\mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\pi,\psi_n)$ 的代数对偶。假设存在一个 $\mathrm{GL}_n(F)$-等变同构

$$\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}} \simeq \mathscr{C}(N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F);\psi_n^{-1}). \tag{3.3}$$

于是我们有

$$\left(\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}}\right)_{\mathrm{GL}_n(F),\pi^\vee} \simeq \mathrm{Hom}_{N_n(F)}(\pi,\psi_n)^*\otimes\pi^\vee.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\left(\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}}\right)_{\mathrm{GL}_n(F),\pi^\vee} &\simeq \left(\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{\mathrm{GL}_n(F),\pi^\vee}\right)_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}}\\ &\simeq \Theta(\pi^\vee)_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}}\otimes\pi^\vee.\end{aligned}$$

由此我们得出

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{N_{n+1}(F)}\left(\Theta(\pi^\vee),\psi_{n+1}\right) &= \dim_{\mathbb{C}}\left(\Theta(\pi^\vee)_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}}\right)^*\\ &= \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{N_n(F)}\left(\pi,\psi_n\right).\end{aligned}$$

因此，命题3.1的证明归结为构造一个同构（3.3）。下面给出一个显式定义的同构：

$$\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{N_{n+1}(F),\psi_{n+1}} \to \mathscr{C}(N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F);\psi_n^{-1}),\quad [\varphi]\mapsto\Psi(\varphi) \tag{3.4}$$

其中

$$\Psi(\varphi;h) := \int_{N_{n+1}(F)} \omega_{n,n+1}(h,u)\varphi(\varepsilon_n)\psi_{n+1}^{-1}(u)du \quad \text{for } h\in\mathrm{GL}_n(F). \tag{3.5}$$

这里是 $\varepsilon_n := (I_n,\ 0_{n,\ 1})$。对于 I 型约化对偶对，类似情形下的一个显式同构已见于 [GZ14, (6.20) 和命题 6.5]。正如 [GZ14, 注 2.2], 所述，作者预期同一结论对 II 型约化对偶对也成立。下文中，我们在 II 型情形下进行这一构造，并证明它与 (3.4) 中定义的构造一致。依照 [GZ14], 的记号和框架，我们确定 II 型约化对偶对和非退化惠特克泛函所对应的对象，并定义所需的同构。完成这些对应后，剩余细节的验证便可完全照 [GZ14, § 6.4 和 § 6.5], 进行，此处不再赘述。

令 $D=F\oplus F$ 为 F 上的分裂二次代数。固定两个符号 $\varepsilon,\ \tilde{\varepsilon}\in\{1,-1\}$。设 $(V,\ B)$ 和 $(V,\ B)$ 分别为 D 上由下式定义的 ε-厄米空间和 $\tilde{\varepsilon}$-厄米空间

$$V := D^{n\times 1};\quad \tilde{V} := D^{(n+1)\times 1}$$

and

$$B(w,v) := {}^t wQv \quad \text{for } w,v\in V;\quad \tilde{B}(\tilde{w},\tilde{v}) := {}^t\tilde{w}\tilde{Q}\tilde{v} \quad \text{for } \tilde{w},\tilde{v}\in\tilde{V},$$

其中

$$Q := I_n\oplus\varepsilon I_n\in\mathrm{GL}_n(D);\quad \tilde{Q} := I_{n+1}\oplus\tilde{\varepsilon}I_{n+1}\in\mathrm{GL}_{n+1}(D).$$

令 $G=G(V,B)\subset\mathrm{GL}_D(V)$ 和 $\tilde{G}=G(\tilde{V},\tilde{B})\subset\mathrm{GL}_D(\tilde{V})$ 为 Hermitian 空间的等距群。投影到第一分量后，我们将 G 和 $\tilde{G}$ 分别与 $\mathrm{GL}_n(F)$ 和 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 等同。更准确地说，我们有同构

$$G\to\mathrm{GL}_n(F),\quad (g,{}^t g^{-1})\mapsto g;\quad \tilde{G}\to\mathrm{GL}_{n+1}(F),\quad (\tilde{g},{}^t\tilde{g}^{-1})\mapsto\tilde{g}.$$

˜类似地，通过同构，我们将 G和 G的李代数 $\mathfrak{g}$和 $\tilde{\mathfrak{g}}$分别与 $M_{n,n}(F)$ 和 $M_{n+1,n+1}(F)$ 等同

$$\mathfrak{g} \to M_{n,n}(F), \quad (X, -^tX) \mapsto X; \quad \tilde{\mathfrak{g}} \to M_{n+1,n+1}(F), \quad (\tilde{X}, -^t\tilde{X}) \mapsto \tilde{X}.$$

在上述等同下， [GZ14, (2.1)] 中 $\mathfrak{g}$ 上的双线性配对 κ 等于

$$\kappa(T, S) = -\mathrm{tr}(TS) \quad \text{for } T, S \in M_{n,n}(F) \simeq \mathfrak{g}. \tag{3.6}$$

˜对 $\tilde{\mathfrak{g}}$上的双线性配对 $\tilde{\kappa}$ 同样如此。我们假设 $\varepsilon\tilde{\varepsilon} = 1$。则（$G$， G）是一个II型约化对偶对。设 $\gamma = \{H, X, Y\} \subset \mathfrak{g}$是一个由下式定义的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组

$$X := -\sum_{i=1}^{n-1} E_{i+1,i}, \quad Y := -\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)E_{i,i+1}, \quad H := -\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)E_{i,i}.$$

这里$E_{i,\ j}$是在（i， j）位置处非零的矩阵单位。在此情形下， [GZ14, (3.1)] 中 $\mathfrak{g}$在 H 作用下的权空间分解由下式给出

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1-n}^{n-1} \mathfrak{g}_{2i}.$$

特别地，容易看出，按 [GZ14, § 3.1] 中的定义，相伴的幂单子群 N， U 以及 G 的抛物子群 P 等于

$$N = U = N_n(F), \quad P = B_n(F).$$

此外，权空间 在 [GZ14中， V 的]分解在 H 的作用下为

$$V = \bigoplus_{j=0}^{n-1} V_{n-1-2j}.$$

若上述指标中未出现 $i \in \mathbb{Z}$ ，则令 $V_i = 0$ 。注意

$$V_{n-1-2j} = D(e_{n-j} \oplus e_{j+1}) \quad \text{for } 0 \le j \le n-1,$$

其中 $\{e_1, \cdots, e_n\}$是 $F^{n\times 1}$的标准基。由 (3.6) 可知， [GZ14 中 $U = N_n(F)$ 的相关加性特征 χ_γ，以及 (1.1) 和 § 3.3]，等于 (2.1) 中定义的特征 ψ_n˜ ˜ ˜。类似地，令 $\tilde{\gamma} = \{H, X, Y\} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$为如上定义的 $\mathfrak{sl}_2$-三元组，其中用 $n+1$替换 n。于是有

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i=-n}^{n} \tilde{\mathfrak{g}}_{2i}, \quad \tilde{V} = \bigoplus_{j=0}^{n} \tilde{V}_{n-2j}$$

and

$$\tilde{N} = \tilde{U} = N_{n+1}(F), \quad \tilde{P} = B_{n+1}(F), \quad \chi_{\tilde{\gamma}} = \psi_{n+1}.$$

按照 [GZ14 的记号，(6.14)], 我们有 $r = n-1$。与 [GZ14 的定义 5.5], 一样，我们称˜ ˜ D-线性同态 $T \in \mathrm{Hom}_D(V, V)$ 是 γ到 $\tilde{\gamma}$的提升，当且仅当 $T^*T = X$、 $TT^* = X$，并且˜ ˜$T(V_j) \subset V_{j+1}$对所有 j都成立。这里 $T^* \in \mathrm{Hom}_D(V, V)$ 是 T的伴随，也就是说，

$$B(v, T^*\tilde{v}) = \tilde{B}(Tv, \tilde{v}) \quad \text{for } v \in V, \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

如果进一步要求 T 是单射，那么根据 [GZ14 引理 5.7] 的证明， T 在本质上是唯一的。我们固定如下一个明确的选择：相对于标准基，我们将 $\mathrm{Hom}_F(F^{n\times 1}, F^{(n+1)\times 1})$ 与 $M_{n+1,n}(F)$ 视为同一对象。于是

$$\mathrm{Hom}_D(V,\tilde{V}) = M_{n+1,n}(F)\oplus M_{n+1,n}(F). \tag{3.7}$$

我们定义

$$T := \begin{pmatrix} 0_{1,n} \\ I_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} I_n \\ 0_{1,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_D(V,\tilde{V}). \tag{3.8}$$

沿用 ~GZ14 中的记号，引理 5.6], 我们记作 $T_j := T|_{V_j} \in \mathrm{Hom}_D(V_j, V_{j+1})$.

现在我们开始构造同构（3.3）。设 $(\mathbb{W}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是定义在 F 上、维数为 $2n(n+1)$ 的辛空间，其定义如下:

$$\mathbb{W} := \mathrm{End}_D(V,\tilde{V}) = M_{n+1,n}(F)\oplus M_{n+1,n}(F)$$

and

$$\langle T, S\rangle := \mathrm{tr}\left({}^tT_1S_2 - {}^tT_2S_1\right) \quad \text{for } T = T_1\oplus T_1,\ S = S_1\oplus S_2.$$

设 $\mathbb{X} := 0\oplus M_{n+1,n}(F)$，以及 $\mathbb{Y} := M_{n+1,n}(F)\oplus 0$。那么 $\mathbb{W} = \mathbb{X}+\mathbb{Y}$ 给出了 $\mathbb{W}$ 的一个完备极化~。从 $G\times G$ 到 $\mathrm{Sp}(\mathbb{W})$ 的自然同态可通过稳定 $\mathbb{Y}$ 的 Siegel抛物子群~进行分解。因此， $G\times G$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{X})$ 上的 Weil 表示 $\omega_{V,\tilde{V}}$（即 Schrödinger模型）由下式给出:

$$\omega_{V,\tilde{V}}(h,g)\varphi(x) = |\det(h)|_F^{-(n+1)/2}|\det(g)|_F^{n/2}\varphi({}^tgx^th^{-1})$$

~对于（h， g） $\in G\times G$ 以及 $\varphi\in\mathscr{S}$（$\mathbb{X}$）。注意，转置定义了一个交织同构

$$(\omega_{n,n+1}, \mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))) \to (\omega_{V,\tilde{V}}, \mathscr{S}(\mathbb{X})),\quad \varphi\mapsto {}^t\varphi$$

其中 ${}^t\varphi$（x）：$= \varphi$（${}^tx$）。在 [GZ14，第 831], 页中，采用Schrödinger模型的Weil 表示记作（$\omega_{(r),\ (r+1)}$， $\mathscr{W}_{(r),\ (r+1)}$）。沿用 [GZ14（6.14）], 中对 $0\le l\le r$ 和$0\le m\le r+1$的记号，令

$$V_{(l)} := \bigoplus_{k=-l}^{l} V_k,\quad \tilde{V}_{(m)} := \bigoplus_{k=-m}^{m}\tilde{V}_k.$$

考虑另一个完备极化 $\mathbb{W} = \mathbb{X}'+\mathbb{Y}'$，其中

$$\mathbb{X}' := \mathrm{Hom}_D(V_{(r)},\tilde{V}_{r+1})\oplus\mathrm{Hom}_D(V_{-r},\tilde{V}_{(r)})\oplus(\mathrm{Hom}_D(V_{(r-1)},\tilde{V}_{(r)})\cap\mathbb{X}),$$
$$\mathbb{Y}' := \mathrm{Hom}_D(V_{(r)},\tilde{V}_{-r-1})\oplus\mathrm{Hom}_D(V_r,\tilde{V}_{(r)})\oplus(\mathrm{Hom}_D(V_{(r-1)},\tilde{V}_{(r)})\cap\mathbb{Y}).$$

相对于 此极化变化，我们有交织同构

$$(\omega_{V,\tilde{V}}, \mathscr{S}(\mathbb{X})) \to (\hat{\omega}_{V,\tilde{V}}, \mathscr{S}(\mathbb{X}')),\quad \varphi\mapsto\hat{\varphi} \tag{3.9}$$

由部分傅里叶变换定义

$$\hat{\varphi}(x') := \int_{\mathbb{Y}'/\mathbb{Y}\cap\mathbb{Y}'} \varphi(x)\psi\left(\tfrac{1}{2}\langle x,y\rangle - \tfrac{1}{2}\langle x',y'\rangle\right)dy' \quad \text{for } x'\in\mathbb{X}',$$

其中， $x\in\mathbb{X}$ 和 $y\in\mathbb{Y}$ 由 $x+y = x'+y'$唯一确定，并将哈尔测度规范化，使得 ^$\omega_{V,\tilde{V}}$是酉的。对于 I 型约化对偶对，相应的同构

曾在 [GZ14, (6.17)] 中隐含提及。注意，子群 $U_r \subset U = N_n(F)$ 和 $G_{(r-1)} \subset G$ （定义如 [GZ14, p.834 和 (6.23)] ）由下式给出

$$U_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & I_{n-2} & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G_{(r-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \simeq \mathrm{GL}_{n-2}(F).$$

类似地，对于 $U_{r+1} \subset U = N_{n+1}(F)$，其定义如上，只需将 n 替换为 $n+1$。完全按照 [GZ14 引理 6.6], 中的方法，我们得到一个 G-交织同构

$$\mathscr{S}(\mathbb{X})_{\tilde{U}_{r+1},\psi_{n+1}} \to \mathscr{C}\left(U_r G_{(r-1)} \backslash G; \mathscr{S}(\mathrm{Hom}_D(V_{(r-1)}, \tilde{V}_{(r)}) \cap \mathbb{X})\right), \quad [\varphi] \mapsto \Psi_r(\varphi) \tag{3.10}$$

其中

$$\Psi_r(\varphi; h)(x) := \hat{\omega}_{V,\tilde{V}}(h,1)\hat{\varphi}(T_r \oplus T_{-r} \oplus x)$$

对于 $h \in G$ 和 $x \in \mathrm{Hom}_D(V_{(r-1)}, V_{(r)}) \cap \mathbb{X}$。注意，$T_r \in \mathrm{Hom}_D(V_{(r)}, V_{r+1})$ 且 $T_{-r} \in \mathrm{Hom}_D(V_{-r}, V_{(r)})$。我们将该同构用我们的模型 $(\omega_{n,n+1}, \mathscr{S}(M_{n,n+1}(F)))$ 重新诠释如下。我们有同构

$$F^{2\times n} \to \mathrm{Hom}_D(V_{(r)}, \tilde{V}_{r+1}), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0_{n,n} \\ x_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_1' \\ 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$F^{(n-1)\times 2} \to \mathrm{Hom}_D(V_{-r}, \tilde{V}_{(r)}), \quad \begin{pmatrix} x_2 & x_2' \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{array}{c|cc} & 0_{1,n} & \\ \hline x_2 & 0_{n-1,n-1} & \\ \hline & 0_{1,n} & \end{array}\right) \oplus \left(\begin{array}{c|cc} & 0_{1,n} & \\ \hline & 0_{n-1,n-1} & x_2' \\ \hline & 0_{1,n} & \end{array}\right)$$

$$M_{n-1,n-2}(F) \to \mathrm{Hom}_D(V_{(r-1)}, \tilde{V}_{(r)}) \cap \mathbb{X}, \quad x \mapsto 0 \oplus \left(\begin{array}{c|ccc} & 0_{1,n} & & \\ \hline 0_{n-2,1} & x & 0_{n-2,1} & \\ \hline & 0_{1,n} & & \end{array}\right).$$

注意，在同构 (3.7) 下，右端是 $M_{n+1,n}(F) \oplus M_{n+1,n}(F)$ 的子空间。相对于这些同构，通过矩阵转置，(3.9) 可改写为

$$(\omega_{n,n+1}, \mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))) \to (\hat{\omega}_{n,n+1}, \mathscr{S}(F^{n\times 2} \oplus F^{2\times(n-1)} \oplus M_{n-2,n-1}(F))), \quad \varphi \mapsto \hat{\varphi}$$

其中

$$\hat{\varphi}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} \oplus x\right) = \int_{F^{n\times 1}} dy_1 \int_{F^{1\times(n-1)}} dy_2\, \varphi\left(\left.\begin{array}{c|c|c} & y_2 & \\ x_1' & x & y_1 \\ & x_2' & \end{array}\right.\right) \psi^{-1}({}^t x_1 y_1 + x_2 {}^t y_2).$$

根据 (3.8) 中 T_r 和 T_{-r} 的显式定义，我们有

$$F^{2\times n} \ni \begin{pmatrix} 0_{1,n-1} & 1 \\ 1 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix} \mapsto T_r, \quad F^{(n-1)\times 2} \ni \begin{pmatrix} 1 & 0_{n-2,1} \\ 0_{n-2,1} & 1 \end{pmatrix} \mapsto T_{-r}.$$

因此，我们可以将 (3.10) 改写为

$$\mathscr{S}(M_{n,n+1}(F))_{\tilde{U}_{r+1},\psi_{n+1}} \to \mathscr{C}\left(U_r G_{(r-1)} \backslash G; \mathscr{S}(M_{n-2,n-1}(F))\right), \quad [\varphi] \mapsto \Psi_r(\varphi)$$

其中

$$\Psi_r(\varphi; h)(x) = \int_{F^{n\times 1}} dy_1 \int_{F^{1\times(n-1)}} dy_2\, \omega_{n,n+1}(h,1)\varphi\left(\left.\begin{array}{c|c|c} 1 & y_2 & \\ 0_{n-2,1} & x & y_1 \\ 0 & 0_{n-2} \quad 1 & \end{array}\right.\right) \psi_{n+1}^{-1}(y_{1n} + y_{21})$$

$h \in \mathrm{GL}_n(F)$ 和 $x \in M_{n-2,\ n-1}(F)$。注意，当 $n=1$ 时，$U_r G_{(r-1)}$ 是平凡群。对于 $n \geq 2$，$U_r G_{(r-1)}$ 在 $\mathscr{S}(M_{n-2,\ n-1}(F))$ 上的作用由下式给出：

$$\begin{pmatrix} 1 & w & z \\ 0 & I_{n-2} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \varphi(x) = \begin{cases} \psi^{-1}(z)\varphi(x) & \text{if } n=2, \\ \psi^{-1}\left(wx \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{n-2,1} \end{pmatrix}\right) \varphi\left(x - y \begin{pmatrix} 0_{1,n-2} & 1 \end{pmatrix}\right) & \text{if } n>2, \end{cases}$$

$$\mathrm{diag}(1,h,1) \cdot \varphi = \omega_{n-2,n-1}(h,1)\varphi.$$

由此很容易看出，当 $n=1$ 时，(3.5) 中的交织映射 Ψ 与 Ψ_0 重合；当 $n=2$ 时，则与 Ψ_1 重合。通过归纳推理，我们得出结论（回想一下，$r=n-1$）

$$\Psi = \begin{cases} \Psi_0 \circ \Psi_2 \circ \cdots \circ \Psi_r, & \text{if } n \text{ is odd}, \\ \Psi_1 \circ \Psi_3 \circ \cdots \circ \Psi_r, & \text{if } n \text{ is even}. \end{cases}$$

在每个阶段，映射 Ψ_i 都经由一个适当的余不变量商分解；因此，Ψ 给出了同构 (3.4)。对于 I 型约化对偶对，类似的归纳结构见 GZ14 的 (6.18) 和 (6.20)。

3.4. 显式 theta 提升。 研究 $\theta(\pi^\vee)$ 的一种方法，是显式构造 (3.1) 中 Hom 空间的一个非零元素。当 π 一般时，Watanabe 在 [Wat95], 中实现了这一点，他计算了 GL_{n+1} 上尖点形式的全局 theta 提升的傅里叶系数。特别地，他得到了一个映射

$$\mathcal{W} : \mathscr{S} \otimes \mathscr{W}(\pi, \psi_n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(N_{n+1}(F)\backslash GL_{n+1}(F); \psi_{n+1})^{\mathrm{mg}},$$

它由下列绝对收敛积分给出：

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\varphi\otimes W}(g) &= \int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} \int_{N_{n+1}(F)} \omega(h,ug)\varphi(\varepsilon_n) W(h) \psi_{n+1}^{-1}(u)\, du\, dh \\ &= \int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} \Psi(\omega(1,g)\varphi; h) W(h) dh. \end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $\varphi \in \mathscr{S}$, $W \in \mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$ 和 $\varepsilon_n := (I_n,\ 0_{n,\ 1}) \in M_{n,\ n+1}(F)$。

容易验证

$$\mathcal{W}_{\omega(h,g)\varphi\otimes\rho(h)W} = \rho(g)\mathcal{W}_{\varphi\otimes W} \quad \text{for } (h,g) \in \mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_{n+1}(F). \tag{3.12}$$

由此可知，$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 作用于空间

$$\mathscr{V}(\pi, \psi_{n+1}) := \left\{ \mathcal{W}_{\varphi\otimes W} \mid \varphi \in \mathscr{S} \text{ and } W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_n) \right\} \subset \mathcal{C}^\infty(N_{n+1}(F)\backslash \mathrm{GL}_{n+1}(F); \psi_{n+1})^{\mathrm{mg}}$$

通过右平移，空间 $\mathscr{V}(\pi,\ \psi_{n+1})$ 和 $\mathscr{W}(\theta(\pi^\vee)\ \psi_{n+1})$ 应当以某种方式相关。我们证明确实如此；为此，需要以下引理。

引理 3.1。 空间 $\mathscr{V}(\pi, \psi_{n+1})$ 非零。

证明。我们的任务是证明存在 $W \in \mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$ 和 $\varphi \in \mathscr{S}$，使得 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W} \neq 0$。事实上，我们可以证明一个更强的结果：给定 $0 \neq W \in \mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$，存在 $\varphi \in \mathscr{S}$，使得 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W} \neq 0$。注意，根据 (3.12)，只需证明对于某个 φ，有 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W}(I_{n+1}) \neq 0$。我们用反证法。因此，假设对于每个 $\varphi \in \mathscr{S}$，都有 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W}(I_{n+1}) = 0$。

令 $\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$ 表示 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上取值于 $\mathbb{C}$ 的施瓦茨函数空间。因此，它由满足以下条件的光滑函数 $\phi : \mathrm{GL}_n(F) \to \mathbb{C}$ 组成

$$\sup_{h\in \mathrm{GL}_n(F)} |X\phi(h)|_{\mathbb{C}}\|h\|^d < \infty$$

对任意 X 属于李代数 $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n(F))$ 的泛包络代数，以及任意 $d \in \mathbb{N}$，当 F 为阿基米德时为 [4] ([Cas89b], [AG08])；而当 F 为非阿基米德时，它由 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的紧支撑局部常值函数组成。

根据 [AG08，定理 5.4，3], 我们可以将 $\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$ 识别为 $\mathscr{S}(M_n(F))$ 的一个子空间，其中的函数在 $M_n(F) \smallsetminus \mathrm{GL}_n(F)$ 上连同其所有导数一起消失（当 F 为阿基米德时）。另一方面，当 F 为非阿基米德时，我们可以将 $\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$ 识别为 $\mathscr{S}(M_n(F))$ 的一个子空间，其中的函数支集包含于 $\mathrm{GL}_n(F)$。

令 $\phi_1 \in \mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F)) \subset \mathscr{S}(M_n(F))$ 和 $\phi_2 \in \mathscr{S}(M_{n,\ 1}(F))$，并定义 $\varphi = \phi_1 \otimes \phi_2 \in \mathscr{S}$ 为

$$\varphi(h, y) = \phi_1(h)\phi_2(y) \quad \text{for } h \in M_n(F) \text{ and } y \in M_{n,1}(F).$$

W现在我们计算 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W}(I_{n+1})$，其由以下积分给出：

$$\int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} W(h) \int_{N_{n+1}(F)} |\det(h)|_F^{-(n+1)/2} \varphi(h^{-1}\varepsilon_n u)\psi_{n+1}^{-1}(u)dudh.$$

通过写作

$$u = \begin{pmatrix} v & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with } v \in N_n(F) \text{ and } y \in M_{n,1}(F),$$

并注意到

$$\psi_{n+1}(u) = \psi_n(v)\psi(e_n y) \quad \text{where } e_n := (0, ..., 0, 1) \in M_{1,n}(F),$$

上面的积分变为

$$\int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} W(h)\phi_2'(e_n h) \int_{N_n(F)} \phi_1'\left(v^{-1}h\right)\psi_n^{-1}(v)dvdh,$$

其中我们定义了

$$\phi_1' \in \mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F)) \quad \text{and} \quad \phi_2' \in \mathscr{S}\left(M_{1,n}(F)\right)$$

by

$$\phi_1'(h) = |\det(h)|_F^{-(n-1)/2}\phi_1\left(h^{-1}\right) \quad \text{for } h \in \mathrm{GL}_n(F),$$

and

$$\phi_2'(y) = \int_{M_{n,1}(F)} \phi_2(x)\psi^{-1}(yx)dx \quad \text{for } y \in M_{1,n}(F).$$

接下来，我们对变量 $v^{-1} \mapsto v$ 作变量替换，并注意到

$$\psi_n(v)W(h) = W(vh) \quad \text{and} \quad \phi_2'(e_n h) = \phi_2'(e_n vh).$$

[4] [Cas89b] 和 [AG08] 中的定义一致；参见 [AG08, §1.4]。

由此可得

$$\begin{aligned}&\int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} W(h)\phi_2'(e_n h)\int_{N_n(F)}\phi_1'(vh)\,\psi_n(v)dvdh\\&=\int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)}\int_{N_n(F)} W(vh)\phi_1'(vh)\phi_2'(e_n vh)dvdh\\&=\int_{\mathrm{GL}_n(F)} W(h)\phi_1'(h)\phi_2'(e_n h)dh=0,\end{aligned}$$

对每一个 $\phi_1\in\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$和 $\phi_2\in\mathscr{S}(M_{n,1}(F))$。由于映射 $\phi_1\mapsto\phi_1'$与 $\phi_2\mapsto\phi_2'$分别定义了 $\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$的自同构以及从 $\mathscr{S}(M_{n,1}(F))$到 $\mathscr{S}(M_{1,n}(F))$的同构，我们得出

$$W(h)=0\quad\text{for every } h\in\mathrm{GL}_n(F),\text{ i.e. } W=0.$$

事实上，我们可以假设 ϕ_2'处处不为零，于是由于空间 $\mathscr{S}(\mathrm{GL}_n(F))$包含近似单位，结论随之成立。□

现在我们来到本文的第一个主要结果：

定理3.2. 假设 π是一般的，且 $\pi\times 1$是不可约的。则 $\mathscr{W}(\pi\times 1,\psi_{n+1})=\mathscr{V}(\pi,\psi_{n+1})$。

证明。 Howe的结果 [How89，定理2.1] 表明，大 θ 提升 $\Theta(\pi^\vee)$具有有限长度；因此它容许一个合成列

$$\{0\}=\mathscr{V}_0\subset\mathscr{V}_1\subset\cdots\subset\mathscr{V}_M=\Theta(\pi^\vee).$$

根据上述 Howe 的结果以及推论 3.1，最高商满足：

$$\mathscr{V}_M/\mathscr{V}_{M-1}\cong\theta(\pi^\vee)=\pi\times 1.$$

注意， $\pi\times 1$ 是一般的，因为 π 本身是一般的。另一方面，根据命题3.1，我们有

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{N_{n+1}(F)}\left(\Theta(\pi^\vee),\psi_{n+1}\right)=1.$$

F由此，我们得出结论：对于 $1\le\ell\le M-1$ ，子商 $\mathscr{V}_\ell/\mathscr{V}_{\ell-1}$ 必须是非一般的。根据 $\Theta(\pi^\vee)$的定义以及(3.12)，存在一个满射的$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$-交织映射

$$\Xi:\Theta(\pi^\vee)\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathscr{V}(\pi,\psi_{n+1})\subset\mathcal{C}^\infty(N_{n+1}(F)\backslash\mathrm{GL}_{n+1}(F),\psi_{n+1})^{\mathrm{mg}}.$$

该映射 Ξ 给出了$\mathrm{GL}_{n+1}(F)$-表示的一个滤过

$$0=\Xi(\mathscr{V}_0)\subset\Xi(\mathscr{V}_1)\subset\cdots\subset\Xi(\mathscr{V}_{M-1})\subset\Xi(\mathscr{V}_M)=\mathscr{V}(\pi,\psi_{n+1}).$$

由于对每个 $1\le\ell\le M$， $\Xi(\mathscr{V}_\ell)/\Xi(\mathscr{V}_{\ell-1})$都是不可约表示 $\mathscr{V}_\ell/\mathscr{V}_{\ell-1}$ 的一个商，因此它要么为0，要么同构于 $\mathscr{V}_\ell/\mathscr{V}_{\ell-1}$。特别地，

$$\Xi(\mathscr{V}_1)\subset\mathcal{C}^\infty(N_{n+1}(F)\backslash\mathrm{GL}_{n+1}(F),\psi_{n+1})^{\mathrm{mg}}$$

必定为0，因为 $\mathscr{V}_1$ 是非一般的。因此， $\Xi(\mathscr{V}_2)$要么为0，要么同构于 $\mathscr{V}_2/\mathscr{V}_1$。运用同样的推理，我们推出 $\Xi(\mathscr{V}_2)=0$。重复这一论证，我们发现 $\Xi(\mathscr{V}_{M-1})=0$。现在，由于根据引理 3.1， $\Xi(\mathscr{V}_M)=\mathscr{V}(\pi,\psi_{n+1})$非零，因此

$$\pi\times 1\cong\mathscr{V}_M/\mathscr{V}_{M-1}\cong\Xi(\mathscr{V}_M)=\mathscr{V}(\pi,\psi_{n+1}).$$

至此，证明完成。 □

4. Propagation formula

本节中，我们假设 F 是阿基米德的。我们的目标是利用上一节讨论的 θ提升，推导最小 K-型惠特克函数的“传播公式”。我们沿用记号 (3.2)。

4.1. 极小 K-型惠特克函数。 令 π 为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约泛型表示。我们假设

$$\Pi := \pi \times 1$$

是不可约的，因此 Π 是 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个不可约泛型表示

令 τ（分别为 Υ）为 π（分别为 Π）的极小 K-型分量，其重数为一。由此可得子空间

$$\left(\mathscr{W}(\pi,\psi_n)\otimes\tau^\vee\right)^{K_n} = \mathbb{C}\,W_\pi \tag{4.1}$$

K_n-不变向量构成的空间是一维的。我们可以将 W_π 视为 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上取值于 $\tau^\vee$ 的函数，满足：

- $W_\pi(gk) = \tau^\vee(k)^{-1}W_\pi(g)$ 对于 $(g,\ k)\in \mathrm{GL}_n(F)\times K_n$;
- 对于每个 $v\in\tau$，$\mathbb{C}$值函数 $g\mapsto \langle v,\ W_\pi(g)\rangle_\tau$属于 $\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)[\tau]$，即 $\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$ 的 τ-型部分。

这里 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle_\tau$表示 τ与 $\tau^\vee$之间自然的 K_n不变双线性配对。注意到 W_π由这两个性质唯一刻画。

类似地，我们有

$$\left(\mathscr{W}(\Pi,\psi_{n+1})\otimes\Upsilon^\vee\right)^{K_{n+1}} = \mathbb{C}\,W_\Pi$$

其中 W_Π 满足类似的性质。由岩泽分解，显然 W_π（分别地，W_Π）完全由其在 T_n^+（分别地，T_{n+1}^+）上的取值所决定。

4.2. 联合调和。 我们旨在利用方程（3.11）将 $W_\Pi|_{T_{n+1}^+}$表示为关于 $W_\pi|_{T_n^+}$的表达式。其思路是从子空间中选取一个合适的函数 $\varphi_{\tau,\ \Upsilon}$

$$\left(\mathscr{S}\otimes(\tau\boxtimes\Upsilon^\vee)\right)^{K_n\times K_{n+1}}$$

使得由 $W=W_\pi$ 和 $\varphi=\varphi_{\tau,\Upsilon}$ 构成的、类似于 (3.11) 的积分非零。如上所述，$\varphi_{\tau,\Upsilon}$ 可视为定义在 $M_{n,n+1}(F)$ 上的一个 $\tau\otimes\Upsilon^\vee$-值函数，其系数属于$\mathscr{S}$，并满足恒等式

$$\omega(k,k')\varphi_{\tau,\Upsilon} = (\tau\boxtimes\Upsilon^\vee)(k,k')^{-1}\varphi_{\tau,\Upsilon}\quad \text{for } (k,k')\in K_n\times K_{n+1}. \tag{4.2}$$

这里，$\omega(k,k')$作用于$\varphi_{\tau,\Upsilon}$的系数。

为此，令 $\mathscr{H}\subset\mathscr{S}$ 表示 Howe 意义下的联合调和子空间（[How89，第 7 节 (b)]）。这是一个 $(K_n\times K_{n+1})$-不变子空间，具有如下无重数分解

$$\mathscr{H}\cong\bigoplus_i \mathscr{H}_{\sigma_i,\Sigma_i}\cong\bigoplus_i \sigma_i\boxtimes\Sigma_i.$$

此外，对于每个 i，σ_i 和 Σ_i 彼此决定，并且具有 Howe 定义的相同次数。

由于 π 和 Π 是不可约且一般的，根据Vogan的一个结果（[Vog78]），它们同构于完全诱导表示。因此，τ 和 Υ 的最高权可以显式描述（[Lin18，命题4.3], [Che19，命题4.1], [Hum25，注记6.8]）。现在

关键的观察是， $\tau^\vee \boxtimes \Upsilon$ 出现在 $\mathscr{H}$中（[AB95，命题1.4], [Ada07，命题7.5]）。因此，该空间

$$(\mathscr{H} \otimes (\tau \boxtimes \Upsilon^\vee))^{K_n \times K_{n+1}}$$

是一维的 ，而特定函数 $\varphi_{\tau,\Upsilon}$ 选自此空间的一组基 e.

4.3. 公式。 此时，我们引入由下列积分定义的 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 上的 $\Upsilon^\vee$ 值函数 $\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$：

$$\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}(g) = \int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} \int_{N_{n+1}(F)} \langle \omega(h,ug)\varphi_{\tau,\Upsilon}(\varepsilon_n), W_\pi(h)\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u)\, du\, dh.$$

由于其系数由积分 (3.11) 给出，且该积分绝对收敛，因此函数$\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$ 定义良好。此外，我们有以下结果，这是本文的主要结论。

定理 4.1。 函数 $\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$ 非零，且属于

$$(\mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1}) \otimes \Upsilon^\vee)^{K_{n+1}}.$$

因此，我们可以识别出

$$W_\Pi = \mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}.$$

此外，我们有如下传播公式：

$$\begin{aligned} W_\Pi(g) = c|\det(g)|_F^{n/2} \int_{T_n^+} \int_{N_{n+1}(F)} & du\, dt \\ & \langle \varphi_{\tau,\Upsilon}(t^{-1}\varepsilon_n ug), W_\pi(t)\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u)\delta_{B_n(F)}^{-1}(t)|\det(t)|_F^{-(n+1)/2}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $c = \mathrm{Vol}(K_n, dk)$，并且 $\delta_{B_n(F)}$ 是 $B_n(F)$的模函数。

证明。 我们注意到，$\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$ 的系数由积分（3.11）定义。由定理3.2可知，这些系数作为 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 上的函数，属于 $\mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1})$。此外，直接验证可得 $\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$ 满足

$$\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}(gk) = \Upsilon^\vee(k)^{-1}\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}(g) \quad \text{for } (k,g) \in K_{n+1} \times \mathrm{GL}_{n+1}(F),$$

利用（4.2），因此我们得到

$$\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi} \in (\mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1}) \otimes \Upsilon^\vee)^{K_{n+1}}.$$

为证明 $\mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon}\otimes W_\pi}$ 非零，注意到 $\pi^\vee$ 的最小 K-型 $\tau^\vee$ 按 Howe 的意义也具有最小次数。由 $\tau^\vee \boxtimes \Upsilon$ 包含于联合调和 $\mathscr{H}$ 中这一事实，以及 Howe 的证明可知，ω 的最大 $\pi^\vee$-等型商——它是 $\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个表示——由 $\mathscr{H}_{\tau^\vee,\Upsilon}$ 生成。

因此，唯一的 $(\mathrm{GL}_n(F) \times \mathrm{GL}_{n+1}(F))$-交织映射

$$U : \omega \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{W}(\pi^\vee, \psi_n) \,\widehat{\boxtimes}\, \mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1})$$

其通过 ω 的极大 $\pi^\vee$-同型商因子化，且限制在子空间 $\mathscr{H}_{\tau,\ \vee,\ \Upsilon}$ 上时非零。由定理3.2以及映射 U, V 之间满足如下关系这一事实可知

$$\mathcal{W}_{\varphi\otimes W} = \langle W, U(\varphi)\rangle_\pi,$$

其中， $\langle \cdot,\cdot\rangle_\pi$ 是 $\mathscr{W}(\pi, \psi_n)$ 与 $\mathscr{W}(\pi^\vee, \psi_n)$ 之间的 $\mathrm{GL}_n(F)$-不变双线性配对，因此我们得出，$\mathcal{W}_{\varphi_\pi,\Pi\otimes W_\pi}$ 的系数非零，而这些系数是 $\mathscr{W}(\Pi, \psi_{n+1})[\Upsilon]$ 中的元素。这证明了第一个断言。

剩下需要证明 (4.3)。由岩泽分解 $\mathrm{GL}_n(F) = N_n(F)T_n^+K_n$ 以及 (4.2)，我们得到

$$\begin{aligned}
W_\Pi(g) &= |\det(g)|_F^{n/2} \int_{N_n(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)} \int_{N_{n+1}(F)} du\, dh \\
&\qquad \langle \varphi_{\pi,\Pi}(h^{-1}\varepsilon_n u g), W_\pi(h)\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u) |\det(h)|_F^{-(n+1)/2} \\
&= |\det(g)|_F^{n/2} \int_{T_n^+} \int_{N_{n+1}(F)} \int_{K_n} dk\, du\, dt \\
&\qquad \langle \tau(k)^{-1}\varphi_{\pi,\Pi}(t^{-1}\varepsilon_n u g), \tau^\vee(k)^{-1} W_\pi(t)\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u)\delta_{B_n(F)}^{-1}(t) |\det(t)|_F^{-(n+1)/2} \\
&= |\det(g)|_F^{n/2} \int_{T_n^+} \int_{N_{n+1}(F)} c\, du\, dt \\
&\qquad \langle \varphi_{\tau,\Upsilon}(t^{-1}\varepsilon_n u g), W_\pi(t)\rangle_\tau \psi_{n+1}^{-1}(u)\delta_{B_n(F)}^{-1}(t) |\det(t)|_F^{-\frac{n+1}{2}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 4.1.

(1) 根据公式 (4.3)，惠特克函数 W_Π 可以通过归纳法计算。因此，问题归结为寻找测试函数φ_τ, Υ并显式计算积分。我们注意到，联合调和空间可以根据 ω 的 *Fock*模型显式定义。这一事实或可有助于建立一种系统方法来确定 φ_τ, Υ。(2) 实际上，对于给定的特定 π，只需选取一个满足(4.2)的测试函数φ_τ, Υ，并直接计算积分 (4.3)即可。只要积分非零，定理 ***4.1*** 的结论仍然成立。(3) 本文假设 τ 和 Υ 都是极小 K-型。不过，显然，对于任意 K-型，只要 W_π 和 φ_τ, Υ 分别满足 (4.1)和 (4.2)，式 (4.3) 仍然成立。但我们注意到，任意 K-型未必以重数一出现，因此在这种情况下，还必须适当选取 W_π。

5. Examples

本节利用我们的结果定理3.2和定理4.1，给出惠特克函数显式公式的例子。在阿基米德情形，这些公式描述了某些一般表示的极小 K-型中的惠特克函数；而在非阿基米德情形，我们的结果则恢复了球惠特克函数的 Shintani公式。

5.1. Shintani公式。

在本小节中，假设 F 是非阿基米德的。我们基于定理3.2，给出球惠特克函数的 Shintani公式 [Shi76] 的一种不同证明。

设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一个不可约泛型非分歧表示。那么我们有

$$\pi = \chi_1 \times \cdots \times \chi_n$$

对于某些非分歧特征 $\chi_1, ..., \chi_n$，其属于 $F^\times$。π 的 Satake参数为以下数值$\alpha_i := \chi_i(\varpi)$，其中 $1 \le i \le n$。对于 GL_n 的支配整权 $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$，令$\varpi^\lambda \in T_n^+$定义如下：

$$\varpi^\lambda := \mathrm{diag}(\varpi^{\lambda_1}, ..., \varpi^{\lambda_n}).$$

设 W_π 为一个（sp 关于 ψ_n 的 $\mathrm{GL}_n(F)$ 上的惠特克函数（herical），定义为满足

$$W_\pi(\varpi^\lambda k)=\delta_{B_n(F)}^{1/2}(\varpi^\lambda)\frac{\det(\alpha_i^{\lambda_j+n-j})_{1\le i,j\le n}}{\det(\alpha_i^{n-j})_{1\le i,j\le n}}\quad \text{for } \varpi^\lambda\in T_n^+ \text{ and } k\in K_n.$$

定理5.1 (Shintani)。我们有 $W_\pi\in\mathscr{W}(\pi,\ \psi_n)$。

证明。我们对 n使用归纳法。公式对 $n=1$显然成立。假设公式对 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的所有不可约非分歧泛型表示都成立。令

$$\Pi=\chi_1\times\cdots\times\chi_{n+1}$$

为 $\mathrm{GL}_{n+1}(F)$ 的一个不可约非分歧泛型表示，其中 $F^\times$的一些非分歧特征为 $\chi_1,...,\chi_{n+1}$。将 Π 替换为 $\Pi\otimes\chi_{n+1}^{-1}$后，不妨设 $\chi_{n+1}=1$。在这种情况下，$\Pi=\pi\times 1$，其中

$$\pi=\chi_1\times\cdots\times\chi_n.$$

根据归纳假设，W_π 是 π 相对于 ψ_n的一个非分歧惠特克函数。令 $\varphi:=\mathbb{I}_{M_{n,n+1}(\mathfrak{o})}$ 为$M_{n,n+1}(\mathfrak{o})$的特征函数。显然，φ 在 $K_n\times K_{n+1}$下不变。因此，$\mathcal{W}_{\varphi\otimes W_\pi}$ 在 K_{n+1}下不变。令 λ 为 GL_{n+1} 的一个支配整权。于是有

$$\mathcal{W}_{\varphi\otimes W_\pi}(\varpi^\lambda)=\sum_\mu\Psi(\omega_{n,n+1}(1,\varpi^\lambda)\varphi;\varpi^\mu)W_\pi(\varpi^\mu)\delta_{B_n(F)}^{-1}(\varpi^\mu),$$

其中 μ 遍历GL_n的支配整权。通过直接计算，

$$\begin{aligned}\Psi(\omega_{n,n+1}(1,\varpi^\lambda)\varphi;\varpi^\mu)&=|\det(\varpi^\mu)|_F^{-(n+1)/2}|\det(\varpi^\lambda)|_F^{n/2}\prod_{i=1}^n\mathbb{I}_{\mathfrak{o}}(\varpi^{-\mu_i+\lambda_i})\\&\quad\times\prod_{1\le i<j\le n+1}\int_F du_{ij}\,\mathbb{I}_{\mathfrak{o}}(\varpi^{-\mu_i+\lambda_j}u_{ij})\psi^{-1}(u_{12}+u_{23}+\cdots+u_{n,n+1})\\&=\delta_{B_n(F)}^{1/2}(\varpi^\mu)\delta_{B_{n+1}(F)}^{1/2}(\varpi^\lambda)\prod_{i=1}^n\mathbb{I}_{\mathfrak{o}}(\varpi^{-\mu_i+\lambda_i})\mathbb{I}_{\mathfrak{o}}(\varpi^{\mu_i-\lambda_{i+1}}).\end{aligned}$$

上述乘积非零当且仅当

$$\lambda_i\ge\mu_i\ge\lambda_{i+1}\quad\text{for all } 1\le i\le n,$$

此时我们记为 $\lambda\succ\mu$。因此，

$$\mathcal{W}_{\varphi\otimes W_\pi}(\varpi^\lambda)=\delta_{B_{n+1}(F)}^{1/2}(\varpi^\lambda)\sum_{\lambda\succ\mu}\delta_{B_n(F)}^{-1/2}(\varpi^\mu)W_\pi(\varpi^\mu).\tag{5.1}$$

设 V_λ 为$\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$的最高权为 λ的不可约代数表示，χ_λ 为其特征。众所周知，

$$\chi_\lambda(\mathrm{diag}(t_1,...,t_{n+1}))=\frac{\det(t_i^{\lambda_j+n+1-j})}{\det(t_i^{n+1-j})}\quad\text{for } t_1,...,t_{n+1}\in\mathbb{C}^\times.$$

不可约代数表示 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 也有类似的公式。我们通过嵌入 $g\mapsto\mathrm{diag}(g,\ 1)$，将 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 视为 $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 的子群。根据 $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ 到 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的表示的限制的分支法则，我们有

$$V_\lambda|_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}=\bigoplus_{\lambda\succ\mu}V_\mu.$$

特别地，这意味着

$$\chi_\lambda(\mathrm{diag}(t_1,...,t_n,1)) = \sum_{\lambda \succ \mu} \chi_\mu(\mathrm{diag}(t_1,...,t_n)) \quad \text{for } t_1,...,t_n \in \mathbb{C}^\times. \tag{5.2}$$

然后我们 con 由 (5.1) 与 (5.2) 得出 $\mathcal{W}_{\varphi\otimes W_\pi} = W_\Pi$。证明至此完成。 □

5.2. 宫崎公式。 在本小节中，令 $F = \mathbb{R}$。通过阐明定理 4.1 中的传播公式，我们得到 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 的广义主系列表示的显式惠特克函数。这些公式最初由 Miyazaki [Miy09] （另见 [HIM12]）通过对惠特克函数所满足的偏微分方程进行显式求解而导出。

使用 $K_2^\circ = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ 更为方便。对于 $\theta \in \mathbb{R}$，令

$$k_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in K_2^\circ.$$

对于 $\kappa \geq 2$，我们用 D_κ 表示 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 的离散系列表示，其极小 K_2°-型为 τ_κ，这是由 $\tau_\kappa(k_\theta) = e^{\sqrt{-1}\,\kappa\theta}$ 定义的特征。除主系列表示外，$\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 的不可约泛型表示具有如下形式

$$\Pi = (D_\kappa \otimes \chi_1) \times \chi_2$$

对于某个 $\kappa \geq 2$ 以及 χ_1，χ_2 的特征。令 Υ_κ 为 Π的最小 K_3-型。Υ_κ 的一个模型回顾如下：令 $\mathbb{C}[X,Y,Z]_\kappa$ 为变量 X，Y，Z中次数为 κ 的齐次复多项式空间。然后 K_3 作用于 $\mathbb{C}[X,Y,Z]_\kappa$，其作用为

$$(k\cdot P)(X,Y,Z) := P((X,Y,Z)k) \quad \text{for } k \in K_3,\ P \in \mathbb{C}[X,Y,Z]_\kappa.$$

它有一个由 $X^2+Y^2+Z^2$ 的倍数组成的不变子空间。于是，Υ_κ 是 $\mathbb{C}[X,Y,Z]_\kappa$ 对该不变子空间的商。我们将 X，Y，Z 在商中的像记为 X，Y，Z。将 Π 替换为 $\Pi\otimes\chi_2^{-1}$后，我们不妨设对于某个 $\mathsf{w} \in \mathbb{C}$ 和 $\chi_2 = 1$，$\chi_1 = |\ |_\mathbb{R}^\mathsf{w}$。我们使用传播公式 (4.3)，给出最小型中 Π 的惠特克函数的显式公式。更确切地说，我们将其应用于

$$\pi = D_\kappa \otimes |\ |_\mathbb{R}^\mathsf{w}, \quad \tau = \tau_\kappa, \quad \Upsilon = \Upsilon_\kappa.$$

注意到 $\Upsilon \cong \Upsilon^\vee$。特定的 Bruhat-Schwartz 函数 $\varphi_{\pi,\,\Pi} \in \mathscr{S}(M_{2,\,3}(\mathbb{R})) \otimes (\tau\boxtimes\Upsilon^\vee)$ 定义为

$$\begin{aligned}\varphi_{\pi,\Pi}(x) &= \left(\begin{pmatrix}\sqrt{-1} & 1\end{pmatrix}\cdot x\cdot {}^t\begin{pmatrix}\overline{X} & \overline{Y} & \overline{Z}\end{pmatrix}\right)^\kappa e^{-\pi\mathrm{tr}(x\,{}^t x)} \\ &= \left((x_{21}+\sqrt{-1}\,x_{11})\overline{X} + (x_{22}+\sqrt{-1}\,x_{12})\overline{Y} + (x_{23}+\sqrt{-1}\,x_{13})\overline{Z}\right)^\kappa e^{-\pi\mathrm{tr}(x\,{}^t x)}.\end{aligned}$$

由定义可知，$\varphi_{\tau,\,\Upsilon}$ 满足 (4.2)。

我们对 (4.1) 中的惠特克函数 W_π 进行归一化，使得 $W_\pi(1) = e^{-2\pi}$。于是有

$$W_\pi(\mathrm{diag}(t_1t_2,t_2)k_\theta) = e^{\sqrt{-1}\,\kappa\theta} t_1^{\kappa/2+\mathsf{w}} t_2^{2\mathsf{w}} e^{-2\pi t_1}\mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(t_1) \quad \text{for } t_1,t_2 \in \mathbb{R}^\times,\ k_\theta \in K_2^\circ.$$

对于 $a_1,a_2,t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$ 和 $u = (u_{i,j}) \in N_3(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi_{\pi,\Pi}\left(\mathrm{diag}(t_1t_2,t_2)^{-1}\varepsilon_2 u\,\mathrm{diag}(a_1a_2,a_2,1)\right) \\ &= \left(\sqrt{-1}\,t_1^{-1}t_2^{-1}a_1a_2\overline{X} + (t_2^{-1}a_2+\sqrt{-1}\,t_1^{-1}t_2^{-1}a_2u_{12})\overline{Y} + (t_2^{-1}u_{23}+\sqrt{-1}\,t_1^{-1}t_2^{-1}u_{13})\overline{Z}\right)^\kappa \\ &\qquad\qquad \times e^{-\pi\left(t_1^{-2}t_2^{-2}(a_1^2a_2^2+a_2^2u_{12}^2+u_{13}^2)+t_2^{-2}(a_2^2+u_{23}^2)\right)}.\end{aligned}$$

Lemma 5.1. 设 $a_1, a_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ 和 n, m 为非负整数。我们有 e

$$\begin{aligned}&\int_{N_3(\mathbb{R})} (t_2^{-1}a_2 + \sqrt{-1}\, t_1^{-1}t_2^{-1}a_2u_{12})^n (t_2^{-1}u_{23} + \sqrt{-1}\, t_1^{-1}t_2^{-1}u_{13})^m \\ &\qquad\qquad \times e^{-\pi\left(t_1^{-2}t_2^{-2}(a_2^2u_{12}^2+u_{13}^2)+t_2^{-2}u_{23}^2\right)}\psi_3^{-1}(u)\, du \\ &= (4\pi)^{-n/2}(\sqrt{-1})^{-m} t_1^2 t_2^{m+3} a_2^{-1} H_n\left(\pi^{1/2}(t_2^{-1}a_2 + t_1t_2a_2^{-1})\right) e^{-\pi(t_1^2t_2^2a_2^{-2}+t_2^2)},\end{aligned}$$

其中， H_n 是第 n个埃尔米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} (t_2^{-1}a_2 + \sqrt{-1}\, t_1^{-1}t_2^{-1}a_2u_{12})^n e^{-\pi t_1^{-2}t_2^{-2}a_2^2u_{12}^2 - 2\pi\sqrt{-1}\,u_{12}}\, du_{12} \\ &= t_1t_2a_2^{-1}\int_{\mathbb{R}} (t_2^{-1}a_2 + \sqrt{-1}\, u_{12})^n e^{-\pi u_{12}^2 - 2\pi\sqrt{-1}\, t_1t_2a_2^{-1}u_{12}}\, du_{12} \\ &= (4\pi)^{-n/2} t_1t_2a_2^{-1} H_n\left(\pi^{1/2}(t_2^{-1}a_2 + t_1t_2a_2^{-1})\right) e^{-\pi t_1^2t_2^2a_2^{-2}},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 [Ich05，引理7.4]得出。此外

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} (t_2^{-1}u_{23} + \sqrt{-1}\, t_1^{-1}t_2^{-1}u_{13})^m e^{-\pi(t_1^{-2}t_2^{-2}u_{13}^2 + t_2^{-2}u_{23}^2) - 2\pi\sqrt{-1}\,u_{23}}\, du_{13}\, du_{23} \\ &= t_1t_2^2\int_{\mathbb{R}^2} (u_{23} + \sqrt{-1}\, u_{13})^m e^{-\pi(u_{13}^2+u_{23}^2) - 2\pi\sqrt{-1}\, t_2u_{23}}\, du_{13}\, du_{23} \\ &= (\sqrt{-1})^{-m} t_1 t_2^{m+2} e^{-\pi t_2^2}.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理5.2。

(1) 设 $a \in \mathbb{R}^\times$、 $b \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。我们有

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^s H_n(at+b) e^{-(at+b)^2}\, d^\times t = a^{-n}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-n)}\int_{\mathbb{R}_+} t^{s-n} e^{-(at+b)^2}\, d^\times t.$$

(2) 我们有

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} t_1^{s_1}t_2^{s_2} e^{-\pi(t_1+t_2)^2}\, d^\times t_1\, d^\times t_2 = 2^{-s_1-s_2}\pi^{(1-s_1-s_2)/2}\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma(\frac{s_1+s_2+1}{2})}.$$

证明。 第一个断言可由将 [GR15, 17.42.2-(i)] 应用于 $f(t) = e^{-(at+b)^2}$ 得出。注意,

$$f^{(n)}(t) = (-a)^n H_n(at+b) e^{-(at+b)^2}.$$

对于第二个断言，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^2} t_1^{s_1} t_2^{s_2} e^{-\pi(t_1+t_2)^2}\, d^\times t_1\, d^\times t_2 &= \int_{\mathbb{R}_+^2} t_1^{s_1} t_2^{s_1+s_2} e^{-\pi(t_1t_2+t_2)^2}\, d^\times t_1\, d^\times t_2\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{t_1^{s_1}}{(1+t_1)^{s_1+s_2}} t_2^{s_1+s_2} e^{-\pi t_2^2}\, d^\times t_1\, d^\times t_2\\ &= 2^{-1}\pi^{-(s_1+s_2)/2}\Gamma\big(\tfrac{s_1+s_2}{2}\big)\int_{\mathbb{R}_+} \frac{t_1^{s_1}}{(1+t_1)^{s_1+s_2}}\, d^\times t_1\\ &= 2^{-s_1-s_2}\pi^{(1-s_1-s_2)/2}\frac{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)}{\Gamma\big(\frac{s_1+s_2+1}{2}\big)}.\end{aligned}$$

这里，第一个和第二个等式分别由变量替换 $t_1 \mapsto t_1t_2$ 和 $t_2 \mapsto (1+t_1)^{-1}t_2$ 得出，最后一个等式则由 [GR15, 8.380.3, 8.384.1] 以及倍增公式得出。证明至此完成。□

定理 5.2（Miyazaki）。对于 $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}_+$，我们有

$$\begin{aligned}&W_\Pi\left(\mathrm{diag}(a_1a_2, a_2, 1)\right)\\ &= 2^{-4}\sum_{n_1+n_2+n_3=\kappa}\frac{\kappa!}{n_1!n_2!n_3!}\overline{X}^{n_1}\overline{Y}^{n_2}\overline{Z}^{n_3}(\sqrt{-1})^{n_1-n_3}a_1a_2^{1-2\mathsf{w}}\\ &\quad\times\int_{s_1}\frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{s_2}\frac{ds_2}{2\pi\sqrt{-1}}\,a_1^{-s_1}a_2^{-s_2}\\ &\qquad\times\frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1+\frac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+n_1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s_2+\frac{\kappa-1}{2}-\mathsf{w})\Gamma_{\mathbb{R}}(s_2+n_3)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+s_2+n_1+n_3)}.\end{aligned}$$

这里，s_1 和 s_2 中的积分路径是在复平面内的竖直直线，其实部足够大，从而使被积函数的极点位于其左侧。

证明。由 (4.3) 和引理 5.1，我们有

$$\begin{aligned}&W_\Pi\left(\mathrm{diag}(a_1a_2, a_2, 1)\right)\\ &= \sum_{n_1+n_2+n_3=\kappa}\frac{\kappa!}{n_1!n_2!n_3!}\overline{X}^{n_1}\overline{Y}^{n_2}\overline{Z}^{n_3}(4\pi)^{-n_2/2}(\sqrt{-1})^{n_1-n_3}a_1a_2\\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}_+^2} d^\times t_1\, d^\times t_2\, t_1^{-n_1+(\kappa-1)/2+\mathsf{w}}t_2^{-n_1+n_3+2\mathsf{w}}(a_1a_2)^{n_1}H_{n_2}\left(\pi^{1/2}(t_2^{-1}a_2+t_1t_2a_2^{-1})\right)\\ &\qquad\qquad\times e^{-\pi(t_1^{-2}t_2^{-2}a_1^2a_2^2+t_2^2)-\pi(t_2^{-1}a_2+t_1t_2a_2^{-1})^2}.\end{aligned}$$

对每个满足 $n_1+n_2+n_3=\kappa$ 的三元组 (n_1,n_2,n_3)，令 $I_{n_1,n_2,n_3}(a_1,a_2)$ 表示上述关于 $\mathbb{R}_+^2$ 的积分。我们如下计算其 Mellin变换：

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}_+^2} a_1^{s_1}a_2^{s_2} I_{n_1,n_2,n_3}(a_1,a_2)\, d^\times a_1\, d^\times a_2\\
&= \int_{\mathbb{R}_+^4} d^\times a_1\, d^\times a_2\, d^\times t_1\, d^\times t_2\, a_1^{s_1+n_1} a_2^{s_2+n_2} t_1^{-n_1+(\kappa-1)/2+\mathsf{w}} t_2^{-n_1+n_3+2\mathsf{w}} H_{n_2}\left(\pi^{1/2}(t_2^{-1}a_2+t_1t_2a_2^{-1})\right)\\
&\qquad\qquad \times e^{-\pi(t_1^{-2}t_2^{-2}a_1^2a_2^2+t_2^2)-\pi(t_2^{-1}a_2+t_1t_2a_2^{-1})^2}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}_+} a_1^{s_1+n_1}e^{-\pi a_1^2}\, d^\times a_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}_+} t_2^{s_2+n_3+2\mathsf{w}} e^{-\pi t_2^2}\, d^\times t_2\right)\\
&\quad\times \int_{\mathbb{R}_+^2} a_2^{-s_1+s_2} t_1^{s_1+(\kappa-1)/2+\mathsf{w}} H_{n_2}\left(\pi^{1/2}(a_2+t_1a_2^{-1})\right) e^{-\pi(a_2+t_1a_2^{-1})^2}\, d^\times a_2\, d^\times t_1\\
&= 2^{-2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+n_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s_2+n_3+2\mathsf{w})\cdot\pi^{-n_2/2}\Gamma(s_1+\tfrac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\Gamma(s_1-n_2+\tfrac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})^{-1}\\
&\quad\times \int_{\mathbb{R}_+^2} a_2^{-s_1+s_2+n_2} t_1^{s_1-n_2+(\kappa-1)/2+\mathsf{w}} e^{-\pi(a_2+t_1a_2^{-1})^2}\, d^\times a_2\, d^\times t_1\\
&= 2^{-2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+n_1)\Gamma_{\mathbb{R}}(s_2+n_3+2\mathsf{w})\cdot\pi^{-n_2/2}\Gamma(s_1+\tfrac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\\
&\quad\times 2^{-s_1-s_2-n_1-n_3+1-2\mathsf{w}}\pi^{1-(s_1+s_2+n_1+n_3)/2-\mathsf{w}}\Gamma(s_2+\tfrac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\Gamma(\tfrac{s_1+s_2+n_1+n_3+2\mathsf{w}}{2})^{-1}\\
&= 2^{-4}(4\pi)^{n_2/2}\frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(s_1+\frac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+n_1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s_2+\frac{\kappa-1}{2}+\mathsf{w})\Gamma_{\mathbb{R}}(s_2+n_3+2\mathsf{w})}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s_1+s_2+n_1+n_3+2\mathsf{w})}.
\end{aligned}$$

这里，第二个等式由变量替换 $a_1\mapsto t_1a_2^{-1}a_1$, $a_2\mapsto t_2a_2$ 得出，第三和第四个等式则分别由引理5.2-(1)和(2)得出。由 Mellin反演公式及变量替换 $s_2\mapsto s_2-2\mathsf{w}$，即得所述结论。证明完毕。□

5.3. 在本小节中，设 $F=\mathbb{C}$。对于 $\nu\in\mathbb{C}$ 和 $\kappa\in\mathbb{Z}$，令 $\chi_{[\nu,\kappa]}$ 表示由下式给出的 $\mathbb{C}^\times$ 的特征

$$\chi_{[\nu,\kappa]}(z)=|z|_{\mathbb{C}}^{\nu}\left(\frac{z}{\sqrt{|z|_{\mathbb{C}}}}\right)^{\kappa}.$$

对于 $\underline{\nu}=(\nu_1,\ \ldots\ldots,\ \nu_n)\in\mathbb{C}^n$，令

$$|\underline{\nu}|:=\nu_1+\cdots+\nu_n,\quad \tilde{\underline{\nu}}:=(\nu_2-\nu_1,\ldots,\nu_n-\nu_1)\in\mathbb{C}^{n-1}.$$

对于 $\underline{\nu}=(\nu_1,\ \ldots\ldots,\ \nu_n)\in\mathbb{C}^n$ 和 $\underline{\kappa}=(\kappa_1,\ \ldots\ldots,\ \kappa_n)\in\mathbb{Z}^n$，令 $\pi_{[\nu,\kappa]}$ 为由下式定义的 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 的主系列表示

$$\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}:=\chi_{[\nu_1,\kappa_1]}\times\cdots\times\chi_{[\nu_n,\kappa_n]}.$$

当 $\underline{\kappa}=\underline{0}$ 时，我们记作 $\pi_{\underline{\nu}}=\pi_{[\underline{\nu},\underline{0}]}$。在这种情况下，我们有如下由 Ishii 和 Stade 得到的归一化球面Whittaker函数 $W_\nu\in\mathscr{W}(\pi_\nu,\psi_n)^{K_n}$ 的 Mellin–Barnes积分表示 [Sta95，命题 2。1], [IS07，定理 12]：该公式以递归方式表示。令 $t:\ \mathbb{R}_+^{n-1}\to T_n^+$为一个同态，定义为

$$t(a):=\mathrm{diag}(a_1\cdots a_{n-1},a_2\cdots a_{n-1},\ldots,a_{n-1},1)\quad\text{for } a=\mathrm{diag}(a_1,\ldots,a_{n-1}).$$

现在，定义 $f_{\underline{\nu}}: \mathbb{R}_+^{n-1} \to \mathbb{C}$ 为

$$f_{\underline{\nu}}(a) = \delta_{B_n(\mathbb{C})}(t(a))^{-1/2} W_{\underline{\nu}}(t(a)).$$

那么对于 $n = 2$，$f_\nu(a) = a^{\nu_1+\nu_2} K_{\nu_1-\nu_2}(4\pi a)$，并且

$$\begin{aligned} f_{\underline{\nu}}(a) = &\int_{z_1,\dots,z_{n-2}} \frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}} (\mathcal{M} f_{\tilde{\underline{\nu}}})(z_1,\dots,z_{n-2}) \\ &\times \int_{s_1,\dots,s_{n-1}} \frac{ds}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} a_i^{-s_i} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_i - z_{i-1}}{2} + i\nu_1\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_i - z_i}{2} + i\nu_1\right) \\ &\times a_{n-1}^{-s_{n-1}} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_{n-1} - z_{n-2}}{2} + (n-1)\nu_1\right) \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_{n-1}}{2} + |\tilde{\underline{\nu}}| + (n-1)\nu_1\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

对于 $n \geq 3$，其中我们令 $z_0 = 0$，而 $\mathcal{M} f_{\tilde{\nu}}$ 是 $f_{\tilde{\nu}}$的 Mellin变换。这里，z_i 和 s_j 中的积分路径是复平面内的竖直直线，其实部足够大，使被积函数的极点都位于其左侧。

Ishii–Stade 的公式 (5.3) 可利用传播公式 (4.3) 得到。更一般地，假设$\pi_{[\nu,\kappa]}$ 不可约且

$$\underline{\kappa} = (\kappa, 0, \dots, 0), \quad \kappa \geq 0. \tag{5.4}$$

在下面的定理 5.3 中，我们利用传播公式推导出 $\pi_{[\nu,\kappa]}$ 在最小 K型中的惠特克函数的 Mellin–Barnes 型积分表示。从现在起，我们假设 (5.4) 成立。令 ρ_κ 为 $\pi_{[\nu,\kappa]}$的最小 K型。那么，它的最高权为 (κ，0，……，0)。ρ_κ 的作用回顾如下：令 $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_\kappa$ 为变量 X_1，……，X_n中次数为 κ 的齐次复多项式空间。我们将 $X = (X_1, \dots, X_n)$记作行向量变量。那么，K_n 在 $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_\kappa$ 上的作用为

$$(\rho_\kappa(k)P)(X) := P(Xk), \quad \text{for } k \in K_n,\ P \in \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]_\kappa. \tag{5.5}$$

现在我们使用传播公式来定义一个生成元

$$W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]} \in \left(\mathscr{W}(\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}, \psi_n) \otimes \overline{\rho}_\kappa\right)^{K_n}.$$

设 $\pi := \pi_{[\tilde{\underline{\nu}},(-\kappa,\dots,-\kappa)]}$ 且 $\Pi := \pi \times 1$。那么我们有

$$\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]} = \Pi \otimes \chi_{[\nu_1,\kappa]}.$$

分别设 Υ 和 τ 为 Π 和 π 的最小 K-类型。那么

$$\Upsilon = \rho_\kappa \otimes \det{}^{-\kappa}, \quad \tau = \det{}^{-\kappa}.$$

特定的 Bruhat-Schwartz 函数 $\varphi_{\tau,\Upsilon} \in \mathscr{S}(M_{n-1,n}(\mathbb{C})) \otimes \left(\tau \boxtimes \Upsilon\right)$ 定义为

$$\varphi_{\tau,\Upsilon}(x) = (-1)^{\kappa(n-1)} 2^{4(n-1)} \cdot \det\left(\frac{X}{\overline{x}}\right)^\kappa e^{-2\pi \mathrm{tr}(x^t \overline{x})}.$$

显然 $\varphi_{\tau,\Upsilon}$ 满足 (4.2)。我们对 (4.1) 中的惠特克函数 W_π 进行了归一化 b y

$$W_\pi := W_{\tilde{\underline{\nu}}} \otimes \chi_{[0,-\kappa]}.$$

由定理 4.1，我们有一个生成元

$$W_\Pi := \mathcal{W}_{\varphi_{\tau,\Upsilon} \otimes W_\pi} \in \left(\mathscr{W}(\Pi, \psi_n) \otimes \overline{\Upsilon}\right)^{K_n}.$$

接下来定义

$$W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]} := W_\Pi \otimes \chi_{[\nu_1,\kappa]}.$$

对于 $t=\mathrm{diag}(t_1,\dots,t_{n-1})\in T_{n-1}^+$、$\alpha=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in T_n^+$ 以及 $u\in N_n$，令 $A_i(t,\alpha,u)$ 表示从 $t^{-1}\varepsilon_{n-1}u\alpha$ 中删去第 i 列后得到的 $n-1\times n-1$ 矩阵。于是有

$$\begin{aligned}\varphi_{\tau,\Upsilon}(t^{-1}\varepsilon_{n-1}u\alpha)=(-1)^{\kappa(n-1)}2^{4(n-1)}\\ \times\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa}\frac{\kappa!}{\ell_1!\cdots\ell_n!}(-1)^{\sum_{i=1}^n(i+1)\ell_i}X_1^{\ell_1}\cdots X_n^{\ell_n}\prod_{i=1}^n\overline{\det(A_i(t,\alpha,u))}^{\ell_i}\\ \times e^{-2\pi\left(\sum_{i=1}^{n-1}t_i^{-2}\alpha_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}t_i^{-2}\alpha_j^2|u_{ij}|_{\mathbb{C}}\right)}.\end{aligned}$$

回顾以下关于傅里叶变换的著名结果。

引理 5.3. 对于 $N\ge 1$ 和 $a\in\mathbb{R}$，我们有

$$\int_{\mathbb{C}}\overline{z}^Ne^{-2\pi|z|_{\mathbb{C}}-4\pi\sqrt{-1}\,\Re(az)}\,dz=(-\sqrt{-1})^Na^Ne^{-2\pi a^2}.$$

引理5.4. 设$(\ell_1,\dots,\ell_n)\in\mathbb{Z}_{\ge0}^n$，其中 $\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa$、$t\in T_{n-1}^+$和 $\alpha\in T_n^+$。我们有

$$\begin{aligned}&\int_{N_n(\mathbb{C})}\prod_{i=1}^n\overline{\det(A_i(t,\alpha,u))}^{\ell_i}e^{-2\pi\sum_{1\le i<j\le n}t_i^{-2}\alpha_j^2|u_{ij}|_{\mathbb{C}}}\psi_n^{-1}(u)\,du\\ &=|\det(\alpha)|_{\mathbb{C}}^{-(n-1)/2}\delta_{B_n(\mathbb{C})}(\alpha)^{1/2}|\det(t)|_{\mathbb{C}}^{n/2}\delta_{B_{n-1}(\mathbb{C})}(t)^{1/2}\\ &\quad\times\prod_{i=1}^{n-1}(-\sqrt{-1})^{\tilde{\ell}_i}t_i^{2\tilde{\ell}_i-\kappa}\alpha_i^{\kappa-\tilde{\ell}_i}\alpha_{i+1}^{-\tilde{\ell}_i}e^{-2\pi t_i^2\alpha_{i+1}^{-2}}.\end{aligned}$$

˜这里 $\ell_i=\ell_1+\cdots+\ell_i$对应于 $1\le i\le n-1$。

证明. 该积分是如下形式的积分的线性组合

$$\int_{N_n(\mathbb{C})}\prod_{1\le i<j\le n}\overline{u}_{ij}^{a_{ij}}e^{-2\pi t_i^{-2}\alpha_j^2|u_{ij}|_{\mathbb{C}}}\psi_n^{-1}(u)\,du,\quad a_{ij}\ge0.$$

由引理 5.3 可知，若对于某个 $j\ge i+2$ 有 $a_{ij}>0$，则上述积分为零。因此，为了计算该积分，我们可以将 $A_i(t,\ \alpha,\ u)$ 替换为 $A_i(t,\ \alpha,\ u')$，其中

$$u'_{ij}=\begin{cases}u_{ij} & \text{if } i\le j+1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意到

$$\det(A_i(t,\alpha,u'))=\prod_{j=1}^{i-1}t_j^{-1}\alpha_j\prod_{j=i}^{n-1}t_j^{-1}\alpha_{j+1}u_{j,j+1}.$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{N_n(\mathbb{C})} \prod_{i=1}^{n} \overline{\det(A_i(t,\alpha,u))}^{\ell_i} e^{-2\pi \sum_{1\le i<j\le n} t_i^{-2}\alpha_j^2 |u_{ij}|_{\mathbb{C}}} \psi_n^{-1}(u)\, du \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (t_i^{-1}\alpha_i)^{\kappa-\tilde{\ell}_i} \int_{N_n(\mathbb{C})} \prod_{i=1}^{n-1} (t_i^{-1}\alpha_{i+1}\overline{u}_{i,i+1})^{\tilde{\ell}_i} e^{-2\pi \sum_{1\le i<j\le n} t_i^{-2}\alpha_j^2 |u_{ij}|_{\mathbb{C}} - 4\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Re(u_{i,i+1})}\, du \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (t_i^{-1}\alpha_i)^{\kappa-\tilde{\ell}_i} t_i^{2n-2i}\alpha_{i+1}^{-2i} \int_{N_n(\mathbb{C})} \prod_{i=1}^{n-1} \overline{u}_{i,i+1}^{\tilde{\ell}_i} e^{-2\pi \sum_{1\le i<j\le n} |u_{ij}|_{\mathbb{C}} - 4\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Re(t_i\alpha_{i+1}^{-1}u_{i,i+1})}\, du \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (t_i^{-1}\alpha_i)^{\kappa-\tilde{\ell}_i} t_i^{2n-2i}\alpha_{i+1}^{-2i} (-\sqrt{-1})^{\tilde{\ell}_i} (t_i\alpha_{i+1}^{-1})^{\tilde{\ell}_i} e^{-2\pi t_i^2\alpha_{i+1}^{-2}}.
\end{aligned}$$

这里第三个等式由变量替换 $u_{ij} \mapsto t_i\alpha_j^{-1}u_{ij}$ 得到，第四个等式由引理 5.3 得到。最后，注意

$$\prod_{i=1}^{n-1} t_i^{2n-2i}\alpha_{i+1}^{-2i} = |\det(\alpha)|_{\mathbb{C}}^{-(n-1)/2} \delta_{B_n(\mathbb{C})}(\alpha)^{1/2} |\det(t)|_{\mathbb{C}}^{n/2} \delta_{B_{n-1}(\mathbb{C})}(t)^{1/2}.$$

至此证明完毕。 □

对于满足 $\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa$ 的 $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^n$，我们记作 $X^{\underline{\ell}} = X_1^{\ell_1}\cdots X_n^{\ell_n}$。显然，$\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}$ 的极小 K-型中的权向量由这些 ℓ 标号。在 $\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}$ 的 Whittaker 模型中，我们将这些权向量 $W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}$ 规范化，使得

$$W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]} = \sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa} \frac{\kappa!}{\ell_1!\cdots\ell_n!} (\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{\ell}_i} X^{\underline{\ell}} \cdot W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}. \tag{5.6}$$

这里 $\tilde{\ell}_i=\ell_1+\cdots+\ell_i$。对每个满足 $\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa$ 的 ℓ，定义 $f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}\colon \mathbb{R}_+^{n-1}\to\mathbb{C}$ 为

$$f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}(a) = \delta_{B_n(\mathbb{C})}(t(a))^{-1/2} W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}(t(a)).$$

定理 5.3. 设 $\ell=(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{Z}_{\ge 0}^n$ 满足 $\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa$。我们有

$$\begin{aligned}
&f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\underline{\ell}}(a_1,\ldots,a_{n-1}) \\
&= \int_{z_1,\ldots,z_{n-2}} \frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}} (\mathcal{M} f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z_1,\ldots,z_{n-2}) \\
&\quad\times \int_{s_1,\ldots,s_{n-1}} \frac{ds}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} a_i^{-s_i} \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_i+\kappa-\tilde{\ell}_i-z_{i-1}}{2}+i\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_i+\tilde{\ell}_i-z_i}{2}+i\nu_1\right) \\
&\qquad\times a_{n-1}^{-s_{n-1}}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_{n-1}+\kappa-\tilde{\ell}_{n-1}-z_{n-2}}{2}+(n-1)\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s_{n-1}+\tilde{\ell}_{n-1}}{2}+|\underline{\tilde{\nu}}|+(n-1)\nu_1\right).
\end{aligned}$$

˜这里我们令 $z_0=0$ 和 $\ell_i=\ell_1+\cdots+\ell_i$ 表示 $1\le i\le n-1$。

证明。令 $a=(a_1、\ldots\ldots、a_{n-1})\in\mathbb{R}_+^{n-1}$。令 $\alpha_i=\prod_{j=i}^{n-1}a_j$ 表示 $1\le i\le n-1$ 和 $\alpha_n=1$。由传播公式 (4.3) 和引理5.4可得

$$\begin{aligned}&\delta_{B_n(\mathbb{C})}(t(a))^{-1/2}W_\Pi(t(a))\\&=(-1)^{\kappa(n-1)}2^{4(n-1)}\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=\kappa}\frac{\kappa!}{\ell_1!\cdots\ell_n!}(-1)^{\sum_{i=1}^n(i+1)\ell_i}(-\sqrt{-1})^{\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{\ell}_i}X^{\underline{\ell}}\\&\times\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}d^\times t_i\,f_{\underline{\tilde{\nu}}}(t_1t_2^{-1},t_2t_3^{-1},\ldots,t_{n-2}t_{n-1}^{-1})t_{n-1}^{2|\underline{\tilde{\nu}}|}\prod_{i=1}^{n-1}t_i^{2\tilde{\ell}_i-\kappa}\alpha_i^{\kappa-\tilde{\ell}_i}\alpha_{i+1}^{-\tilde{\ell}_i}e^{-2\pi(t_i\alpha_{i+1}^{-1}+t_i^{-2}\alpha_i^2)}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

注意，$(-1)^{\sum_{i=1}^n(i+1)\ell_i+\sum_{i=1}^{n-1}\tilde{\ell}_i}=(-1)^{\kappa(n-1)}$。对于 $z\in\mathbb{C}$ 和 $b_1,b_2\in\mathbb{R}_+$，回顾一下（参见[GR15, 17.43.18]）

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty t^ze^{-2\pi(t^2b_1^2+t^{-2}b_2^2)}\,d^\times t\\&=(b_1^{-1}b_2)^{z/2}K_{z/2}(4\pi b_1b_2)\\&=2^{-4}(b_1^{-1}b_2)^{z/2}\int_s\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s+z}{4}\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s-z}{4}\right)(b_1b_2)^{-s}\,\frac{ds}{2\pi\sqrt{-1}}.\end{aligned}$$

由 Mellin反演公式可得

$$f_{\underline{\tilde{\nu}}}(t_1t_2^{-1},t_2t_3^{-1},\ldots,t_{n-2}t_{n-1}^{-1})=\int_{z_1,\ldots,z_{n-2}}\frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}}\prod_{i=1}^{n-2}(t_it_{i+1}^{-1})^{-z_i}(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z_1,\ldots,z_{n-2}).$$

注意

$$\prod_{i=1}^{n-2}(t_it_{i+1}^{-1})^{-z_i}=\prod_{i=1}^{n-2}t_i^{-z_i+z_{i-1}}\cdot t_{n-1}^{z_{n-2}},$$

其中我们令 $z_0=0$。因此，在（5.7）的右侧，以 $(\ell_1,\ldots,\ell_{n+1})$ 为指标的积分等于

$$\begin{aligned}&2^{-4(n-1)}\prod_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{\kappa-\tilde{\ell}_i}\alpha_{i+1}^{-\tilde{\ell}_i}\int_{z_1,\ldots,z_{n-2}}\frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}}\,(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z)\int_{s_1,\ldots,s_{n-1}}\frac{ds}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{-s_i}\\&\times\prod_{i=1}^{n-2}(\alpha_i\alpha_{i+1})^{(2\tilde{\ell}_i-\kappa-z_i+z_{i-1})/2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s_i+2\tilde{\ell}_i-\kappa-z_i+z_{i-1}}{4}\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s_i-2\tilde{\ell}_i+\kappa+z_i-z_{i-1}}{4}\right)\\&\times\alpha_{n-1}^{(2\tilde{\ell}_{n-1}-\kappa+2|\underline{\tilde{\nu}}|+z_{n-2})/2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s_{n-1}+2\tilde{\ell}_{n-1}-\kappa+2|\underline{\tilde{\nu}}|+z_{n-2}}{4}\right)\\&\times\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{2s_{n-1}-2\tilde{\ell}_{n-1}+\kappa-2|\underline{\tilde{\nu}}|-z_{n-2}}{4}\right).\end{aligned}$$

注意到

$$\prod_{i=1}^{n-2}(\alpha_i\alpha_{i+1})^{-z_i+z_{i-1}}\cdot\alpha_{n-1}^{z_{n-2}}=\prod_{i=1}^{n-2}a_i^{-z_i-z_{i-1}}\cdot a_{n-1}^{-z_{n-2}}.$$

通过变量替换

$$s_i \longmapsto \begin{cases} s_i + \frac{\kappa - z_i - z_{i-1}}{2} & \text{if } 1 \le i \le n-2, \\ s_i + \frac{\kappa + 2|\underline{\tilde{\nu}}| - z_{i-1}}{2}, & \text{if } i = n-1 \end{cases}$$

我们看到，上述积分等于

$$\begin{aligned} 2^{-4(n-1)} \int_{z_1,\dots,z_{n-2}} & \frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}} \, (\mathcal{M} f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z_1, \dots, z_{n-2}) \\ & \times \int_{s_1,\dots,s_{n-1}} \frac{ds}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-2} a_i^{-s_i} \Gamma_{\mathbb{C}} \left(\frac{s_i + \kappa - \tilde{\ell}_i - z_{i-1}}{2} \right) \Gamma_{\mathbb{C}} \left(\frac{s_i + \tilde{\ell}_i - z_i}{2} \right) \\ & \times a_{n-1}^{-s_{n-1}} \Gamma_{\mathbb{C}} \left(\frac{s_{n-1} + \kappa - \tilde{\ell}_{n-1} - z_{n-2}}{2} \right) \Gamma_{\mathbb{C}} \left(\frac{s_{n-1} + \tilde{\ell}_{n-1}}{2} + |\underline{\tilde{\nu}}| \right). \end{aligned}$$

最后，根据定义，我们有

$$W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}(t(a)) = \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{2i\nu_1} W_{\Pi}(t(a)).$$

由针对 $1 \le i \le n-1$ 的变量替换 $s_i \mapsto s_i + 2i\nu_1$，即可得到该断言。证明完毕。□

注记 5.1。当 $\ell = (\kappa, 0, \dots, 0)$ 时，*Ishii–Miyazaki*（[IM22, 定理 A。1]）和 *Humphries*（[Hum25, 引理 9。8]）也得到了 $f_{[\nu,\kappa],\ell}$ 的传播公式。

6. Asai local zeta integrals

本节中，我们使用 Mellin–Barnes 型积分表示来计算 Flicker [Fli93]和 Kable [Kab04]引入的局部 zeta 积分。设 F/F_0 是特征零局部域的二次扩张，$c \in \mathrm{Gal}(F/F_0)$ 是非平凡自同构。假设 F 上的非平凡加性特征 ψ 由某个 F_0上的加性特征 ψ_{F_0} 通过 $\psi = \psi_{F_0} \circ \mathrm{Tr}_{F/F_0}$ 给出。设 π 是 $\mathrm{GL}_n(F)$ 的不可约容许泛型表示。对于 $\varphi \in \mathcal{S}(M_{1,n}(F_0))$ 和 $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_n)$，局部 zeta 积分为

$$Z(s, \varphi, W) = \int_{N_n(F_0)\backslash \mathrm{GL}_n(F_0)} \varphi(e_n g) W\left(\mathrm{diag}(\delta^{n-1}, \delta^{n-2}, \dots, 1) g\right) |\det(g)|_{F_0}^{s} \, dg. \tag{6.1}$$

这里 $e_n = (0, \dots\dots, 0, 1)$，$\delta \in F$是一个固定元素，且 $\mathrm{Tr}^{F/F_0}(\delta) = 0$。当 $\Re(s)$充分大时，该积分绝对收敛，并可亚纯延拓至整个复平面（参见 [BP21，定理 1-(i)]，；另见 [Fli93，附录] 以及 [Kab04，定理 2]，其中 F 为非阿基米德域）。另一方面，定义了 π 的 Asai L-函数如下：设 $\phi_\pi : WD_F \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 是 π的 Langlands 参数。记 $\mathrm{As}(\phi_\pi) : WD_{F_0} \to \mathrm{GL}_{n^2}(\mathbb{C})$ 为从 WD_F到 WD_{F_0}的乘法诱导（参见 [Pra92，§7]）。π 的 Asai L-函数定义为

$$L(s, \pi, \mathrm{As}) := L(s, \mathrm{As}(\phi_\pi)).$$

特别地，如果 π 是一个主系列表示

$$\pi = \chi_1 \times \cdots \times \chi_n,$$

那么我们有（参见 [Pra92，引理 7.1-(d)]）

$$L(s,\pi,\mathrm{As})=\prod_{i=1}^{n}L(s,\chi_i|_{F^\times})\prod_{1\le i<j\le n}L(s,\chi_i\chi_j^c). \tag{6.2}$$

我们预期， $L(s,\pi,\mathrm{As})$ 是这些局部 zeta 积分的“最大公约数”。更确切地说，我们预期存在有限多个 φ_i 和 W_i，使得

$$L(s,\pi,\mathrm{As})=\sum_i Z(s,\varphi_i,W_i).$$

当 F 是非阿基米德时，Matringe 在 [Mat11 的定理 5.3] 中证明了这一点。当$F=\mathbb{C}$ 和 $n=2$ 时，作者与 Ishikawa 在 [CCI20] 中证明了这一点。当 $F=\mathbb{C}$ 和$n\ge 3$ 时，据作者所知，现有文献中尚无相关结果。本节将证明，对于满足 (5.4) 的 $\pi=\pi_{[\nu,\kappa]}$，这一预期成立，差一个关于 s 的次数为 $\lfloor\frac{\kappa}{2}\rfloor$ 的多项式。

设 $\pi=\pi_{[\nu,\kappa]}$ 满足 (5.4)。回忆一下，$\pi_{[\nu,\kappa]}$ 的极小 K-型 ρ_κ 的模型由 (5.5) 描述。设 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\rho_\kappa}$ 是 $\rho_\kappa\times\rho_\kappa$ 上一个 K_n-不变的厄米配对，并将其归一化使得

$$\langle X_n^\kappa,X_n^\kappa\rangle_{\rho_\kappa}=1.$$

回顾此处的 $K_n=\mathrm{U}_n(\mathbb{R})$。定义 Bruhat-Schwartz 函数 $\varphi_\kappa\in\mathcal{S}(M_{1,\ n}(\mathbb{R}))\otimes\rho_\kappa$如下

$$\varphi_\kappa(x)=(x^tX)^\kappa\,e^{-\pi x^tx}.$$

注意，我们有

$$\varphi_\kappa(xk)=(\rho_\kappa(k)^{-1}\varphi_\kappa)(x),\quad k\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R}). \tag{6.3}$$

令 $W_{[\nu,\kappa]}$ 为按 (5.6) 归一化的 $\pi_{[\nu,\kappa]}$ 的 ρ_κ值惠特克函数。 $W_{[\nu,\kappa]}$ 的系数是最小 K型 ρ_κ中的权向量。在下文的定理 6.1 中，我们计算局部 zeta 积分

$$\begin{aligned}&Z(s,\varphi_\kappa,W_{[\nu,\kappa]})\\&:=\int_{N_n(\mathbb{R})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}\left\langle\varphi_\kappa(e_ng),\,W_{[\nu,\kappa]}\left(\mathrm{diag}((\sqrt{-1})^{n-1},(\sqrt{-1})^{n-2},...,1)g\right)\right\rangle_{\rho_\kappa}|\det(g)|_{\mathbb{R}}^s\,dg.\end{aligned}$$

它是形如 (6.1) 的局部 zeta 积分的有限和。

我们先从 Ishii 和 Stade 在 Ishii–Stade IS13, 命题2 中关于类一惠特克函数 (5.3) 表达式的以下结果开始。

命题6.1 (Ishii–Stade)。 令 $\mu=(\mu_1,...,\mu_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$。对于任意 $\sigma\in\mathbb{C}$，我们有

$$\begin{aligned}&(\mathcal{M}f_{\underline{\mu}})(w_1,...,w_{n-2})\\&=4^{-n+2}\frac{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{w_{n-2}}{2}+|\underline{\mu}|+\sigma\right)}{\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma_{\mathbb{C}}(\mu_i+\sigma)}\\&\quad\times\int_{z_1,...,z_{n-2}}\frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}}\,(\mathcal{M}f_{\underline{\mu}})(z_1,...,z_{n-2})\prod_{i=1}^{n-2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{w_i-z_i}{2}\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{w_{i-1}-z_i}{2}+\sigma\right).\end{aligned}$$

这里令 $w_0=0$。

证明。 在 [IS13 的命题 2.6], 中，已对实数域$\mathbb{R}$上的类一 Whittaker 函数证明了该结果。结合 Stade 的[Sta95 命题 2.1]，即可从该结果推出这里给出的断言。或者，也可以按照 [IS13] 中的论证，通过归纳法直接证明该断言。最终，证明归结为 Mellin–Barnes 型积分表示（5.3）或定理 5.3，以及 Barnes 第一引理，该引理指出

$$\begin{aligned}&\int_z \Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{z}{2}+a\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{z}{2}+b\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(-\frac{z}{2}+c\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(-\frac{z}{2}+d\right)\frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}}\\&=4\cdot\frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(a+c)\Gamma_{\mathbb{C}}(a+d)\Gamma_{\mathbb{C}}(b+c)\Gamma_{\mathbb{C}}(b+d)}{\Gamma_{\mathbb{C}}(a+b+c+d)}.\end{aligned}$$

□

定理 6.1. 我们有

$$Z(s,\varphi_\kappa,W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]})=2^{n(n-2)}\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\nu_1+\kappa)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\nu_1+\epsilon)}\cdot L(s,\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]},\mathrm{As}).$$

这里 $\epsilon\in\{0,1\}$ 使得 $\kappa\equiv\epsilon$（模 2）。

证明。 根据 $W_{[\nu,\kappa]}$ 的等变性质以及 (6.3)，我们有

$$\left\langle\varphi_\kappa(xk),\,W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}(gk)\right\rangle_{\rho_\kappa}=\left\langle\varphi_\kappa(x),\,W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}(g)\right\rangle_{\rho_\kappa}$$

对于所有的 $x\in M_{1,n}(\mathbb{R})$、 $g\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 和 $k\in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$。因此，我们有

$$\begin{aligned}&Z(s,\varphi_\kappa,W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]})\\&=\int_{T_n^+}\left\langle\varphi_\kappa(e_nt),\,W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]}(\mathrm{diag}((\sqrt{-1})^{n-1},(\sqrt{-1})^{n-2},...,1)t)\right\rangle_{\rho_\kappa}|\det(t)|_{\mathbb{R}}^s\delta_{B_n(\mathbb{R})}(t)^{-1}\,dt\\&=\langle X_n^\kappa,X_n^\kappa\rangle_{\rho_\kappa}\int_{\mathbb{R}_+^n}\prod_{i=1}^n d^\times a_i\,a_n^\kappa e^{-\pi a_n^2}W_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\,(0,...,\kappa)}(t(a))\delta_{B_n(\mathbb{C})}(t(a))^{-1/2}\prod_{i=1}^n a_i^{is}\\&=\left(\int_0^\infty a_n^{ns+\kappa+2|\underline{\nu}|}e^{-\pi a_n^2}\,d^\times a_n\right)\int_{\mathbb{R}_+^{n-1}}\prod_{i=1}^{n-1}d^\times a_i\,f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\,(0,...,\kappa)}(a_1,...,a_{n-1})\prod_{i=1}^{n-1}a_i^{is}\\&=2^{-2+(ns+\kappa+2|\underline{\nu}|)/2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{ns+\kappa}{2}+|\underline{\nu}|\right)\cdot(\mathcal{M}f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\,(0,...,\kappa)})(s,...,is,...,(n-1)s).\end{aligned}$$

由定理 5.3，我们有

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{M}f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\,(0,\dots,\kappa)})(s,\dots,is,\dots,(n-1)s)\\
&=\int_{z_1,\dots,z_{n-2}}\frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}}\,(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z_1,\dots,z_{n-2})\\
&\quad\times\prod_{i=1}^{n-2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{is+\kappa-z_{i-1}}{2}+i\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{is-z_i}{2}+i\nu_1\right)\\
&\quad\times\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{(n-1)s+\kappa-z_{n-2}}{2}+(n-1)\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{(n-1)s}{2}+|\underline{\tilde{\nu}}|+(n-1)\nu_1\right)\\
&=\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s+\kappa}{2}+\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{(n-1)s}{2}+|\underline{\tilde{\nu}}|+(n-1)\nu_1\right)\\
&\quad\times\int_{z_1,\dots,z_{n-2}}\frac{dz}{(2\pi\sqrt{-1})^{n-2}}\,(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(z_1,\dots,z_{n-2})\\
&\qquad\times\prod_{i=1}^{n-2}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{is-z_i}{2}+i\nu_1\right)\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{(i+1)s+\kappa-z_i}{2}+(i+1)\nu_1\right).
\end{aligned}$$

在命题6.1中，令

$$\begin{cases}\underline{\mu}=\underline{\tilde{\nu}},\\ w_i=is+2i\nu_1, & 1\le i\le n-2\\ \sigma=s+2\nu_1+\frac{\kappa}{2},\end{cases}$$

我们看到，上述在 z_1，..... z_{n-2} 中的积分等于

$$4^{n-2}\frac{\prod_{i=1}^{n-1}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\nu_1+\nu_{i+1}+\frac{\kappa}{2}\right)}{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{ns+\kappa}{2}+|\underline{\nu}|\right)}\cdot(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(s+2\nu_1,\dots,i(s+2\nu_1),\dots,(n-2)(s+2\nu_1)).$$

注意

$$\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+\nu_1+\nu_{i+1}+\frac{\kappa}{2}\right)=L(s,\chi_{[\nu_1,\kappa]}\chi^c_{[\nu_{i+1},0]}),\quad 1\le i\le n-1$$

and

$$\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{s+\kappa}{2}+\nu_1\right)=2^{1-(s+2\nu_1+\kappa)/2}\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\nu_1+\kappa).$$

综上所述，我们有

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{M}f_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}],\,(0,\dots,\kappa)})(s,\dots,is,\dots,(n-1)s)\\
&=2^{2(n-2)+1-(s+2\nu_1+\kappa)/2}\frac{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\nu_1+\kappa)}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\nu_1+\epsilon)}\frac{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{(n-1)(s+2\nu_1)}{2}+|\underline{\tilde{\nu}}|\right)}{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{ns+\kappa}{2}+|\underline{\nu}|\right)}\\
&\quad\times L(s,\chi_{[\nu_1,\kappa]}|_{\mathbb{R}^\times})\prod_{i=1}^{n-1}L(s,\chi_{[\nu_1,\kappa]}\chi^c_{[\nu_{i+1},0]})\\
&\quad\times(\mathcal{M}f_{\underline{\tilde{\nu}}})(s+2\nu_1,\dots,i(s+2\nu_1),\dots,(n-2)(s+2\nu_1)).
\end{aligned}\tag{6.4}$$

由 (6.2)，我们有

$$L(s,\pi_{[\underline{\nu},\underline{\kappa}]},\mathrm{As})=L(s,\chi_{[\nu_1,\kappa]}|_{\mathbb{R}^\times})\prod_{i=1}^{n-1}L(s,\chi_{[\nu_1,\kappa]}\chi^c_{[\nu_{i+1},0]})\cdot L(s+2\nu_1,\pi_{\underline{\tilde{\nu}}},\mathrm{As}).$$

特别是，　　根据 (6.4) 归纳可得（其中 $\kappa = 0$），对所有 $N \geq 2$ 和 $\lambda \in \underline{\mathbb{C}}^N$，我们有　e

$$(\mathcal{M} f_{\underline{\lambda}})(s, ..., is, ..., (N-1)s) = 2^{\sum_{i=1}^{N-1}(2(N-i-1)+1-(s+2\lambda_i)/2)} \frac{\Gamma_{\mathbb{C}}(\frac{s+2\lambda_n}{2})}{\Gamma_{\mathbb{R}}(s+2\lambda_n)} \frac{L(s, \pi_{\underline{\lambda}}, \mathrm{As})}{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{Ns}{2} + |\underline{\lambda}|\right)}$$
$$= 2^{-Ns/2+N(N-2)+2-|\underline{\lambda}|} \cdot \frac{L(s, \pi_{\underline{\lambda}}, \mathrm{As})}{\Gamma_{\mathbb{C}}\left(\frac{Ns}{2} + |\underline{\lambda}|\right)}.$$

因此，将 $N = n-1$ 和 $\lambda = \tilde{\nu}$ 代入此公式即可立即得到该断言。证明完毕。□_　_

致谢。作者感谢 Wan-Yu Tsai、Chen-Bo Zhu 和 Binyong Sun 热心解答问题并推荐合适的参考文献。作者也感谢 Hiraku Atobe、Miki Hirano、Taku Ishii 和 Tadashi Miyazaki 提出的意见，并感谢 Kenichi Namikawa 和 Fu-Tsun Wei 对本项目一直以来的关注。作者特别感谢国家理论科学中心在本文撰写期间一直以来提供的支持与热情接待。本文部分经费由国家科学及技术委员会提供，第一作者和第二作者分别获得编号为 113-2115-M-007-002-MY3 和 112-2115-M-032-004-MY3 的资助。

References

[AB95] J. Adams 和 D. Barbasch。《复群的约化对偶对对应》。《函数分析杂志》132：1–42，1995。[Ada07] J. Adams。《实数域上的 theta 对应》。载于《调和分析、群表示、自守形式与不变量理论》，《数学讲义系列》第12卷，数学科学研究所、新加坡国立大学。世界科技出版公司，2007。[AG08]A. Aizenbud 和 D. Gourevitch。《纳什流形上的施瓦茨函数》。《国际数学研究通知》，2008（rnm155），2008。[BP21] R. Beuzart-Plessis。《阿基米德理论与 Asai 积分的 ϵ因子》。载于《相对迹公式》，西蒙斯研讨会丛书，第1–50页。施普林格出版社，2021。[Bum84] D. Bump。《GL(3, $\mathbb{R}$)上的自守形式》，《数学讲义》第1083卷。施普林格出版社，1984。[Cas89a] W. Casselman。《Harish-Chandra 模到 G表示的典范延拓》。《加拿大数学杂志》41(3)：385–438，1989。[Cas89b] W. Casselman。《 $\Gamma\backslash G$施瓦茨空间导论》。《加拿大数学杂志》XL(2)：285–320，1989。[CCI20] S.-Y. Chen、Y. Cheng 和 I. Ishikawa。《GL_2的 Asai 表示的伽马因子》。《数论杂志》209：83–146，2020。[Che19] Y. Chen。《$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$主系列表示的主系列矩阵系数的正性》。《李理论杂志》29(3)：601–610，2019。[Che25] S.-Y. Chen。《准分裂群的伴随 L 函数的代数性》。2025。arXiv:2509.23940。[CI23] S.-Y. Chen 和 A. Ichino。《泛型尖点形式的彼得森范数与 GSp_4的伴随L函数特殊值》。《美国数学杂志》145：899–993，2023。[Fli93] Y. Z. Flicker。《关于扭曲张量 L函数的零点》。《数学年刊》297：199–219，1993。[GR15] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik。《积分、级数与乘积表》。学术出版社，第八版，2015。[GX26] Z. Geng 和 H. Xue。《同调θ提升的 Casselman-Wallach 性质》。arXiv:2601.14832v1，2026。[GZ14] R. Gomez 和 C.-B. Zhu。《与幂零轨道相关的广义惠特克模型的局部θ提升》。《几何与泛函分析》24：796–853，2014。[HIM12] M. Hirano、T. Ishii 和 T. Miyazaki。《GL(3)上的阿基米德惠特克函数》。载于《多变量自守形式的几何与分析》，《数论及其应用丛书》第7卷，第77–109页。世界科技出版公司，2012。

[HIM22] M. Hirano、T. Ishii 和 T. Miyazaki。《GL(3) ×GL(2)的阿基米德 ζ 积分》，美国数学会回忆录第278卷。2022。[HIM25] M. Hirano、T. Ishii 和 T. Miyazaki。《$\mathrm{GL}_4(4\mathbb{R})$上的阿基米德 Bump-Friedberg 积分》。《数论杂志》279：411–456，2025。[HIM26] M. Hirano、T. Ishii 和 T. Miyazaki。《$\mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$上的惠特克函数》。《函数分析杂志》290，2026。doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111303。[HMN25] T. Hara、T. Miyazaki 和 K. Namikawa。《$\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_{n-1}$的 Rankin–Selberg$L$函数临界值的一致整性》。《表示论》29：527–615，2025。[HO09] M. Hirano 和 T. Oda。《$\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$上主系列惠特克函数的计算》。《函数分析杂志》256：2222–2267，2009。[How79] R. Howe。《θ级数与不变量理论》。载于《自守形式、表示与 L 函数》第1部分，《纯数学专题讨论会论文集》第33卷，第275–285页，1979。[How89] R. Howe。《超越经典不变量理论》。《美国数学会杂志》2(3)：535–552，1989。[Hum25] P. Humphries。《GL_n的阿基米德新形式理论》。《朱西厄数学研究所杂志》24(1)：41–116，2025。[Ich05] A. Ichino。《Saito-Kurokawa 提升的拉回》。《数学发明》162：551–647，2005。[IM22] T. Ishii 和 T. Miyazaki。《带递推关系的阿基米德 Rankin–Selberg 积分的计算》。《表示论》26：714–763，2022。[IO14] T. Ishii 和 T. Oda。《$\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$上主系列惠特克函数的计算》。《函数分析杂志》266：1286–1372，2014。[IS07] T. Ishii 和 E. Stade。《惠特克函数的新公式：$\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$情形》。《函数分析杂志》244：289–314，2007。[IS13] T. Ishii 和 E. Stade。《$\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_m$ 与 $\mathrm{SO}_{2n+1} \times \mathrm{GL}_m$上的阿基米德 ζ 积分》。《数学手稿》141：485–536，2013。[Ish05] T. Ishii。《关于 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$上的主系列惠特克函数》。《函数分析杂志》225：1–32，2005。[Ish13] T. Ishii。《奇数阶正交群上的惠特克函数》。《李理论杂志》23：85–112，2013。[Ish18] T. Ishii。《GL_n上外平方 L函数的阿基米德 ζ 积分》。《数论杂志》186：304–345，2018。[Ish19] T. Ishii。《$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GSp}_4$ 与 GL_4上多变量阿基米德 ζ 积分的计算》。《美国数学会会刊》147(1)：103–114，2019。[Jac67] H. Jacquet。《切瓦莱群上的惠特克函数》。《法国数学会通报》95：243–309，1967。[Kab04] A. C. Kable。《Asai L函数与 Jacquet 猜想》。《美国数学杂志》126(4)：789–820，2004。[KO95] H. Koseki 和 T. Oda。《SU(2, 1)大离散系列表示的惠特克函数及相关 ζ 积分》。《京都大学数理科学研究所刊物》31：959–999，1995。[Lin18] B. Lin。《阿基米德 Godement-Jacquet ζ 积分与测试函数》。《数论杂志》191：396–426，2018。[Mat11] N. Matringe。《p-进域上 $\mathrm{GL}(n)$ 的 distinguished 泛型表示》。《国际数学研究通知》(1)：74–95，2011。[Min08] A. Minguez。《显式 Howe 对应：II型对偶对》。《高等师范学校科学年刊》41(5)：717–741，2008。[MIO04] H. Manabe、T. Ishii 和 T. Oda。《$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$上的主系列惠特克函数》。《日本数学杂志》30(1)：183–226，2004。[Miy09] T. Miyazaki。《$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$广义主系列表示的惠特克函数》。《数学手稿》128：107–135，2009。[MO93] T. Miyazaki 和 T. Oda。《$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$上的主系列惠特克函数——微分方程的显式公式》。载于《1993年研讨会论文集：自守形式及相关主题》，第59–92页。平山数学科学研究所，1993。[Moe89] C. Moeglin。《约化对偶对的 Howe 对应：阿基米德情形下的一些计算》。《函数分析杂志》85(1)：1–85，1989。[Mor02] T. Moriyama。《关于 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{R})$上惠特克函数的一则评注》。《东京大学数学科学杂志》9：627–635，2002。[MVW87] C. Moeglin、M.-F. Vigneras 和 J.-L. Waldspurger。《p 进域上的 Howe 对应》，《数学讲义》第1291卷。施普林格出版社，柏林和纽约，1987。

[Pra92] D. Prasad. 局部域上 GL(2) 表示的不变线性形式。《美国数学杂志》，114:1317–1363，1992 年。[Sha85] F. Shahidi. 实群的局部系数作为 Artin 因子。杜克数学杂志，52(4):973–1007，1985 年。[Sha10] F. Shahid. Eisenstein 级数与自守 L-函数，美国数学会讨论会出版物第 58 卷，2010 年。[Shi76] T. Shintani. 半整数权全纯尖点形式的构造。名古屋数学杂志，58:83–126，1976 年。[Sta95] E. Stade. GL(4, $\mathbb{R}$) 和 GL(4, $\mathbb{C}$) 上惠特克函数的 Mellin 变换。《数学手稿》，87:511–526，1995 年。[Sta99] E. Stade. GL(n, $\mathbb{R}$) 惠特克函数的 Mellin 变换。《美国数学杂志》，123(1):121–161，1999 年。[Sta02] E. Stade. GL(n) ×GL(n) 上的阿基米德 L- 因子与广义 Barnes 积分。以色列数学杂志，127:201–219，2002 年。[Vog78] D. Vogan. Harish-Chandra 模的 Gelfand-Kirillov 维数。《数学发明》，48:75–98，1978 年。[Wat95] T. Watanabe. 不可约二型对偶约化对的局部 theta 对应。东北数学杂志，47:521–540，1995 年。

Department of Mathematics, National Tsing Hua University, 101, Section 2, Kuang-Fu Road, Hsinchu 300, Taiwan, ROC电子邮箱：sychen.math@gmail.comNo. 151, Yingzhuan Road, Tamsui District, New Taipei City 251, Taiwan (R.O.C), Lui-HsienMemorial Science Hall.电子邮箱：briancheng@o365.tku.edu.tw