arXiv:2602.06338v1 [math.CO] 6 Feb 2026

环面链环同调的洗牌定理

DONGHYUN KIM 和 JAESEONG OH

摘要。我们证明，源自椭圆 Hall 代数的对称函数 $e_{(1^k)}[-MX_{m,n}]\cdot 1$，等于循环 (m,n)停车函数的 k 元组的生成函数。此结果解决了 Gorsky–Mazin–Vazirani 和 Wilson 的一个猜想，确立了椭圆 Hall 代数支配环面链环 $T(km,kn)$的 Khovanov–Rozansky 同调。因此，这为 Galashin 和 Lam 在环面链环情形提出的问题给出了肯定答案。证明中的关键步骤是，我们发展了 Shareshian–Wachs 对合的一个有理类比。该对合最初是为证明色彩拟对称函数的对称性而引入的。

1. 引言

1.1. 概述。nabla 算子 ∇ 由 Bergeron 和 Garsia [BG99, BGHT99]，引入，是一个作用于系数属于 $\mathbb{Q}(q,t)$ 的对称函数上的线性算子。它被定义为修正 Macdonald 多项式 $\tilde{H}_\mu[X;q,t]$ [Mac88, GH93]，$\nabla\tilde{H}_\mu[X;q,t]=T_\mu\tilde{H}_\mu[X;q,t]$，的特征算子，其中 $T_\mu:=\prod_{(i,j)\in\mu}t^{i-1}q^{j-1}$。

∇ 的重要性在于它与对角余不变量环的深刻联系。该环是由下式定义的对称群 $\mathfrak{S}_k$-模

$$DR_k:=\mathbb{C}[\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k]/\langle\mathbb{C}[\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k]_+^{\mathfrak{S}_k}\rangle,$$

其中 $\mathfrak{S}_k$对角作用于含$2k$个变量的多项式环 $\mathbb{C}[\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k]=\mathbb{C}[x_1,.....x_k,y_1,.....y_k]$。Haiman 对$(n+1)^{n-1}$ 猜想 [Hai02] 的著名证明确立了DR_k 的 Frobenius 特征由 ∇e_k给出，其中e_k 是次数为k的初等对称函数。

由 Haglund 等人 [HHL+05] 提出猜想、并由 Carlsson 与 Mellit [CM18],证明的洗牌定理，为 ∇e_k提供了一个组合公式。该公式将 ∇e_k 表示为停车函数上的加权和：

$$\nabla e_k=\sum_{(P,f)\in PF_k}q^{\mathrm{dinv}(P,f)}t^{\mathrm{area}(P)}x^f,$$

其中PF_k 表示大小为k的停车函数集合。

洗牌定理体现了现代代数组合学中代数、几何与组合学之间深刻的相互作用。自其证明以来，∇ 对其他对称函数的作用便一直是深入研究的课题。例如，Elias–Hogancamp 公式 [EH19，GH22] 为 $\langle\nabla e_{(1^k)},e_k\rangle$ 给出了一个组合公式。近来，Blasiak、Haiman、Morse、Pun 和 Seelinger [BHM+25]以及独立开展研究的本文作者 [KO24], 证明了 Loehr–Warrington 猜想 [LW08], ，从而为 ∇s_λ建立了一个组合公式，其中s_λ 是 Schur 函数。

随着“有理类比”的引入，洗牌定理的研究版图进一步拓展。Mellit [Mel21] 将洗牌定理推广为适用于互素的 (m,n) 停车函数的有理（复合）洗牌定理。基于 Burban 和 Schiffmann [BS12], 关于椭圆 Hall 代数 $\mathscr{E}_{q,t}$（又称 Schiffmann 代数）的理论，Blasiak 等人 [BHM+23b、BHM+25] 建立了一个统一框架，用于将洗牌定理“有理化”。在此框架下，他们证明了 Loehr–Warrington 猜想的有理版本，其中涉及椭圆 Hall 代数元素 $s_\lambda[-M\,X\,m,n] \in \mathscr{E}_{q,t}$（符号说明见第 2.2 节）。在这一背景下，有理洗牌定理的代数一侧对应于算子 $e_k[-M\,X\,m,n] \in \mathscr{E}_{q,t}$的作用。

尽管这些基础结果为一大类对称函数提供了组合公式，但它们并未处理由初等对称函数之积$e_{(1^k)}[-MX_{m,n}]\cdot 1$所产生的独特组合结构，即 Elias–Hogancamp 公式的有理类比。

本文的主要定理解决了这一问题。在 Gorsky、Mazin 和 Vazirani 的部分猜想基础上， [GMV17], Wilson [Wil18, Wil23] 猜想对称函数 $e_{(1^k)}[-MX_{m,n}]\cdot 1$ 即为如下对象的组合生成函数：k个循环(m,n)停车函数元组。请读者参阅第3 节中的相关组合定义。

定理 1.1. （*[Wil23, 猜想 5.1]*）对于互素正整数(m,n) 以及正整数 k, 我们有

$$e_{(1^k)}[-MX^{m,n}]\cdot 1 = (1-t)^k \sum_{\pi^\bullet \in \mathrm{cPF}^k_{m,n}} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)}\, t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})}\, x^{f_{\pi^\bullet}}.$$

1.2. 与结同调的联系。值得注意的是，Wilson 和 Gorsky–Mazin–Vazirani 在研究结同调的过程中提出了定理 1.1 的猜想。这一联系值得进一步阐述。给定一个链环 L，记录其 Khovanov–Rozansky同调 [KR08a,KR08b,Kho07]的分次维数，可得到关于 a、$q^{1/2}$、$t^{1/2}$ 的 Laurent 多项式 $\mathscr{P}$KR L (a,q,t)，称为结超多项式 [DGR06]。如果 KR 同调的奇上同调消失，则该超多项式成为关于 a、q、t 的 Laurent 多项式。当令 $t = q^{-1}$ 时，它会恢复 L 的 HOMFLY多项式。

Khovanov–Rozansky同调和结超多项式为不同数学学科之间提供了核心接口。这些不变量编码了辫子簇与簇代数的几何，通过 Oblomkov–Rasmussen–Shende 猜想从希尔伯特概形和紧化雅可比簇中产生，并且与椭圆 Hall 代数、有理Cherednik代数以及广义卡塔兰组合学有着深刻的相互作用 [Che13, GM13, GORS14, GN15, CD16, CD17, OR17, ORS18, CGGS21, GNR21, Mel21, GLSBS22, GL23, CGHM24, GL24, CGG+25]。

最近，Galashin 和 Lam [GL23] 提出了一个将椭圆 Hall 代数与结超多项式联系起来的问题。曲线定义为严格递增连续函数 $f:[0,m]\to[0,n]$的图，其中 $f(0) = 0$ 且 $f(m) = n$。对于一条曲线 C，可以将链环 L_C 与环面 $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 联系起来。他们还构造了一个与曲线 C 相关联的椭圆 Hall 代数元素 D_C。利用该元素，通过复合代入定义对称函数 F_C和 EHA 超多项式 $\mathscr{P}^{\mathscr{E}}$C (a, q, t)

$$F_C := D_C \cdot 1\left[\frac{X}{1-t}\right], \qquad \mathscr{P}^{\mathscr{E}}_C(a,q,t) := F_C[a-a^{-1}].$$

问题 1.2 ([GL23])。 对于哪些曲线C，我们有

$$\mathscr{P}_C^{\mathscr{E}}(a,q,t) = (1-t)^{k(C)-1}\mathscr{P}_{L_C}^{\mathrm{KR}}(a,q,t), \tag{1.1}$$

其中 $k(C)$ 表示链环 L_C 的分支数?

Galashin 和 Lam 提出的对应关系与已确立的结果一致。对于环面纽结，这种关系源自 Mellit 的早期工作 [Mel21]，并结合了 Gorsky 和 Negut 的工作 [GN15]。最近，Caprau、Gonzalez、Hogancamp 和 Mazin [CGHM24] 利用*Coxeter* 纽结方面的结果，将这一验证扩展到 [BHM+23b] 的任意直线下洗牌定理的情形。

尽管环面纽结和 Coxeter 纽结的情形已得到验证，但尚未建立与环面链环对应的椭圆 Hall 代数作用的显式公式。在同调方面，Gorsky、Mazin 和 Vazirani [GMV17] 以及 Wilson [Wil23] 证明，环面链环 $T(km,kn)$ 的 KR 同调由k元循环(m,n)停车函数的组合学描述。他们进一步猜想，这种组合结构在代数上源自$e_{(1^k)}[-MX_{m,n}]$的作用。

定理 1.1证实了这一猜想，回答了 Galashin–Lam 关于环面链环情形的问题。鉴于这一对应关系，定理 1.1 可视为环面链环同调的洗牌定理。

推论 1.3。 对于连接 $C(km,kn)$ 中 $(0,0)$ 与 (km,kn)的直线线段，其对应的链环为环面链环 $T(km,kn)$，且恒等式 (1.1) 成立：

$$\mathscr{P}_{C(km,kn)}^{\mathscr{E}}(a,q,t) = (1-t)^{k-1}\mathscr{P}_{T(km,kn)}^{\mathrm{KR}}(a,q,t).$$

对于一类称为 $\mathbb{Z}$-凸的曲线，Galashin 和 Lam [GL23]猜想了 BHMPS [BHM+23b]关于对称函数 $F_C/(1-t)^{k(C)-1}$ 的 Schur 正性猜想的一般化。由于定理 1.1（亦即 (5.16)）右侧可写成 LLT 多项式的正和（见 [Wil23]），这意味着 $F_{C(km,kn)}/(1-t)^{k-1}$ 具有 Schur 正性，从而证实了 [GL23、BHM+23b] 关于 C = C(km,kn) 情形的 Schur 正性猜想。

1.3. **主要结果：Jacobi–Trudi 恒等式与组合算子**。 定理 1.1的证明依赖于对有理洗牌定理的一种基本改写。我们为代数算子引入一种新的行列式方法。具体来说，该方法的核心是定义一族记作 $\mathfrak{h}$ 的算子，它们生成“严格递增”的循环 (m,n)-停车函数（精确定义见第 3 节和第5 节）。随后，我们为有理组合洗牌定理建立了一种新的表述，将代数项 $C_\alpha[-MX_{m,n}]\cdot 1$ 表示为一个矩阵的行列式，该矩阵的各项由这些 $\mathfrak{h}$算子给出（引理5.1）。

这种行列式结构展现出极强的通用性；它使我们能够为一般的 Schur 函数作用 $s_\lambda[-MX_{m,n}]\cdot 1$ 推导出相应的 Jacobi–Trudi 恒等式。因此，我们为 $\nabla^m s_\lambda$ 提供了一个新的初等证明，证明 Loehr–Warrington 猜想成立（对应于$n=1$的情形）。具体而言，我们揭示了$\nabla^m C_\alpha$ 的复合洗牌公式与 $\nabla^m s_\lambda$ 的 Loehr–Warrington 公式之间明确的组合联系。我们还成功地用循环(m,n)-停车函数的k元组来表示 $e_{(1^k)}[-MX_{m,n}]\cdot 1$。

我们论证的组合学核心（详见第 4 节）在于确立 $\mathfrak{h}$-算子之间所需的关系。为此，我们引入 Shareshian– Wachs 对合的一个 (m,n)-推广。该对合最初是为证明色拟对称函数[SW16], 的对称性而提出的；在此，我们将其改造用于研究循环停车函数的组合结构，从而证明行列式公式所需的关键关系。

致谢

作者感谢 Eugene Gorsky、Thomas Lam、Anton Mellit、Andrei Negu.t、Brendon Rhoades、George Seelinger、Joshua Wen 和 Andy Wilson 的宝贵交流。J. Oh 得到了 NRF资助项目 RS-2025-16067413 的支持。

2. 预备知识

2.1. 对称函数。合成是一个由正整数组成的序列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k)$（称为部分）；若 α 是 n 的合成，记作 $\alpha\models n$，当且仅当 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ 等于 n。分拆是部分按弱递减顺序排列的合成。若 $|\lambda|=n$，则记作 $\lambda\vdash n$。我们常将分拆 λ 与其杨氏图等同，杨氏图定义为单元格的集合 $\lambda=\{(i,j)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+:\ 1\le i\le k,\ 1\le j\le\lambda_i\}$。共轭分拆 $\lambda^t=(\lambda_1^t,\lambda_2^t,\ldots)$ 是将分拆 λ 的杨氏图沿主对角线 $y=x$ 反射得到的。对于满足 $\mu\subseteq\lambda$（作为单元格集合）的分拆 λ 和 μ，斜分拆 λ/μ 定义为集合差 $\lambda\setminus\mu\subset\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$。

令 Λ 为以无限变量集合 $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ 为变量、系数取自域 $\mathbb{Q}(q,t)$的对称函数代数。我们采用 Λ各种基的标准记号：e_λ、h_λ、p_λ、m_λ 和 s_λ 分别表示初等、完全齐次、幂和、单项式及 Schur 对称函数。对合 $\omega:\Lambda\to\Lambda$ 是由其在 Schur 基上的作用 $\omega(s_\lambda)=s_{\lambda^t}$ 定义的代数自同态。

我们在 Λ 上赋予 *Hall*内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，并要求 Schur 函数组成标准正交基；也就是说，$\langle s_\lambda,s_\mu\rangle=\delta_{\lambda,\mu}$。对于对称函数 f，我们用 $f^\bullet$ 表示乘以f的算子。我们用 $f^\perp$ 表示$f^\bullet$ 关于 Hall内积的伴随算子。

我们引入一些关于复合代入的补充记号。若 A 是由不定元（包括 q、t）构成的表达式，我们将 $p_k[A]$ 定义为：对 A 中出现的每个不定元 a，都以 a^k代入所得的结果。此外，对于任意 $f\in\Lambda$，复合运算 $f[A]$ 定义为：在 f 的幂和展开中，以 $p_k[A]$ 代入 p_k。按照约定，字母表 X 视为和 $x_1+x_2+\ldots$，因此 $f[X]$ 就是标准对称函数 $f(x_1,x_2,\ldots)$。

Haglund、Mors e 和 Zabrocki [HMZ12] 定义了一个算子 $\mathbf{C}_a$，其中正整数 a 作用于 Λ，其作用方式为：

$$\mathbf{C}_a f[X]=(-q)^{1-a}f[X-(q-1)/(qz)]\sum_{m\ge0}z^m h_m[X]|_{z^a}.$$

对于一个合成 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$，我们定义

$$C_\alpha=\mathbf{C}_{\alpha_k}\cdots\mathbf{C}_{\alpha_2}\cdot\mathbf{C}_{\alpha_1}\cdot 1.$$

对称函数C_α在将洗牌猜想深化为复合洗牌猜想 [HMZ12], 的过程中发挥了关键作用，并最终促成了有理组合洗牌定理 [Mel21]。

2.2. **椭圆 Hall 代数**。 下面汇集一些关于 椭圆 *Hall* 代数$\mathscr{E}_{q\text{的}t}$定义与结果，该代数由 [BS12]引入。我们沿用 [BHM+23a]的记号。

椭圆 Hall 代数 $\mathscr{E}_{q,t}$ 由子代数 $\Lambda(X^{m,n})$ 生成，这些子代数与对称函数代数 Λ同构，并以互素整数 (m,n) 的有序对为指标；此外还有中心 Laurent 多项式子代数 $\mathbb{Q}(q,t)[c_1^{\pm 1}, c_2^{\pm 1}]$。它们满足 [BHM+23a 第 3 节3]中所述的关系。

现在回顾 [FT11, SV13]中构造的椭圆 Hall 代数在对称函数环上的一个自然作用。令 $\widetilde{H}_\mu[X;q,t]$ 表示修正 Macdonald 多项式 [Mac88]。图生成元 $B_\lambda(q,t)$ 定义为 $\sum(i,j)\in\lambda q^{i-1}t^{j-1}$。对于一个对称函数 $f\in\Lambda$, 令 $f[B]$ 和 $f[\bar{B}]$ 表示由它们在基 $\{\widetilde{H}_\mu\}$ 上的作用定义的算子，如下所示:

$$f[B]\widetilde{H}_\mu = f[B_\mu(q,t)]\widetilde{H}_\mu, \qquad f[\bar{B}]\widetilde{H}_\mu = f[\overline{B_\mu(q,t)}]\widetilde{H}_\mu,$$

其中 $\overline{B_\mu(q,t)} = B_\mu(q^{-1},t^{-1})$。下述命题概述了 $\mathscr{E}_{q,t}$ 对 Λ 的作用。

命题 2.1。 *[BHM+23b，命题 3.1]* 存在一个 $\mathscr{E}_{q,t}$ 对 Λ 的作用，其在生成元上的定义如下：

(1) $c_1 \mapsto 1$, $c_2 \mapsto (qt)^{-1}$。*(2)* $f(X^{1,0}) \mapsto (\omega f)[B - {}^{1}M^{-1}]$. $f(X^{-1,0}) \mapsto (\omega f)\left[{}^{1}M^{-1}B\right]$。*(3)* $f(X^{0,1}) \mapsto f\left[-X\overline{M}^{-1}\right]$, $f(X^{0,-1}) \mapsto f[X]^{\perp}$。

该*nabla* 算子 ∇，定义于 [BGHT99], 是一个对角算子，其特征函数为修正的 Macdonald 多项式:

$$\nabla\widetilde{H}_\mu = t^{n(\mu)}q^{n(\mu')}\widetilde{H}_\mu,$$

其中 $n(\mu)=\sum_i(i-1)\mu_i$。虽然算子 ∇并不直接对应于$\mathscr{E}_{q\text{的某个元素}t}$在 Λ上的作用，但它与生成元满足以下交换关系:

引理 2.2。 *[BHM+23b，引理 3.4。1]* 共轭 ∇ 作用为 $\mathscr{E}_{q\text{的}t}$-作用在 Λ上的一种对称性。具体而言，我们有

$$\nabla f(X^{m,n})\nabla^{-1} = f(X^{m+n,n}).$$

结合命题 2.1和引理 2.2 可得以下恒等式：对于一个对称函数 f,

$$f[-MX^{m,1}]\cdot 1 = \nabla^m f. \tag{2.1}$$

因此，洗牌定理（关于 $\nabla^m e_n$）和 Loehr–Warrington 猜想（关于 $\nabla^m s_\lambda$）的代数部分，可视为某种椭圆 Hall 代数作用于 1的特例。

此外，有理组合洗牌定理 [Mel21],Loehr–Warrington 公式的有理版本 [BHM+25] 中出现的对称函数，以及 Wilson、Gorsky–Mazin–Vazirani 的猜想（定理 1.1），也可以分别通过椭圆 Hall 代数在 1 上的作用表示为 $C_\alpha[-MX^{m,n}]$, $s_\lambda[-MX^{m,n}]$, 和 $e_{(1^k)}[-MX^{m,n}]$。这依赖于 [Neg14，命题 6.7] 中的识别。

2.3. **带标签格路径**。 在本小节中，我们定义一种共同的推广，将 [Wil23]（出现在定理 1.1 中）中引入的循环停车函数元组与（km，kn）-停车函数统一起来，后者出现在有理（组合）洗牌定理 [Mel21] 中。

设 m 和 n 为互素正整数。一个(m,n)-格路径是由单位北(0,1)步和东(1,0)步构成的路径，从$(-a,0)$ 出发，其中整数$a \geq 0$。该路径必须以一个北步开始，恰好包含n个北步，并始终位于直线$my = nx$的上方或线上。

对于正整数$k \geq 1$，我们将$(\mathbb{Z}^2)^k$ 视为格点的k 个副本（或层）的集合，并以$i \in \{1,\dots,k\}$为索引。一个单元格是其中一层里的单位正方形。第i层中单元格c 的内容定义为

$$\mathrm{cont}(c) = k(my - nx) + i - 1,$$

其中(x,y) 表示c的东南角坐标。

一个带标号的(m,n)-格路径的k 阶元组是一个序列 $\pi^\bullet = (\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)})$，其中每个分量 $\pi^{(\ell)} = (P^{(\ell)}, f_{(\ell)})$ 由一个(m,n)-格路径$P^{(\ell)}$ 以及一个标号函数$f_{(\ell)}$ 组成，该函数为$P^{(\ell)}$的每个北步赋予一个正整数。该元组配有一个连接置换 $\phi \in \mathfrak{S}_k$（不一定唯一），并且必须满足以下条件：

(1)（边界条件）终点按照 ϕ 循环匹配，使得

$$\mathrm{end}(\pi^{(\ell)}) = \mathrm{start}(\pi^{(\phi(\ell))}) + (m,n) \quad \text{for all } 1 \leq \ell \leq k,$$

其中，start(π)和 end(π) 分别表示路径 π 的起点和终点，加法按坐标进行。

(2)（标记条件）令 $N^{(\ell)}{}_i$表示分量 $\pi^{(\ell)}$ 的第 i 个北步。如果路径中的 $N_{(\ell)\,i}$和 $N_{(\ell)\,i+1}$是连续的步（即几何上相邻的竖直步），那么它们的标记必须严格递增：

$$f^{(\ell)}(N_i^{(\ell)}) < f^{(\ell)}(N_{i+1}^{(\ell)}).$$

此条件延伸至边界：我们定义虚拟步 $N^{(\ell)}{}_{n+1}$ 为 $N_{(\phi(\ell))\,1}$的 (m,n) 平移，并赋予标记 $f_{(\phi(\ell))}(N_1^{(\phi(\ell))})$。

每个分量 $\pi^{(\ell)}$ 通常嵌入在条带 $0 \leq y \leq n$ 内的第 ℓ 层中。元组 $\pi^\bullet$ 通常通过以下两种方式之一进行可视化：

- 将所有分量 $\pi_{(\ell)}$ 一起绘制在同一个基本条带 $0 \leq y \leq n$ 中（同时记录各分量指标），或者
- 将各分量垂直堆叠，使得 $\pi_{(\ell)}$ 位于条带 $(\ell-1)n \leq y \leq \ell n$中。

阶 k 的带标号 (m,n)-格路径元组集合记作 $\mathrm{PF}^k_{m,n}$。对于元组 $\pi^\bullet \in \mathrm{PF}^k_{m,n}$，我们将其底层路径元组记作 $\mathrm{P}_{\pi^\bullet} = (\mathrm{P}^{(1)},\dots,\mathrm{P}^{(k)})$，将其集体标号记作 $\mathrm{f}_{\pi^\bullet}$。具体而言，对于属于分量 $\mathrm{P}^{(\ell)}$ 的北步 N，我们用 $\mathrm{f}_{\pi^\bullet}$(N) 表示 f (ℓ) (N)。

现在我们定义统计量面积、pdinv 和ldinv，以及带标记(m,n)-格路径的骨架。对于单条(m,n)-格路径P，其面积记作area(P)，等于位于P下方且内容非负的单元格数量。等价地，它计算P 与直线$my = nx$之间的单元格数量。通过统计这些单元格

按行排列，从第1行到第n行，我们得到面积序列 aseq$(P) = (a_1,...,a_n)$。对于一个k元组$P^\bullet = (P^{(1)},...,P^{(k)})$，总面积为$\text{area}(P^\bullet) = \sum_{\ell=1}^{k} \text{area}(P^{(\ell)})$。

设 π 是一个带标记的(m,n)格路径，并用N_i 表示其第i个北步。考虑一组不定元$\{z_{i,j,k}\}$，其指标为 i $\le$ n、$j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ 和$k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$。我们将 π 的骨架 记作$z(\pi)$，定义为单项式

$$z(\pi) = \prod_{i=1}^{n} z_{i,\text{aseq}(P_\pi)_i, f_\pi(N_i)}.$$

对于 $\pi^\bullet = (\pi^{(1)},...,\pi^{(k)}) \in \text{PF}^k_{m,n}$，我们将其骨架定义为各分量骨架的乘积:

$$z(\pi^\bullet) = \prod_{\ell=1}^{k} z(\pi^{(\ell)}).$$

北步的内容 定义为其左侧紧邻单元格的内容，东向步的内容定义为其下方紧邻单元格的内容。路径对角逆序记作pdinv$(P^\bullet)$，是由一个北步N和一个东向步E组成的有序对(N,E)的数量，其中两者均属于$P^\bullet$，且$\text{cont}(N) < \text{cont}(E)$。

对于一个元组 $\pi^\bullet \in \text{PF}^k_{m,\ n}$，其中一对北向步$(N,\ N')$在 $\pi^\bullet$中构成一个带标记对角逆序，当且仅当:

(1) $\text{cont}(N) < \text{cont}(N_\prime) < \text{cont}(N) + km$，且
(2) $f_{\pi^\bullet}(N) \ge f_{\pi^\bullet}(N')$。

统计量 ldinv$(\pi^\bullet)$等于此类逆序的总数。

注 2.3. 我们将本文对 pdinv 和 ldinv 的定义与现有文献中的定义进行比较。我们的路径对角逆序对应于 [GMV17]中的不变集维数定义（或格路径上的等价统计量）。此定义不同于 Wilson 在 [Wil23], 中给出的路径对角逆序，我们将其记为 pdinv′，两者之间的关系为

$$\text{pdinv}'(P^\bullet) = \text{pdinv}(P^\bullet) + \text{maxldinv}(P^\bullet),$$

其中，maxldinv 表示在 $P^\bullet$的所有有效标记上，ldinv 统计量所能达到的最大值。

此外，我们的带标记对角逆序 ldinv 不同于以往文献中出现的统计量；这一概念存在若干种变体。Wilson [Wil23] 也使用了术语带标记对角逆序，我们将其记为 ldinv′ ，以免混淆。Bergeron、Garsia、Leven 和 Xin [BGLX16]定义了临时*dinv*，记作 tdinv；而 Mellit [Mel21]沿用了同一术语，但作了微小修改，本文将其记作 tdinv′。这些统计量之间满足以下恒等式:

$$\text{ldinv} = \text{maxldinv} - \text{ldinv}' = \text{maxldinv} - \text{tdinv} = \text{tdinv}'.$$

例 2.4. 设 $m = 4$，$n = 3$，且 $k = 2$。图 1 展示了一个$(m,\ n)$-格路径的例子。若分别用3,2,4和1,2,1标记它们的北步，就得到一个由阶数为k 且具有连接置换21的带标记$(m,\ n)$-格路径组成的元组。我们将其记作 $\pi^\bullet = (\pi,\ \pi')$。

图中显示了每个单元格的内容值，非负整数以粗体显示。此外，如果某个值是 $\pi^\bullet$的东向步或北步的内容，则该值会以绿色标示。

首先，骨架如下：

$$z_\pi = z_{1,3,3}z_{2,2,2}z_{3,3,4}, \quad z_{\pi'} = z_{1,2,1}z_{2,3,2}z_{3,1,1}, \quad \text{and} \quad z_{\pi^\bullet} = z_\pi z_{\pi'}.$$

将注意力限制在面积序列上，我们有

$$\mathrm{aseq}(P_\pi) = (3,2,3) \quad \text{and} \quad \mathrm{aseq}(P_{\pi'}) = (2,3,1).$$

特别地，总面积为 $\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet}) = \mathrm{area}(P_\pi) + \mathrm{area}(P_{\pi'}) = 8+6 = 14$。令 $z_{i,j,k} \mapsto t^j x_k$ 在 $z_{\pi^\bullet}$ 中取特定值，可得与 $\pi^\bullet$ 对应的单项式 $x^{f_{\pi^\bullet}}$，以及面积信息：

$$x^{f_{\pi^\bullet}} := \prod_{N:\ \text{north step of } P_{\pi^\bullet}} f_{\pi^\bullet}(N), \quad \text{and} \quad t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})} x^{f_{\pi^\bullet}} = t^{14} x_1^2 x_2^2 x_3 x_4.$$

为计算 pdinv 和 ldinv，我们先将 π 的北步和东向步分别记作 N_1, N_2, N_3 和 $E_1, \ldots, E_5$，将 π' 的北步和东向步记作 N'_1, N'_2, N'_3 和 E'_1, E'_2, E'_3。于是，

$$\mathrm{pdinv}(\pi^\bullet) = \#\{(N_2,E_3),(N_2,E'_1),(N'_1,E_3),(N'_1,E'_1),(N'_3,E_1),(N'_3,E_3),(N'_3,E'_1)\} = 7,$$
$$\mathrm{ldinv}(\pi^\bullet) = \#\{(N_1,N'_2),(N_2,N'_2),(N'_3,N'_1)\} = 3.$$

$\pi =$

34	28	22	16	10	4	-2	-8
26	20	14	8	2	-4	-10	-16
18	12	6	0	-6	-12	-18	-24

$\pi' =$

29	23	17	11	5	-1	-7
21	15	9	3	-3	-9	-15
13	7	1	-5	-11	-17	-23

图1. $\mathrm{PF}^2_{4,3}$ 的一个元素示例（标签在上下文中指定）。

2.4. 循环停车函数。 一个循环 (m,n)-停车函数 是一个带标记的(m,n)-格路径 π，它以一个北步N开头，恰好包含m 个东向步，并满足以下条件：若其以北步N_i结束，则$f_\pi(N) > f_\pi(N')$。等价地，一个循环(m,n)-停车函数是$\mathrm{PF}^1_{m,n}$的一个元素。

令$\mathrm{cPF}^k_{m,\ n}$ 表示k元循环$(m,\ n)$停车函数的集合。该集合可视为$\mathrm{PF}^k_{m,\ n}$其中连接置换 ϕ 可取为恒等映射。在定理1.1中，右侧的组合公式为

$$\sum_{\pi^\bullet \in \mathrm{cPF}^k_{m,n}} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)} t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})} x^{f_{\pi^\bullet}},$$

这里我们方便地记作

$$\mathrm{stat}(\pi^\bullet) := C(m,n,k) - \mathrm{pdinv}(P_{\pi^\bullet}) - \mathrm{ldinv}(\pi^\bullet),$$

其常数项为$C(m,\ n,\ k) = \frac{(mk-1)(nk-1+\ -1)k}{2}$。

我们在 $\mathrm{cPF}_{m,n}$ 上定义偏序 $\prec_{m,n}$。对于 $\pi, \pi' \in \mathrm{cPF}_{m,n}$，若 $\mathrm{P}_{\pi'}$ 弱位于 P_π 的左侧，二者没有公共东向步，并且在它们相交的每个顶点 v 处，终止于 v 的路径 P_π 的北步 N $\in$ 与始于 v 的路径 $\mathrm{P}_{\pi'}$ 的北步 N′ $\in$ 满足 $\mathrm{f}_\pi(\mathrm{N}) \geq \mathrm{f}_{\pi'}(\mathrm{N}')$，则记为 $\pi \prec_{m,n} \pi'$。若 v 在线 y =n 上，则令 N′ 为 π' 第一步的 (m,n)-平移。当 m 和 n 可由上下文明确时，我们

简写为 $\pi \prec \pi'$。在下一节中，我们将有理组合洗牌定理重新表述为关于该偏序上的 P-杨表的定理（定理 3.5）。

3. 有理组合洗牌定理的重新表述

3.1. 交叉与q-统计量。

定义 3.1. 设 (N , a) 和 (N′, a′) 是两个带标号的北步。设 (x, y) 是 N 的终点，(x′, y) 是 N ′ 的起点。若 x ＜ x′，或者 x ＝x′ 且 a ＜a′，则称带标号北步 (N, a) 可以与 (N ′, a′) 扩展。

设 π 和 π' 是带标号的(m,n)-格路径。出于技术原因，我们考虑扩展带标号路径$\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\pi}'$，它们分别是在 π 和 π'的终点追加带标号北步得到的。对于 $1 \le y \le n+1$，令N_y（分别N'_y）表示 $\tilde{\pi}$（分别为 $\tilde{\pi}'$）的第y个北步。我们还用f和$f_\prime$分别表示 $\tilde{\pi}$和 $\tilde{\pi}'$的标号函数。

我们称 $\tilde{\pi}$ 和 $\tilde{\pi}'$ 在某个 $1 \le y \le n$ 处的 交叉 位于(x,y)，如果：

(1) (N$_y$, f (N$_y$)) 可通过 (N ′y$_{+1}$, f ′(N$'_{y+1}$)) 延伸；(2) (N ′y , f ′(N$'_y$)) 可通过 (N$_{y+1}$, f (N$_{y+1}$)) 延伸；并且 (3) 该交叉发生在 x坐标 x ＝min{x$^{N_{y+1}}$, x$^{N'_{y+1}}$}处，其中 x$_S$表示北步 S 的 x坐标。

给定层信息，表明 π 位于比 π'更早的层，我们称交叉为正，如果N_y位于N'_y的左侧；如果它们处于相同的几何位置，我们还要求$f(N_y) < f_\prime(N_{\prime y})$。我们用正交叉数$(\tilde{\pi},\tilde{\pi}')$ 表示$(\tilde{\pi},\tilde{\pi}')$之间正交叉的总数。

最后，对于 $\pi^\bullet = (\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)}) \in \mathrm{PF}^k_{m,n}$ 及其连接置换 ϕ，我们定义统计量 pos$(\pi^\bullet)$ 如下：

$$\mathrm{pos}(\pi^\bullet) = \sum_{1 \le \ell < \ell' \le k} \mathrm{pos}(\tilde{\pi}^{(\ell)}, \tilde{\pi}^{(\ell')}).$$

这里，扩展标记路径 $\tilde{\pi}^{(\ell)}$ 由 $\pi^{(\ell)}$ 得到，方法是在 $\pi^{(\phi(\ell))}$的第一个北步上追加一个带有该北步标记的北步。我们将此留作练习，请读者验证pos$(\pi^\bullet)$ 不依赖于连接置换 ϕ的选择。

引理 3.2. 设 $\pi^\bullet \in \mathrm{PF}^k_{m,n}$ 为一个阶数为 k的带标记(m,n)-格路径元组。其和

$$\mathrm{pdinv}(\pi^\bullet) + \mathrm{ldinv}(\pi^\bullet) + \mathrm{pos}(\pi^\bullet)$$

仅取决于骨架 $z(\pi^\bullet)$。

证明。 我们分析统计量 pdinv 和 ldinv 随层分配变化的情形。

- 路径对角线逆序（pdinv）：对于两个单元格c 和$c_\prime$ （它们可能属于不同的层），条件cont(c) ＜cont$(c_\prime)$在改变层排序时保持不变，唯一的例外是c与$c_\prime$ 处于相同几何位置且它们的相对层排序发生互换。因此，对于由北步和东向步组成的一对(N,E)，其对路径对角线逆序计数的贡献与具体的层排序无关，除非N的终点与E的终点重合。我们

将这种构型称为高度为 y 的角，如果其中 N 是第 y 个北步。图 2 展示了角的局部构型。

- 带标记对角线逆序（ldinv）：类似的论证也适用于ldinv。对于一对带标号北步$(N,\ N\prime)$，除以下两种特定构型外，其对统计量的贡献在改变层排序时保持不变：

  (1) 重叠对：N和N' 对应同一个几何步，但标签不同。(2) 相邻对：N 和N' 在竖直方向相邻（即N 的终点与$N\prime$的起点重合）。此外，N的标签大于或等于N'的标签。

参见图2，其中展示了重叠对和相邻对的局部构型。

只需证明以下局部断言：

断言。设 $(N(1), a_1),\ldots,(N(k), a_k)$ 是高度为 y 且带有标签的北步，$(M^{(1)},b_1),\ldots,(M^{(k)},b_k)$ 是高度为 $y+1$ 且带有标签的北步。我们还要求存在一个置换 $\phi \in \mathfrak{S}_k$，使得 $(N^{(i)}, a_i)$ 与 $(M^{(\phi(i))},b_{\phi(i)})$ 延伸相接。现在选取两个置换 ψ 和 ψ'，使得 $(N(\psi(i)), a_{\psi(i)})$ 与 $(M^{(\psi'}(i)),b_{\psi'}(i))$ 延伸相接，并用这些北步构成一条（部分）带标签路径，将其分配给第 i 层。那么以下四项的总贡献不随 ψ和 ψ'的选择而改变：

(1) 高度 y 处北步位于较早层的角数；(2) 高度 y 处较大标记的步位于较早层的重叠对数；(3) 涉及高度 y 和 $y+1$ 且有贡献的相邻对数，其中上方的北步位于较早层；(4) 高度 y处正交叉的数量。

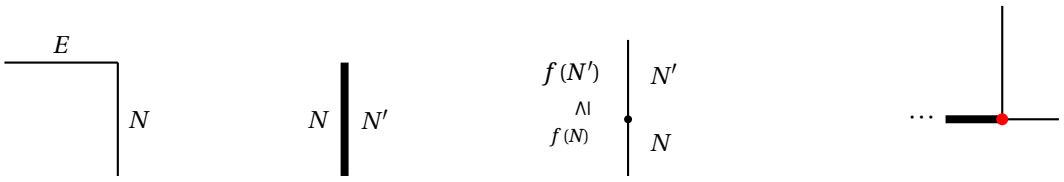
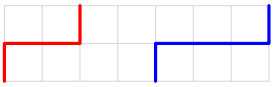


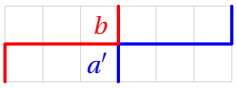
图2. 角、重叠对、相邻对和交叉。

只需证明 $k=2$ 时的断言。为简单起见，令 (N, a) 和 (N', a') 表示高度 y 处带标号的北步，并令 (M,b) 和 (M',b') 表示高度 $y+1$ 处带标号的北步。不失一般性，假设 N 位于 N' 的弱左侧（若二者几何上重合，则 N'的标记较大），并假设 M 位于 M' 的弱左侧（遵循相同约定）。注意，(N, a) 可以与 (M,b) 配对扩展，而 (N', a') 可以与 (M',b') 配对扩展。我们逐个情况进行分析。

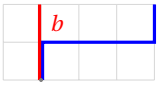
- 情况1)：M 的起点严格位于$N\prime$的终点左侧。在此情形下，相关步骤之间不存在会产生对第(1)至第(4)项贡献的几何交互。一种代表性构型如下所示：



- 情形 2)：(N_l, a_l) 与 (M,b) 构成一个相邻对。
  - 情形 2(a)：N 严格位于 N_l 的左侧。根据层分配的不同，这种构型可能对第 (1) 项或第 (3) 项有所贡献。下图展示了一个典型构型：



    标签满足 $b \leq a'$。如果红色路径位于较早的层，则对第 (3) 项恰有一项贡献。否则，如果红色路径位于较晚的层，则对第 (1) 项恰有一项贡献。
  - 情形 2(b)：N 与 N_l 相同。对于标签，必须满足 $a < b \leq a_l$。下图展示了一个典型构型：



    如果红色路径位于较早的层，则对第 (3) 项恰有一项贡献。否则，如果红色路径位于较晚的层，则对第 (2) 项恰有一项贡献。
- 情形 3)：(N_l, a_l) 可以用 (M,b) 扩展。
  - 情形 3(a)：N 严格位于 N_l 的左侧。下图展示了一个典型构型：



    如果 (N, a) 位于较早的层，则对第 (4) 项恰有一个贡献。否则，如果 (N, a) 位于较晚的层，则对第 (1) 项恰有一个贡献。
  - 情形 3(b)：N 与 N_l 完全相同。下图展示了一个典型构型：



    当 $a = a'$ 时，第 (1) 至 (4) 项均无贡献。假设 $a < a'$。如果 (N, a) 位于较早的层，则对第 (4) 项恰有一个贡献。否则，如果 (N, a) 位于较晚的层，则对第 (2) 项恰有一个贡献。

□

3.2. 有理洗牌定理的原始表述。(km,kn)-Dyck 路径是从 (0,0) 到 (km,kn) 的格路径，由北向和东向单位步组成，并且始终弱位于直线 my =nx 上方。(km,kn)-停车函数是一个对 $\pi = (P_\pi, f_\pi)$，其中 P_π 是一个 (km,kn)-Dyck 路径，f_π 是 P_π 的北步上的标号函数，其取值为正整数，且沿连续的北步，标签严格递增。我们用 $PF_{km,kn}$ 表示 (km,kn)-停车函数的集合。对于 $\pi \in PF_{km,kn}$，设 $(a_1m, a_1n),\ldots,(a_rm, a_rn)$ 是 P_π 与直线 my =nx 相交的点序列，按从

底部开始的顺序排列。注意，我们必须有 $a_1 = 0$ 和 $a_r = k$。我们将 touch(π) =touch(P_π) 定义为一个由 k 给定的合成，具体为 $(a_2 - a_1, \ldots, a_r - a_{r-1})$。

通过将一个 (km,kn)-停车函数分解为由 $(\ell-1)$n $<$ y $\le \ell$n forℓ = 1,...,k 定义的水平条带，我们将一个 (km,kn)- 停车函数与一个阶 k 的带标记 (m,n)- 格路径对应起来，记作 $\pi^\bullet = (\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(k)})$。在此框架下，每个分量 $\pi^{(\ell)}$ 都被视为位于第 ℓ 层，其中，全局格中的点 $((\ell-1)$m,$(\ell-1)$n) 与该层的局部原点 (0,0) 对应。这个 k 元组满足以下条件：

(1) $\pi^{(1)}$ 从原点 (0,0)出发。(2) 对于 $1 \le \ell \le k-1$，路径 $\pi^{(\ell+1)}$ 从前一条路径平移后的终点出发，即 end($\pi^{(\ell)}$) =start($\pi^{(\ell+1)}$) +(m,n)。这确保全局路径在条带边界处连续。(3) 对于 $1 \le \ell \le k-1$，如果 $\pi^{(\ell)}$ 以一个北步 N结束，且 $\pi^{(\ell+1)}$ 以一个北步 N'开始，那么$f_{\pi^\bullet}(N) < f_{\pi^\bullet}(N')$。

注意，这些条件保证一个(km,kn)-停车函数对应于$\mathrm{PF}^k_{m,n}$中的一个元素，其连接置换 ϕ是循环移位 $\ell \mapsto \ell+1 \pmod k$。

这一视角使我们能够自然地定义面积、ldinv和pdinv，从而定义统计量stat，适用于(km,kn)-停车函数。有理组合洗牌定理在 [BGLX16] 中被猜想，并由Mellit [Mel21], 证明，其陈述如下：

定理 3.3. 对于互素正整数m,n 以及合成 $\alpha \vDash k$，我们有

$$C_\alpha[-MX^{m,n}]\cdot 1 = \sum_{\substack{\pi^\bullet \in \mathrm{PF}_{km,kn} \\ \mathrm{touch}(\pi^\bullet)=\alpha}} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)} t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})} x^{f_{\pi^\bullet}}.$$

注记 3.4. 有理洗牌定理的原始表述使用dinv 统计量。在 [GMV17中，引理3.3], 证明了$C(m,n,k)$ − pdinv(P) = dinv(P)。

3.3. **重新表述**。 我们现在用循环3.3 的P-表来重新表述定理(m,n)-停车函数。设$\mathrm{PTab}_{m,n}(k)$ 为$\mathrm{cPF}^k_{m,n}$ 中由满足以下条件的元组 $\pi^\bullet = (\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(k)})$ 组成的子集：

- aseq$(P_{\pi^{(1)}})_1 = 0$，以及
- $\pi^{(\ell)} \not\preceq \pi^{(\ell+1)}$ 对所有 $1 \le \ell \le k-1$。

换言之，$\mathrm{PTab}_{m,\ n}(k)$是P-表（形状为(k)，在 [Gas96], 的意义下，并满足关于面积序列的一个附加条件）的集合。

命题 3.5. 存在一个双射 $\Gamma\colon \mathrm{PTab}_{m,\ n}(k) \to \mathrm{PF}_{km,\ kn}$ 使得

$$\mathrm{pdinv}(P_{\pi^\bullet}) + \mathrm{ldinv}(\pi^\bullet) = \mathrm{pdinv}(P_{\Gamma(\pi^\bullet)}) + \mathrm{ldinv}(\Gamma(\pi^\bullet))$$

且$z(\pi^\bullet) = z(\Gamma(\pi^\bullet))$ 对 $\pi^\bullet \in \mathrm{PTab}_{m,n}(k)$。

据我们所知，甚至恒等式 $|\mathrm{PTab}_{m,\ n}(k)| = |\mathrm{PF}_{km,\ kn}|$ 此前也无人知晓。为了构造所需的双射 Γ:$\mathrm{PTab}_{m,\ n}(k) \to \mathrm{PF}_{km,\ kn}$，我们递归地运用一种保持统计量不变的混合操作。

定义 3.6（混合操作与双射 Γ）。设 $\pi^\bullet=(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)})$ 是一个 (km,kn)-停车函数，且 τ 是一个循环 (m,n)-停车函数。设 $\ell_{\max}$ 为满足 τ 与 $\pi^{(\ell)}$ 有交叉的最大整数 ℓ，若这样的整数存在。令 v 为 τ 与 $\pi^{(\ell_{\max}}$ 之间最后一次交叉（按标准路径顺序）。那么，τ 与 $\pi^\bullet$ 的混合（记作 $\mathrm{mix}(\tau,\pi^\bullet)$）是按如下定义的 ((k +1)m,(k +1)n)-停车函数 ($\pi^{(1)}$ mix,...,$\pi^{(k+1)}$ mix)：

- $\pi^{(\ell)}$ 与 $=\pi^{(\ell)}$ 混合 所针对的 $\ell<\ell$ max。
- $\pi^{(\ell_{\max})}$ 的混合 由 $\pi^{(\ell_{\max})}$ 中位于 v 之前的部分，与 τ 中位于v之后的部分连接而成。
- $\pi^{(\ell_{\max}+1)}$ 的混合 由 τ 中位于v 之前的部分，与 $\pi^{(\ell_{\max})}$ 中位于v之后的部分连接而成。
- $\pi^{(\ell)}$ 与 $=\pi^{(\ell-1)}$ 混合 所针对的 $\ell>\ell_{\max}$ + 1。

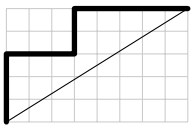
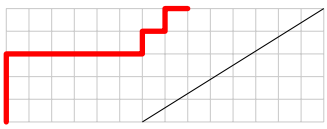
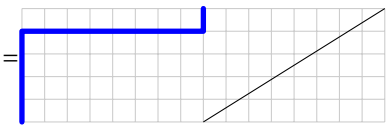
注意，混合(τ，$\pi^\bullet$) 仅在 τ 且 $\pi^\bullet$ 的一个分支具有交叉时才有定义。

现在，给定一个P表 $\pi^\bullet=(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)})\in\mathrm{PTab}_{m,n}(k)$，我们递归地定义映射 Γ 如下：

(1) $\Gamma^{(1)}(\pi^\bullet)=\pi^{(1)}$。(2) $\Gamma^{(\ell+1)}(\pi^\bullet)=$ 对 $1\le\ell\le k-1$ 执行混合 $\left(\pi^{(\ell+1)},\Gamma^{(\ell)}(\pi^\bullet)\right)$。

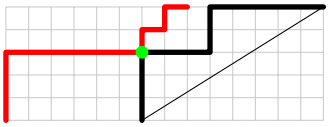
最后，我们令 $\Gamma(\pi^\bullet)=\Gamma^{(k)}(\pi^\bullet)$。

例 3.7。 考虑一组(8,5)-格路径 $\pi^\bullet=(\pi,\pi',\pi'')$，定义如下 ：

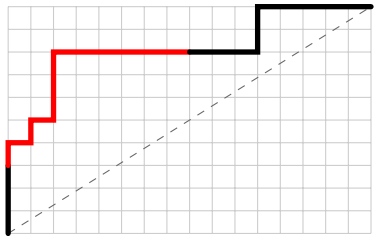
$\pi=$  $\pi'=$  $\pi''=$ 

为简单起见，我们忽略标签，并将交叉解释为两条格路径的几何交点。换言之，调整标签，使几何交点成为交叉。然后我们计算$\Gamma(\pi^\bullet)$，它通过递归应用混合操作得到。我们从 $\Gamma^{(1)}(\pi^\bullet)=\pi$ 开始。

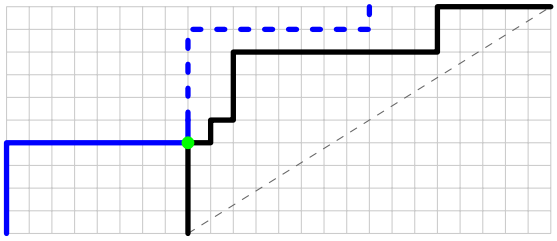
将 π 和 π' 一起显示在同一层中，我们会观察到 (0,3) 处有一个交叉。这是最后一个交叉点，在下图中以绿色圆点标出。



应用混合操作后，得到

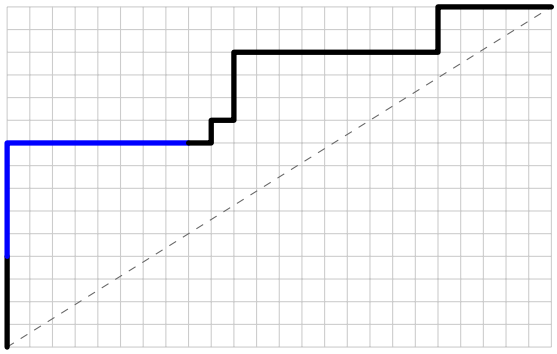
$\Gamma^{(2)}=$混合$(\pi',\Gamma^{(1)}(\pi^\bullet))=$ 

接下来，我们将 π'' 和 $\Gamma^{(2)}(\pi^\bullet)$的循环副本一并可视化如下：



注意，在(0,4)处有一个交叉，这是最后一个交叉，并以绿色圆点标出。我们再次应用混合操作，得到：

$\Gamma(\pi^\bullet) = \Gamma^{(3)}(\pi^\bullet) =$混合$(\pi^{\prime\prime}, \Gamma^{(2)}(\pi^\bullet)) =$



定理 *3.5* 的证明。 我们将验证映射 Γ所需的三个性质：良定义性、双射性和统计量保持性。

• 良定义性：我们必须证明，在递归构造的每一步，混合操作都是良定义的。令 $\Gamma(\ell-1)(\pi^\bullet) = (\tau(1),\ldots,\tau(\ell-1))$ 表示迄今构造出的 $((\ell-1)m,(\ell-1)n)$-停车函数，并令 $\pi(\ell)$ 表示接下来要加入的循环 (m,n)-停车函数。只需证明 $\pi(\ell)$ 与某个 $\tau(i)$ 有交叉。

反设 $\pi^{(\ell)}$ 与任何 $\tau^{(i)}$都没有交叉。由于$P_{\tau^{(1)}}$ 经过原点，路径 $\pi^{(\ell)}$ 必须始终弱于每个 $\tau^{(i)}$ 的左侧，不与它们共享任何东向步，并且在每个几何交点处满足标记约束。此外，由于$(\tau^{(1)},\ldots,\tau^{(\ell-1)})$ 包含 $\pi^{(\ell-1)}$ 的一个平移副本，我们得到 $\pi^{(\ell-1)} \prec \pi^{(\ell)}$，这就产生了矛盾。

• 双射性：我们通过反转递归步骤，构造逆映射 $\Psi : \mathrm{PFkm,kn} \to \mathrm{PTabm,n(k)}$。设有一个 $(\ell m, \ell n)$-停车函数 $\Pi(\ell) = \Gamma(\ell)(\pi^\bullet)$，并希望重构循环 (m,n)-停车函数 $\pi(\ell)$ 和前驱路径 $\Pi(\ell-1)$。

步骤如下：

(1) 找出满足以下条件的最大 指标$i \in \{1,\ldots,\ell-1\}$： $\Pi^{(\ell)}$的第i个和第$(i+1)$个分量之间存在交叉。(2) 令 v 为发生此类交叉的最后一个 几何点（按照标准路径排序）。(3) 在v处执行“取消混合”操作：

• 循环的(m,n)-停车函数 $\pi(\ell)$ 可通过拼接$(i+1)$个分量中以v 结尾的部分与i个分量中以v开头的部分来恢复。

- 前驱路径 $\Pi^{(\ell-1)}$ 的i个分量可通过拼接i个分量中以v结尾的部分与$(i+1)$个分量中以v开头的部分来恢复。
- 索引为 $j<i$ 的分量，在 $\Pi^{(\ell-1)}$ 中与 $\Pi^{(\ell)}$中的对应分量保持相同。

- $+1$ 在 $\Pi^{(\ell)}$ 中，索引为 $j>i$的所有分量都向下移一位，形成索引为 $j-1$ 的分量，它们位于 $\Pi^{(\ell-1)}$中。

此操作正好是混合的逆操作。从 $\ell=k$ 递归地向下应用此过程直至 1，即可唯一地恢复 $\mathrm{PTab}_{m,n}(k)$中的元组。

- 统计量的保持：注意，混合操作显然保持路径骨架不变。此外，在混合操作过程中选取交点v时，取其最大值可确保正交叉的数量保持不变。因此，根据定理3.2，我们得出

$$\mathrm{pdinv}(P_{\pi^\bullet})+\mathrm{ldinv}(\pi^\bullet)=\mathrm{pdinv}(P_{\Gamma(\pi^\bullet)})+\mathrm{ldinv}(\Gamma(\pi^\bullet)).$$

□

给定 $\pi^\bullet=(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(\ell)})\in\mathrm{PF}_{\ell m,\ell n}$ 和 $\tau\in\mathrm{cPF}_{m,n}$，如果 $\pi^{(\ell)}$ 的最后一个带标签的北步可以与 τ的第一个带标签的北步拼接，那么

$$\mathrm{mix}(\tau,\pi^\bullet)=(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(\ell)},\tau).$$

特别是，当P_τ 经过原点时，这一结论总是成立。因此，我们得到如下结论：对于$(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)})\in\mathrm{PTab}_{m,n}(k)$，路径$P_{\Gamma(\pi^\bullet)}$经过$(im,in)$当且仅当$P_{\pi^{(i+1)}}$经过原点。

对于一个合成 $\alpha\vDash k$，令$\mathrm{PTab}_{m,n}(k;\alpha)$ 表示满足以下条件的$(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)})\in\mathrm{PTab}_{m,n}(k)$ 的集合：

$$\mathrm{aseq}(P_{\pi^{(i)}})_1\begin{cases}=0 & \text{if } i=1+\sum_{j=1}^{\ell}\alpha_j \text{ for some } \ell\geq 0,\\ >0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

于是，双射 Γ限制为一个双射

$$\mathrm{PTab}_{m,n}(k;\alpha)\longrightarrow\{\pi^\bullet\in\mathrm{PF}_{km,kn}:\mathrm{touch}(\pi^\bullet)=\alpha\}.$$

结合定理3.3 和命题3.5，我们最终推得：

推论 3.8. 对于一对互素正整数(m,n) 以及正整数k的一个合成 $\alpha\vDash k$，有

$$C_\alpha[-MX^{m,n}]\cdot 1=\sum_{\pi^\bullet\in\mathrm{PTab}_{m,n}(k;\alpha)}q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)}\,t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})}\,x^{f_{\pi^\bullet}}.$$

4. 有理 Shareshian–Wachs 对合

本节的主要目标是证明以下恒等式：

$$\mathfrak{h}_a\mathfrak{h}_b=\mathfrak{h}_b\mathfrak{h}_a,\qquad \hat{\mathfrak{h}}_a\hat{\mathfrak{h}}_b=\hat{\mathfrak{h}}_b\hat{\mathfrak{h}}_a,\qquad \bar{\mathfrak{h}}_a\bar{\mathfrak{h}}_b=\bar{\mathfrak{h}}_b\bar{\mathfrak{h}}_a, \tag{4.1}$$

$$q(\hat{\mathfrak{h}}_b\bar{\mathfrak{h}}_a-\hat{\mathfrak{h}}_{a-1}\bar{\mathfrak{h}}_{b+1})=\bar{\mathfrak{h}}_a\mathfrak{h}_b-\bar{\mathfrak{h}}_{b+1}\hat{\mathfrak{h}}_{a-1}, \tag{4.2}$$

其中，算子 $\mathfrak{h}_i$、$\hat{\mathfrak{h}}_i$ 和 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 将在下文定义。在下一节中，我们将仅利用这些恒等式推导主要结果。

特别地，（4.1）可视为色拟对称函数 [SW16，定理 4.5]的对称性的有理推广。我们通过构造 Shareshian–Wachs 对合的有理类比来证明（4.1），并将该有理类比记为SW。为此，我们引入摆动图的概念，它纯粹是组合的且初等的。我们首先在摆动图上定义映射SW，然后通过旋转将循环停车函数的元组与摆动图等同，从而将该映射应用于这些元组。等式（4.2）通过对映射SW稍作修改而得到证明。

4.1. **算子**。我们引入算子 $\mathfrak{h}_i$、$\hat{\mathfrak{h}}_i$和 $\bar{\mathfrak{h}}_i$，它们将在下一节中发挥核心作用。尽管这些算子依赖于整数m 和 n，但为简便起见，我们在记号中将其省略。

定义 4.1. 对于正整数 a，我们将长度为 a 的链 定义为一个元组$(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(a)})$，满足每个 $\pi^{(i)} \in \mathrm{cPF}_{m,n}$ 且

$$\pi^{(i)} \prec \pi^{(i+1)} \quad \text{for } 1 \le i \le a-1.$$

令 $\mathbf{H}_a$ 表示所有此类链构成的集合。我们进一步将 $\mathbf{H}_a$ 分解为不相交并 $\mathbf{H}_a = \bar{\mathbf{H}}_a \sqcup \hat{\mathbf{H}}_a$，其中一条链属于 $\bar{\mathbf{H}}_a$，当且仅当路径 $P_{\pi^{(1)}}$ 经过原点。

对于一个由元组构成的序列 $\nu = (\pi^\bullet_1,\dots,\pi^\bullet_\ell)$，其中每个 $\pi^\bullet{}_i \in \mathbf{H}_{a_i}$ 对应某个 a_i，我们通过拼接将其视为 $\mathrm{cPF}_{m,n}^{\sum a_i}$ 中的一个大元组。在这一对应下，我们可以滥用记号，写作 $\mathrm{stat}(\nu)$和 $z(\nu)$。根据引理 3.2，在同一个 $\pi^\bullet{}_i$ 内对 ν 的项进行置换，不会改变 stat的值。

令 $\mathbb{C}(q,t)[\mathbf{z}]$ 表示以$\{z_{jk}\}$为不定元的多项式环，其中 $1 \le i \le n$，$j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$，且$k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$。我们将 $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}(q,t)[\mathbf{z}]$ 定义为由元素 $z(\pi)$ 生成的子代数，其中 $\pi \in \mathrm{cPF}_{m,n}$。

定义 4.2. 我们定义一个作用于 $\mathscr{D}$ 上的算子 $\mathfrak{h}_a$，如下所示。注意，$\mathscr{D}$ 由形如 $z(\tau^\bullet)$ 的元素线性生成，其中 $\tau^\bullet$ 是 $\mathrm{cPF}^k_{m,n}$ 中的一个元组。我们规定

$$\mathfrak{h}_a \cdot z(\tau^\bullet) = \sum_{\pi^\bullet \in \mathbf{H}_a} q^{\mathrm{stat}(\tau^\bullet,\pi^\bullet)-\mathrm{stat}(\tau^\bullet)}\, z(\tau^\bullet,\pi^\bullet).$$

对于一个 满足条件的另一个元组 $\nu^\bullet$ $z(\nu^\bullet) = z(\tau^\bullet)$，由引理 3.2 很容易验证 at

$$\mathrm{stat}(\tau^\bullet,\pi^\bullet) - \mathrm{stat}(\tau^\bullet) = \mathrm{stat}(\nu^\bullet,\pi^\bullet) - \mathrm{stat}(\nu^\bullet),$$

这保证了 $\mathfrak{h}_a$ 的作用是良定义的。算子 $\hat{\mathfrak{h}}_a$ 和 $\bar{\mathfrak{h}}_a$ 以类似方式定义，只需分别将 $\mathbf{H}_a$ 替换为 $\hat{\mathbf{H}}_a$ 或 $\bar{\mathbf{H}}_a$。注意，显然有 $\mathfrak{h}_a = \hat{\mathfrak{h}}_a + \bar{\mathfrak{h}}_a$。对于退化情形，我们规定 $\mathfrak{h}_0 = \hat{\mathfrak{h}}_0 = 1$、$\bar{\mathfrak{h}}_0 = 0$，以及 $\mathfrak{h}_a = \hat{\mathfrak{h}}_a = \bar{\mathfrak{h}}_a = 0$，其中 < 0。

例如，我们有

$$\hat{\mathfrak{h}}_2\bar{\mathfrak{h}}_3\mathfrak{h}_4 \cdot 1 = \sum_{(\pi^\bullet,\tau^\bullet,\nu^\bullet) \in \mathbf{H}_4 \times \bar{\mathbf{H}}_3 \times \hat{\mathbf{H}}_2} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet,\tau^\bullet,\nu^\bullet)} z(\pi^\bullet,\tau^\bullet,\nu^\bullet).$$

算子 $\mathfrak{h}_i$、$\hat{\mathfrak{h}}_i$ 和 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 通常不满足交换律；然而，同类型的算子满足交换律，如 (4.1) 中所述。要证明 $\mathfrak{h}_a\mathfrak{h}_b = \mathfrak{h}_b\mathfrak{h}_a$，只需构造一个双射，将 $\mathbf{H}_a \times \mathbf{H}_b$ 映射到

$\mathbf{H}_b \times \mathbf{H}_a$ 并且该双射同时保持统计量 stat 和骨架 z。这样的双射也将意味着 y

$$\hat{\mathfrak{h}}_a \hat{\mathfrak{h}}_b = \hat{\mathfrak{h}}_b \hat{\mathfrak{h}}_a \quad \text{and} \quad \bar{\mathfrak{h}}_a \bar{\mathfrak{h}}_b = \bar{\mathfrak{h}}_b \bar{\mathfrak{h}}_a .$$

为此，我们深入探讨摆动图的世界。

4.2. **摆动图的组合学**。 我们引入摆动图，并构造一个映射 SW 作用于它们。我们的目标是证明命题 4.5。随后，我们将证明（4.1），只需将 $\mathbf{H}_a \times \mathbf{H}_b$ 的一个元素视为摆动图并应用映射 SW。

定义 4.3. 对于正整数 a 与 b，一个(a,b)-摆动图 由 a 条黑色股线与 b 条红色股线组成，这些股线位于 $\mathbb{R}^2$ 中。每条弦定义为一条连续曲线 $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$。我们构造这些弦的方式是：取一条基本曲线，从 $(r,0)$ 到 $(r,1)$，对某个 $r \in \mathbb{R}$，并沿竖直方向作周期延拓，使所得曲线连续且 y-单调。具体而言，我们要求：

(1) 每条弦与每条水平线$y = c$ 恰好相交于一点。(2) 同色弦互不相交。(3) 不同颜色的弦在带 $0 \le y < 1$内仅有有限个交点。

由于周期性，该图完全由其在水平带 $0 \le y < 1$上的限制所确定，我们称该带为主带。

稍后，摆动图中的每条弦都对应于cPF$_{m,n}$中的一个元素。对于摆动图 Π，我们建立如下术语。红色弦与黑色弦之间的交点称为交叉。我们根据弦的相对方向对交叉的符号进行分类：若从西南方向进入交叉的弦为黑色弦，则该交叉为正交叉；若为红色弦，则该交叉为负交叉。

摆动图自然地将 $\mathbb{R}^2$ 分拆为称为区域的连通开分支。根据定义，没有弦穿过区域的内部。在任意交叉 v周围，局部有四个不同的相邻区域。由于每条弦都是y单调的（沿垂直方向严格递增），我们将这些区域分别称为北、南、东和西区域。具体而言，严格位于v 上方的区域是北区域，严格位于v 下方的区域是南区域，东、西区域则依此定义。现在我们构造一个无限平面图$G(\Pi)$，定义如下：

(1) 顶点：$G(\Pi)$ 的顶点是摆动图 Π 的区域。(2) 边：如果$G(\Pi)$ 中的两个顶点对应于同一个交叉的西区域和东区域，则它们之间有一条边。两个顶点之间可能有多条边。

根据构造，$G(\Pi)$ 自然嵌入到 $\mathbb{R}^2$ 中，成为一张边穿过交叉点的无限平面图。考虑$G(\Pi)$的一个连通分支。如果该分支包含无限多个区域或一个无界区域，则称该分支中的区域为正则区域。 Π的正则区域集合记作 $\mathrm{Reg}(\Pi)$。

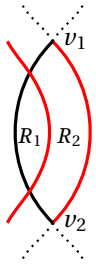


图 3. 一个双边形及其内部的一个简单区域。

我们将SW(Π) 定义为改变被正则区域包围的线段（即弦的部分）的颜色后得到的构型。下面的引理有助于判断 Π 中的区域是否为正则区域。对于区域R，我们用R^+ 表示将R 向上周期平移一个周期后得到的区域。注意，对于无界区域R，有$R^+ = R$。

引理 4.4. 对于摆动图 Π，有界区域 R 是正则的，当且仅当R 和R^+ 在$G(\Pi)$中连通。

证明。反向显然。对于正向，假设 R ∈Reg(Π)。若 R 与某个无界区域 R′连通，那么经过一次周期平移，R^+ 也与 $(R')^+ = R'$连通。因此，我们得出 R 与 R^+ 连通。现在假设包含 R 的连通分支仅含有有界区域。那么这个分支必定包含无限多个区域。因此，存在一个区域 Q，使得对于某个 $k \geq 1$，Q 和 Q^{k+} 位于同一个分支中。设 P 是一条从 Q 到 Q^{k+}的路径，并考虑它的周期平移 P^+，这是一条从 Q^+ 到 $Q^{(k+1)+}$的路径。由于图 G(Π) 是平面的，路径 P 和 P^+ 必定共享一个顶点。因此，Q 与 Q^+ 连通。由此可推知，R 与 R^+ 连通。□

命题 4.5。 对于一个(a,b)-摆动图 Π，构型SW(Π) 是一个(b,a)-摆动图。此外， Π的主带中的正交叉数等于SW(Π)的主带中的正交叉数。

我们通过应用一系列操作（见定义 4.6 ）将问题化归为命题 4.6中描述的基本情形，以此证明命题 4.9。我们先介绍所需的术语。

弦上连接其两点的一段连通部分称为该弦的线段 。由两条线段围成的形状——其中一条必定来自红色弦，另一条来自黑色弦——称为双边形。构成双边形的线段分别称为双边形的边界红弦段 和边界黑弦段 。双边形区域称为简单区域。注意，对于任意双边形，其中都存在一个简单区域。例如，在图3中，形状$R_1 \cup R_2$ 是一个双边形，因为它由连接v_1 和v_2的两条线段围成。然而，它并非一个区域，我们可以在这个双边形内部找到一个简单区域R_1 。

如果简单区域的最高点和最低点的y坐标之差恰好为 1，则称其为满简单区域。否则，称该简单区域为正规。

定义 4.6。 我们定义 Π 上的以下操作。

- 操作 (I)：如果存在一个真简单区域，且没有其他弦接触其边界，我们就收缩该区域。
- 操作（II）：如果存在一个简单区域，恰有另一条弦仅在一点处接触其边界，我们就分离该接触点。

操作（I）和（II）必须周期性地执行：如果我们在带$r \le y < r+1$中执行操作（I）或（II），那么对于所有$z \in \mathbb{Z}$，都必须在每个平移带$r+z \le y < r+z+1$中执行相同的操作。

例 4.7。图 4 左侧展示了 (4,2)-摆动图 Π 。区域 R_1 是一个满简单区域，而 R_2 是一个真简单区域。主带中的负交叉用蓝点表示。在图 G(Π)中，有一条边连接 R_3 和 R_4，，还有一条边连接 R_3 和 R_4^+。因此，R_4 和 R_4^+ 位于图 G(Π)的同一个连通分支中，这意味着 $R_3, R_4 \in$Reg(Π)。注意，区域 R_1 和 R_2 及其周期平移都不是正则的。因此，右侧展示了 SW(Π)。我们可以验证， Π和 SW(Π)中的正交叉数量保持不变。

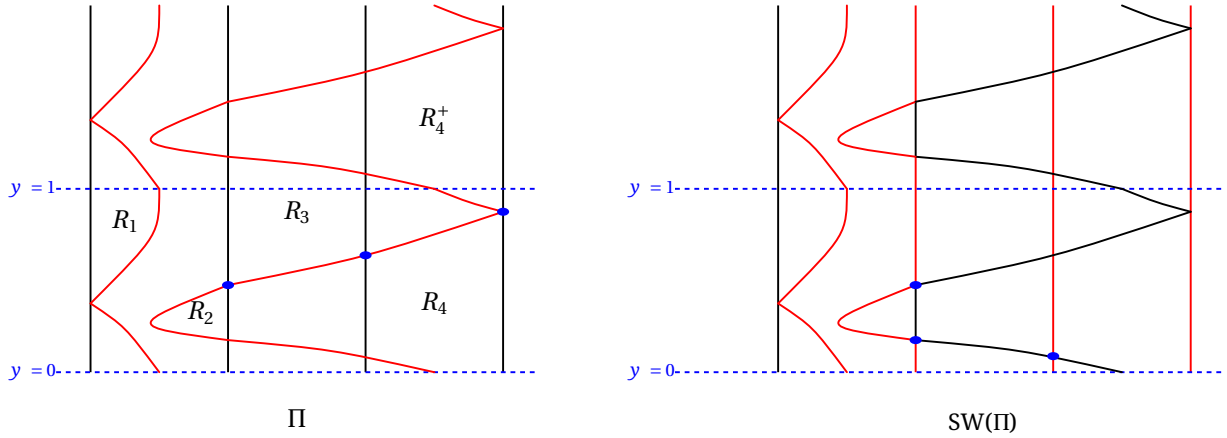


图 4. 波动图 Π及其 SW(Π)。

见图5。我们可以对 Π 中的简单区域R执行操作 (I)，如左图所示。得到的摆动图 Π′ 如中图所示。然后，我们可以对Π′中的简单区域R' 执行操作（II），得到右图所示的 Π″ 。

引理4.8。 给定一个 (a, b)-摆动图 Π，设 Π′ 为通过执行操作 *(I)* 或操作 （*II*）得到的图。若命题 4.5对 Π′ 成立，则对 Π也成立。

证明。 情况1)：假设 Π′ 是对 Π中的简单区域R 应用操作 (I)得到的。由于R 是一个没有其他弦接触其边界的简单区域，因此它是G(Π)中的一个孤立顶点。显然，R 不是正则的。由此可得，SW(Π) 与SW(Π′) 完全相同，区别仅在于重新插入了原区域

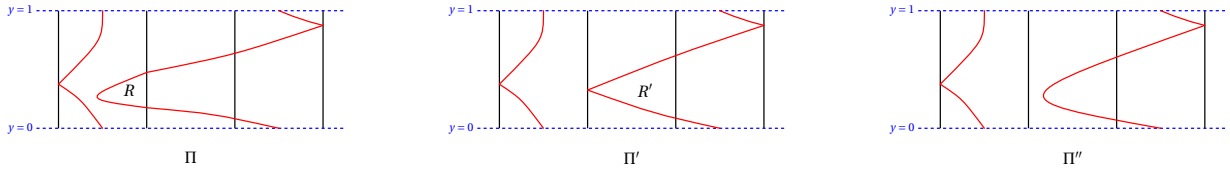


图5. 操作（I）与（II）的应用。

R （及其原有的边界线段颜色）。我们得出结论：如果SW(Π′) 是一个(b,a)-摆动图，那么SW(Π)也是。

现在我们分析正交叉。不失一般性，设黑色边界段位于R的左侧。则从 Π′到 Π时，正交叉的数目恰好增加1，从SW(Π′) 到SW(Π)时同样如此。

情形 2）：现假设 Π′ 是通过对一个简单区域应用操作（II）得到的B，其中另一条弦仅与边界接触一次，见左侧图6。设 ℓ_1 和 ℓ_2 为B 左侧的边界线段，并不失一般性地假设线段 ℓ_3 （黑色）在接触点v处与线段 ℓ_2 相接触。记D、C和E 为v北侧、东侧和南侧的区域，并设A 为隔着线段 ℓ_1位于B 左侧的一个区域。在图$G(\Pi)$中，存在连接A 与D 以及A 与E的边。

在 Π′ 中，接触线段 ℓ_3 被分离，导致区域 D 和 E 合并为一个区域D'。在新图 $G(\Pi')$ 中，D' 仍与 A 连通。由此可得，$A,D,E \in \mathrm{Reg}(\Pi)$ 当且仅当$A,D' \in \mathrm{Reg}(\Pi')$。请注意，除这些局部构型外，$G(\Pi')$ 和$G(\Pi)$ 的图结构相同。

我们分析 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 在 SW(Π) 与 SW(Π′) 中的颜色变化：

- 如果$A,D,E \notin \mathrm{Reg}(\Pi)$ （因而$A,D' \notin \mathrm{Reg}(\Pi')$），那么线段 ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 在 SW(Π) 和 SW(Π′) 中均不会改变颜色。局部结构保持不变。
- 如果 $A,D,E \in \mathrm{Reg}(\Pi)$ 且 $C \notin \mathrm{Reg}(\Pi')$，那么 $B,C \notin \mathrm{Reg}(\Pi')$，并且 $B,C \notin \mathrm{Reg}(\Pi)$。线段$\ell_1,\ell_2,\ell_3$ 在 SW(Π) 和 SW(Π′) 中均不会改变颜色。
- 若 A、D、E $\in \mathrm{Reg}(\Pi)$ 且 $C \in \mathrm{Reg}(\Pi')$，则有 $B \notin \mathrm{Reg}(\Pi')$ 以及 B、C $\in \mathrm{Reg}(\Pi)$。线段 ℓ_1、ℓ_2、ℓ_3 在 SW(Π) 中全部变色，而在 SW(Π′) 中仅 ℓ_3 变色。

在所有子情形中，正交叉数目从 Π 到 Π′ 的变化量与 SW(Π) 到 SW(Π′) 的变化量相同。□

由于操作（I）和（II）会严格减少交叉的数量，因此不能对给定的摆动图 Π 无限次应用这些操作。因此，这些操作的任何序列最终都必定终止。我们对所得的约化摆动图进行分类：这类图无法再应用操作（I）或（II）。

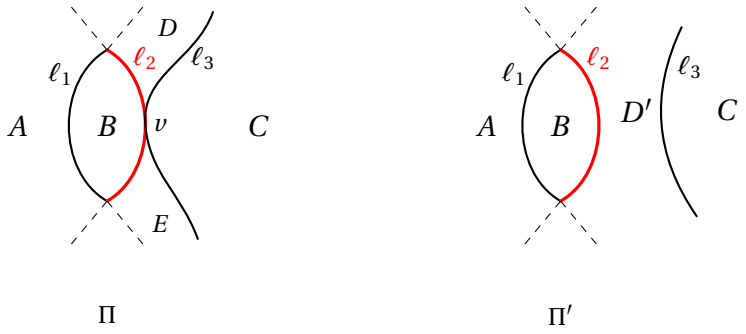


图6. 操作(II)的局部构型。

命题 4.9。 设 Π 是一个约化的(a,b)-摆动图。那么存在黑色股线的一个子集A和红色股线的一个子集B，以及一个双射 $\phi: A \to B$，使得：

- 每条黑色弦 $\ell \in A$ 在主带中与对应的红色弦 $\phi(\ell)$ 恰好相交一次，且不与其他红色弦相交。
- 不属于A的黑色弦和不属于B的红色弦不参与任何交叉。

对于命题 4.9 中的约化摆动图 Π，每一对 $\ell \in$ A 和 $\phi(\ell)$ ∈B 都构成一个完全简单区域（例如，参见图 4 中区域 R_1 的形成方式）。这样的完全简单区域在 G(Π) 中是孤立的，因此不属于 Reg(Π)。所有其他区域都是无界的，因此属于 Reg(Π)。因此，SW(Π) 的构造方式是保留对应于 A 或 B 中元素的弦的颜色，并改变所有其他弦的颜色。显然，SW(Π) 是一个 (b,a)- 摆动图，并且在此情形下，正交叉（分别为负交叉）会映射为正交叉（分别为负交叉）。由此可知，命题 4.5 对约化摆动图成立。

虽然命题 4.9 的陈述乍看之下直观上似乎合理，但要给出严谨证明仍需谨慎处理一些技术细节（见引理 4.10 和 4.11）。尽管引理 4.11 表面上比引理 4.10更强，但要证明引理 4.11，必须先证明引理 4.10。

引理 4.10。 对于摆动图 Π，若存在一个简单区域，使得恰有一条弦（构成其边界的弦除外）与其边界相接触，则可在 Π中的某处应用操作 *(I)* 或 *(II)*。

证明。 假设存在这样的简单区域。不失一般性，我们取一个简单区域 R，它是所有满足以下性质的简单区域中最靠左的（相对于黑色股线的顺序）：黑色边界段位于左侧，且有一条红色弦与该黑色边界段相接触。令 ℓ为与该黑色边界段相接触的红色弦。

情况1)：如果 ℓ 仅与R的边界黑弦段相接一次，那么我们可以对R应用操作（II）。

情形 2)：假设 ℓ 至少两次接触R的边界黑弦段。令v和v'为两个不同的接触点。设 ℓ'_1 为构成R边界黑弦段的黑色弦，并将

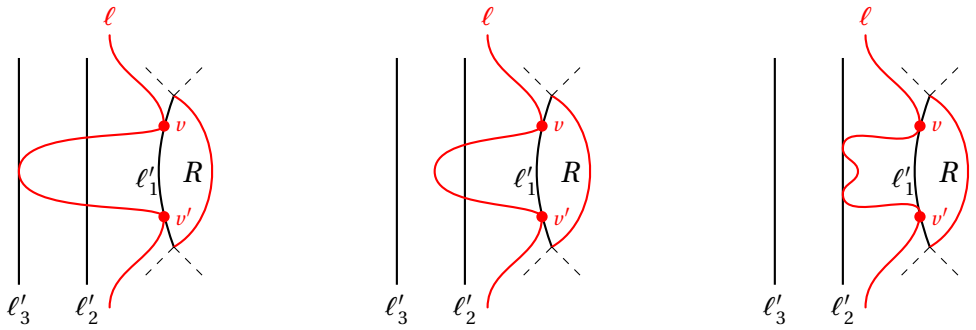


图 7. 情形 2 的子情形。

位于ℓ'_1 左侧的黑色弦从右到左依次记为$\ell'_2,\ell'_3,\ldots$。沿 ℓ 从 v 追踪路径至 v′。令 $w_1, w_2, \ldots, w_p$为 ℓ 与任意黑色弦 $\{\ell' k\}$相交处的点序列。令 a j 为包含 w_j的黑色弦的指标，即 $w_j \in \ell \cap \ell'_{a_j}$。注意，$w_1 = v \in \ell'_1$（因此 $a_1 = 1$），且 $w_p = v' \in \ell'_1$（因此 $a_p = 1$）。由于弦不能在不穿过边界的情况下越过相邻区域，我们有 $|a_j - a_{j+1}| \le 1$。由于序列 $a_1, \ldots, a_p$ 以 1 开始并以 1 结束，因此必定存在一个转向指标 j 。由此得到两个子情形：

子情形 2a）：存在一个指标 j，使得 $a_{j+1} = a_j + 1$ 且 $a_{j+2} = a_j$。令 $k = a_j$。在此情形下，弦 ℓ 在 w_j 处离开 $\ell' k$，在 w_{j+1} 处接触 $\ell' k+1$，并在 w_{j+2} 处返回 $\ell' k$。考虑由连接 w_j 与 w_{j+2} 的两条线段所围成的双边形。则它必定是一个区域，我们可以应用操作（II）。例如，见图 7 的左侧。

子情形 2b）：存在一个指标 j，使得 $a_j = a_{j+1}$。令 $k = a_j$。此处，ℓ 与 $\ell' k$相交于两个连续点 w_j与 w_{j+1}，且其间不与任何其他黑色弦相交。考虑由连接 w_j与 w_{j+1} 的两条线段所围成的双边形 R'。

- 如果 $R_\prime$ 的红色边界线段位于 $R_\prime$的左侧，那么$R_\prime$ 必定是一个区域，因此我们可以应用操作 (I)。例如，见图 7 中间部分。
- 如果 $R_\prime$ 的红色边界线段位于 $R_\prime$ 的右侧，那么 $R_\prime$ 本身可能不是一个区域。在这种情况下，我们取 $R_{\prime\prime}$ 内部的一个简单区域 $R_\prime$。如果 $R_\prime$ 本身是一个简单区域，那么直接令 $R_{\prime\prime} = R_\prime$。如果存在一条红色弦（除构成 $R_{\prime\prime}$边界的弦之外）与 $R_{\prime\prime}$ 的边界相交，那么这就与我们最初选择 R 为最左侧此类简单区域的事实相矛盾。因此，我们可以对 $R_{\prime\prime}$应用操作 (I)。例如，见图 7 右侧部分。

□

引理 4.11。对于摆动图 Π，如果存在一个简单区域，至少有一条弦（除构成其边界的弦之外）与其边界相交，那么可以在 Π中的某处应用操作 *(I)* 或 *(II)*。

证明。设R 为具有此性质的最左侧简单区域。不失一般性，假设R 的左边界是一条黑色线段。设 ℓ 是一条红色弦（不是构成边界的那条），它

与R的边界黑弦段相交。如果不存在这样的红色弦，那么引理4.10就得证了。

令 ℓ'_1 为构成R左边界的黑色弦，并令 ℓ'_2 为紧邻 ℓ'_1左侧的黑色弦。令v 为 ℓ与R的边界黑弦段相交处的一点。从v出发，沿 ℓ 向上（分别向下）遍历，找到 ℓ 与 ℓ'_1或 ℓ'_2相交的第一个点w（分别是w'）。由于图的周期性，点$v+(0,1)$和$v-(0,1)$分别位于 ℓ和 ℓ'_1上，因此这样的点必定存在。

情况1）：w 和w' 都位于 ℓ'_2上。考虑由连接w 和w' 的两条线段围成的双边形，并令R' 为其中的一个简单区域。除了构成R' 边界的弦之外，其他弦都不能与R的边界相交，否则就会违背我们选择R 为这类简单区域中最靠左者的条件。我们可以对R'应用操作 (I)。

情形 2）：至少有一个点（设为 w）位于 ℓ'_1 上。考虑由连接v 和 w 的两条线段围成的双边形，并设 R'' 是其中一个简单区域。注意，黑色弦（形成 R'' 边界的黑色弦除外）不能与 R'' 的边界相交。由引理4.10，我们可以找到某处应用操作 (I) 或 (II)。□

命题 4.9 的证明。 任取一条红色弦 ℓ。如果 ℓ 与某条黑色弦 ℓ' 在主带中相交两次，那么必定存在一个可以应用操作 (I) 的简单区域；否则，根据引理4.11 便会得出矛盾。如果 ℓ 与两条不同的黑色弦相交，那么由周期性可知， ℓ 会在主带中与某条黑色弦相交两次。由此可知，每条红色弦在主带中至多与一条黑色弦相交一次。此外，根据引理4.11，两条红色弦不可能与同一条黑色弦相交。□

注 4.12. 我们可以放宽摆动图的第三个条件，允许两条弦在主带中的有限多个区间相交。只需将这些区间视为点，也就是交叉，并以相同的方式应用映射 SW 。例如，在图 8左侧， Π 是一个放宽了第三个条件的(2,1)-波动图；红色弦在两个区间I_1 和I_2与左侧黑色弦相交。将这些区间视为点后，I_2 是正交叉，而I_1 是负交叉。此外，在图$G(\Pi)$中，I_1 和I_2 诱导出连接R 与R'的边。区域R'' 是主带中唯一不正则的区域。对应的SW(Π)如右侧所示。

4.3. 从 $\mathbf{H}_a \times \mathbf{H}_b$ 到 (a,b)-摆动图： (4.1)的证明。

定义 4.13. 给定 $\pi \in \mathrm{cPF}_{m,n}$，我们按如下方式关联一条无限曲线$\mathrm{IC}(\pi)$ 。

- 步骤1）通过周期延拓，从 P_π 绘制一条无限曲线。
- 步骤2）扰动每个北步。固定一个小数 $\epsilon > 0$ 并考虑一个从（x，y）出发且标记为 ℓ的北步。将此北步水平向右移动 $\big(nx + m\,(\ell - y)\big)\epsilon$。相应地修改东向步。见图 9。

- 步骤3) 最后，旋转并缩放整个图形，使点(m,n) 映射到$(0,1)$。

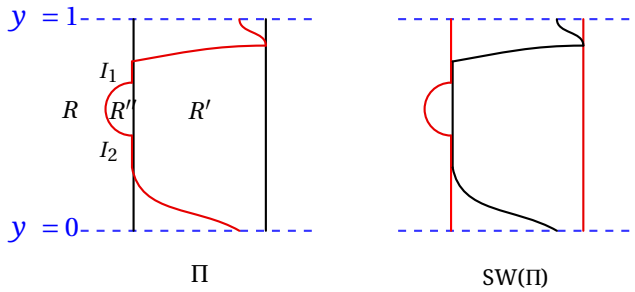


图8. 具有放宽条件的摆动图。

给定N和N'中两个竖直相邻的北向步，回顾一下$N_\prime$的标记严格大于N的标记。因此，经过步骤2)后，N'的起点位于N的终点右侧或正好在其右侧。由此得到的对象是一条周期为(m,n)的无限曲线，它严格向右或向上移动。完成步骤3)后，$\mathrm{IC}(\pi)$ 变成一条周期为$(0,1)$的y单调无限曲线。

容易验证，若 $\pi \prec \pi'$，则 $\mathrm{IC}(\pi')$ 严格位于 $\mathrm{IC}(\pi)$ 的左侧。最后，对于 $(\pi^\bullet, \tau^\bullet) \in \mathrm{H}_a \times \mathrm{H}_b$，我们通过针对 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{a}$ 从 $\mathrm{IC}(\pi^{(i)})$ 画出 a 条黑色股线，并针对 $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{b}$ 从 $\mathrm{IC}(\tau^{(i)})$ 画出 b 条红色股线，将其关联到一个（第三条条件放宽；见注 4.12）(a,b)-摆动图 $\mathrm{WD}(\pi^\bullet, \tau^\bullet)$。



图9。左侧展示了带标签的北步周围的局部图。右图说明了将北步向右扰动距离 $r = \big(nx + m(\ell - y)\big)\epsilon$ 后的结果。

(4.1)的证明。对于 $\pi^\bullet \in \mathrm{H}_a$ 与 $\tau^\bullet \in \mathrm{H}_b$，第3.1节中定义的 $(\pi^\bullet, \tau^\bullet)$ 中的正交叉对应于第4.1节中定义的 $\mathrm{WD}(\pi^\bullet, \tau^\bullet)$ 中的正交叉。映射 $\mathrm{WD}^{-1} \circ \mathrm{SW} \circ \mathrm{WD} : \mathrm{H}_a \times \mathrm{H}_b \to \mathrm{H}_b \times \mathrm{H}_a$ 平凡地保持骨架，并且由引理 3.2 和命题 4.5 保持 stat。由于该映射是一个对合（双射），我们完成了(4.1)的证明。 □

4.4. **证明** (4.2)。 我们证明 (4.2)，为此引入映射 SW'，它是映射SW的一个轻微修改。通过确立其性质，即命题 4.14，我们完成该证明。我们首先定义若干术语。

我们将$B(a,b)$ 定义为满足以下条件的(a,b)摆动图的集合 Π 。令 ℓ表示最右侧黑色弦。条件如下：

- 在$y = 0$水平线上， ℓ 的x坐标大于任何其他红色弦。
- 设 $\Pi_\prime$ 为从 Π中删除 ℓ 后得到的$(a-1,b)$-摆动图。那么，$\mathrm{SW}(\Pi_\prime)$ 中存在一条与 ℓ相交的黑色弦。

我们将$R(a,b)$ 定义为满足相应条件的(b,a)-摆动图集合，其中黑色弦和红色弦的角色互换。

对于图 $\Pi \in \mathrm{B(a,b)}$，我们按如下方式构造 $\mathrm{SW}'(\Pi)$。令 ℓ 为最右侧黑色弦，ℓ' 为最右侧红色弦。从 ℓ' 与 $\mathrm{y}=0$相交的点出发，沿 ℓ' 朝 y 增大的方向前进。令 v 为 ℓ' 与 ℓ相交的第一个点。根据 B(a,b) 的定义中的第二个条件，这样的交点必定存在。令 R 表示交叉 v 正南方紧邻的区域（事实证明，$\mathrm{R} \notin \mathrm{Reg}(\Pi)$）。令 U 为图 $\mathrm{G}(\Pi)$ 中与 R 属于同一连通分支的区域集合。我们通过改变被 $\mathrm{Reg}(\Pi) \cup \mathrm{U}$ 中的区域包围的线段颜色，定义构型 $\mathrm{SW}'(\Pi)$。

命题 4.14。 映射 SW' 是从 $B(a,b)$ 到 $R(a,b)$的双射，使得（在主带中）正交叉的数量增加 *1*。

证明。设 $\Pi \in \mathrm{B(a,b)}$。令 $\ell_1, \ell_2, \ldots$（分别为 $\ell'_1, \ell'_2, \ldots$）表示从右向左编号的黑色股线（分别为红色股线）。令 Π' 表示从 Π中删除 ℓ_1 后得到的摆动图。根据 B(a,b) 的定义，在 Π' 中存在一个区域 $\mathrm{R}' \in \mathrm{Reg}(\Pi')$，其边界包含 ℓ'_1 的一段，且与弦 ℓ_1相交。由引理 4.4，存在一条从 R' 到 $(\mathrm{R}')^+$的路径

$$R' = Y_1 \to Y_2 \to \cdots \to Y_c = (R')^+$$

在图$G(\Pi')$中。由于$G(\Pi')$ 中的每条边都对应于 Π'的一次交叉，因此我们可以将上述路径视为交叉序列$(w_1, w_2, \ldots, w_{c-1})$，其中 Y_i与 Y_{i+1}之间的边来自交叉w_i。

回到 Π，令 w 为 ℓ_1 与直线 $\mathrm{y}=0$相交的点。从直线 $\mathrm{y}=0$沿 ℓ'_1 向上移动，令 v 为 ℓ'_1 与 ℓ_1相交时遇到的第一个点。弦 ℓ_1 穿过区域 R' (fromΠ')，将其分开。令 R'' 表示位于 ℓ_1左侧的区域。注意，$\mathrm{R}'' \in \mathrm{Reg}(\Pi)$，因为由交叉序列 $(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \ldots, \mathrm{w}_{c-1})$ 诱导的路径仍连接 R'' 与 $(\mathrm{R}'')^+$。关于 Π的描述见图10中部。

我们通过添加一条辅助红色弦来构造增广图 $\bar{\Pi}$。ℓ''这条弦放置在 Π 中所有弦的右侧，并且构造方式使其与 ℓ_1 恰好相交于一点，v'，该点位于 ℓ_1 的线段上，介于w 和v之间。关于10 的描述，请参见图右侧的 $\bar{\Pi}$。

令 R_1、R_2、R_3，和 R_4 分别表示图 $\bar{\Pi}$ 中交叉 v' 的西、南、东、北区域。在图 $\mathrm{G}(\bar{\Pi})$ 中，区域 R_1 和 R_3 由一条边相连。由于 R_3 是无界区域（位于最右侧），包含 R_1 和 R_3 的连通分支包含于 $\mathrm{Reg}(\bar{\Pi})$ 中。此外，R_3 与 R'' 相连。由于 $\mathrm{R}'' \in \mathrm{Reg}(\Pi)$，可知 $\mathrm{R}_3 \in \mathrm{Reg}(\bar{\Pi})$。又因为 $\mathrm{R}_3 = \mathrm{R}_2^+$，所以 $\mathrm{R}_2 \in \mathrm{Reg}(\bar{\Pi})$。

因此，当我们构造$\mathrm{SW}(\bar{\Pi})$时，辅助弦 ℓ'' 确保与分支U（在SW'的构造中定义；是$G(\Pi)$ 中含有R_1的连通分支）对应的区域为正则区域。在$\mathrm{SW}(\bar{\Pi})$中，弦 ℓ'' 变为黑色弦，而其余弦的构型与$\mathrm{SW}'(\Pi)$完全对应。

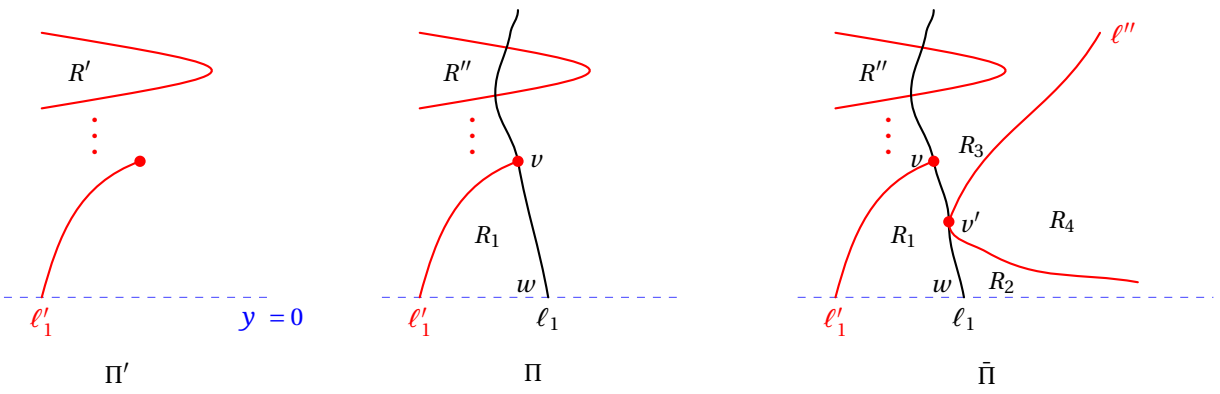


图10. 辅助弦 ℓ'' 的构造。

现在我们追踪正交叉的变化。在 $\bar{\Pi}$中，交点v' 是一个正交叉，在SW($\bar{\Pi}$)中变为负交叉。根据命题4.5，我们推得，从 Π到SW′(Π)，正交叉的数量增加了1。

现在只需证明 SW′(Π) ∈R(a,b)。令 $\hat{}\ell$ 为 SW′(Π) 中最右侧的红色弦。那么，$\hat{}\ell$ 不穿过序列 (w_1,w_2,...,w_{c-1}) 中的任何交叉，因此该序列诱导的路径连接 $\hat{}$R 和 ($\hat{}$R)$^+$，其中 $\hat{}$R 是 SW′(Π) – $\hat{}\ell$ 中 w_1 东侧的区域。由于 $\hat{}$R 与 $\hat{}\ell$ 相交，我们得出 SW′(Π) ∈R(a,b)。

□

(4.2)的证明。令 A_1 为满足 WD($\pi^\bullet,\tau^\bullet$) ∈B(a,b) 的有序对 $(\pi^\bullet,\tau^\bullet) \in \bar{}H_a \times \hat{}H_b$ 的集合，令 B_1 为满足 WD($\pi^\bullet,\tau^\bullet$) ∈B(b + 1, a − 1) 的有序对 $(\pi^\bullet,\tau^\bullet) \in \bar{}H_{b+1} \times \hat{}H_{a-1}$ 的集合。类似地，令 C_1 为满足 WD($\pi^\bullet,\tau^\bullet$) ∈R(a,b) 的有序对 $(\pi^\bullet,\tau^\bullet) \in \hat{}H_b \times \bar{}H_a$ 的集合，令 D_1 为满足 WD($\pi^\bullet,\tau^\bullet$) ∈R(b + 1, a − 1) 的有序对 $(\pi^\bullet,\tau^\bullet) \in \hat{}H_{a-1} \times \bar{}H_{b+1}$ 的集合。

于是存在一个双射 $f: A_1 \to C_1$，定义为 $f = \mathrm{WD}^{-1} \circ \mathrm{SW}' \circ \mathrm{WD}$。由命题 4.14，该双射满足

$$z(v) = z(f(v)) \quad \text{and} \quad \mathrm{stat}(v) = \mathrm{stat}(f(v)) - 1 \quad \text{for all} \quad v \in A_1.$$

类似地，存在一个双射 $g: B_1 \to D_1$ 满足相同条件：$z(v) = z(g(v))$ 且 stat(v) =stat($g(v)$) − 1。

最后，我们定义一个双射

$$f' : \bar{\mathbf{H}}_a \times \hat{\mathbf{H}}_b \setminus A_1 \to \bar{\mathbf{H}}_{b+1} \times \hat{\mathbf{H}}_{a-1} \setminus B_1$$

如下。对于 $(\pi^\bullet,\tau^\bullet)$ 在定义域中，令 $\nu^\bullet := (\pi^{(2)},\ldots,\pi^{(a)}) \in \hat{}\mathbf{H}_{a-1}$。考虑 $(\rho^\bullet,\gamma^\bullet) := \mathrm{WD}^{-1} \circ \mathrm{SW} \circ \mathrm{WD}(\nu^\bullet,\tau^\bullet)$，我们令

$$f'(\pi^\bullet,\tau^\bullet) := \left((\pi^{(1)},\rho^\bullet),\gamma^\bullet\right) \in \bar{\mathbf{H}}_{b+1} \times \hat{\mathbf{H}}_{a-1}.$$

显然，f' 同时保持 z和 stat。同理，可以定义一个满足类似性质的双射 $g' : \hat{}\mathbf{H}_b \times \bar{}\mathbf{H}_a \setminus C_1 \to \hat{}\mathbf{H}_{a-1} \times \bar{}\mathbf{H}_{b+1} \setminus D_1$。

双射 f、g、f和 g'共同完成了式（4.2）的证明。 □

5. 定理 1.1

本节中，我们根据上一节定义的算子 $\mathfrak{h}_i$、 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 和 $\hat{\mathfrak{h}}_i$ （命题 5.4 和推论 5.14），推导任意对称函数 f 对 f [–M X m,n] · 1 的作用表达式。特别地，我们给出 s_λ[–M X m,n] 1 的 Jacobi–Trudi 型公式，其直接推论是关于 $\nabla^m s_\lambda$ 的 Loehr–Warrington 猜想。此外，推论 5.14 无需额外条件即可证明定理 1.1。

5.1. 关于 f [$-MX_{m,n}$] · 1的描述。 我们考虑元素为 $\mathfrak{h}_i$、 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 或$\hat{\mathfrak{h}}_i$ 的方阵。对于这样的一个 $\ell \times \ell$ 矩阵 A，A 的各元素并不彼此交换，因此我们需要格外谨慎地定义det(A)，使其定义规范。我们将算子det(A)定义为

$$\det(A) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_\ell} (-1)^w A_{w_1,1} A_{w_2,2} \cdots A_{w_\ell,\ell}.$$

在本节中，我们只考虑满足以下两个条件的矩阵：

(1) 每一列都只包含同一种类型的元素（即全部为 $\mathfrak{h}_i$、 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 或 $\hat{\mathfrak{h}}_i$）。(2) 每一列中元素的指标从顶部到底部严格递减，每次减一。

例如，下面的矩阵满足条件 (1) 和 (2)：

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3 & \bar{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3 \\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 \\ \mathfrak{h}_0 & \mathfrak{h}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_0 & \hat{\mathfrak{h}}_1 \\ \mathfrak{h}_{-1} & \mathfrak{h}_0 & \bar{\mathfrak{h}}_{-1} & \hat{\mathfrak{h}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3 & \bar{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3 \\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 \\ 1 & \mathfrak{h}_1 & 0 & \hat{\mathfrak{h}}_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

由于这样的矩阵由其第一行唯一确定（后续各行的指标依次递减），我们采用一种简洁记法，用括号 [...] 列出第一行的元素。例如，记法 $[\mathfrak{h}_2, \hat{\mathfrak{h}}_3, \bar{\mathfrak{h}}_4]$ 表示方阵

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{h}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3 & \bar{\mathfrak{h}}_4 \\ \mathfrak{h}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_3 \\ \mathfrak{h}_0 & \hat{\mathfrak{h}}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_2 \end{pmatrix}.$$

类似地，(5.1) 中的矩阵记作 $[\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \bar{\mathfrak{h}}_2, \hat{\mathfrak{h}}_3]$。

最后，我们引入以下记法。对于 $f \in \mathbb{C}(q,t)[\mathbf{z}]$，我们将 $\Omega(f)$ 记作将每个 $z_{i,j,k}$ 分别特化为 $t^j x_k$ 后得到的表达式。例如，给定 $\pi^\bullet \in \mathrm{cPF}^k_{m,n}$，我们有

$$\Omega(z(\pi^\bullet)) = t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})} x^{f_{\pi^\bullet}}$$

引理 5.1. 对于一个合成 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \vDash k$，考虑由下式定义的序列 $\{v_i\}_{1 \le i \le k}$

$$v_i = \begin{cases} \bar{\mathfrak{h}}_i & \text{if } i = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{\ell-j} \text{ for some } r \ge 0, \\ \hat{\mathfrak{h}}_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

换言之，v_i 满足 $\bar{\mathfrak{h}}_i$，当且仅当 i 是从末尾开始对 α 的各部分求和得到的部分和；否则为 $\hat{\mathfrak{h}}_i$。令 $H(\alpha) = [v_1, v_2, \ldots, v_k]$。那么我们有

$$C_\alpha[-MX^{m,n}]\cdot 1 = \Omega(\det([v_1, v_2, \ldots, v_k])\cdot 1). \tag{5.2}$$

证明。通过容斥论证，我们有

$$\det([v_1, v_2, \ldots, v_k])\cdot 1 = \sum_{\pi^\bullet \in \mathrm{PTab}_{m,n}(k;\alpha)} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)} z(\pi^\bullet).$$

证明现由推论3.8得出。 □

例 5.2。对于 α =(2,3)，根据引理 5.1，我们有

$$C_{(2,3)}[-MX^{m,n}]\cdot 1 = \Omega\left(\det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \hat{\mathfrak{h}}_2, \bar{\mathfrak{h}}_3, \hat{\mathfrak{h}}_4, \bar{\mathfrak{h}}_5])\cdot 1.\right)$$

注意，矩阵 $[\hat{\mathfrak{h}}_1, \hat{\mathfrak{h}}_2, \bar{\mathfrak{h}}_3, \hat{\mathfrak{h}}_4, \bar{\mathfrak{h}}_5]$ 是

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_3 & \hat{\mathfrak{h}}_4 & \bar{\mathfrak{h}}_5 \\ 1 & \hat{\mathfrak{h}}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3 & \bar{\mathfrak{h}}_4 \\ 0 & 1 & \bar{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_3 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\mathfrak{h}}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{\mathfrak{h}}_1 \end{pmatrix}.$$

由于具有分块三角结构，其行列式可分解为一个乘积

$$\det\begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2 & \bar{\mathfrak{h}}_3 \\ 1 & \hat{\mathfrak{h}}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_2 \\ 0 & 1 & \bar{\mathfrak{h}}_1 \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{h}}_1 & \bar{\mathfrak{h}}_2 \\ 1 & \bar{\mathfrak{h}}_1 \end{pmatrix} = \det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \hat{\mathfrak{h}}_2, \bar{\mathfrak{h}}_3])\det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \bar{\mathfrak{h}}_2]).$$

一般而言，对于 α =(α_1,..., α_ℓ) ⊨k，我们有

$$C_\alpha[-MX^{m,n}]\cdot 1 = \Omega\left(\det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{h}}_{\alpha_\ell - 1}, \bar{\mathfrak{h}}_{\alpha_\ell}])\cdots\det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{h}}_{\alpha_1 - 1}, \bar{\mathfrak{h}}_{\alpha_1}])\cdot 1\right). \tag{5.3}$$

定义 5.3. 给定一个对称函数 f，令 Y 和 Z 为变量的形式字母表。我们将对称函数 $f[Y-Z]$ 按基 $h_\lambda[Y]h_\mu[Z]$,展开，即:

$$f[Y-Z] = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda,\mu} h_\lambda[Y]h_\mu[Z].$$

然后，我们通过将每个 $h_\lambda[Y]h_\mu[Z]$ 替换为 $\mathfrak{h}_\lambda \hat{\mathfrak{h}}_\mu$，来定义算子 $\Phi(f)$：

$$\Phi(f) = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda,\mu}\, \mathfrak{h}_\lambda \hat{\mathfrak{h}}_\mu.$$

例如，考虑 Schur 函数 $s_{(2,2)}$，其展开为

$$\begin{aligned} s_{(2,2)}[Y-Z] = {} & h_{(2,2)}[Y] - h_{(3,1)}[Y] - h_{(2,1)}[Y]h_1[Z] + h_3[Y]h_1[Z] + h_2[Y]h_{(1,1)}[Z] \\ & + h_{(1,1)}[Y]h_2[Z] - 2h_2[Y]h_2[Z] - h_1[Y]h_{(2,1)}[Z] \\ & + h_{(2,2)}[Z] + h_1[Y]h_3[Z] - h_{(3,1)}[Z]. \end{aligned}$$

因此，算子 $\Phi(s_{(2,2)})$ 由下式给出

$$\Phi(s_{(2,2)}) = \mathfrak{h}_{(2,2)} - \mathfrak{h}_{(3,1)} - \mathfrak{h}_{(2,1)}\hat{\mathfrak{h}}_1 + \mathfrak{h}_3\hat{\mathfrak{h}}_1 + \mathfrak{h}_2\hat{\mathfrak{h}}_{(1,1)} + \mathfrak{h}_{(1,1)}\hat{\mathfrak{h}}_2 - 2\mathfrak{h}_2\hat{\mathfrak{h}}_2 - \mathfrak{h}_1\hat{\mathfrak{h}}_{(2,1)} + \hat{\mathfrak{h}}_{(2,2)} + \mathfrak{h}_1\hat{\mathfrak{h}}_3 - \hat{\mathfrak{h}}_{(3,1)}.$$

命题 5.4。 对于对称函数 f，我们有

$$f[-MX^{m,n}]\cdot 1=\Omega\big(\Phi(f)\cdot 1\big).$$

证明命题 5.4 的一种直接方法，是利用引理 5.1 验证关于 $f=C\alpha$ 的断言。然而，这种方法面临两个障碍：第一，$\Phi(C\alpha)$的描述较为复杂；第二，（5.2）的右端包含一些单项式，其中$\hat{}\,\mathfrak{h}_i$ 算子似乎可能出现在 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 算子的左侧。相比之下，在 $\Phi(f)$ 的定义中，每个单项式里的$\hat{}\,\mathfrak{h}_i$ 算子都位于 $\mathfrak{h}_i$ 算子的右侧。

相反，我们通过证明关于 $f=s_\lambda$的断言来证明命题5.4 。我们先对 $\Phi(s_\lambda)$作出优美的描述，由此还可得到一个有益的推论：Loehr–Warrington 猜想的一个初等证明。

对于一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\ell)$，我们定义如下算子矩阵$J(\lambda)$:

$$J(\lambda)=[\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\mathfrak{h}_{\lambda_{\ell-1}+1},\dots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\hat{\mathfrak{h}}_\ell,\hat{\mathfrak{h}}_{\ell+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell-1}].$$

例如，对于 $\lambda=(2,2)$，我们有 $J((2,2))=[\mathfrak{h}_2,\mathfrak{h}_3,\hat{}\,\mathfrak{h}_2,\hat{}\,\mathfrak{h}_3]$。

引理 5.5. 对于分拆 λ，我们有

$$\Phi(s_\lambda)=\det(J(\lambda)).$$

证明。 设 $K(\lambda)$ 为在 $J(\lambda)$ 中将每个 $\mathfrak{h}_i$替换为 $h_i[Y]$、将每个$\hat{}\,\mathfrak{h}_i$替换为 $h_i[Z]$ 所得的矩阵。只需证明 $s_\lambda[Y-Z]=\det(K(\lambda))$。

设 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)$。定义矩形 $R=(\lambda_1,\dots,\underbrace{\lambda_1}_{\ell})$ 以及分拆 $\bar{\lambda}=(\lambda_1-\lambda_\ell,\lambda_1-\lambda_{\ell-1},\dots,\lambda_1-\lambda_1)$。

由于 $s_\lambda=s_{R/\bar{\lambda}}$，我们有

$$s_\lambda[Y-Z]=s_{R/\bar{\lambda}}[Y-Z]=\sum_{\mu\subseteq R}s_{\mu/\bar{\lambda}}[Y]s_{R/\mu}[-Z]=\sum_{\mu\subseteq R}(-1)^{|R/\mu|}s_{\mu/\bar{\lambda}}[Y]s_{(R/\mu)^t}[Z].$$

另一方面，通过对前 ℓ 列作余子式展开，我们有

$$\det(K(\lambda))=\sum_{\substack{A\subseteq[\lambda_1+\ell]\\|A|=\ell}}(-1)^{\sum_{a\in A}a-\frac{\ell(\ell+1)}{2}}\det(L_A)\det(L'_{A^c}),$$

其中，L_A 是由前 ℓ 列以及行指标属于 A 的行构成的子矩阵，而 L'_{A^c} 是由最后 λ_1 列以及行指标属于 $A^c=[\lambda_1+\ell]\setminus A$ 的行构成的子矩阵。

分拆的集合 $\mu\subseteq R$与子集集合 $A\subseteq[\lambda_1+\ell]$ 之间存在一个双射，其中 $|A|=\ell$，该双射定义如下：

$$\mu=(\mu_1,\dots,\mu_\ell)\longmapsto A=\{\lambda_1-\mu_1+1,\lambda_1-\mu_2+2,\dots,\lambda_1-\mu_\ell+\ell\}.$$

根据这一对应关系，Jacobi–Trudi公式意味着

$$s_{\mu/\bar{\lambda}}[Y]=\det(L_A)\quad\text{and}\quad s_{(R/\mu)^t}[Z]=s_{(\bar{\mu})^t}[Z]=\det(L'_{A^c})$$

其中 $\bar{\mu}=(\lambda_1-\mu_\ell,\ \lambda_1-\mu_{\ell-1},\ \dots,\ \lambda_1-\mu_1)$。此外，符号满足 $(-1)^{|R/\mu|}=(-1)^{\sum_{a\in A}a-\frac{\ell(\ell+1)}{2}}$。 —— □

例5.6. 令 $\lambda=(2,2)$。则矩阵 $J(\lambda)$ 为

$$J((2,2))=\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3 & \hat{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3\\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2\\ 1 & \mathfrak{h}_1 & 1 & \hat{\mathfrak{h}}_1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

沿前两列进行余子式展开，$\det(J(\lambda))$ 可得：

$$\begin{aligned}\det(J(\lambda))=&\det\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3\\ \mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1 & \hat{\mathfrak{h}}_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3\\ 1 & \mathfrak{h}_1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &+\det\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_2 & \mathfrak{h}_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2\\ 1 & \hat{\mathfrak{h}}_1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2\\ 1 & \mathfrak{h}_1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &-\det\begin{pmatrix}\mathfrak{h}_1 & \mathfrak{h}_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3\\ 1 & \hat{\mathfrak{h}}_1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1 & \mathfrak{h}_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_2 & \hat{\mathfrak{h}}_3\\ \hat{\mathfrak{h}}_1 & \hat{\mathfrak{h}}_2\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

我们还有

$$\begin{aligned}s_{(2,2)}[Y-Z]&=\sum_{\mu\subseteq(2,2)}s_\mu[Y]s_{(2,2)/\mu}[-Z]=\sum_{\mu\subseteq(2,2)}(-1)^{|(2,2)/\mu|}s_\mu[Y]s_{((2,2)/\mu)^t}[Z]\\ &=s_{(2,2)}[Y]s_\emptyset[Z]-s_{(2,1)}[Y]s_{(1)}[Z]+s_{(2)}[Y]s_{(1,1)}[Z]s_{(1,1)}[Y]s_{(2)}[Z]-s_{(1)}[Y]s_{(2,1)}[Z]+s_\emptyset[Y]s_{(2,2)}[Z].\end{aligned}$$

对每一项应用 Jacobi–Trudi公式，我们得出：

$$\begin{aligned}s_{(2,2)}[Y-Z]=&\det\begin{pmatrix}h_2[Y] & h_3[Y]\\ h_1[Y] & h_2[Y]\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}1 & h_1[Z]\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}h_2[Y] & h_3[Y]\\ 1 & h_1[Y]\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}h_1[Z] & h_2[Z]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &+\det\begin{pmatrix}h_2[Y] & h_3[Y]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}h_1[Z] & h_2[Z]\\ 1 & h_1[Z]\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}h_1[Y] & h_2[Y]\\ 1 & h_1[Y]\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}h_2[Z] & h_3[Z]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &-\det\begin{pmatrix}h_1[Y] & h_2[Y]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}h_2[Z] & h_3[Z]\\ 1 & h_1[Z]\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1 & h_1[Y]\\ 0 & 1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}h_2[Z] & h_3[Z]\\ h_1[Z] & h_2[Z]\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

比较 (5.4) 和 (5.5)，可知引理 5.5 对 $\lambda=(2,2)$ 成立。

为证明命题 5.4，我们建立几个技术引理。

引理 5.7。令v和w为从集合$\{\mathfrak{h}_i,\ \bar{\mathfrak{h}}_i,\ \hat{\mathfrak{h}}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$中选取的任意算子序列。对于正整数$a$和 ℓ，有

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell},w])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell},\hat{\mathfrak{h}}_a,w])+(1-q)\sum_{i=1}^{\ell-1}\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i},\hat{\mathfrak{h}}_{a+i},w]).$$

证明。 由线性性，只需证明对于任意行指标$j<k$，下列 2×2 行列式恒等式成立：

$$-q\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_{a-j} & \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-j}\\ \hat{\mathfrak{h}}_{a-k} & \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-k}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-j} & \hat{\mathfrak{h}}_{a-j}\\ \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-k} & \hat{\mathfrak{h}}_{a-k}\end{pmatrix}+(1-q)\sum_{i=1}^{\ell-1}\det\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i-j} & \hat{\mathfrak{h}}_{a+i-j}\\ \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i-k} & \hat{\mathfrak{h}}_{a+i-k}\end{pmatrix}.\tag{5.6}$$

我们对 ℓ进行归纳。基础情形 $\ell=1$ 对应于 (4.2)。

设 $\ell>1$，并假设 (5.6) 对 $\ell-1$ 成立。具体而言，我们通过将参数 $a\to a+1,\ell\to\ell-1$ 和 $k\to k+1$ 替换为相应参数来应用归纳假设。由此得到

$$-q\det\begin{pmatrix}\hat{\mathfrak{h}}_{a+1-j} & \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-j}\\ \hat{\mathfrak{h}}_{a-k} & \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-k-1}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-j} & \hat{\mathfrak{h}}_{a+1-j}\\ \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-k-1} & \hat{\mathfrak{h}}_{a-k}\end{pmatrix}+(1-q)\sum_{i=1}^{\ell-2}\det\begin{pmatrix}\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i-j} & \hat{\mathfrak{h}}_{a+1+i-j}\\ \bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i-k-1} & \hat{\mathfrak{h}}_{a+i-k}\end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

用（5.7）减去（5.6），得

$$-q\hat{\mathfrak{h}}_A\bar{\mathfrak{h}}_B+q\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}=\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}-\bar{\mathfrak{h}}_B\hat{\mathfrak{h}}_A+(1-q)(\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}-\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}) \tag{5.8}$$

其中记 $A=a-j$和 $B=a+\ell-k$。由（4.2）可得

$$-q(\hat{\mathfrak{h}}_A\bar{\mathfrak{h}}_B-\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}\bar{\mathfrak{h}}_{A+1})=\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}-\bar{\mathfrak{h}}_B\hat{\mathfrak{h}}_A, \tag{5.9}$$

并用（5.9）减去（5.8），得

$$q\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}-q\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}=q\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}-q\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}.$$

这一恒等式成立，因为

$$\begin{aligned}&\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}-\hat{\mathfrak{h}}_{B-1}\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}=(\mathfrak{h}_{A+1}-\bar{\mathfrak{h}}_{A+1})\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}-(\mathfrak{h}_{B-1}-\bar{\mathfrak{h}}_{B-1})\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}=\mathfrak{h}_{A+1}\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}-\mathfrak{h}_{B-1}\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}\\&=\mathfrak{h}_{A+1}(\mathfrak{h}_{B-1}-\hat{\mathfrak{h}}_{B-1})-\mathfrak{h}_{B-1}(\mathfrak{h}_{A+1}-\hat{\mathfrak{h}}_{A+1})=\bar{\mathfrak{h}}_{B-1}\hat{\mathfrak{h}}_{A+1}-\bar{\mathfrak{h}}_{A+1}\hat{\mathfrak{h}}_{B-1},\end{aligned}$$

归纳步骤至此完成。 □

引理 5.8。 令v为从$\{\mathfrak{h}_i,\ \bar{\mathfrak{h}}_i,\ \hat{\mathfrak{h}}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$中选取的算子序列。对于正整数$a$、 ℓ和k，有

$$\begin{aligned}&(-q)^{\ell}\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k},\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k}])\\&\qquad=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k},w^{(0)}])+\sum_{i=1}^{\ell}(-q)^{i-1}(1-q)\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},w^{(i)}]),\end{aligned}$$

其中$w^{(i)}$是从序列$(\hat{\mathfrak{h}}_a,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k})$中移除$\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i}$后得到的序列。

证明。 我们对 ℓ使用归纳法。对于基础情形 $\ell=1$， 令$v'=(\hat{\mathfrak{h}}_{a+2},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+k+1})$， 则左端为$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1},v'])$。根据引理 5.7，有

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1},v'])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1},\hat{\mathfrak{h}}_a,v'])+(1-q)\sum_{j=1}^{k}\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1-j},\hat{\mathfrak{h}}_{a+j},v']).$$

注意，对于 $2\le j\le k$，序列v'已经包含算子$\hat{\mathfrak{h}}_{a+j}$。因此，对于这些值j，行列式$\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1-j},\hat{\mathfrak{h}}_{a+j},v'])$为零。求和中唯一的非零项对应于$j=1$。由此可得

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1},v'])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k+1},\hat{\mathfrak{h}}_a,v'])+(1-q)\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k},\hat{\mathfrak{h}}_{a+1},v']).$$

注意到$(\hat{\mathfrak{h}}_a,v')=w^{(0)}$以及$(\hat{\mathfrak{h}}_{a+1},v')=w^{(1)}$，这与 $\ell=1$的断言相符。

设 $\ell > 1$，并假设该断言对 $\ell - 1$ 成立。将归纳假设应用于以$(v,\hat{\mathfrak{h}}_a)$开头的序列，我们得到

$$\begin{aligned}&(-q)^{\ell}\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k},\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k}])\\&\quad=-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k},u^{(0)}])+\sum_{i=1}^{\ell-1}(-q)^i(1-q)\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},u^{(i)}]),\end{aligned}\tag{5.10}$$

其中 $u^{(i)}$ 是通过从 $(\hat{\mathfrak{h}}_{a+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k})$ 中移除 $\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i}$ 得到的序列。

接下来，我们将引理 5.7 应用于上述表达式中的每一项。根据引理 5.7，有

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},u^{(i)}])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},\hat{\mathfrak{h}}_a,u^{(i)}])+(1-q)\sum_{j=1}^{\ell+k-i-1}\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i-j},\hat{\mathfrak{h}}_{a+j},u^{(i)}]).$$

与基础情形类似，项 $\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i-j},\hat{\mathfrak{h}}_{a+j},u^{(i)}])$ 除非 $\hat{\mathfrak{h}}_{a+j}$ 是 $u^{(i)}$ 中缺失的特定元素（即 $\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i}$），否则均为零。当 $j=\ell-i$ 时，该情况发生。于是我们得到

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},u^{(i)}])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},\hat{\mathfrak{h}}_a,u^{(i)}])+(1-q)\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k},\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i},u^{(i)}]).$$

将这些序列对应起来，有 $(\hat{\mathfrak{h}}_a,u^{(i)})=w^{(i)}$ 和 $(\hat{\mathfrak{h}}_{a+\ell-i},u^{(i)})\cong w^{(\ell)}$（为重新排列各列所需的 $(-1)^{\ell-1-i}$ 的符号变化除外）。因此

$$-q\det([v,\hat{\mathfrak{h}}_a,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},u^{(i)}])=\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+\ell+k-i},w^{(i)}])+(-1)^{\ell-1-i}(1-q)\det([v,\bar{\mathfrak{h}}_{a+k},w^{(\ell)}]).$$

将这些展开式代回（5.10）即证明了 ℓ。 □

引理 5.9. 对于一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_\ell)$ 和一个正整数 $k\geq\lambda_1$，我们有

$$\det(J(\lambda))\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k])=(-1)^{k-1}\sum_{\mu}\frac{\det(J(\mu))}{q^{\mu_1-1}},$$

其中求和遍历所有可通过向 λ 添加大小为 k 的水平条带得到的分拆 μ。

证明。 首先，注意到

$$\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k])=\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k,\hat{\mathfrak{h}}_k]),$$

因为矩阵 $[\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k,\hat{\mathfrak{h}}_k]$ 的最后一行是 $(0,\dots,0,1)$。通过递归地对 $\bar{}$ 进行 $\mathfrak{h}_k$ 向左移动，应用引理 5.7，我们得到

$$(-q)^{k-1}\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k,\hat{\mathfrak{h}}_k])=\det([\bar{\mathfrak{h}}_k,\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_k]).$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&(-q)^{\lambda_1+k-1}\det(J(\lambda))\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k])\\&\quad=(-q)^{\lambda_1}\det(J(\lambda))\det([\bar{\mathfrak{h}}_k,\hat{\mathfrak{h}}_1,\dots,\hat{\mathfrak{h}}_k])\\&\quad=(-q)^{\lambda_1}\det([\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\dots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\hat{\mathfrak{h}}_\ell,\hat{\mathfrak{h}}_{\ell+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k},\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+1},\dots,\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k}]).\end{aligned}$$

应用引理5.8 于此表达式可得

$$\det([\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\dots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k},w^{(0)}])+\sum_{j=1}^{\lambda_1}(-q)^{j-1}(1-q)\det([\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\dots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k-j},w^{(j)}]),\tag{5.11}$$

whe其中，$w^{(j)}{}_j$ 是从序列 $(\hat{\mathfrak{h}}_\ell,\ldots,\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k}$ 中移除 $\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell-}$ 后得到的序列).

对于每个 $0\le j\le\lambda_1$，序列 $w^{(j)}$ 包含算子 $\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k-j}$。由于 $\bar{\mathfrak{h}}_i=\mathfrak{h}_i-\hat{\mathfrak{h}}_i$，我们可以进行列变换，将列 $\hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k-j}$ 加到列 $\bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k-j}$上。这样可将行列式化简为

$$\det([\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\ldots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+\ell+k-j},w^{(j)}])=\det([\mathfrak{h}_{\lambda_\ell},\ldots,\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell-1},\mathfrak{h}_{\lambda_1+\ell+k-j},w^{(j)}]).\tag{5.12}$$

与引理 5.5的证明类似，(5.12) 的右侧等于 $(-1)^{\lambda_1-j}\Phi(s^{R(j)})$，其中 $R(j)$ 是斜形 R/ν，用于

$$R=(\underbrace{\lambda_1+k-j,\ldots,\lambda_1+k-j}_{\ell},k),\quad\text{and}\quad\nu=(\lambda_1-\lambda_\ell+k-j,\lambda_1-\lambda_{\ell-1}+k-j,\ldots,\lambda_1-\lambda_1+k-j).$$

将斜形 $R(j)$ 旋转 180° 后，得到斜形 $(\lambda_1+k-j,\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)/(\lambda_1-j)$。因此我们有

$$s_{R(j)}=s_{(\lambda_1+k-j,\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)/(\lambda_1-j)}=h^\perp_{\lambda_1-j}s_{(\lambda_1+k-j,\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell)}.$$

由此可得 $s_{R(j)}=\sum_\mu s^\mu$，其中求和遍历所有通过向 λ 添加大小为 k的水平条带而得到的分拆 μ，且满足 $\mu_1\le\lambda_1+k-j$。

将其代回（5.11），表达式变为

$$(-1)^{\lambda_1}\Phi\left(s_{R(0)}+\sum_{j=1}^{\lambda_1}(q-1)q^{j-1}s_{R(j)}\right).$$

现在我们计算s^μ在$(s_{R(0)}+\sum^{\lambda_1}{}_{j=1}(q-1)q_{j-1}s^{R(j)})$中的系数。对于通过向 λ添加大小为k的水平条带得到的固定 μ，当且仅当 $0\le j\le\lambda_1+k-\mu_1$时，项$s^\mu$才会出现在$s^{R(j)}$ 中。因此，s^μ 的总系数变为

$$1+\sum_{j=1}^{\lambda_1+k-\mu_1}(q-1)q^{j-1}=q^{\lambda_1+k-\mu_1}.$$

因此，我们推导得出

$$(-q)^{\lambda_1+k-1}\cdot\mathrm{LHS}=(-q)^{\lambda_1+k-1}\det(J(\lambda))\det([\hat{\mathfrak{h}}_1,\ldots,\hat{\mathfrak{h}}_{k-1},\bar{\mathfrak{h}}_k])=(-1)^{\lambda_1}\sum_\mu q^{\lambda_1+k-\mu_1}\Phi(s_\mu)$$

其中求和遍及所有可通过向 μ 添加大小为k 的水平条带得到的分拆 λ。将等式两边除以$(-q)^{\lambda_1+}{}_{k-1}$，结合引理5.5，即可完成证明。 □

命题5.4的证明。对于一个合成 α，令$H(\alpha)$ 为引理5.1中定义的矩阵。我们证明以下更强的断言：对于任意分拆 λ，存在一个线性组合$s_\lambda=\sum_\alpha d_{\lambda,\alpha}C_\alpha$，使得

$$\det(J(\lambda))=\sum_\alpha d_{\lambda,\alpha}\det(H(\alpha)).$$

我们按长度使用归纳法，所针对的是 λ。设 $\mu=$（λ_2，...，λ_ℓ）（注意 μ 可能为空）。于是我们有 [HMZ12，命题3。6]

$$s_\lambda=(-q)^{\lambda_1-1}\sum_{i\ge0}\mathbf{C}_{\lambda_1+i}\left(e_i^\perp s_\mu\right).$$

设V_i表示通过移除一条大小为i的垂直条带而从 μ得到的分拆的集合。对每个 $\nu \in V_i$，由归纳假设，存在常数$d_{\nu,\ \beta}$ 使得

$$s_\nu = \sum_\beta d_{\nu,\beta} C_\beta \quad \text{and} \quad \det(J(\nu)) = \sum_\beta d_{\nu,\beta} \det(H(\beta)).$$

应用$\mathbf{C}_{\lambda_1+i}$相当于在合成前面添加部分 λ_1+i。因此我们有

$$\mathbf{C}_{\lambda_1+i} s_\nu = \sum_\beta d_{\nu,\beta} C_{(\lambda_1+i,\beta)}.$$

现在我们计算相应的行列式之和。利用 $\det(H(\alpha))$的因子分解性质以及引理 5.9，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_\beta d_{\nu,\beta} \det(H((\lambda_1+i,\beta))) &= \left(\sum_\beta d_{\nu,\beta} \det(H(\beta))\right) \det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+i-1}, \bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+i}]) \\ &= \det(J(\nu)) \det([\hat{\mathfrak{h}}_1, \ldots, \hat{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+i-1}, \bar{\mathfrak{h}}_{\lambda_1+i}]) \\ &= (-1)^{\lambda_1+i-1} \sum_{\tau \in W(\nu,\lambda_1+i)} \frac{\det(J(\tau))}{q^{\tau_1-1}},\end{aligned}$$

其中 $W(\nu,k)$ 表示通过向 ν 添加大小为 k 的水平条带所得到的分拆集合。

回忆一下，Schur 函数满足关系

$$\left(\sum_{i\geq 0} (-1)^i h_{\lambda_1+i} e_i^\perp\right) s_\mu = s_\lambda.$$

因此我们得出

$$\sum_{i\geq 0} \sum_{\nu \in V_i} (-1)^{\lambda_1+i-1} \sum_{\tau \in W(\nu,\lambda_1+i)} \frac{\det(J(\tau))}{q^{\tau_1-1}} = (-q)^{-\lambda_1+1} \det(J(\lambda)).$$

因此，将s_λ 表示为

$$s_\lambda = (-q)^{\lambda_1-1} \sum_{i\geq 0} \sum_{\nu \in V_i} \sum_\beta d_{\nu,\beta} C_{(\lambda_1+i,\beta)},$$

我们有

$$(-q)^{\lambda_1-1} \sum_{i\geq 0} \sum_{\nu \in V_i} \sum_\beta d_{\nu,\beta} \det(H(\lambda_1+i,\beta)) = \det(J(\lambda))$$

这就证明了该断言。 □

5.2. **Loehr–Warrington 公式**。 在上一小节中，我们证明了$s_\lambda[-MX_{m,n}] \cdot 1 = \Omega(\det(J(\lambda)) \cdot 1)$。在本小节中，我们引入一个修正矩阵$J'(\lambda)$，使得：

(1) $\det(J(\lambda)) = (-q)^{\mathrm{adj}(\lambda)} \det(J'(\lambda))$(2) $\det(J'(\lambda)) \cdot 1$ 在$n = 1$时，与 Loehr–Warrington 公式有直接联系。

关于证明 (1) 和 (2) 的技术细节，请参见 [KO24]。结合 (1) 和 (2)，我们得出了一个关于 s_λ 的 *Loehr–Warrington* 猜想的新证明。

固定一个分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\ell)$，并令 s 为 *Durfee* 方的大小，即满足 $\lambda_s\geq s$ 的最大数（若不存在，则令 $s=0$）。我们将 λ 的一个调整量 定义为，记作 $\mathrm{adj}(\lambda)$：

$$\mathrm{adj}(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}(\lambda_i-i).$$

考虑一个向量 $(\lambda_1+\ell-1,\lambda_2+\ell-2,\ldots,\lambda_\ell,\ell,\ell+1,\ldots,\lambda_1+\ell-1)$，并定义 $v(\lambda)$ 为将上述向量中的元素按非递减顺序排列后得到的向量。我们还定义 λ 的一个枢轴，记作$\mathrm{piv}(\lambda)$，它是一个长度为s 的向量$(a_1,a_2,\ldots,a_s)$，其中a_i 是满足以下条件的一个数

$$v(\lambda)_{a_i}=v(\lambda)_{a_i+1}=\lambda_{s+1-i}+\ell-(s+1-i),$$

即，满足条件 wh 的指标 使得$v(\lambda)$ 是非递增的。最后，我们定义一个矩阵$J'(\lambda)=[w_1,w_2,\ldots,w_{\lambda_1+\ell}]$，其定义如下

$$w_i=\begin{cases}\mathfrak{h}_{v(\lambda)_i} & \text{if } i\leq\ell-s\\ \bar{\mathfrak{h}}_{v(\lambda)_i} & \text{if } i>\ell-s \text{ and } i \text{ is an entry of } \mathrm{piv}(\lambda)\\ \hat{\mathfrak{h}}_{v(\lambda)_i} & \text{if } i>\ell-s \text{ and } i \text{ is not an entry of } \mathrm{piv}(\lambda).\end{cases}$$

在 [KO24，作者在方程 （4.3）], 中证明了$\det(J(\lambda))=(-q)^{\mathrm{adj}(\lambda)}\det(J'(\lambda))$。因此我们得出结论

$$s_\lambda[-MX^{m,n}]\cdot 1=(-q)^{\mathrm{adj}(\lambda)}\Omega\big(\det(J'(\lambda))\cdot 1\big). \tag{5.13}$$

在 [BHM+25]中，给出了一个关于$s_\lambda[-MX^{m,n}]\cdot 1$ 的（带符号）正展开。一般而言，我们不知道如何从式（5.13）的右侧推导出他们的结果；然而，当$n=1$ 时，它与最早发表于 [LW08]中的 Loehr–Warrington 公式直接相连。

我们用本文的表述方式陈述 Loehr–Warrington 公式。固定一个正整数m，并令$n=1$。我们将一个元素 $\pi\in\mathrm{cPF}_{m,1}$ 视为一对$(i,j)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}$，其中$i$是$\pi$中$P$的面积序列中的唯一一项，而$j$是一个北步的标记。我们记$(i,j)\succ(i\prime,j\prime)$，当且仅当它们对应的元素$\pi,\pi'\in\mathrm{cPF}_{m,1}$ 满足 $\pi\succ\pi'$时成立。

接着，我们将 λ的底部定义为$\mathrm{bot}(\lambda)$，记作一个向量，定义如下：

$$\mathrm{bot}(\lambda)=(s+1,s+2,\ldots,s+\lambda_1+\ell)-v(\lambda),$$

其中减法按元素进行。令$N=\lambda_1+\ell$，最后我们将$D(\lambda)$ 与分拆 λ关联为一个图，其j列由满足$\mathrm{bot}(\lambda)_{N-j+1}\leq i\leq s$的单元格$(i,j)$组成。最后，定义一个集合 $\mathscr{T}(\lambda)$，其中包含T对$D(\lambda)$ 的填充，填充元素取自 $\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}$，并满足以下条件：

- $T(i+1,j)\succ T(i,j)$ 以及$T(i,j)\not\succ T(i,j-1)$
- 对于每个$j>\ell-s$，若$j\in\mathrm{piv}(\lambda)$，则有$T(\mathrm{bot}(\lambda)_j,N-j+1)_1=0$
- 对于每个$j>\ell-s$，若$j\notin\mathrm{piv}(\lambda)$，则有$T(\mathrm{bot}(\lambda)_j,N-j+1)_1>0$

这里，$T(i,j)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{\geq 1}$是单元格$(i,j)$的填充，而$T_1(i,j)$是其第一个条目。我们自然地将$T\in\mathscr{T}(\lambda)$视为

$$\mathbf{H}_{s-\mathrm{bot}(\lambda)_N+1}\times\cdots\times\mathbf{H}_{s-\mathrm{bot}(\lambda)_1+1}$$

将j列中 T 的填充视为 $\mathbf{H}^{s-\mathrm{bot}(\lambda)_{N-j+1}+1}$的元素。基于这一对应，我们可以定义 stat$(T)$ 和 $z(T)$。 [LW08] 中的 Loehr–Warrington 猜想如下恒等式：

$$\nabla^m s_\lambda = (-q)^{\mathrm{adj}(\lambda)} \sum_{T\in\mathcal{T}(\lambda)} q^{\mathrm{stat}(T)}\Omega(z(T)). \tag{5.14}$$

最初由 [BHM+25] 在更一般的情形下证明了$s_\lambda[-MX_{m,\ n}]\cdot 1$。后来，对于 $m=1$ 的情形， [KO24]给出了一个初等证明。特别是，作者证明了 [KO24，命题 4。6]

$$\det(J'(\lambda))\cdot 1 = \sum_{T\in\mathcal{T}(\lambda)} q^{\mathrm{stat}(T)} z(T) \tag{5.15}$$

在 $m=1$ 的情形下，使用了与 [SW16定理 6 中类似的组合论证。3]。(5.15) 的证明显然可以推广到任意的 m。(5.13) 和 (5.15) 两式推出了 (5.14)。

5.3. **定理 1.1 的证明**。 我们先定义循环停车函数上的提升映射up ， 它将路径的参考点相对于直线 $my = nx$平移。

定义 5.10. 给定一个循环 (m,n)-停车函数 $\pi\in$cPF$_{m,n}$，我们将其视为一条无限周期标记路径。设 (a,b) 是满足 na $-$mb $=1$ 且 $0\le$ b $<$ n 的唯一一对整数。我们将映射 up$(\pi)\in$cPF$_{m,n}$ 定义为如下得到的循环 (m,n)-停车函数：将 π 沿向量 (–a, –b) 平移，使原路径上的格点 (a,b) 成为新的原点。

从几何上看，点 $(a,\ b)$ 是直线 $my = nx$ 正下方且距离该直线最近的格点。很容易验证，平移后的标记路径 up(π) 仍然弱于直线 $my = nx$，因此 up$(\pi)\in$cPF$_{m,\ n}$。

例 5.11。 图 11左侧， $\pi\in$ cPF$_{3,2}$ 表示为一条无限周期标记路径。P_π 的面积序列为(0,0)，从底部起北向步的标签为r_1 和r_2。直线$3y = 2x$ 正下方最近的格点是(2,1)，将整个图形沿向量$(-2,\ -1)$平移，便得到up(π)，如右侧所示。

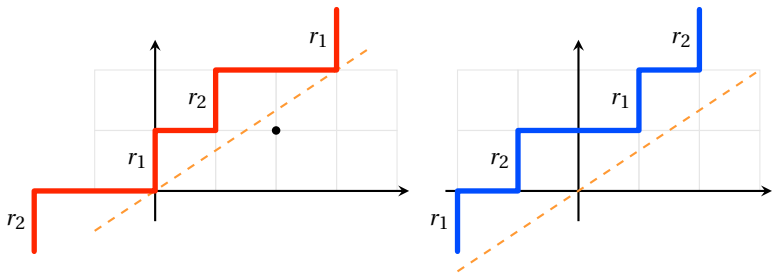


图 11. π和up(π)。

T以下引理确立了此映射的基本性质（证明留给读者).

引理 5.12. 映射up 是从$\mathbf{H}_1$ 到 $\hat{}\mathbf{H}_1$ 的双射，使得

$$\mathrm{area}(P_\pi)+1 = \mathrm{area}(P_{\mathrm{up}(\pi)}).$$

引理 5.13. 对于$(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)}) \in \mathrm{cPF}^{k}_{m,n}$，有

$$\mathrm{stat}(\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k)}) = \mathrm{stat}(\mathrm{up}(\pi^{(k)}),\pi^{(1)},\dots,\pi^{(k-1)}).$$

证明。 对 pdinv 和 ldinv有贡献的有序对都保持不变。 □

显然，$\pi \prec \tau$ 当且仅当 $\mathrm{up}(\pi) \prec \mathrm{up}(\tau)$。因此，我们可以通过将每个 $(\pi^{(1)},\cdots,\pi^{(a)})$ 映射为 $(\mathrm{up}(\pi^{(1)}),\cdots,\mathrm{up}(\pi^{(a)}))$，构造 H_a 与 $\hat{}\mathrm{H}_a$ 之间的双射。结合引理 5.12 和 5.13，我们得到如下结论：对于任意由 $\mathfrak{h}_i$、$\hat{}\mathfrak{h}_i$ 或 $\bar{\mathfrak{h}}_i$ 组成的单项式 v，有

$$\Omega\left(v\,\hat{\mathfrak{h}}_a\cdot 1\right) = t^a\,\Omega\left(\mathfrak{h}_a\,v\cdot 1\right).$$

具体而言，我们推得 $\Omega\left(\mathfrak{h}_\lambda\,\hat{}\,\mathfrak{h}_\mu\cdot 1\right) = t^{|\mu|}\Omega\left(\mathfrak{h}_{(\lambda,\mu)}\cdot 1\right)$。这里，$(\lambda,\mu)$ 是通过拼接得到的整数向量。提醒读者注意，作为算子，$\mathfrak{h}_\lambda\,\hat{}\,\mathfrak{h}_\mu \neq t^{|\mu|}\,\mathfrak{h}_{(\lambda,\mu)}$并不相等；但仅当将它们作用于 1并将每个 $z_{i,j,k}$分别特化为 $t_j x_k$时，等式才成立。将这一事实与命题 5.4结合，可得：

推论 5.14。 对于任意对称函数f，有

$$f[-MX^{m,n}]\cdot 1 = \Omega\left(\left(\sum_\lambda c_\lambda\,\mathfrak{h}_\lambda\right)\cdot 1\right),$$

其中c_λ是$h_\lambda[Y]$在$f[(1-t)Y]$的展开式中的系数。

定理 *1.1*的证明。 我们有

$$e_{(1^k)}[(1-t)X] = ((1-t)e_1[X])^k = (1-t)^k(h_1[X])^k = (1-t)^k h_{(1^k)}[X].$$

应用推论5.14，立即得到

$$e_{(1^k)}[-MX^{m,n}]\cdot 1 = (1-t)^k\Omega\left(\mathfrak{h}_{(1^k)}\cdot 1\right) = (1-t)^k \sum_{\pi^\bullet\in\mathrm{cPF}^k_{m,n}} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)}\,t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})}\,x^{f_{\pi^\bullet}}.$$

□

由于我们有 $\Omega\left(\mathfrak{h}_{(1^k)},1\right) = \Omega\left(\mathfrak{h}_{(1^{k-1})}(\hat{}\,\mathfrak{h}_1+\bar{\mathfrak{h}}_1)\cdot 1\right) = t\Omega\left(\mathfrak{h}_{(1^k)}\cdot 1\right) + \Omega\left((\mathfrak{h}_{(1^{k-1})}\bar{\mathfrak{h}}_1)\cdot 1\right)$,我们还可以推得

$$\begin{aligned} e_{(1^k)}[-MX^{m,n}]\cdot 1 &= (1-t)^{k-1}\Omega\left((\mathfrak{h}_{(1^{k-1})}\,\bar{\mathfrak{h}}_1)\cdot 1\right) \\ &= (1-t)^{k-1} \sum_{\substack{\pi^\bullet\in\mathrm{cPF}^k_{m,n}\\ \mathrm{aseq}(P_{\pi^{(1)}})_1=0}} q^{\mathrm{stat}(\pi^\bullet)}\,t^{\mathrm{area}(P_{\pi^\bullet})}\,x^{f_{\pi^\bullet}}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

5.4. **进一步研究**。 命题 5.4 和推论 5.14 为研究 $f[-MX_{m,n}]\cdot 1$提供了强有力的工具，适用于各种对称函数 f。在后续论文中，我们将给出 $e_\lambda[-X^{m,n}]\cdot 1$ 的一个公式，它推广了 [CM25，定理 3.1], 该结果对应于特殊情形$n=1$。

以下问题是未来研究的自然方向：

（1）推导 $\det(J(\lambda))\cdot 1$ 的一个（带符号）正表达式，为(m,n)版本的 Loehr–Warrington 公式提供另一种表达式 [BHM+25]。注意，$n=1$ 的情形已在第 5.2 节讨论。

（2）求一个正表达式

$$\frac{e_\lambda[-MX^{m,n}]\cdot 1}{(1-t)^{\ell(\lambda)-1}}.$$

根据 [CGHM24，GL23], 这样的公式将给出一个链环的洗牌定理，其分量是某个环面纽结的特定缆线。

参考文献

[BG99] Francois Bergeron 和 Adriano Garsia。《科幻与麦克唐纳多项式》。CRM会议录与讲义，美国数学会，22:1–52，1999。[BGHT99] F.Bergeron、A.M.Garsia、M.Haiman 和 G. Tesler。《对称函数理论中若干重要算子的恒等式与正性猜想》。应用分析方法，6(3):363–420，1999。谨以此文献献给 Richard A. Askey，以庆祝他 65 岁生日，第三部分。[BGLX16] Francois Bergeron、Adriano Garsia、Emily Sergel Leven 和辛国策。《复合 (km,kn)-洗牌猜想》。国际数学研究通知，2016(14):4229–4270，2016。[BHM+23a] Jonah Blasiak、Mark Haiman、Jennifer Morse、Anna Pun 和 George H. Seelinger。《扩展德尔塔猜想的证明》。《数学论坛·圆周率》，11：论文编号 e6，28 页，2023。[BHM+23b] Jonah Blasiak、Mark Haiman、Jennifer Morse、Anna Pun 和 George H Seelinger。《任意直线下路径的洗牌定理》。载于《数学论坛·圆周率》，第 11 卷，e5 页。剑桥大学出版社，2023。[BHM+25] Jonah Blasiak、Mark Haiman、Jennifer Morse、Anna Pun 和 George Seelinger。《巢穴、嵌套与 Loehr-Warrington猜想》。《美国数学会杂志》，2025。[BS12] Igor Burban 和 Olivier Schiffmann。《椭圆曲线的霍尔代数论，I》。《杜克数学杂志》，161(7):1171–1231，2012。[CD16] Ivan Cherednik 和 Ivan Danilenko。《双仿射Hecke代数与迭代环面纽结》。《代数与几何拓扑》，16(2):843–898，2016。[CD17] I Cherednik 和 I Danilenko。《迭代环面链环的双仿射 Hecke代数方法》。载于《当代数学》，159–267 页，2017。[CGG+25] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky、Ian Le、沈林辉和 José Simental。《辫子簇上的簇结构》。《美国数学会杂志》，38(2):369–479，2025。[CGGS21] Roger Casals、Eugene Gorsky、Mikhail Gorsky 和 José Simental。《正拟阵链环与辫子簇》。arXiv预印本 arXiv:2105.13948，2021。[CGHM24] Carmen Caprau、Nicolle González、Matthew Hogancamp 和 Mikhail Mazin。《Coxeter纽结的Khovanov–Rozansky同调与任意直线下路径的施罗德多项式》。arXiv预印本 arXiv:2407.18123，2024。[Che13] Ivan Cherednik。《利用双仿射Hecke代数求环面纽结的琼斯多项式》。国际数学研究通知，2013(23):5366–5425，2013。[CM18] Erik Carlsson 和 Anton Mellit。《洗牌猜想的证明》。《美国数学会杂志》，31(3):661–697，2018。[CM25] Erik Carlsson 和 Anton Mellit。《nabla算子的组合公式》。《数学汇编》，161(4):800–830，2025。[DGR06] Nathan M Dunfield、Sergei Gukov 和 Jacob Rasmussen。《纽结同调的超多项式》。《实验数学》，15(2):129–159，2006。[EH19] Ben Elias 和 Matthew Hogancamp。《环面链环同调的计算》。《数学汇编》，155(1):164–205，2019。[FT11] BL Feigin 和 AI Tsymbaliuk。《通过洗牌代数研究希尔伯特概形的等变K理论》。《京都大学数学杂志》，51(4):831–854，2011。[Gas96] Vesselin Gasharov。《不可比图为 s-正的 (3+ 1)-自由偏序集》。《离散数学》，157(1-3):193–197，1996。[GH93] Adriano M. Garsia 和 Mark Haiman。《麦克唐纳多项式的分次表示模型》。《美国国家科学院院刊》，90(8):3607–3610，1993。

[GH22] Eugene Gorsky 和 Matthew Hogancamp。《希尔伯特概形与 Khovanov–Rozansky同调的 y-化》。《几何与拓扑》，26(2):587–678，2022。[GL23] Pavel Galashin 和 Thomas Lam。《双仿射Hecke代数与 EHA 中的单调链环》。arXiv预印本 arXiv:2307.16794，2023。[GL24] Pavel Galashin 和 Thomas Lam。《正拟阵、纽结与 q,t-Catalan数》。《杜克数学杂志》，173(11):2117–2195，2024。[GLSBS22] Pavel Galashin、Thomas Lam、Melissa Sherman-Bennett 和 David Speyer。《辫子簇的簇结构，I：三维plabic图》。arXiv预印本 arXiv:2210.04778，2022。[GM13] Evgeny Gorsky 和 Mikhail Mazin。《紧化雅可比簇与 q,t-Catalan数，i》。《组合理论杂志 A 辑》，120(1):49–63，2013。[GMV17] Eugene Gorsky、Mikhail Mazin 和 Monica Vazirani。《互素情形下的有理Dyck路径》。《电子组合学杂志》，24(3):3，2017。[GN15] Eugene Gorsky 和 Andrei Negu.t。《精细纽结不变量与希尔伯特概形》。《纯粹与应用数学杂志》，104(3):403–435，2015。[GNR21] Eugene Gorsky、Andrei Negu.t 和 Jacob Rasmussen。《旗希尔伯特概形、着色投影子与 Khovanov–Rozansky同调》。《数学进展》，378:107542，2021。[GORS14] Evgeny Gorsky、Alexei Oblomkov、Jacob Rasmussen 和 Vivek Shende。《环面纽结与有理双仿射Hecke代数》。《杜克数学杂志》，163(14):2709–2794，2014。[Hai02] Mark Haiman。《平面上点的希尔伯特概形的消失定理与特征标公式》。《数学发明》，149(2):371–407，2002。[HHL+05] J. Haglund、M. Haiman、N. Loehr、J. B. Remmel 和 A. Ulyanov。《对角余不变量特征标的组合公式》。《杜克数学杂志》，126(2):195–232，2005。[HMZ12] James Haglund 、Jennifer Morse 和 Mike Zabrocki。《标明 Dyck路径接触点的复合洗牌猜想》。《加拿大数学杂志》，64(4):822–844，2012。[Kho07] Mikhail Khovanov。《三重分次链环同调与 Soergel双模的 Hochschild同调》。国际数学杂志，18(08):869–885，2007。[KO24] Donghyun Kim 和 Jaeseong Oh。《扩展科幻与 Loehr–Warrington 公式》。arXiv预印本 arXiv:2409.01041，2024。[KR08a] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。《矩阵分解与链环同调》。《数学基础》，199(1):1–91，2008。[KR08b] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。《矩阵分解与链环同调 II》。《几何与拓扑》，12(3):1387–1425，2008。[LW08] Nicholas A Loehr 和 Gregory S Warrington。《嵌套量子Dyck路径与 $\nabla(s_\lambda)$》。国际数学研究通知，2008:rnm157，2008。[Mac88] Ian Macdonald。《一类新的对称函数》。《洛林组合学研讨会》，20:B20a–41，1988。[Mel21] Anton Mellit。《环面辫与 (m,n)-停车函数》。《杜克数学杂志》，170(18):4123–4169，2021。[Neg14] Andrei Negut。《重访洗牌代数》。国际数学研究通知，2014(22):6242–6275，2014。[OR17] Alexei Oblomkov 和 Lev Rozansky。《Coxeter链环的 HOMFLYPT同调》。arXiv预印本 arXiv:1706.00124，2017。[ORS18] Alexei Oblomkov、Jacob Rasmussen 和 Vivek Shende。《平面曲线奇点的希尔伯特概形及其链环的 HOMFLY 同调》。《几何与拓扑》，22(2):645–691，2018。[SV13] Olivier Schiffmann 和 Eric Vasserot。《椭圆 Hall 代数与 $\mathbb{A}^2$ 的希尔伯特概形的 K理论》。《杜克数学杂志》，162(2):279–366，2013。[SW16] John Shareshian 和 Michelle L. Wachs。《色拟对称函数》。《数学进展》，295:497–551，2016。[Wil18] Andrew Timothy Wilson。《环面链环同调与 nabla 算子》。《组合理论杂志 A 辑》，154:129–144，2018。[Wil23] Andy Wilson。《环面链环同调的对称函数提升》。《组合理论》，3(3)，2023。

首尔国立大学数学科学系，韩国首尔 151-247电子邮件地址：hyun920310@snu.ac.kr

成均馆大学数学系，韩国水原电子邮件地址：jaeseongoh@skku.edu