arXiv:2602.06354v1 [math.DS] 6 Feb 2026

某些不可逆 $C^{1+\beta}$ 映射的符号动力学。

Jing Xun *、Yifan Zhang 和 Yujun Zhu

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, 361005, PR China

摘要：设 f 是闭黎曼流形 M上的一个具有零 Lyapunov 指数和奇点的不可逆 $C^{1+\beta}(\beta > 0)$ 映射。我们研究 f的符号动力学。结合 Sarig、Ovadia 和 Araujo-Lima-Poletti 近期工作的技术 [16, 12, 13, 3], ，我们为（M， f）的逆极限空间中由可求和点组成的不变集构造一个可数马尔可夫划分，并证明在 f 的相应子集上存在一个有限对一的符号扩张 M。

1 引言

众所周知，符号系统是重要的动力系统，具有丰富的拓扑性质和统计性质。更重要的是，符号系统在研究许多经典系统时发挥着重要作用，尤其是在一致双曲微分同胚的研究中。设 f 是闭黎曼流形 M上的一个微分同胚。一旦得到 M的马尔可夫划分（或 f-不变子集 Λ的马尔可夫划分），便可得到拓扑马尔可夫移位与 f（或 $f|_\Lambda$）之间的半共轭，从而建立 f-不变测度与移位不变测度之间的对应关系。20 世纪 60 年代，Adler 和 Weiss 为双曲环面自同构 [1, 2]引入了有限马尔可夫划分。此后，Sinaˇı 和 Bowen 分别为阿诺索夫微分同胚和 Axiom A 微分同胚的基本集构造了有限马尔可夫划分 [17, 18, 7, 5]。

近年来，研究人员为将符号动力学应用于具有弱双曲性的系统做出了大量努力。Sarig [16] 在这一领域取得了一项重要进展。他研究了任意 $C^{1+\beta}$ 具有正拓扑熵的曲面微分同胚 f 的符号动力学。在这种情况下，f 相对于任意最大熵遍历测度都是非一致双曲的。Sarig 为 χ–大子集构造了可数马尔可夫划分（若某个子集对每个熵大于 $\chi > 0$的遍历不变概率测度 μ 都有支撑，则称其为 χ–大），并由此证明了关于曲面微分同胚的两个猜想：一个由 Katok [10] 提出，另一个由 Buzzi [6], 提出，分别涉及周期点的数量和最大熵测度的数量。后来，Ovadia 将 Sarig 方法推广到更高维情形，包括 $C^{1+\beta}$ 非一致双曲的微分同胚，以及轨道可能具有零 Lyapunov 指数但仍表现出某种初始条件敏感性的微分同胚 [12, 13]。Araujo、Lima 和 Poletti 研究了非可逆且奇异的非一致双曲系统中的这一问题 [3]。此外还有许多相关研究，这里不一一列举。

Bowen 的思想和 Pesin 理论是 Sarig 方法的基础。众所周知，Bowen 构造一致双曲微分同胚的马尔可夫划分时，使用了 Anosov 针对伪轨道提出的影踪理论。对于非一致双曲情形，Pesin 利用由 Lyapunov 内积诱导的 Lyapunov 范数，将系统表示为局部坐标图上一致双曲系统的扰动 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle'$（见第 3.1 小节）。如今，这些局部坐标图称为 Pesin 坐标图，其大小取决于该点处的双曲性。Sarig [16]基于 Pesin 理论发展了一套精细的影随理论，并引入了 ϵ-链这一概念，作为 Bowen 伪轨道的对应物。 ϵ-链比 Bowen 伪轨道要求更严格：它们不仅要求点与点之间的距离足够近，还要求双曲性也足够“接近”。

借鉴 Sarig 的策略，Ovadia 研究了高维情形下的符号动力学 [12, 13]。在 [12], Ovadia 处理了高维非一致双曲微分同胚。与二维情形相比，高维情形的主要难点在于如何比较

2020 年数学主题分类：37D05, 37B10, 37C50。关键词和短语： $C^{1+\beta}$ 映射，零 Lyapunov 指数，马尔可夫划分，符号动力学。

* 通讯作者。本研究得到国家自然科学基金（编号：12571206, 12526102）的资助

这些 ϵ跟踪同一点的链。Ovadia 引入了一种线性变换，以便比较尺度函数（尺度函数的定义见（3.1））。在 [13],Ovadia 考虑了双曲性逐渐退化的微分同胚，即存在具有零 Lyapunov 指数的轨道。与 Lyapunov 指数非零的非一致双曲系统不同，此类系统的 Pesin 坐标图不存在一致估计。为克服这一障碍，Ovadia 找到了一种 I–阶梯函数，可将其视为 Pesin 坐标图的界（该界随点而变），并对轨道提出了更严格的“温和性”要求。这里的温和性是指逆坐标变换范数的渐近增长率。由此便可建立适用于可能具有零 Lyapunov 指数的轨道的影随理论。因此，Ovadia 为一类可能具有零 Lyapunov 指数的轨道构造了可数马尔可夫划分。这导出了有限对一的符号编码，并使几何势具有可求和变差。

对不可逆端同态的符号动力学的研究也备受关注。20 世纪 90 年代，Qian 和 Zhang 通过自然扩张的马尔可夫划分研究了 Axiom A 端同态的遍历理论 [15] 。自然扩张是研究不可逆系统的基本工具，我们将在第2.1小节介绍自然扩张的相关内容。关于不可逆 C^2 端同态遍历理论的系统研究，请参阅 Qian、Xie 和 Zhu 的专著 [14]。借助自然扩张，Araujo、Lima 和 Poletti 系统地研究了 $C^{1+\beta}$ 光滑黎曼流形（该流形可能不连通、有边界和/或非紧）上带奇点的非一致双曲映射的符号动力学 M，其中流形的直径有限[3]。在这种情形下，Pesin 坐标图的尺寸较小。因此，他们对流形和映射提出了一些假设，以便控制 Pesin 坐标图的尺寸。值得指出的是， [3] 这一框架具有广泛的适用性，涵盖了许多经典例子，例如闭流形上的测地流、多维台球映射和 Viana 映射，也包括文献中的大多数近期成果。

本文的主要目的是研究更一般系统的符号动力学——非可逆 $C^{1+\beta}$ 且具有零 Lyapunov 指数和奇点的映射。零 Lyapunov 指数与奇点同时出现，因此我们需要结合 Sarig、Ovadia 和 Araujo-Lima-Poletti 的方法，并针对我们的情形进行细致调整 [16, 12, 13, 3] 。本文结构安排如下。在第2节中，我们介绍自然扩张的基本性质。在第3节中，我们运用 Pesin 理论证明自然扩张的影踪定理，随后在 0-summ 集上建立一个可数马尔可夫划分。通过 Bowen 和 Sinaˇı 的方法，它诱导出一个有限对一的符号编码（0-summ 的定义见定义3.1）。在第4节中，我们介绍典范应用，并给出一个满足我们条件的例子。

1.1 主要结果的陈述

设 M 是一个维数大于或等于 2 的闭黎曼流形（即紧且无边界），且 $f: M \to M$ 是一个带奇点的 $C^{1+\beta}$ 自同态。设 $\Gamma_\infty := \{x \in M : d_x f$ 是退化的$\}$。对于任意 $x \in M \backslash \Gamma_\infty$，记 f_x^{-1} 为 f 的逆分支，它将 $f(x)$ 映至 x。假设 M 的直径小于 1，且 f 满足以下性质。对于常数 a、$K > 1$，使得对所有满足 x 的 $x \in M$， $f(x) \notin \Gamma_\infty$，存在集合 D、$D' \subset M$ 和 $\tau(x)$，满足 $\min\{d(x,\Gamma_\infty)^a$， $d(f(x)\ \Gamma_\infty)^a\} < \tau(x) < 1$，使得对于 $D_x := B(x, 2\tau(x))$ 和 $\mathfrak{E}_x := B(f(x)\ 2\tau(x))$，有以下结论：

(A1) $f|_{D_x}$ 是到其像上的微分同胚； $f_x^{-1}|_{\mathfrak{E}_x}$ 是到其像上的良定义微分同胚。

(A2) $d(x,\ \Gamma_\infty)^a \le \|d_y f\| \le d(x,\ \Gamma_\infty)^{-a}\ \forall y \in D_x$ 以及 $d(x,\ \Gamma_\infty)^a \le \|d_z f_x^{-1}\| \le d(x,\ \Gamma_\infty)^{-a}\ \forall z \in \mathfrak{E}_x$.

(A3) $\|\Theta_D \circ d_y f \circ \nu_y - \Theta_D \circ d_z f \circ \nu_z\| \le K d\ y\ z\ ^\beta \forall y\ z \in D_x$ $\left\|\Theta_{D'} \circ d_{y'} f_x^{-1} \circ \nu_{y'} - \Theta_{D'} \circ d_{z'} f_x^{-1} \circ \nu_{z'}\right\| \le$ $K d\ y'\ z'\ ^\beta \forall y\ z \in \mathfrak{E}_x$ $y\ z \in D\ y'\ z' \in D'$ $\Theta_{D/D'}$ $\nu_{y/y'}$ (,), 以及 (,), 其中 , , , (和的定义可见第 2节)。

假设(A2) 保证轨道不会以 Γ_∞ 的指数速度趋近奇异集，因为 Pesin 坐标图的大小会随着 x趋近 Γ_∞而减小。为简单起见，我们假设乘法常数为 1。

设 $\mathcal{G}$ 是一个可数有向图，其顶点为 $\mathcal{V}$，边为 $\mathcal{E}$。每个顶点至少有一条入边和一条出边。与 $\mathcal{G}$ 相关联的拓扑马尔可夫移位 是一个有序对 $(\Sigma,\ \sigma)$，其中集合为

$$\Sigma = \Sigma(\mathcal{G}) := \{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{Z}} : v_i \to v_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}\},$$

且映射 σ 是左移。为简便起见，我们将 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 记作 v，并赋予有序对 $(\Sigma,\ \sigma$自然度量 $d(u,\ v):=\exp(-\min\{|i|:\ u_i\neq v_i\})$,其中 $u,\ v\in\Sigma$。如 [16],所述

$$\Sigma^{\#}:=\{(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma:\exists v,w\in\mathcal{V}\text{ s.t. }v_i=v\text{ for infinitely many }i>0,\\ \text{and }v_i=w\text{ for infinitely many }i<0\}.$$

主定理（定理 3.27）假设系统 $(M,\ f)$ 满足上述假设，且 $(M^f,\ \hat{}f)$ 是 $(M,\ f)$ 的自然扩张。对于足够小的 $\epsilon>0$，存在一个子集 $RST\subset M^f$、一个局部紧拓扑马尔可夫移位 $(\tilde{\Sigma},\ \tilde{\sigma})$ 以及一个一致连续映射 $\tilde{\pi}:\ \tilde{\Sigma}\to M^f$，使得:

(1) $\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})=RST$。 (2) $\tilde{\pi}$ 是一个有限到一映射。 (3) $\tilde{\pi}\circ\sigma=f\circ\tilde{\pi}$。 (4) $\tilde{\pi}$ 在 Σ上是一致连续的。

B由上述定理及自然扩张的性质，可得以下推论。

推论 1.1 假设系统 $(M,\ f)$ 满足上述假设，则存在一个针对 $(M,\ f)$ 的有限到一符号扩张，它将几何势提升为具有可求和变差的势。

2 预备知识

令 $\exp_x:\ T_xM\to M$ 为指数映射。由于流形 M 的紧性，存在数 $r=r(M)$ 使得

$$\exp_x:\{\xi\in T_xM:|\xi|<r\}\to B(x,r)\subset M$$

对于每个 $x\in M$，它都是一个 C^∞ 微分同胚，其中 $B(x,r)=\{y\in M:\ d(x,y)<r\}$。令 $B_r(0):=\{\xi\in T_xM:|\xi|<r\}$。取 r 足够小，使得映射 $\exp_x:\ B_r(0)\to M$，以及 $(x,y)\mapsto\exp_x^{-1}(y)$ 在 $B(z,r)\times B(z,r)$ 上对任意 $z\in M$ 都具有一致利普希茨常数 2，$\|d_v\exp_x\|\le 2$、$\forall v\in B_r(0)$ 以及 $\|d_y\exp_x^{-1}\|\le 2$、$\forall\ y\in B(x,r)$。

根据微分几何的标准理论，对于任意 $x\in M$，我们可以找到一个开邻域$D:=B(x,\ r')(r'<r)$以及一个光滑映射 $\Theta_D:\ TD\to\mathbb{R}^d$，使得:

(1) $\Theta_D:T_yM\to\mathbb{R}^d$ 是一个线性等距映射 $\forall y\in D$。

(2) 定义 $\nu_y:=(\Theta_D|_{T_yM})^{-1}:\ \mathbb{R}^d\to T_yM$，则映射 $(y,\ u)\mapsto(\exp^y\circ\nu_y)(u)$ 在 $D\times B_r(0)$ 上关于度量 $d(y,y')+|u-u'|$是光滑且 Lipschitz 连续的。令 L_1 为映射 $(y,\ u)\mapsto(\exp^y\circ\nu_y)(u)$ 在 $D\times B_r(0)$ 上的一致Lipschitz常数。

(3) $y\mapsto\nu_y^{-1}\circ\exp_y^{-1}$在 D 上是利普希茨连续的。令 L_2 为映射的统一 Lipschitz常数 map $y\mapsto\nu_y^{-1}\circ$指数$_y^{-1}$在 D上。

设 $\mathcal{D}$ 是 $M\backslash\Gamma_\infty$的一个可数覆盖，由满足上述性质的元素组成。记$\omega(D)<r$ 为 D的勒贝格数。由于 M 是紧的，存在 $\exists$ 常数 $L_3,\ L_4,\ L_5$ 和 $D\in\mathcal{D}$，使得 $\forall y_1,\ y_2\in B(x,\ r)\subset D$,

$$\|d_{v_1}(\Theta_D\circ\exp_{y_1}\circ\nu_{y_1})-d_{v_2}(\Theta_D\circ\exp_{y_2}\circ\nu_{y_2})\|\le L_3(|v_1-v_2|+d(y_1,y_2))\ \forall|v_1|\le r,|v_2|\le r,\tag{2.1}$$

$$\|d_{z_1}(\Theta_D\circ\text{指数}_{y_1}^{-1}\circ\nu(z_1))-d_{z_2}(\Theta_D\circ\text{指数}_{y_2}^{-1}\circ\nu(z_2))\|\le L_4(d(y_1,\ y_2)+d(z_1,\ z_2))\ \ \forall z_1,\ z_2\in B(x,\ r),\tag{2.2}$$

and

$$\begin{aligned}&\|[d_{z_1}(\Theta_D\circ\exp_{y_1}^{-1}\circ\nu(z_1))-d_{z_1}(\Theta_D\circ\exp_{y_2}^{-1}\circ\nu(z_1))]\\&-[d_{z_2}(\Theta_D\circ\exp_{y_1}^{-1}\circ\nu(z_2))-d_{z_2}(\Theta_D\circ\exp_{y_2}^{-1}\circ\nu(z_2))]\|\le L_5d(y_1,y_2)d(z_1,z_2).\end{aligned}\tag{2.3}$$

不失一般性，设 $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4,\ L_5$均大于一。

$|\cdot|$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上的范数是标准欧几里得范数，而切空间$T_xM\ \forall x\in M$ 上的范数是由黎曼内积诱导的范数。对于线性变换$A:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，$\|A\|:=\sup_{v\in\mathbb{R}^n,\ v\neq0}\frac{|Av|}{|v|}$。对于有界开集 $U\subset\mathbb{R}^n$ 和 $H:\ U\to\mathbb{R}^m$，C_0-范数为 $\|H\|_{C^0}:=\sup_{v\in U}|H(v)|$，而 $C^{1+\frac{\beta}{2}}$-范数为

$$\|H\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}}:=\|H\|_{C^0}+\|d.H\|_{C^0}+H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d.H)=\sup_{v\in U}|H(v)|+\sup_{v\in U}\|d_vH\|+\sup_{\substack{v_1,v_2\in U,\\ v_1\neq v_2}}\frac{\|d_{v_1}H-d_{v_2}H\|}{|v_1-v_2|^{\beta/2}}.$$

2.1 自然扩张

本部分将回顾自然扩张，尤其是光滑映射所需的一些概念和结果。详情可参见书籍 [14]。令 M^f 为 $M^{\mathbb{Z}}$ 中由所有完整轨道组成的子集，即

$$M^f = \{\tilde{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} | x_i \in M,\ f(x_i) = x_{i+1},\ \forall i \in \mathbb{Z}\}.$$

赋予 M^f 乘积拓扑和距离 $d(\tilde{x},\ \tilde{y}) := \sup\{2^i d(x_i,\ y_i) :\ i \le 0\}$，则 M^f 是 $M^{\mathbb{Z}}$ 的闭子集。令 $p:\ M^f \to M$ 表示自然投影：

$$p(\tilde{x}) = x_0,\ \forall \tilde{x} \in M^f,$$

并令 $\hat{f}:\ M^f \to M^f$ 为移位同胚。 M^f 称为 $\hat{}$ 系统 $(M,\ f)$ 的逆极限空间（或轨道空间），而 f 称为系统 f 的自然扩张。

众所周知，由投影 p 诱导的 $p*$ 是 $M\hat{}f(M^f)$ 与 $M_f(M)$ 之间的双射，其中 $M\hat{}f(M^f)$（分别为 $M_f(M)$）表示在弱*拓扑下 M^f（分别为 M）上所有 $\hat{}\ f$（分别为 f）不变概率测度的集合。对于 M 上的任意 f-不变博雷尔概率测度 μ，存在唯一的 M^f 上的 $\hat{}\ f$-不变博雷尔概率测度 $\tilde{\mu}$，使得 $p\tilde{\mu} = \mu$。

令 $E = \bigcup_{\tilde{x}\in M^f} E_{\tilde{x}}$ 为切丛 $TM = \bigcup_{x\in M} T_x M$ 在投影 p 下的拉回丛，并且纤维 $E_{\tilde{x}}$ 与 $T_{p\tilde{x}}M$ 之间存在自然同构。因此，对于 $\tilde{x} \in M^f$，定义 $d_{\tilde{x}}\hat{}f: E_{\tilde{x}} \to E_{\hat{}f\tilde{x}}$ 为 $d_{\tilde{x}}\hat{}f := d_{p\tilde{x}}f$；对于 $\tilde{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in M^f \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \hat{}f^n(p^{-1}(\Gamma_\infty))$，定义

$$d_{\tilde{x}}\hat{f}^n := \begin{cases} d_x f^n & \text{if } n \ge 0, \\ (d_{x_{-n}}f)^{-1}\cdots(d_{x_{-2}}f)^{-1}(d_{x_{-1}}f)^{-1}, & \text{if } n < 0. \end{cases}$$

则 $d_{\tilde{x}}\hat{}f^{m+n} = d_{\hat{}f^n\tilde{x}}\hat{}f^m \circ d_{\tilde{x}}\hat{}f^n$，对任意 $n,\ m \in \mathbb{Z}$. 这意味着 $d\hat{}f$ 是以 $M^f \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \hat{}f^n(p^{-1}(\Gamma_\infty))$ 为底空间、定义在一个纤维丛上的可逆线性余循环。此外，$d\hat{}f$ 的李雅普诺夫谱与 df 相同。

3 具有马尔可夫符号动力学的子集

设 M 是一个维数为 d（$d \ge 2$）的闭黎曼流形，且 $f:\ M \to M$ 是一个具有奇异集 Γ' 的 $C^{1+\beta}$ 端映射，并满足假设(A1)-(A3)。本节将考察系统(M, f)的自然扩张$(M^f, \hat{}f)$，并通过证明适用于我们情形的影踪定理，在$\hat{}$的某个子集上构造局部有限马尔可夫分割。由于 f, df 是可逆的，对于 $x \in M$和 $x, f(x) \notin \Gamma_\infty$，我们引入以下定义，这些定义改编自 [13]。

定义 3.1 若点 $\tilde{x} \in M^f \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \hat{}f^n(p^{-1}(\Gamma_\infty))$存在唯一的分解 $E_{\tilde{x}} = E^s_{\tilde{x}} \oplus E^u_{\tilde{x}}$，使得.....，则称其为可求和的

$$\sup_{\xi^s\in E^s_{\tilde{x}},\ |\xi^s|=1} \sum_{m\ge 0} |d\hat{f}^m \xi_s|^2 < \infty, \qquad \sup_{\xi^u\in E^u_{\tilde{x}},\ |\xi^u|=1} \sum_{m\ge 0} |d\hat{f}^{-m} \xi_u|^2 < \infty.$$

$\hat{}$ 可求和点集称为 *0-summ*。显然，集合 0-summ 是 f-不变的，且可能包含李雅普诺夫指数为零的点。

对于任意 $\tilde{x} \in M^f \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \hat{}f^n(p^{-1}(\Gamma_\infty))$，由下式定义的缩放参数

$$s(\tilde{x}) = \sup_{\xi^s\in E^s_{\tilde{x}},\ |\xi^s|=1} S(\tilde{x}, \xi^s),\ u(\tilde{x}) = \sup_{\xi^u\in E^u_{\tilde{x}},\ |\xi^u|=1} U(\tilde{x}, \xi^u),$$

其中

$$S^2(\tilde{x}, \xi^s) = 2\sum_{m=0}^{\infty} |d_{\tilde{x}}\hat{f}^m \xi^s|^2 \text{ and } U^2(\tilde{x}, \xi^u) = 2\sum_{m=0}^{\infty} |d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-m} \xi^u|^2. \tag{3.1}$$

注意，当 $\tilde{x}$ 可求和时，参数 $s(\tilde{x})$ 和 $u(\tilde{x})$ 都是有限的。

为处理李雅普诺夫指数为零的点，Ovadia 引入了阶梯函数 $I(t)$[13]。以下命题列出了函数 $I(t)$ 的性质。

命题 3.1 给定 $\Gamma > 0$ 和 $\gamma > \frac{20}{\beta}$，阶梯函数 $I(t):= te^{\Gamma t^\gamma}$，$I:(0,1) \to (0,\infty)$ 满足以下性质：

(1) I和 I^{-1}均严格递增， $I(t) > t$在 $(0,1)$上成立，且 $I^{-1}(t) < t$在 $(0,e^{\Gamma})$上成立；

(2) $I^{-1}(t) \geq te^{-\Gamma t^{\frac{1}{\gamma}}}$；

(3) $\sum_{n\geq 0}(I^{-n}(t))^{\gamma} = \infty$对所有 $t > 0$;

(4) $\forall \tau > 0, \forall t > 0$, $\sum_{n\geq 0}(I^{-n}(t))^{\frac{1+\tau}{\gamma}} < \infty$;

(5) $F^{\frac{1}{4}}:(0,1) \to (0,\infty)$是良定义的，并且它是一个严格递增的 C^1正函数，使得$I^{\frac{1}{4}}(t) > t$对所有 $t \in (0,1)$;

(6) $I^{-\frac{1}{4}}$在 $(0,e^{\Gamma})$上严格递增， $I^{-\frac{1}{4}}(t) < t$，并且 $I^{-\frac{n}{4}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\forall t \in (0,1)$。

定义 ρ： $M^f \to \mathbb{R}$由 $\rho(\tilde{x}) := d(\{x_{-1}, x_0, x_1\}, \Gamma_\infty)$给出，对任意 $\tilde{x} = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in M^f$。给定 $\epsilon > 0$， 令$\mathcal{I} := \{I^{-\frac{\ell}{4}}(1)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$。对于可求和点 $\tilde{x}$，定义参数 $Q_\epsilon(\tilde{x}) := \max\{q \in \mathcal{I} \mid q \leq \tilde{Q}_\epsilon(\tilde{x})\}$，其中

$$\tilde{Q}_\epsilon(\tilde{x}) := \epsilon^{\frac{20}{\beta}}\rho(\tilde{x})^{\frac{8a}{\beta}} \cdot \|C_0(\tilde{x})^{-1}\|^{-2\gamma}.$$

备注1 注意，常数 γ越大，参数 $Q(\tilde{x})$ 就越小。而 γ的下界比 [13]中的下界更强， $\|df\|$, $\|df_x^{-1}\|$不能对所有 x， $f(x) \notin \Gamma_\infty$都由一个常数界定。此外，我们假设 M的直径小于一，那么$\rho(\tilde{x}) \leq 1$。这意味着，此处的影踪定理比 [13, 16]中的先前版本更精细。

定义3.2 称可求和点 $\tilde{x}$ 为强可调温，如果存在函数 q： $\{f^n(\tilde{x})\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \mathcal{I}$ ，使得

(1) $q \circ f = I^{\pm 1}(q)$, (2) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $q(f^n(\tilde{x})) \leq Q_\epsilon(f^n(\tilde{x}))$】【。

定义3.3 称强可调温点 $\tilde{x}$ 为递归强可调温，如果存在一个函数 q： $\{f^n(\tilde{x})\}_{n\in\mathbb{Z}} \to \mathcal{I}$ ，使得

(3) $\limsup_{n\to\pm\infty} q(\hat{f}^n(\tilde{x})) > 0$.

记强可调温点的集合为 ST，记递归强可调温点的集合为 RST。

3.1 Pesin 理论

对于 $\tilde{x} \in$ 0-summ，存在唯一的分解 $E_{\tilde{x}} = E^s_{\tilde{x}} \oplus E^u_{\tilde{x}}$。设 $d_s(\tilde{x})$ $d_u(\tilde{x})$分别为 $E^s_{\tilde{x}}$和$E^u_{\tilde{x}}$的维数。由于分解 $E^s \oplus E^u$是 df不变的，函数 d_s， d_u是 f不变的。记 $E_{\tilde{x}}$上的黎曼内积为 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$，并通过以下恒等式在 0-summ 上定义 Lyapunov 内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle'$：

$$\langle \xi^s, \eta^s\rangle' := 2\sum_{m=0}^{\infty}\langle d_{\tilde{x}}\hat{f}^m\xi^s, d_{\tilde{x}}\hat{f}^m\eta^s\rangle, \text{ for } \xi^s, \eta^s \in E^s(\tilde{x});$$

$$\langle \xi^u, \eta^u\rangle' := 2\sum_{m=0}^{\infty}\langle d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-m}\xi^u, d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-m}\eta^u\rangle, \text{ for } \xi^u, \eta^u \in E^u(\tilde{x});$$

且 $\langle \xi,\ \eta\rangle' = 0$，如果 $\xi \in E^s(\tilde{x})$ $\eta \in E^u(\tilde{x})$。

对于 $\tilde{x} \in$ 0-求和，我们选择满足以下条件的 $C_0(\tilde{x})$： $\mathbb{R}^n \to E_{\tilde{x}}$：

(1) $C_0[\mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})} \times \{0\}] = E^s(\tilde{x})$, and $C_0[\{0\} \times \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x})}] = E^u(\tilde{x})$;

(2) $C_0(\tilde{x})$ 是 $(\mathbb{R}^n,\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle_{\mathbb{R}^n})$ 与 $(E(\tilde{x})\ \langle\cdot,\ \cdot\rangle')$ 之间的等距映射。

引理 3.2 对于 $\tilde{x} \in$ 0-求和，以下结论成立：

(1) $C_0(\tilde{x})$ 是压缩的，且

$$\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|^2 = \sup_{\substack{\xi^s\in E^s(\tilde{x}),\ \xi^u\in E^u(\tilde{x}),\\ \xi^s+\xi^u\neq 0}} \frac{S^2(\tilde{x},\xi^s)+U^2(\tilde{x},\xi^u)}{|\xi^s+\xi^u|^2}.$$

(2) 映射 $D_0(\tilde{x}) = C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\circ d_{\tilde{x}}\hat{f}\circ C_0(\tilde{x})$ 是一个分块矩阵

$$\begin{pmatrix} D_s(\tilde{x}) & 0\\ 0 & D_u(\tilde{x})\end{pmatrix},$$

其中 $D_{s\backslash u}(\tilde{x})$ 是一个 $d_{s\backslash u}(\tilde{x})\times d_{s\backslash u}(\tilde{x})$ 矩阵。此外，对于所有非零向量 $v_s\in\mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})}$ 和 $v_u\in\hat{}\mathbb{R}^{d_u(f(\tilde{x}))}$，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^a \le \frac{|D_s v_s|}{|v_s|} \le e^{-\frac{1}{s^2(\tilde{x})}},\quad \frac{\sqrt{2}}{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^a \le \frac{|D_u^{-1}v_u|}{|v_u|} \le e^{-\frac{1}{u^2(\hat{f}(\tilde{x}))}}. \tag{3.2}$$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{2a} \le \frac{\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|}{\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|} \le \sqrt{2}d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{-2a}$.

证明 (1) 见 [12]关于部分 (1) 的证明。

(2) 根据 $C_0(\tilde{x})$ 的构造， $D_0(\tilde{x})$ 具有分块形式。接下来，我们估计 $|D_s(\cdot)|$ 和 $|D_u(\cdot)|$。对于 $\xi^s\in E^s(\tilde{x})$，我们有

$$\left\langle d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s, d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s\right\rangle' = 2\sum_{m=0}^{\infty}|d_{\tilde{x}}\hat{f}^{m+1}\xi^s|^2 = \langle\xi^s,\xi^s\rangle' - 2|\xi^s|^2, \tag{3.3}$$

这意味着

$$\frac{\left\langle d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s, d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s\right\rangle'}{\langle\xi^s,\xi^s\rangle'} = 1-\frac{2|\xi^s|^2}{\langle\xi^s,\xi^s\rangle'}.$$

根据假设 条件 (A2)， $\langle\xi^s,\ \xi^s\rangle' > 2\left(|\xi^s|^2+|d_{\tilde{x}}\hat{}f\xi^s|^2\right)\ge 2\left(1+d(x_0,\ \Gamma_\infty)^{2a}\right)|\xi^s|^2$，其中 $x_0=p\tilde{x}$。因此 ，

$$\frac{d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}{1+d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}} \le \frac{\langle d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s, d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s\rangle'}{\langle\xi^s,\xi^s\rangle'} \le e^{\frac{-2|\xi^s|^2}{\langle\xi^s,\xi^s\rangle'}} \le e^{\frac{-2}{S^2(\tilde{x},\frac{\xi^s}{|\xi^s|})}} \le e^{\frac{-2}{s^2(\tilde{x})}}.$$

设 $v_s\in\mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})}$ 使得 $\xi^s = C_0(\tilde{x})v_s$，则

$$\frac{|D_s(\tilde{x})v^s|^2}{|v^s|^2} = \frac{|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s|^2}{|C_0(\tilde{x})^{-1}\xi^s|^2} = \frac{|d_{\tilde{x}}\hat{f}\xi^s|'^2}{|\xi^s|'^2} \in \left[\frac{d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}{1+d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}, e^{\frac{-2}{s^2(\tilde{x})}}\right],$$

其中，范数 $|\cdot|'$ 由内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle'$诱导。

$\hat{}$ 类似地，我们可以估计 $|D_u(\cdot)|$: 对于 $\eta^u\in E^u(f(\tilde{x}))$

$$\left\langle d_{\hat{f}(\tilde{x})}\hat{f}^{-1}\eta^u, d_{\hat{f}(\tilde{x})}\hat{f}^{-1}\eta^u\right\rangle' = 2\sum_{m=0}^{\infty}|d_{\hat{f}(\tilde{x})}\hat{f}^{-m-1}\eta^u|^2 = 2\sum_{m=0}^{\infty}|d_{\hat{f}(\tilde{x})}\hat{f}^{-m}\eta^u|^2 - 2|\eta^u|^2 = \langle\eta^u,\eta^u\rangle' - 2|\eta^u|^2,$$

且 $\langle\eta^u,\ \eta^u\rangle' > 2\left(|\eta^u|^2+|d_{\hat{}f(\tilde{x})}\hat{}f^{-1}\eta^u|^2\right)\ge 2\left(1+d(x_0,\ \Gamma_\infty)^{2a}\right)|\eta^u|^2$。设 $v_u\in\mathbb{R}^{d_u(\hat{}f(\tilde{x}))}$，并且 $\eta^u :=\hat{}C_0(f(\tilde{x}))v_u$，则

$$\frac{|D_u(\tilde{x})^{-1}v^u|^2}{|v^u|^2} = \frac{|C_0(\tilde{x})^{-1}d_{\hat{f}(\tilde{x}))}\hat{f}^{-1}\eta^u|^2}{|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\eta^u|^2} = \frac{|d_{\hat{f}(\tilde{x})}\hat{f}^{-1}\eta^u|'^2}{|\eta^u|'^2} \in \left[\frac{d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}{1+d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}, e^{\frac{-2}{u^2(\hat{f}(\tilde{x}))}}\right].$$

由于 M 的直径小于一且 $a>1$，我们有 $\frac{d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}{1+d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}}(\cdot,\cdot)^{2a} > \frac{1}{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{2a}$，因此部分 (2) 得证。

ˆ (3) 根据部分 (1)，且 df 是可逆的，

$$\begin{aligned}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|^2 &= \sup_{\substack{\xi^s\in E^s(\tilde{x}),\ \xi^u\in E^u(\tilde{x}),\\ \xi^s+\xi^u\neq 0}} \frac{S^2(\tilde{x},d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^s))+U^2(\tilde{x},d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u))}{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^s)+d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|^2}\\ &= \sup_{\substack{\xi^s\in E^s(\tilde{x}),\ \xi^u\in E^u(\tilde{x}),\\ \xi^s+\xi^u\neq 0}} \frac{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^s)|'^2+|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2}{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^s+\xi^u)|^2}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

由方程（3.3），

$$|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^s)|'^2 \le |\xi^s|'^2 \le 2d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{-2a}|\xi^s|'^2. \tag{3.5}$$

根据内积 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle'$ 及假设 (A2)，$|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2 = |\xi^u|'^2 + 2|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|^2$ 和 $|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2 \ge 2|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|^2 + 2|\xi^u|^2 \ge 2|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|^2(1+d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{2a})$，于是 $\frac{|\xi^u|'^2}{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2} = 1 - \frac{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|^2}{|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2} \ge \frac{d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{2a}}{1+d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{2a}}$。这意味着

$$|d_{\tilde{x}}\hat{f}(\xi^u)|'^2 \le 2d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{-2a}|\xi^u|'^2. \tag{3.6}$$

因此，将不等式 (3.5)、(3.6) 和假设 (A2) 应用于方程 (3.4)，得到 $\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\| \le \sqrt{2}d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{-2a}$。类似地，我们有 $\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}d(p(\tilde{x}),\Gamma_\infty)^{-2a}$。□

注 2 对于微分同胚的情形，存在常数 F_0，使得 $\frac{\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|}{\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|} \in [F_0^{-1},F_0]$ 属于 [13]。在我们的设定中存在奇点，因此相应的结论不成立。根据上述引理的部分 (3)，无法对 $\frac{\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|}{\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|}$ 进行一致控制。因此，可以更精细地控制 Pesin 图表的大小。

定义 3.4（Pesin 坐标图）在 $\tilde{x}\in 0$-summ 处的 *Pesin* 图表为

$$\psi_{\tilde{x}} := \exp_{p(\tilde{x})}\circ C_0(\tilde{x}) : B_r(0)\to M,$$

其中，$B_r(0)$ 是以原点为中心、半径为 r in $\mathbb{R}^d$（关于欧几里得范数）的开球。

对于 $\tilde{x}=(x_i)_{i\in\mathbb{R}}\in 0$-summ，令

$$\iota(\tilde{x}) := \min\left\{\frac{1}{2}rd(x_0,\Gamma_\infty)^a, \tau(\tilde{x})\right\}.$$

不妨设 $r<1$，则 $\iota(\tilde{x}) = \frac{1}{2}rd(x_0,\Gamma_\infty)^a$，因为 $\tau(\tilde{x}) \ge d(x_0,\Gamma_\infty)^a$。记 $f_{\tilde{x}}^{-1} := f_{x_0}^{-1}$，以及 $\iota(\tilde{x}) := \iota(x_0)$。在 $B_{\iota(\tilde{x})}(0)$ 上定义映射 $F_{\tilde{x}} := \psi^{-1}\hat{f}(\tilde{x})\circ f\circ\psi_{\tilde{x}}$，以及映射 $F_{\tilde{x}}^{-1} := \psi_{\tilde{x}}^{-1}\circ f_{\tilde{x}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}$，定义域为 $B_{\iota(\tilde{x})}(0)$。这两个映射在 $B_{\iota(\tilde{x})}(0)$ 上都是良定义的。事实上，$\psi_{\tilde{x}}(B_{\iota(\tilde{x})}(0)) \subset B(x_0,2\iota(\tilde{x}))$，$f(B(x_0,2\iota(\tilde{x}))) \subset B(f(x_0),2\iota(\tilde{x})d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a})$，并且 $2\iota(\tilde{x})d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a} < r$，因此 $F_{\tilde{x}}$ 是良定义的。类似地，我们有 $\psi\hat{f}(\tilde{x})(B_{\iota(\tilde{x})}(0)) \subset B(f(x_0),2\iota(\tilde{x}))$，且 $f_{\tilde{x}}^{-1}(B(f(x_0),2\iota(\tilde{x}))) \subset B(x_0,2\iota(\tilde{x})d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a})$，因为 $\iota(\tilde{x}) \le \tau(\tilde{x})$。并且 $2\iota(\tilde{x})d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}) < r$，于是 $F_{\tilde{x}}^{-1}$ 在 $B_{\iota(\tilde{x})}(0)$ 上是良定义的。此外，映射 $F_{\tilde{x}},F_{\tilde{x}}^{-1}$：$B_{\iota(\tilde{x})}(0)\to\mathbb{R}^d$ 是到其像上的微分同胚，并且二者互为逆映射。

定理 3.3 对于所有足够小的 $\epsilon>0$，$\tilde{x}=(x_i)_{i\in\mathbb{R}}\in 0$-总和，映射 $F_{\tilde{x}}: B_{Q(\tilde{x})}(0)\to\mathbb{R}^d$ 和 $F_{\tilde{x}}^{-1}: B_{Q(\hat{f}(\tilde{x}))}(0)\to\mathbb{R}^d$ 满足：

(1) $F_{\tilde{x}}\circ F_{\tilde{x}}^{-1} = Id$ 和 $F_{\tilde{x}}^{-1}\circ F_{\tilde{x}} = Id$，其中 Id 是恒等映射。*(2)* $F_{\tilde{x}}^{\pm1}(0)=0$，以及 $d_0F_{\tilde{x}}^{\pm1} = D_0(\tilde{x})^{\pm1}$。*(3)* 存在两个映射 H^+、H^-，使得 $F_{\tilde{x}} = D_0(\tilde{x})+H^+$、$F_{\tilde{x}}^{-1} = D_0(\tilde{x})^{-1}+H^-$；这些映射 $H^\pm$ 满足 $H^{\pm1}(0)=0$、$d_0H^{\pm1}=0$ 以及 $\|H^{\pm1}\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} < \epsilon$。*(4)* $\|dF_{\tilde{x}}^{\pm1}\|_{C^0} \le 2\sqrt{2}d(x_0、\Gamma_\infty)^{-a}$。

证明 注意到，当 ϵ足够小时， $Q(\tilde{x})\ Q(\hat{f}(\tilde{x})) \leq \frac{1}{2}rd(x_0,\Gamma_\infty)^a \leq \iota(\tilde{x})$。因此，映射 $F_{\tilde{x}}$、 $F_{\tilde{x}}^{-1}$分别在 $B_{Q(\tilde{x}}$ $(0))$ $B_{Q(\hat{f}(\tilde{x})}$,上是良定义的。

(1) 只需证明映射$F_{\tilde{x}} \circ F_{\tilde{x}}^{-1}$， $F_{\tilde{x}}^{-1} \circ F_{\tilde{x}}$是良定义的，即 $F_{\tilde{x}}(B_{Q(\tilde{x})}(0)) \subset B_{\iota(\tilde{x})}(0)$ 和 $F_{\tilde{x}}^{-1}(B_{Q(\hat{f}(\tilde{x}))}$ $(0)) \subset B_{\iota(\tilde{x})}(0)$。根据假设(A2)，可得

$$F_{\tilde{x}}^{-1}(B_{Q(\hat{f}(\tilde{x}))}(0)) \subset B_{4d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|Q(\hat{f}(\tilde{x}))}(0).$$

And

$$\begin{aligned} 4d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|Q(\hat{f}(\tilde{x})) &\leq 4\sqrt{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{-3a}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|Q(\hat{f}(\tilde{x})) \text{ (by Lemma 3.2(3))} \\ &\leq \epsilon^{\frac{20}{\beta}} d(x_0,\Gamma_\infty)^a \|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|^{1-2\gamma} \\ &\leq \epsilon^{\frac{20}{\beta}} d(x_0,\Gamma_\infty)^a, \end{aligned}$$

最后一个不等式成立，是因为 $\gamma > \frac{20}{\beta}$， 并且 $C_0(\tilde{x})$ 对所有 $\tilde{x} \in$0-求和都是压缩的。因此 ，

$$4d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|Q(\hat{f}(\tilde{x})) \leq \iota(\tilde{x})$$

当 ϵ 足够小时。类似地，可得

$$F_{\tilde{x}}(B_{Q(\tilde{x})}(0)) \subset B_{4d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|Q(\tilde{x})}(0),$$

and

$$4d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\|Q(\tilde{x}) \leq 4\sqrt{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{-3a}\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|Q(\tilde{x}) \leq \epsilon^{\frac{20}{\beta}} d(x_0,\Gamma_\infty)^a \leq \iota(\tilde{x})$$

当 ϵ 足够小时。

(2) 对任意 $x \in M$， $\exp_x(0) = x$ 且 $d_0 \exp_x = Id$， 则第 (2) 部分成立。(3) 定义 $H^{\pm 1} = F_{\tilde{x}}^{\pm 1} - D_0(\tilde{x})^{\pm 1}$， 则 $dH^{\pm 1} = dF_{\tilde{x}}^{\pm 1}$。对任意 u， $v \in B_{Q(\tilde{x})}(0)$,

$$\begin{aligned} \|d_uH^+ - d_vH^+\| &= \|d_uF_{\tilde{x}} - d_vF_{\tilde{x}}\| \\ &\leq \|C_0(\hat{f}(\tilde{x}))^{-1}\| \cdot \|d_u(\exp_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \exp_{x_0}) - d_v(\exp_{f(x_0)}^{-1} \circ f \circ \exp_{x_0})\| \cdot \|C_0(\tilde{x})\|. \end{aligned}$$

假设 $z_1 := \exp_{x_0} \circ C_0(\tilde{x})(u)$ $z_2 := \exp_{x_0} \circ C_0(\tilde{x})(v) \in D$且 $f(z_1)$ $f(z_2) \in D'$。其中 $D, D' \in \mathcal{D}$。利用假设 (A2)和不等式 (2.1)，可得

$$\begin{aligned} &\|d_{z_1}(\exp_{f(x_0)}^{-1} \circ f)\| \cdot \|\Theta_D d_{C_0(\tilde{x})(u)} \exp_{x_0} - \Theta_D d_{C_0(\tilde{x})(v)} \exp_{x_0}\| \\ &\leq 2L_3 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a} |C_0(\tilde{x})(u) - C_0(\tilde{x})(v)| \leq 2L_3 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}|u-v|. \end{aligned} \tag{3.7}$$

应用假设 (A3)，可得

$$\begin{aligned} &\|d_{f(z_1)} \exp_{f(x_0)}^{-1}\| \cdot \|\Theta_{D'} \circ d_{z_1} f \circ \nu_{z_1} - \Theta_{D'} \circ d_{z_2} f \circ \nu_{z_2}\| \cdot \|d_{C_0(\tilde{x})(v)} \exp_{x_0}\| \\ &\leq 4K d(z_1,z_2)^\beta \leq 8K|u-v|^\beta. \end{aligned} \tag{3.8}$$

利用假设 (A2)和不等式 (2.2)，可得

$$\begin{aligned} &\|d_{f(z_1)} \exp_{f(x_0)}^{-1} \circ \nu_{f(z_1)} - d_{f(z_2)} \exp_{f(x_0)}^{-1} \circ \nu_{f(z_2)}\| \cdot \|d_{z_2}(f \circ \exp_{x_0})\| \\ &\leq 2L_4 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a} d(f(z_1), f(z_2)) \leq 4L_4 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-2a}|u-v|. \end{aligned} \tag{3.9}$$

对于任意 u， $v \in B_{Q(\tilde{x})}(0)$， $|u-v| \leq |u-v|^\beta$ 由于 u， $v \in Q(\tilde{x})$ 和 $Q(\tilde{x}) \ll 1$。根据不等式 (3.7)、(3.8) 和 (3.9,

$$\begin{aligned} \|d_uH^+ - d_vH^+\| &\leq \|C_0(\hat{f}(\tilde{x})^{-1}\|\big(2L_3 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a} + 8K + 4L_4 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-2a}\big)|u-v|^\beta \\ &\leq 14K' d(x_0,\Gamma_\infty)^{-2a}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x})^{-1}\| \cdot |u-v|^\beta \\ &\leq 28K' d(x_0,\Gamma_\infty)^{-2a}\|C_0(\hat{f}(\tilde{x})^{-1}\|Q(\tilde{x})^{\frac{\beta}{2}} \cdot |u-v|^{\frac{\beta}{2}} \\ &\leq 28K'\epsilon^{10}|u-v|^{\frac{\beta}{2}} \leq \frac{\epsilon^2}{3}|u-v|^{\frac{\beta}{2}}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 $K' :=$ 最大值$\{K, L_3, L_4\}$。令 $v = 0$，则对于所有 $u \in B_{Q(\tilde{x})}(0)$，$\|d_u H^+\| \le \frac{\epsilon^2}{3}|u|^{\frac{\beta}{2}}$，因此 $\|d_u H^+\|_{C^0} \le \frac{\epsilon^2}{3}$ 在 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$ 上。此外，根据中值不等式，$|H^+(u)| = |H^+(u) - H^+(0)| \le \frac{\epsilon^2}{3}|u|$，于是 $\|H^+\|_{C^0} \le \frac{\epsilon^2}{3}$ 在 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$ 上。因此，$\|H^+\|_{1+\frac{\beta}{2}} \le \epsilon^2$ 在 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$ 上。

类似地，我们可以对 $B_{Q(\hat{f}(\tilde{x}))}(0)$ 上的 H^- 进行估计。

(4) 对任意 $u \in B_{Q(\tilde{x})}(0)$ $v \in B_{Q(\hat{f}(\tilde{x}))}(0)$，由引理 3.2(2) 的证明及前述结论，我们得到

$$\|d_u F_{\tilde{x}}\| \le \|d_u F_{\tilde{x}} - d_0 F_{\tilde{x}}\| + \|d_0 F_{\tilde{x}}\| \le \epsilon^2 + \|D_u(\tilde{x})\| \le \epsilon^2 + \sqrt{2} d(x_0, \Gamma_\infty)^{-a},$$

and

$$\|d_v F_{\tilde{x}}^{-1}\| \le \|d_v F_{\tilde{x}}^{-1} - d_0 F_{\tilde{x}}^{-1}\| + \|d_0 F_{\tilde{x}}^{-1}\| \le \epsilon^2 + \|D_s(\tilde{x})^{-1}\| \le \epsilon^2 + \sqrt{2} d(x_0, \Gamma_\infty)^{-a}.$$

对于足够小的 $\epsilon < 1$，则有 $\|d_u F_{\tilde{x}}\|$，$\|d_v F_{\tilde{x}}^{-1}\| < 2\sqrt{2} d(x_0, \Gamma_\infty)^{-a}$。 □

将 $\psi_{\tilde{x}}^{\eta}$ 记为 Pesin 图表 $\psi_{\tilde{x}}$ 在 $B_\eta(0)$ 上的限制，其中 $0 < \eta \le Q(\tilde{x})$。

定义 3.5 （I-重叠）两个 Pesin 坐标图 $\psi_{\tilde{x}_1}^{\eta_1}$，$\psi_{\tilde{x}_2}^{\eta_2}$ 称为 I-重叠，如果 $\eta_1 = I^{\pm 1}(\eta_2)$，并且对某个$D \in \mathcal{D}$ 使得 $p(\tilde{x}_1)\ p(\tilde{x}_2) \in D$，$d(p(\tilde{x}_1)\ p(\tilde{x}_2)) + \|\Theta_D \circ C_0(\tilde{x}_1) - \Theta_D \circ C_0(\tilde{x}_2)\| < \eta_1^4 \eta_2^4$.

注 3 假设 $\psi_{\tilde{x}_1}^{\eta_1}$，$\psi_{\tilde{x}_2}^{\eta_2}$ 是 I-重叠的，则

(1) $\eta_2 = I^{\pm 1}(\eta_1)$，即重叠条件是对称的。(2) 如果 $\eta_i \le \xi_i \le Q(\tilde{x}_i)$ 且 $\xi_1 = I^{\pm 1}(\xi_2)$ $i = 1, 2$，则 $\psi_{\tilde{x}_1}^{\xi_1}$，$\psi_{\tilde{x}_2}^{\xi_2}$ 是 I-重叠的。

定义映射 $p_i :\ M^f \to M$，使得 $p_i(\tilde{x}) = x_i$，$\forall \tilde{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$。对于某个 $D \in \mathcal{D}$，令 $C_i := \Theta_D \circ C_0(\tilde{x}_i)$ 对所有 $\tilde{x}_i \in 0$-和成立。

命题 3.4 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，如果 *Pesin* 坐标图 $\psi_{\tilde{x}_1}^{\eta_1}$、$\psi_{\tilde{x}_2}^{\eta_2}$ 是 I-重叠的，则

(1) ~~$d(p_i(\tilde{x}_1)\,\Gamma_\infty)\ d(p_i(\tilde{x}_2)\,\Gamma_\infty) = \epsilon^{\pm\epsilon}$~~。特别地，$\rho(\tilde{x}_1)\ \rho(\tilde{x}_2) = \epsilon^{\pm\epsilon}$。*(2)* $\|C_1^{-1} - C_2^{-1}\| < (\eta_1\eta_2)^3$，以及 $\frac{\|C_1^{-1}\|}{\|C_2^{-1}\|} = e^{\pm(\eta_1\eta_2)^3}$。*(3)* $\tilde{Q}(\tilde{x}_1)\ \tilde{Q}(\tilde{x}_2) = e^{\pm(\frac{8a}{\beta}+2\gamma)\epsilon}$ 以及 $Q(\tilde{x}_1)\ Q(\tilde{x}_2) \in \left[I^{-1}(1)e^{-(\frac{8a}{\beta}+2\gamma)\epsilon},\ I(1)\right.$ $\left.e^{(\frac{8a}{\beta}+2\gamma)\epsilon}\right]$。*(4)* $\psi_{\tilde{x}_1}[B_{I^{-2}(\eta_1)}(0)] \subset \psi_{\tilde{x}_2}[B_{\eta_2}(0)]$ 以及 $\psi_{\tilde{x}_2}[B_{I^{-2}(\eta_2)}(0)] \subset \psi_{\tilde{x}_1}[B_{\eta_1}(0)]$。*(5)* $\|\psi_{\tilde{x}_i}^{-1} \circ \psi_{\tilde{x}_j} - Id\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} < (\eta_1\eta_2)^3$ 对于 i、$j = 1, 2$，其中 $C^{1+\frac{\beta}{2}}$ 是在 $B_{I^{-1}(r)}(0)$ 上计算的。

证明 取某个 $D \in \mathcal{D}$ 使得 $p(\tilde{x}_1)\ \ p(\tilde{x}_2) \in D$ 且 $d(p(\tilde{x}_1)\ p(\tilde{x}_2)) + \|C_1 - C_2\| < (\eta_1\eta_2)^4$。第 (1) 和 (2) 部分的证明与 [3]中的命题 4.1 相同。然后，由 $Q(\cdot)$ 的定义可得第 (3) 部分。

(4) 由 $v \in B_{I^{-2}(\eta_1)}(0)$，根据 I-重叠条件，我们有

$$|\psi_{\tilde{x}_1} v - \psi_{\tilde{x}_2} v| = \left|\exp_{p(\tilde{x}_1)} \circ \nu_{\tilde{x}_1}(C_1 v) - \exp_{p(\tilde{x}_2)} \circ \nu_{\tilde{x}_2}(C_2 v)\right| < L_1(\eta_1\eta_2)^4,$$

其中 L_1 是映射 $(y, u) \mapsto (\exp^y \circ \nu_y)(u)$ 在 $D \times B_r(0)$ 上的一致利普希茨常数。于是

$$\begin{aligned}\psi_{\tilde{x}_1} v \in B_{L_1\eta_1^4\eta_2^4}(\psi_{\tilde{x}_2} v) &= \psi_{\tilde{x}_2}\left(C(\tilde{x}_2)^{-1} \exp_{p(\tilde{x}_2)}^{-1}[B_{L_1\eta_1^4\eta_2^4}(\psi_{\tilde{x}_2} v)]\right) \\ &\subset \psi_{\tilde{x}_2}\left(C(\tilde{x}_2)^{-1} B_{2L_1\eta_1^4\eta_2^4}(\nu_{\tilde{x}_2}(C_1 v))\right) \subset \psi_{\tilde{x}_2}\left[B_{2L_1\eta_1^4\eta_2^4\|C_2^{-1}\|}(C_2^{-1}(C_1 v))\right].\end{aligned}$$

由于 $\eta_i \ll Q(\tilde{x}_i) < \epsilon^{\frac{20}{\beta}}$ 对于 $i = 1, 2$，$\exp_{p(\tilde{x}_2)}^{-1}$ 在 $B_{L_1\eta_1^4\eta_2^4}(\psi_{\tilde{x}_2} v)$ 上是良定义的，因此当足够小时，‘=’成立

的 ϵ。因此，我们只需证明：若 $w \in B_{2L_1\eta_1^4\eta_2^4\|C_2^{-1}\|}(C_2^{-1}(C_1v))$ $|w| < \eta_2$。

$$\begin{aligned}
|w| &\le |C_2^{-1}(C_1v)| + 2L_1\eta_1^4\eta_2^4\|C_2^{-1}\| \\
&\le |(C_2^{-1}\circ C_1 - Id)v| + |v| + 2L_1\eta_1^4\eta_2^4\|C_2^{-1}\| \\
&\le |v| + \|C_2^{-1}\|\cdot\|C_1 - C_2\|\cdot|v| + 2L_1\eta_1^4\eta_2^4\|C_2^{-1}\| \\
&\le I^{-2}(\eta_1) + \|C_0(\tilde{x}_2)^{-1}\|\eta_1^4\eta_2^4(I^{-2}(\eta_1) + 2L_1) \\
&\le I^{-2}(\eta_1) + \eta_1^4 \quad \Big(\text{since } \eta_2^4 \ll Q(\tilde{x}_2)^4 \le (\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\|C_0(\tilde{x}_2)\|^{-2\gamma})^4 \text{ and } \gamma > \frac{20}{\beta}.\Big) \\
&= (I^{-2}(\eta_1) - I^{-1}(\eta_1)) + I^{-1}(\eta_1) + \eta_1^4 \\
&\le I^{-1}(\eta_1) - \frac{\Gamma}{2}\eta_1^{1+\frac{1}{\gamma}} + \eta_1^4 \\
&\le I^{-1}(\eta_1) \le \eta_1.
\end{aligned}$$

(5) 与第 (1) 部分中的证明类似，对于足够小的 $\epsilon < r - I^{-1}(r)$，我们可以证明 $\psi_{\tilde{x}_j}[B_{I^{-1}(r)}(0)] \subset \psi_{\tilde{x}_i}[B_r(0)]$, $i,\ j = 1, 2$。因此，$\psi_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j}$ 在 $B_{I^{-1}(r)}(0)$ 上定义良好。注意，

$$\begin{aligned}
&\psi_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j} - Id \\
&= C_i^{-1}\circ\nu_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_i)}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}\circ\nu_{\tilde{x}_j}\circ C_j - Id \\
&= C_i^{-1}\circ\big(\nu_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_i)}^{-1} + \nu_{\tilde{x}_j}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}^{-1} - \nu_{\tilde{x}_j}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}^{-1}\big)\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}\circ\nu_{\tilde{x}_j}\circ C_j - C_i^{-1}\circ C_i \\
&= C_i^{-1}\circ\big(\nu_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_i)}^{-1} - \nu_{\tilde{x}_j}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}^{-1}\big)\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}\circ\nu_{\tilde{x}_j}\circ C_j + C_i^{-1}\circ\big(C_j - C_i\big).
\end{aligned}$$

令 $\Theta := \nu_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_i)}^{-1} - \nu_{\tilde{x}_j}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}^{-1}$，则 $\big\|\psi_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j} - Id\big\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} \le \|C_i^{-1}\|\cdot\big\|\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j}\big\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} + \|C_{\tilde{x}_i^{-1}}\|\eta_1^4\eta_2^4$。因此，我们只需计算

$$\big\|\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j}\big\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} = \big\|\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j}\big\|_{C^0} + \big\|d(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j})\big\|_{C^0} + H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}\big(d(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j})\big).$$

对于 $z_1 \in B(p(\tilde{x}_i)\ r)$ $z_2 \in B(p(\tilde{x}_j)\ r)$，由不等式(2.3),

$$\big\|d_{z_1}\Theta - d_{z_2}\Theta\big\| \le L_5 d(p(\tilde{x}_i), p(\tilde{x}_j))d(z_1, z_2) \le L_5\eta_1^4\eta_2^4 d(z_1, z_2). \tag{3.11}$$

(i) $\big\|\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j}\big\|_{C^0} = \big\|(\nu_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_i)}^{-1} - \nu_{\tilde{x}_j}^{-1}\circ\exp_{p(\tilde{x}_j)}^{-1})\circ\psi_{\tilde{x}_j}\big\| \le 2L_2 d(p(\tilde{x}_i)\ p(\tilde{x}_j)) \le 2L_2\eta_1^4\eta_2^4$，其中 L_2 是映射 $x \mapsto \nu_x^{-1}\circ\exp_x^{-1}$ 在某个 $D \in \mathcal{D}$ 上的一致利普希茨常数。

(ii) $\big\|d(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j})\big\|_{C^0} \le \big\|d\Theta\big\|_{C^0}\cdot\big\|d\psi_{\tilde{x}_j}\big\|_{C^0} \le 2L_4 d(p(\tilde{x}_i)\ p(\tilde{x}_j)) \le 2L_4\eta_1^4\eta_2^4$ 由不等式（2.2）得出。(iii) 对于 $v_1,\ v_2 \in B_{I^{-1}(r)}(0) \subset \mathbb{R}^d$，设 $z_1 := \psi_{\tilde{x}_j}(v_1)$ $z_2 := \psi_{\tilde{x}_j}(v_2)$，我们有

$$\begin{aligned}
\big\|d_{v_1}(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j}) - d_{v_2}(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j})\big\| &\le \big\|d_{z_1}\Theta\cdot d_{v_1}\psi_{\tilde{x}_j} - d_{z_1}\Theta\cdot d_{v_2}\psi_{\tilde{x}_j}\big\| + \big\|d_{z_1}\Theta\cdot d_{v_2}\psi_{\tilde{x}_j} - d_{z_2}\Theta\cdot d_{v_2}\psi_{\tilde{x}_j}\big\| \\
&\le \big\|d\Theta\big\|\cdot\big\|d_{v_1}\psi_{\tilde{x}_j} - d_{v_2}\psi_{\tilde{x}_j}\big\| + L_5\eta_1^4\eta_2^4 d(\psi_{\tilde{x}_j}(v_1), \psi_{\tilde{x}_j}(v_2))\cdot\big\|d_{v_2}\psi_{\tilde{x}_j}\big\| \\
&\le \big\|d\Theta\big\|\cdot H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\psi_{\tilde{x}_j})|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}} + L_5\eta_1^4\eta_2^4\big\|d\psi_{\tilde{x}_j}\big\|^2|v_1 - v_2|^{1-\frac{\beta}{2}}|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}} \\
&\le \big(\big\|d\Theta\big\|\cdot H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\psi_{\tilde{x}_j}) + L_5\eta_1^4\eta_2^4\big\|d\psi_{\tilde{x}_j}\big\|^2(2I^{-1}(r))^{1-\frac{\beta}{2}}\big)|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}$$

并且 $\big\|d_{v_1}(\nu_{z_1}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j}) - d_{v_2}(\nu_{z_2}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j})\big\| \le L_3|v_1 - v_2|$ 由不等式（2.2）可得，那么 $H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\psi_{\tilde{x}_j}) \le L_3(2I^{-1}(r))^{1-\frac{\beta}{2}}$。因此，

$$\begin{aligned}
H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d(\Theta\circ\psi_{\tilde{x}_j})) &\le \big\|d\Theta\big\|\cdot H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\psi_{\tilde{x}_j}) + L_5\eta_1^4\eta_2^4\big\|d\psi_{\tilde{x}_j}\big\|^2(2I^{-1}(r))^{1-\frac{\beta}{2}} \\
&\le L_4\eta_1^4\eta_2^4\cdot L_3(2I^{-1}(r))^{1-\frac{\beta}{2}} + 4L_5\eta_1^4\eta_2^4(2I^{-1}(r))^{1-\frac{\beta}{2}}.
\end{aligned}$$

因此，$\big\|\psi_{\tilde{x}_i}^{-1}\circ\psi_{\tilde{x}_j} - Id\big\|_{C^{1+\frac{\beta}{2}}} \le \epsilon(\eta_1\eta_2)^3$ 在 $B_{I^{-1}(r)}(0)$ 上。 □

对于 $\tilde{x},\ \tilde{y} \in$ 0-求和，若 $\psi^{\eta_1}{}_{\hat{}f(\tilde{x})}$ 与 $\psi_{\tilde{y}}^{\eta_2}$ 是 I-重叠，则定义 $F_{\tilde{x},\tilde{y}} := \psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ f\circ\psi_{\tilde{x}}$；若 $\psi_{\tilde{x}}^{\eta_1}$ 与 $\psi^{\eta_2}{}_{\hat{}f^{-1}(\tilde{y})}$ 是 I- 重叠，则定义 $F_{\tilde{x}}^{-1},_{\tilde{y}} := \psi_{\tilde{x}}^{-1}\circ f_{\tilde{x}}^{-1}\circ\psi_{\tilde{y}}$。注意，若 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}$ 可逆，则映射 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}$ 的逆映射为 $\psi_{\tilde{x}}^{-1}\circ f^{-1}{}_{\hat{}f^{-1}(\tilde{y})}\circ\psi_{\tilde{y}}$。下面的引理表明，映射 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}, F_{\tilde{x}}^{-1},_{\tilde{y}}$ 在某些小区域上互为逆映射。

引理 3.5 对于 $\tilde{x}$、$\tilde{y} \in$ 0-求和，若 $\psi_{\tilde{x}}^{\eta_1}$和 $\psi^{\eta_2}{}_{\hat{}f^{-1}(\tilde{y})}$ 是 I-重叠的，则 $f_{\tilde{x}}^{-1}$和 $f^{-1}{}_{\hat{}f^{-1}(\tilde{y})}$ 在$\psi_{\tilde{y}}(B_{Q(\tilde{y})}(0))$上一致。

证明 设 $\tilde{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ 和 $\tilde{y}=(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$，以及 $\mathfrak{E}_{\tilde{x}}=\mathfrak{E}_{x_0}=B(x_1,2\tau(x_0))$. 由于

$$\psi_{\tilde{y}}(B_{Q(\tilde{y})}(0))\subset B(y_0,2Q(\tilde{y}))\subset B(x_1,2Q(\tilde{y})+d(x_1,y_0)),$$

and

$$\begin{aligned}2Q(\tilde{y})+d(x_1,y_0)) &\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\rho(\tilde{y})^a+d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}d(x_0,y_{-1}) \text{ (by assumption (A2))}\\ &\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\min\{d(y_{-1},\Gamma_\infty)^a,d(y_0,\Gamma_\infty)^a\}+\rho(\tilde{x})^{-a}Q(\tilde{x}) \text{ (since } d(x_0,y_{-1})\le\eta_1^4\eta_2^4\le Q(\tilde{x}))\\ &\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}e^{a\epsilon}\min\{d(x_0,\Gamma_\infty)^a,d(x_1,\Gamma_\infty)^a\}+\epsilon\rho(\tilde{x})^a \text{ (by Proposition 3.4(1))}\\ &\le \epsilon\tau(x_0)+\epsilon\tau(x_0)=2\epsilon\tau(x_0)\le 2\tau(x_0),\end{aligned}\tag{3.12}$$

于是 $\psi_{\tilde{y}}(B_{Q(\tilde{y})}(0))\subset\mathfrak{E}_{\tilde{x}}$。接下来，我们证明 $f^{-1}\hat{}_{f^{-1}(\tilde{y})}\psi_{\tilde{y}}(B_{Q(\tilde{y})}(0))\subset f_{\tilde{x}}^{-1}(\mathfrak{E}_{\tilde{x}}$。根据假设 (A2)，我们有

$$f^{-1}_{\hat{f}^{-1}(\tilde{y})}\psi_{\tilde{y}}(B_{Q(\tilde{y})}(0))\subset f^{-1}_{\hat{f}^{-1}(\tilde{y})}B(y_0,2Q(\tilde{y}))\subset B(y_{-1},2d(y_{-1},\Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{y})),$$

and

$$f_{\tilde{x}}^{-1}(\mathfrak{E}_{\tilde{x}})=f_{\tilde{x}}^{-1}B(x_1,2\tau(x_0))\supset B(x_0,2d(x_0,\Gamma_\infty)^a\tau(x_0)).$$

由于 $B(y_{-1},\ 2d(y_{-1},\ \Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{y}))\subset B(x_0,\ 2d(y_{-1},\ \Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{y})+d(x_0,\ y_{-1}))$ 并且

$$\begin{aligned}2d(y_{-1},\Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{y})+d(x_0,y_{-1}) &\le 2\rho(\tilde{y})^{-a}Q(\tilde{y})+Q(\tilde{x})\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\rho(\tilde{y})^{2a}+\rho(\tilde{x})^{2a}\\ &\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\big(\min\{d(y_{-1},\Gamma_\infty),d(y_0,\Gamma_\infty)\}\big)^{2a}+d(x_0,\Gamma_\infty)^a\rho(\tilde{x})^a\\ &\le 2\epsilon^{\frac{20}{\beta}}e^{2a\epsilon}\big(\min\{d(x_0,\Gamma_\infty),d(x_1,\Gamma_\infty)\}\big)^{2a}+d(x_0,\Gamma_\infty)^a\tau(x_0)\\ &\le 2d(x_0,\Gamma_\infty)^a\tau(x_0).\end{aligned}$$

□

下面的定理表明，$F_{\tilde{x},\ \tilde{y}}$ 是流形 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$ 上映射 $F_{\tilde{x}}$ 的一个小扰动，而 $F_{\tilde{x}}^{-1}{}_{,\ \tilde{y}}$是流形 $B_{Q(\tilde{y})}(0)$ 上映射 $F_{\tilde{x}}^{-1}$ 的一个小扰动。

定理 3.6 当 ϵ 足够小时，假设 $\tilde{x},\ \tilde{y}\in$ *0-summ* 且 $d_s(\tilde{x})=d_s(\tilde{y})$。若 $\psi^{\eta_1}\hat{}_{f(\tilde{x})}$ *I-* 与 $\psi_{\tilde{y}}^{\eta_2}$ 重叠，则 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}$ 在 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$ 中良定义，且可写成 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}=D_0(\tilde{x})+\bar{H}^+$ 的形式，其中 $\bar{H}^+$ 满足：$\forall t\in[\eta_1,Q(\tilde{x})]$,

(1) $|\bar{H}^+(0)|\le\epsilon\eta_1^3$, *(2)* $\|d\bar{H}^+\|_{C^0}\le\sqrt{\epsilon}t^{\frac{\beta}{2}}$ 在 $B_t(0)$ 上，
(3) $H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\bar{H}^+)\le\sqrt{\epsilon}$。

类似地，若 $\psi_{\tilde{x}}^{\eta_1}$ *I-* 与 $\psi^{\eta_2}\hat{}_{f^{-1}(\tilde{y})}$ 重叠，则 $F_{\tilde{x}}^{-1}{}_{,\tilde{y}}$ 在 $B_{Q(\tilde{y})}(0)$ 中良定义，且可写成 $F_{\tilde{x}}^{-1}{}_{,\tilde{y}}=D_0(\hat{}f^{-1}(\tilde{y}))^{-1}+\bar{H}^-$ 的形式，其中 $\bar{H}^-$ 满足：$\forall t\in[\eta_1,Q(\tilde{y})]$,

(1') $|\bar{H}^-(0)|\le\epsilon\eta_1^3$, *(2')* $\|d\bar{H}^-\|_{C^0}\le\sqrt{\epsilon}t^{\frac{\beta}{2}}$ 在 $B_t(0)$, *(3')* $H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(dH^-)\le\sqrt{\epsilon}$.

证明 注意到 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}=\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi\hat{}_{f(\tilde{x})}\circ\psi^{-1}\hat{}_{f(\tilde{x})}\circ f\circ\psi_{\tilde{x}}=\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}\circ F_{\tilde{x}}$。由于当 ϵ 足够小时，$2\sqrt{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{x})\le 2\sqrt{2}\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\rho(\tilde{x})^a\le I^{-1}(r)$，于是

$$F_{\tilde{x}}(B_{Q(\tilde{x})}(0))\subset B_{2\sqrt{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a}Q(\tilde{x})}(0)\subset B_{I^{-1}(r)}(0)$$

根据定理3.3(4)。因此，$F_{\tilde{x},\ \tilde{y}}$ 在 $B_{Q(\tilde{x})}(0)$中由命题3.4(5)可知是良定义的。现在我们估计 $\bar{H}^+$：（1）$|\bar{H}^+(0)|=|F_{\tilde{x},\ \tilde{y}}(0)|=\left|\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}(0)\right|\le\epsilon\eta_1^3$ 由命题3.4(5)可得。

（2）对于任意 $v \in B_t(0)$，我们有

$$\begin{aligned}\|d_v\bar{H}^+\| &= \|d_vF_{\tilde{x},\tilde{y}} - D_0(\tilde{x})\| \\ &\le \|d_{F_{\tilde{x}}(v)}\big(\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}\big) - Id\| \cdot \|d_vF_{\tilde{x}}\| + \|d_vF_{\tilde{x}} - d_0F_{\tilde{x}}\| \text{ (since } d_0F_{\tilde{x}} = D_0(\tilde{x})) \\ &\le 2\sqrt{2}\epsilon\eta_1^3\eta_2^3 d(x_0,\Gamma_\infty)^{-a} + \frac{\epsilon^2}{3}|v|^{\frac{\beta}{2}} \\ &\le \epsilon\eta_1^2\eta_2^3(\epsilon^2 + \rho(\tilde{x})^{-a}) + \frac{\epsilon^2}{3}t^{\frac{\beta}{2}} \le \sqrt{\epsilon}t^{\frac{\beta}{2}},\end{aligned}$$

对于足够小的 ϵ。第二个不等式由命题3.4(5)、定理3.3(4)以及不等式（3.10）得出。

(3) 对任意 $v_1,\ v_2 \in B_{Q(\tilde{x})}(0)$，我们有

$$\begin{aligned}&\|d_{v_1}\bar{H}^+ - d_{v_2}\bar{H}^+\| = \|d_{v_1}F_{\tilde{x},\tilde{y}} - d_{v_2}F_{\tilde{x},\tilde{y}}\| \\ &\le \big\|d_{F_{\tilde{x}}(v_1)}\big(\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}\big) - d_{F_{\tilde{x}}(v_2)}\big(\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}\big)\big\| \cdot \|d_{v_1}F_{\tilde{x}}\| + \|d_{F_{\tilde{x}}(v_2)}\big(\psi_{\tilde{y}}^{-1}\circ\psi_{\hat{f}(\tilde{x})}\big)\| \cdot \|d_{v_1}F_{\tilde{x}} - d_{v_2}F_{\tilde{x}}\| \\ &\le 2\sqrt{2}\epsilon\eta_1^3\eta_2^3 d(x_0,\Gamma_\infty^{-2a})\|F_{\tilde{x}}(v_1) - F_{\tilde{x}}(v_2)\|^{\frac{\beta}{2}} + (1+\epsilon\eta_1^3\eta_2^3)\cdot\Big(\frac{\epsilon^2}{3}|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}}\Big) \text{ (by inequality (3.10))} \\ &\le \Big[\epsilon\eta_1^3\eta_2^3(2\sqrt{2}d(x_0,\Gamma_\infty)^{-2a})^{1+\frac{\beta}{2}} + \frac{\epsilon^3}{3}(1+\epsilon\eta_1^3\eta_2^3)\Big]|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}} \text{ (by Theorem 3.3(4))} \\ &\le \sqrt{\epsilon}|v_1 - v_2|^{\frac{\beta}{2}},\end{aligned}$$

当 ϵ 足够小时。因此，$H\ddot{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d\bar{H}^+) \le \sqrt{\epsilon}$。

通过类似的计算，上述结论对 $F_{\tilde{x},\tilde{y}}^{-1}$ 也成立。 □

3.2 粗粒化

命题 3.7 对于足够小的 $\epsilon > 0$，存在一个可数的 *Pesin* 坐标图集合 $\mathcal{A}$，使得

(1) 离散性：$\{\psi_{\tilde{x}}^{\eta} \in \mathcal{A}$: 对于每个 $t > 0,\ \eta > t\}$ 都是有限的。

(2) 充分性：$\forall \tilde{x} \in RST$ 并且对于每个满足 $0 < \eta_n < I^{-1}(Q(\hat{f}^n(\tilde{x})))$ 的序列 $\{\eta_n \in \mathcal{I}\}_{n\in\mathbb{Z}}$。若 $\eta_n = I^{\pm1}(\eta_{n+1})\forall n \in \mathbb{N}$，则存在一个序列 $\{\psi_{\tilde{x}_n}^{\eta_n} \in \mathcal{A}\}_{n\in\mathbb{Z}}$，使得 $\forall n$:

(a) $\psi_{\tilde{x}_n}^{\eta_n}$ *I-overlaps* $\psi_{\hat{f}^n(\tilde{x})}^{\eta_n}$, $Q(\hat{f}^n(\tilde{x})) = I^{\frac{\pm1}{4}}(Q(\tilde{x}_n))$ *and* $d_s(\tilde{x}_n) = d_s(\hat{f}^n(\tilde{x}))$;

(b) $\psi_{\hat{f}(\tilde{x}_n)}^{\eta_{n+1}}$ *I-overlaps* $\psi_{\tilde{x}_{n+1}}^{\eta_{n+1}}$;

(c) $\psi_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_n)}^{\eta_{n-1}}$ *I-overlaps* $\psi_{\tilde{x}_{n-1}}^{\eta_{n-1}}$;

(d) If $\eta_n' \in \mathcal{I}$ *satisfies* $\eta_n \le \eta_n' \le \min\{Q(\tilde{x}_n), I(\eta_n)\}$, *then* $\psi_{\tilde{x}_n}^{\eta_n'} \in \mathcal{A}$.

证明 记 $X := M^3 \times GL(d,\mathbb{R})^3 \times (0,1]^3$，并赋予其乘积拓扑。对于 $\tilde{x} \in RST$，存在三个元素 $D_{-1}, D_0, D_1 \in \mathcal{D}$，满足 $p_{-1}(\tilde{x})\ p(\tilde{x})\ p_1(\tilde{x}) \in D_{-1}\times D_0 \times D_1$，并令

$$\begin{aligned}Y := \Big\{(\underline{\tilde{x}}, \underline{C_0}, \underline{Q(\tilde{x})}) : \underline{\tilde{x}} = \big(p_{-1}(\tilde{x}), p(\tilde{x}), p_1(\tilde{x})\big), \underline{Q(\tilde{x})} = \Big(Q\big(\hat{f}^{-1}(\tilde{x})\big), Q(\tilde{x}), Q\big(\hat{f}(\tilde{x})\big)\Big) \\ \text{and } \underline{C_0} = \Big(\Theta_{D_{-1}}\circ C_0\big(\hat{f}^{-1}(\tilde{x})\big), \Theta_{D_0}\circ C_0(\tilde{x}), \Theta_{D_1}\circ C_0\big(\hat{f}(\tilde{x})\big)\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

对于 $\underline{k} = (k^{(-1)},\ k^{(0)},\ k^{(1)}) \in \mathbb{N}^3$ 和 $l \in \{0,1,\dots,d\}$，我们记

$$Y_{\underline{k},l} := \big\{(\underline{\tilde{x}}, \underline{C_0}, \underline{Q(\tilde{x})}) : e^{-k^{(i)}-1} \le \underline{Q(\tilde{x})} \le e^{-k^{(i)}}, d_s(\tilde{x}) = l, i = -1,0,1\big\}.$$

现在我们证明，$Y_{\underline{k},\,l}$ 在 X 中是相对紧的:

(i) 由于 $\{(p_{-1}(\tilde{x})\ p(\tilde{x})\ p_1(\tilde{x})) : \tilde{x} \in RST\}$ 是 M^3 的子集，且 M 是紧的，因此 $\{(p_{-1}(\tilde{x})\ p(\tilde{x})\ p_1(\tilde{x})) : \tilde{x} \in RST\}$ 是相对紧的;

(ii) 对于 $i = -1,\ 0,\ 1$，由于 Θ_{D_i} 是线性等距映射，$\|C_0(\hat{f}^i(\tilde{x}))\| < 1$ 且

$$\|C_0(\hat{f}^i(\tilde{x}))^{-1}\| \le (\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{\frac{1}{2\gamma}} Q(\hat{f}^i(\tilde{x}))^{-\frac{1}{2\gamma}} \le (\epsilon^{\frac{20}{\beta}} e^{k^{(i)}+1})^{\frac{1}{2\gamma}}$$

根据 $Q(\hat{f}^i(\tilde{x}))$ 的定义，因此 C_0 属于一个紧集。

(iii) 由于 $e^{-k^{(i)}-1} \le Q(\hat{f}^i(\tilde{x})) \le 1$ 且 $[e^{-k^{(i)}-1}, 1]$ 是紧的，因此 $\{Q(\tilde{x}) : \tilde{x} \in RST\}$ 是相对紧的。在乘积拓扑下，$Y_{k,l} \subset X$ 是一个相对紧集。因此，我们可以找到一个有限集 $Y_{k,l,m}$，满足 $\forall (\tilde{x}, C_0, Q(\tilde{x})) \in Y_{k,l}$ 存在一个元素 $(\tilde{y}, C_0', Q(\tilde{y})) \in Y_{k,l,m}$ 使得 $\forall i = -1, 0, 1$

- $d(p_i(\tilde{x}), p_i(\tilde{y})) < \frac{1}{2}\omega(\mathcal{D})$;
- $\exists D \in \mathcal{D}$ 使得 $p_i(\tilde{x})$ 和 $p_i(\tilde{y})$ 属于同一个 D，且 $d(p_i(\tilde{x}), p_i(\tilde{y})) + \|\Theta_D \circ C_0(\hat{f}^i(\tilde{x})) - \Theta_D \circ C_0(\hat{f}^i(\tilde{y}))\| \le e^{-8(m+2)}$;
- $Q(\hat{f}^i(\tilde{x})) = I^{\pm\frac{1}{4}} Q(\hat{f}^i(\tilde{y}))$。

Let

$$\begin{aligned}\mathcal{A} := \big\{\psi_{\tilde{x}}^{\eta} : (\tilde{x}, C_0, Q(\tilde{x})) \in Y_{\underline{k},l,m} \text{ for some } \underline{k}, m \in \mathbb{N}, l \in \{1, 2, \cdots, d\},\\ \text{and } \eta \in \mathcal{I}, 0 < \eta \le Q(\tilde{x}), e^{-(m+2)} \le \eta < e^{-(m-2)}\big\}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

因此，$\mathcal{A}$ 是一个可数的 Pesin 坐标图集合。

(1)（离散性）对于任意 $\psi_{\tilde{x}}^{\eta} \in \mathcal{A}$，我们有 $\eta < e^{-(m-2)}$ 以及 $Q(\hat{f}^i(\tilde{x})) \le e^{-k^{(i)}}$（因为 $(\tilde{x}, C_0, Q(\tilde{x})) \in Y_{k,l,m} \subset Y_{k,l}$）。于是 $m \le |\log \eta| + 2$ 且 $k^{(i)} \le |\log Q(\hat{f}^i(\tilde{x}))|$。注意到 $\eta \le Q(\tilde{x}) \le \rho(\tilde{x})^{\frac{8\alpha}{\beta}} \le 1$，则 $\hat{k}^{(0)} \le |\log \eta|$ 且 $\frac{\eta}{2^\gamma} d(x_0, \Gamma_\infty)^{4\alpha\gamma} \le Q(\tilde{x}) \le \frac{2^\gamma}{\eta} d(x_0, \Gamma_\infty)^{-4\alpha\gamma}$，根据命题 3.2(3)。此外，

$$k^{(\pm 1)} \le |\log Q(\hat{f}^{\pm}(\tilde{x}))| \le \left|\log\left(\frac{1}{2^\gamma}\eta^{1+\frac{\beta\gamma}{2}} Q(\tilde{x})\right)\right| \le \left|\log\left(\frac{1}{2^\gamma}\eta^{2+\frac{\beta\gamma}{2}}\right)\right| \le \left|\log\left(\frac{1}{2^\gamma}t^{2+\frac{\beta\gamma}{2}}\right)\right|,$$

由 $\frac{\eta}{2^\gamma} d(x_0, \Gamma_\infty)^{4\alpha\gamma} \ge \frac{\eta}{2^\gamma}\rho(\tilde{x})^{4\alpha\gamma} \ge \frac{1}{2^\gamma}\eta^{1+\frac{\beta\gamma}{2}}$。因此，

$$|\{\psi_{\tilde{x}}^{\eta} \in \mathcal{A} : \eta > t\}| \le \sum_{\substack{k^{(0)}, m < |\log t| + 2, k^{(\pm 1)} \le \left|\log\left(\frac{1}{2^\gamma}t^{2+\frac{\beta\gamma}{2}}\right)\right| \\ l \in \{0,1,\ldots,d\}}} |Y_{\underline{k},l,m}| \times |\{\eta \in \mathcal{I} : \eta > t\}| < \infty.$$

(2)（充分性）注意到，根据命题 3.1(6)，$I^{-\frac{1}{4}}(Q(\hat{f}^n(\tilde{x}))) \le Q(\hat{f}^n(\tilde{x}))$。对于任意满足 $0 < \eta_n < I^{-\frac{1}{4}}(Q(\hat{f}^n(\tilde{x})))$ 和 $\eta_n = I^{\pm 1}(\eta_{n+1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ 的 $\tilde{x} \in RST$ 和 $\eta_n \in \mathcal{I}$。设 k_n, m_n 使得 $e^{-(m_n+1)} \le \eta_n \le e^{-m_n+1}$ 且 $e^{-k_n^{(i)}-1} \le Q(\hat{f}^{(i)}(\hat{f}^n(\tilde{x}))) \le e^{k_n^{(i)}}, i = -1, 0, 1$，并且 $l_n = d_s(\hat{f}^n(\tilde{x}))$ $\forall n \in \mathbb{N}$。那么 $\hat{f}^n(\tilde{x}), C_0, Q(f^n(\tilde{x}))) \in Y_{k_n,l_n}$，因此存在元素 $(\tilde{x}_n, C_0', Q(\tilde{x}_n)) \in Y_{k_n,l_n,m_n}$，使得 $\forall n \in \mathbb{N}$:

(B1) $d(p_i(\hat{f}^n(\tilde{x})), p_i(\tilde{x}_n)) < \frac{1}{2}\omega(\mathcal{D})$;

(B2) 对于 $i = -1, 0, 1$，$p_i(f^n(\tilde{x}))$ 和 $p_i(\tilde{x}_n)$ 属于同一个 $D \in \mathcal{D}$，且 $d(p_i(f^n(\tilde{x})), p_i(\tilde{x}_n)) + \|\Theta_D \circ C_0(\hat{f}^i(\hat{f}^n(\tilde{x}))) - \Theta_D \circ C_0(\hat{f}^i(\tilde{x}_n))\| \le e^{-8(m_n+2)}$;

(B3) $Q(\hat{f}^i(\hat{f}^n(\tilde{x}))) = I^{\pm\frac{1}{4}} Q(\hat{f}^i(\tilde{x}_n))$;

(B4) $d_s(\tilde{x}_n) = d_s(\hat{f}^n(\tilde{x})) = l_n$.

并且 Pesin 图表 $\psi_{\tilde{x}_n}^{\eta_n}$ 属于 $\mathcal{A}$，$\forall n \in \mathbb{N}$。

(a) 我们只需证明 $\psi_{\tilde{x}_n}^{\eta_n}$ I-重叠 $\psi^{\eta_n}_{\hat{f}^n(\tilde{x})}$：根据 (B1)，取 $i = 0$，存在 $D_0 \in \mathcal{D}$，使得 $p(f^n(\tilde{x}))$ 且 $p(\tilde{x}_n)$ 属于 D_0。并且

$$d\big(p(\hat{f}^n(\tilde{x})), p(\tilde{x}_n)\big) + \|\Theta_{D_0} \circ C_0(\hat{f}^n(\tilde{x})) - \Theta_{D_i} \circ C_0(\tilde{x}_n)\| \le e^{-8(m_n+2)} \le \eta_n^4 \eta_n^4,$$

最后一个不等式成立，因为 $\eta_n \ge e^{-m_n-1}$。

(b) 我们需要证明 $\psi^{\eta_{n+1}}_{\hat{f}(\tilde{x}_n)}$ I-与 $\psi_{\tilde{x}_{n+1}}^{\eta_{n+1}}$ 重叠：在 n 的情形下，由 (B1) 及 $i = 1, d(p_1(\hat{f}^n(\tilde{x})), p_1(\tilde{x}_n)) < \frac{1}{2}\omega(\mathcal{D})$ 得出；在 $n+1$ 的情形下，由 (B1) 及 $i = 0, d(p(\hat{f}^{n+1}(\tilde{x})), p(\tilde{x}_{n+1})) < \frac{1}{2}\omega(\mathcal{D})$ 得出。因此，我们可以找到一个集合 $D \in \mathcal{D}$，使得 $\hat{f}(\tilde{x}_n)$、$\hat{f}^{n+1}(\tilde{x})$ 和 $\tilde{x}_{n+1}$ 属于同一个集合 D。因此，

$$\begin{aligned}
&d(p_1(\tilde{x}_n), p(\tilde{x}_{n+1})) + \|\Theta_D \circ C_0(\hat{f}(\tilde{x}_n)) - \Theta_D \circ C_0(\tilde{x}_{n+1})\| \\
&\le d(p_1(\tilde{x}_n), p_1(\hat{f}^n(\tilde{x}))) + \|\Theta_D \circ C_0(\hat{f}(\tilde{x}_n)) - \Theta_D \circ C_0(\hat{f}(\hat{f}^n(\tilde{x})))\| \\
&+ d(p_1(\hat{f}^n(\tilde{x})), p(\tilde{x}_{n+1})) + \|\Theta_D \circ C_0(\hat{f}(\hat{f}^n(\tilde{x}))) - \Theta_D \circ C_0(\tilde{x}_{n+1})\| \\
&\le e^{-8(m_n+2)} + e^{-8(m_{n+1}+2)} \text{ (by (B2))} \\
&\le e^{-8}(\eta_n^8 + \eta_{n+1}^8) \\
&\le e^{-8}\left(e^{\Gamma\eta_{n+1}^{\frac{1}{\gamma}}} + 1\right)\eta_{n+1}^8 \text{ (since } \eta_n \le I(\eta_{n+1})) \\
&\le \eta_{n+1}^4 \eta_{n+1}^4 \text{ (since } \eta_{n+1} \ll 1).
\end{aligned}$$

同理，我们可以证明 (c)。

(d) By $\psi^{\eta_n}_{\tilde{x}_n} \in \mathcal{A}$ and $e^{-m_n-2} \le \eta_n \le \eta'_n \le I(\eta_n) = e^{\Gamma\eta_n^{\frac{1}{\gamma}}}\eta_n \le e^{-m_n+2}$, part (d) holds. □

定义 3.6 一个 I-双图表 是一对 Pesin 坐标图 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}} := (\psi^{p^s}_{\tilde{x}}, \psi^{p^u}_{\tilde{x}})$，其中 $p^s, p^u \in \mathcal{I}$ 且$0 < p^s, p^u \le Q(\tilde{x})$。为简便起见，我们仅称其为 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$ 双图表。

记 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}} \to \psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$，若

(1) $\psi^{p^s\wedge p^u}_{\tilde{x}}$ I-重叠 $\psi^{p^s\wedge p^u}_{\hat{f}^{-1}(\tilde{y})}$ 且 $\psi^{q^s\wedge q^u}_{\hat{f}(\tilde{x})}$ I-重叠 $\psi^{q^s\wedge q^u}_{\tilde{y}}$；(2) $p^s = \min\{I(q^s)\ Q(\tilde{x})\}$ 且 $q^u = \min\{I(p^u)\ Q(\tilde{y})\}$。

定义 3.7 一个 I-链 是由双重图表构成的序列 $\{\psi^{p_i^s,p_i^u}_{\tilde{x}_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$，使得 $\psi^{p_i^s,\ p_i^u}_{\tilde{x}_i} \to \psi^{p_{i+1}^s,\ p_{i+1}^u}_{\tilde{x}_{i+1}}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$。序列 $\{\psi^{p_i^s,p_i^u}_{\tilde{x}_i}\}_{i\ge 0}$（相应地，$\{\psi^{p_i^s,p_i^u}_{\tilde{x}_i}\}_{i\le 0}$）称为正（相应地，负）$I$-链，若 $\psi^{p_i^s,\ p_i^u}_{\tilde{x}_i} \to \psi^{p_{i+1}^s,\ p_{i+1}^u}_{\tilde{x}_{i+1}}$ $\forall i \ge 0$（相应地，$i \le 0$）。

设 $\mathcal{G}$ 是一个可数有向图，其顶点为 $\mathcal{V}$，边为 $\mathcal{E}$，其中

$$\mathcal{V} := \left\{\psi^{p^s,p^u}_{\tilde{x}} : \psi^{p^s\wedge p^u}_{\tilde{x}} \in \mathcal{A}, p^s, p^u \in \mathcal{I}, 0 < p^s, p^u \le Q(\tilde{x})\right\} \ (\mathcal{A} \text{ is constructed by (3.13)})$$

and

$$\mathcal{E} := \left\{(\psi^{p^s,p^u}_{\tilde{x}}, \psi^{q^s,q^u}_{\tilde{y}}) \in \mathcal{V}\times\mathcal{V} : \psi^{p^s,p^u}_{\tilde{x}} \to \psi^{q^s,q^u}_{\tilde{y}}\right\}.$$

根据上述定义，容易证明 $q^u \wedge q^s = I^{\pm 1}(p^u \wedge p^s)$ 若 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}} \to \psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$。那么，对于每个 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}} \in \mathcal{V}$，在 $\mathcal{V}$ 中，满足 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}} \to \psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$ 或 $\psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}} \to \psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$ 的双重图表 $\psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$ 只有有限多个，这是命题3.7(1)的结论。因此，$\mathcal{G}$ 的每个顶点都具有有限度。令

$$\Sigma(\mathcal{G}) := \left\{\{\psi^{p_i^s,p_i^u}_{\tilde{x}_i}\}_{i\in\mathbb{Z}} : (\psi^{p^s,p^u}_{\tilde{x}}, \psi^{q^s,q^u}_{\tilde{y}}) \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathbb{Z}\right\}$$

配备左移映射 σ，它是与 $\mathcal{G}$ 相关联的拓扑马尔可夫移位。

定义 3.8 设 $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{I} := \{I^{-\ell}(1)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ 中的一个序列。若一列对 $\{(p_k^s,\ p_k^u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足 $\forall k \in \mathbb{Z}$，则称其为 I-强从属于$(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$：

(1) $p_k^s,\ p_k^u \in \mathcal{I}$ 和 $0 < p_k^s,\ p_k^u \le Q_k$；(2) $p_{k+1}^u = \min\{I(p_k^u)\ Q_{k+1}\}$ 和 $p_{k-1}^s = \min\{I(p_k^s)\ Q_{k-1}\}$。

以下两个引理是引理2.26和2.27的对应物 [13],我们省略证明。

引理3.8 设 $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{I} := \{I^{-\ell}(1)\}_{\ell\in\mathbb{N}}$中的一个序列，且序列 $(q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 属于 $\mathcal{I}$，满足$0 < q_k \le Q_k$ 且 $q_k = I^{\pm 1}(q_{k+1})$ $\forall k \in \mathbb{Z}$。则存在一个对序列 $\{(p_k^s, p_k^u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$，其$I$-强从属于 $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，并且 $p_k^s \wedge p_k^u \ge q_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$。

引理 3.9 假设 $\{(p_k^s, p_k^u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ I 强调节地从属于 $(Q_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，且 $p_k := p_k^s \wedge p_k^u$。若 上极限$_{k\to\infty} p_k > 0$ 且 上极限$_{k\to-\infty} p_k > 0$，则存在无穷多个 $k > 0$ 和 $k \le 0$，使得 $p_k^s = Q_k$ 且 $p_k^u = Q_k$。

命题 3。10 $\forall \tilde{x} \in RST$，存在一条链 $\left\{\psi^{p_k^s,\ p_k^u}_{\tilde{x}_k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma(\mathcal{G})$，使得 $\psi^{p_k^s,\ p_k^u}_{\tilde{x}_k}$ I 相交 $\psi^{p_k^s,p_k^u}_{\hat{f}^k(\tilde{x})}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

证明 证明与 [13] 中命题2.28的证明相同。为完整起见，我们给出一个简要概述。

步骤 1：选取 $q_k \in \mathcal{I} \bigcap \left[I^{-\frac{1}{4}}(q(\hat{f}^k(\tilde{x}))),\ I^{\frac{1}{4}}(q(\hat{f}^k(\tilde{x})))\right]$，则由引理3.8可知，存在一个序列 $\{(q_k^s, q_k^u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$，它强烈从属于 $I^{-\frac{1}{4}}(Q(\hat{f}^k(\tilde{x})))\}_{k\in\mathbb{Z}}$，且 $q_k^s \wedge q_k^u \ge q_k$；并且由于 $I^{-\frac{1}{4}}$ 单调递增，$q_k \le I^{\frac{1}{4}}(q(\hat{f}^k(\tilde{x}))) \le I^{-\frac{1}{4}}(Q(\hat{f}^k(\tilde{x})))$，且 $I^{-\frac{1}{4}}(t) < t$ $\forall t \in (0, e^{\Gamma})$。

步骤 2：令 $\eta_k := q_k^s \wedge q_k^u$，则存在一个序列 $\{\psi^{\eta_k}_{\tilde{x}_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$满足命题3.7（2）中的性质。

步骤 3：利用引理 3.8 对于 $(\eta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，则存在一个序列 $\{(p_k^s,\ p_k^u)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 其 I-强从属于 $\{Q(\tilde{x}_k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$。

步骤 4：验证 $\{\psi^{p_k^s,p_k^u}_{\tilde{x}_k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 满足条件。 □

3.3 容许流形

定义3.9 对于每个 $\tilde{x} \in RST$，一个 s-容许流形 V^s 在双图表 $\psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$ 具有如下形式

$$V^s = \psi_{\tilde{x}}\big\{(v_1, G(v_1)) : v_1 \in B_{p^s}^{d_s(\tilde{x})}(0)\big\},$$

其中 $B^{d_s(\tilde{x})}{}_{p^s}(0) \subset \mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})}$ 是以原点为中心、半径为 p^s 的球，并且 $G: B^{d_s(\tilde{x})}{}_{p^s}(0) \to \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x})}$ 是一个$C^{1+\frac{\beta}{2}}$ 函数，满足

(AM1) $|G(0)| \le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2$; (AM2)
$\|d_0 G\| \le \frac{1}{2}(p^s \wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}$; (AM3)
$\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}} = \|d.G\|_{C^0} + H\bar{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d.G) < \frac{1}{2}$。

在双图表 $\psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$ 处，一个 u-容许流形 V^u 具有如下形式:

$$V^u = \psi_{\tilde{x}}\big\{(G(v_2), v_2) : v_2 \in B_{p^u}^{d_u(\tilde{x})}(0)\big\},$$

其中 $G: B^{d_u(\tilde{x})}{}_{p^u}(0) \to \mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})}$ 是一个 $C^{1+\frac{\beta}{2}}$ 函数，满足 (AM1)-(AM3)。映射 G 称为表示函数。

根据假设 (A1)-(A3)，表示函数 G 满足: $\forall t \in B_{p^{s/u}}(0) \subset \mathbb{R}^{d_{s/u}(\tilde{x})}$

$$\|d_t G\| \le \|d_0 G\| + H\bar{o}l_{\frac{\beta}{2}}(d.G)|t|^{\frac{\beta}{2}} \le \frac{1}{2}(p^s \wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}(p^{s/u})^{\frac{\beta}{2}} \le (p^{s/u})^{\frac{\beta}{2}} \le \epsilon \implies Lip(G) \le \epsilon, \quad (3.14)$$

and

$$|G(t)| \le |G(0)| + Lip(G) \cdot p^{s/u} \le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2 + \epsilon p^{s/u} \le 10^{-2} p^{s/u}. \quad (3.15)$$

令 $v := \psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$，表示 $\mathcal{M}^s(v) := \{V^s : V^s \text{ 是 } v\}$ 处的 s-容许流形，其上赋予度量$d_{C^0}(V_1, V_2) := \|G_1 - G_2\|_{C^0}$ 以及 $d_{C^1}(V_1, V_2) := \|d.G_1 - d.G_2\|_{C^0}$，定义在 $B_{p^s}(0)$ 上，其中 G_1, G_2 分别是 V_1, V_2的表示函数。类似地，我们可以定义 $\mathcal{M}^u(v)$。

命题 3.11 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，令 $v := \psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$，则对于任意 $V^s \in \mathcal{M}^s(v)$ 和 $V^u \in \mathcal{M}^u(v)$，有

(1) $\exists!\ p = \psi_{\tilde{x}}(v_1)$ 使得 $V^s \bigcap V^u = \{p\}$，其中 $v_1 \in \mathbb{R}^d, |v| \le 10^{-2}(p^s \wedge p^u)^2$;

(2) 定义 $P: \mathcal{M}^s(v) \times \mathcal{M}^u(v) \to M$ *by* $(V^s, V^u) \mapsto p$，其中 p 是 V^s 与 V^u 的交集。则 P 是 *Lipschitz*映射，*Lipschitz*常数为 *3*；也就是说，如果 $V_i^s \bigcap V_i^u = \{p_i\}$ 对于 $i = 1, 2$，那么 $d(p_1, p_2) \le 3[d_{C^0}(V_1^s, V_2^s) + d_{C^0}(V_1^u, V_2^u)]$,，其中 $V_i^s \in \mathcal{M}^s(v)$ $V_i^u \in \mathcal{M}^u(v)$。

证明 由于证明过程并未涉及映射 f 是否可逆，因此该证明与 Ovadia 的 [13]相同。□

下面的定理将表明，图变换保持可容许性。

定理 3.12 当 $\epsilon > 0$ 足够小时，给定两个双重图表 $w_1 = \psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}, w_2 = \psi^{q^s}_{\cdot,\tilde{y}}{}^{q^u}$，并令 V^s为 w_2中的一个 s-容许流形。如果 $w_1 \to w_2$，则

(1) $f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$ 包含一个唯一的 s容许流形，该流形位于 $\psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$ 中，将该 s容许流形记为$\mathcal{F}^s_{w_1,\ w_2}(V^s)$；

(2) 对于 $\psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$ 中的任意 u容许 V^u，$f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$ 与 V^u 相交于一个唯一点;

(3) If $p := \psi_{\tilde{y}}(0, G(0)) \in V^s$, *then* $f_{\tilde{x}}^{-1}(p) \in \mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V^s)$.

对于 u 情形，也有类似的结论。

证明 设 G 是 V^s的表示函数，则 $V^s=\psi_{\tilde{y}}\{(v,G(v)):\ v\in B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)\}$。注意，$\psi_{\tilde{x}}^{-1}(f_{\tilde{x}}^{-1}(V^s))=\psi_{\tilde{x}}^{-1}(f_{\tilde{x}}^{-1}(\psi_{\tilde{y}}$图$(G)))=F_{\tilde{x}}^{-1},_{\tilde{y}}$图$(G)$。记 $\eta:=q^s\wedge q^u$，由定理 3.6，$F_{\tilde{x}}^{-1},_{\tilde{y}}$图$(G)$ 可表示为以下形式

$$\left\{(D_s^{-1}(v)+h_s^-(v,G(v)),D_u^{-1}(G(v))+h_u^-(v,G(v))):v\in B_{q^s}^{d_s(\tilde{y})}(0)\right\},\tag{3.16}$$

其中 $\|D_s\|\le e^{-\frac{1}{s^2 f^{-1}(\tilde{y})}}$，$\|D_u^{-1}\|\le e^{-u^2(\tilde{y})}$，$|h_{s/u}^-(0,\ 0)|\le\epsilon\eta^3$、$\|dh_{s/u}^-\|\le\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}$ 和 $Hol_{-2}^{\beta}\bar{H}^-=Hol_{2}^{\beta}(h_s^-,\ h_u^-)\le\sqrt{\epsilon}$。

(1) 利用图变换，我们将证明 (3.16) 可以表示为如下形式：$\{(w,F(w)):w\in B^{d_s}(\tilde{x})\,{}^{p^s}(0)\}$ 且 F 满足 (AM1)-(AM3)。按照 [9, 16], 中的思路，记 $\phi(v):=D_s^{-1}(v)+h_s^-(v,G(v))$ 于 $B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$，则 $F=[D_u^{-1}(G(\cdot))+h_u^-(\cdot,G(\cdot))]\circ\phi^{-1}$。映射 ϕ^{-1} 在 $\phi(B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0))$ 上良定义，因为 ϕ 在 $B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$ 上是扩张的。事实上，$\forall v\in B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$

$$\begin{aligned}\|d_v\phi\|&=\|D_s^{-1}+d_{(v,G(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vG\end{pmatrix}\|\ge\|D_s^{-1}\|-\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(\|d_vG\|+1)\\&\ge\|D_s^{-1}\|-\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(\epsilon+1)\ \text{(by inequality (3.14))}\\&\ge\|D_s^{-1}\|\left(1-\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(\epsilon+1)\right)\ (\text{since }\|D_s^{-1}\|\ge\|D_s\|^{-1}\ge e^{\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}\ge1)\\&\ge e^{-\eta^{\frac{\beta}{2}}}\|D_s\|^{-1}\ (\epsilon\text{ is small enough s.t. }\sqrt{\epsilon}(\epsilon+1)\ll1),\end{aligned}$$

其中 I 是一个 $d_s(\tilde{y})\times d_s(\tilde{y})$ 单位矩阵。由引理 3.2(1)(3)，$\|C_0(\tilde{y})^{-1}\|^2\ge s^2(\tilde{y})$，且 $\|C_0(\tilde{y})^{-1}\|\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\|C_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{-1}\|d(p(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}),\Gamma_\infty)^{2a}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\|C_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{-1}\|\rho(\tilde{y})^{2a}$. 因此

$$e^{-\eta^{\frac{\beta}{2}}}\|D_s\|^{-1}\ge e^{-Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}\ge e^{-Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}}+\|C_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{-1}\|^{-2}}\ge e^{-Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}\rho(\tilde{y})^{4a}\|C_0(\tilde{y})^{-1}\|^{-2}}>1,\tag{3.17}$$

因为 $Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}}\le(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{\frac{\beta}{2}}\|C_0(\tilde{y})^{-1}\|^{-2}\rho(\tilde{y})^{4a}\le\frac{1}{2}\rho(\tilde{y})^{4a}\|C_0(\tilde{y})^{-1}\|^{-2}$(回想一下，$\gamma\ge\frac{20}{\beta}$和 $a>1$)。

断言 1 当 ϵ 足够小时，像 $\phi(B^{d_s}(\tilde{y})q^s(0))$ 包含 $B^{d_s}(\tilde{y})_{e^{s^2 f^{-1}(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{\beta}{2}}}q^s}(0)$，那么 ϕ^{-1} 在 $B^{d_s}(\tilde{y})_{e^{s^2 f^{-1}(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{-\frac{1}{2}}\eta^{\frac{\beta}{2}}}q^s}(0)$ 上定义良好，并且满足

(a) $\|d.\phi^{-1}\|<e^{\eta^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}$;

(b) $|\phi^{-1}(0)|<2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}}$;

(c) $\|d.\phi^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}}\le e^{6\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}$.

证明 对于 $v\in B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$，$d_v\phi=D_s^{-1}+d_{(v,G(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vG\end{pmatrix}=:D_s^{-1}+A(v)$。对 $\|A(v)\|$的估计：$\forall v_1,v_2\in B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$

$$\begin{aligned}&\|A(v_1)-A(v_2)\|=\left\|d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}G\end{pmatrix}-d_{(v_2,G(v_2))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}G\end{pmatrix}\right\|\\&\le\left\|d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}G\end{pmatrix}-d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}G\end{pmatrix}\right\|+\left\|d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}G\end{pmatrix}-d_{(v_2,G(v_2))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}G\end{pmatrix}\right\|\\&\le\|d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-\|\cdot\|d_{v_1}G-d_{v_2}G\|+\|d_{(v_1,G(v_1))}h_s^-d_{(v_2,G(v_2))}h_s^-\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}G\end{pmatrix}\right\|\\&\le\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{1}{2}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}}\cdot(1+\epsilon)^{1+\frac{\beta}{2}}\le3\sqrt{\epsilon}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

因此，$Hol_{\frac{\beta}{2}}A\le3\sqrt{\epsilon}$。对于 $v\in B^{d_s}(\tilde{y})\,{}^{q^s}(0)$,

$$\|A(v)\|\le\|A(0)\|+Hol_{\frac{\beta}{2}}A\cdot|v|^{\frac{\beta}{2}}\le\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(1+\epsilon)+3\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}\le5\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}.\tag{3.19}$$

误差项 h_s^- 的估计： $\forall v \in B^{d_s}(\tilde{y})\, q^s(0)$,

$$|h_s^-(v, G(v))| \le |h_s^-(0,0)| + \|d.h_s^-\| \cdot (|v| + |G(v)|) \le \epsilon\eta^3 + 2\sqrt{\epsilon}(q^s)^{1+\frac{\beta}{2}} \le 3\sqrt{\epsilon}(q^s)^{1+\frac{\beta}{2}},$$

由不等式（3.15）。给定 $u \in B^{d_s}(\tilde{y}) e^{s^2 f^{-1}(\hat{\cdot}(\tilde{y})) - \frac{1}{2}\eta^{\beta}}{}_{q^s}(0)$，假设 $\phi(v) = u$。定义映射 T于 $B^{d_s}(\tilde{x})\, q^s(0)$ 上

by

$$T(v) = D_s[u - h_s^-(v, G(v))].$$

那么 $\phi(v) = u$ 当且仅当 v 是 T的不动点。接下来，我们将证明 T 有唯一不动点 v_0，且有 $v_0 \in B^{d_s}(\tilde{y})\, q^s(0)$。事实上，

$$\begin{aligned}
|T(v)| &\le \|D_s\|(|\phi(v)| + |h_s^-(v, G(v))|) \\
&\le e^{-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}(e^{\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))} - \frac{1}{2}\eta^{\frac{\beta}{2}}} q^s + 3\sqrt{\epsilon}(q^s)^{1+\frac{\beta}{2}}) \\
&\le (e^{-\frac{1}{2}\eta^{\frac{\beta}{2}}} + 3\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}})q^s \le q^s.
\end{aligned}$$

这意味着 $T(B^{d_s}(\tilde{y})\, q^s(0)) \subset B^{d_s}(\tilde{y})\, q^s(0)$。并且 $\|d_v T\| \le \|D_s\| \cdot \|A(v)\| \le e^{s^2 f^{-1}(\hat{\cdot}(\tilde{y}))} \cdot 4\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}} \preceq 1$。根据不动点定理， T 有唯一不动点 $v_0 \in B_{q^s}(0)$。

(a) $\|d.\phi^{-1}\| = \|(d.\phi)^{-1}\| \le \|(d.\phi)\|^{-1} \le e^{\eta^{\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}$.

(b) 由于 $|\phi(0)| = |h_s^-(0,\ G(0))| \le |h_s^-(0,\ 0)| + \|d.h_s^-\| \cdot |G(0)| \le \epsilon\eta^3 + \sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10^{-3}\eta^2 \le 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}}$，因此对于足够小的 ϵ，$\phi(0) \in B^{d_s}(\tilde{x}) e^{s^2 f^{-1}(\hat{\cdot}(\tilde{y})) - \frac{1}{2}\eta^{\beta}}{}_{q^s}(0)$。因此，

$$|\phi^{-1}(0)| = |\phi^{-1}(0) - \phi^{-1}(\phi(0))| \le \|d(\phi^{-1})\| \cdot |\phi(0)| < e^{\eta^{\frac{\beta}{2}} - \frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}} \cdot 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}} < 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}}.$$

(c) 令 $w := \phi(v)$，则 $d_w\phi^{-1} = (D_s^{-1} + A(v))^{-1} = (Id + D_s A(v))^{-1} D_s$。因此

$$\|d.\phi^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}} \le \|(Id + D_s A(\phi^{-1}(\cdot)))^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}} \cdot \|D_s\|_{\frac{\beta}{2}} \le \frac{1}{1 - \|D_s A(\phi^{-1}(\cdot))\|_{\frac{\beta}{2}}} \cdot \|D_s\|_{\frac{\beta}{2}}. \tag{3.20}$$

注意到 D_s和 ϕ^{-1}是压缩的，因为 $\|d(\phi^{-1})\| < e^{\eta^{\frac{\beta}{2}} - s^2 f^{-1}(\hat{\cdot}(\tilde{y}))} < 1$。由不等式（3.18）和（3.19）， $\|A(v)\|_{\frac{\beta}{2}} \le 5\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}} + 3\sqrt{\epsilon} \le 8\sqrt{\epsilon}$，且 $\|D_s A(\phi^{-1}(\cdot))\|_{\frac{\beta}{2}} \le e^{-s^2 f^{-1}(\hat{\cdot}(\tilde{y}))} \cdot 8\sqrt{\epsilon} < 1$。因此，

$$\|d.\phi^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}} \le \frac{1}{1 - 8\sqrt{\epsilon}} \cdot e^{-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}} \le e^{10\sqrt{\epsilon} - \frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}},$$

当 $\epsilon > 0$ 足够小时。 □

断言 2 映射 $F: \mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})} \to \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x})}$ 满足 *(AM1)-(AM3)*。

证明 (AM1)：由于 $Lip(G) < \epsilon$ 和 $|G(0)| \le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2$, 我们有

$$\begin{aligned}
|(\phi^{-1}(0), G(\phi^{-1}(0)))| &\le |\phi^{-1}(0)| + |G(0)| + Lip(G) \cdot |\phi^{-1}(0)| \\
&\le (1+\epsilon)2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}} + 10^{-3}\eta^2 \le 2\epsilon^2\eta^2.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Then

$$\begin{aligned}
|F(0)| &= |D_u^{-1}(G(\phi^{-1}(0))) + h_u^-(\phi^{-1}(0), G(\phi^{-1}(0)))| \\
&\le \|D_u^{-1}\|(|G(0)| + Lip(G)|(\phi^{-1}(0)|) + (|h_u^-(0)| + \|d.h_u^-\| \cdot |(\phi^{-1}(0), G(\phi^{-1}(0)))|) \\
&\le e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}(10^{-3}\eta^2 + \epsilon \cdot 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}}) + \epsilon\eta^3 + \sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}} \cdot 2\epsilon^2\eta^2 \text{ (by inequality (3.21))} \\
&\le e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}[10^{-3}\eta^2 + \epsilon \cdot 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}} + \sqrt{2}d(p(\tilde{y}), \Gamma_\infty)^{-a} \cdot 2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}}] \text{ (by Lemma 3.2(2))} \\
&\le e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}} \cdot 10^{-3}\eta^2[1 + 2 \cdot 10^3(\epsilon + \sqrt{2}d(p(\tilde{y}), \Gamma_\infty)^{-a}) \cdot \sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}] \\
&\le e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}} \cdot 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2 \cdot e^{\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}}}(\frac{q^s \wedge q^u}{p^s \wedge p^u})^2 \text{ (since } \eta^{\frac{\beta}{4}} \cdot d(p(\tilde{y}), \Gamma_\infty)^{-a}) \ll \epsilon) \\
&\le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2 \cdot e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}} \cdot e^{\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}}} \cdot e^{2\Gamma\eta^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ (since } p^s \wedge p^u \ge I^{-1}(q^s \wedge q^u)) \\
&\le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2 \cdot e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})} + 3\Gamma\eta^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ (since } \frac{1}{\gamma} < \frac{\beta}{20} < \frac{\beta}{4}).
\end{aligned}$$

并且 $-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+3\Gamma\eta^{\frac{1}{\gamma}}\le-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+3\Gamma Q(\tilde{y})^{\frac{1}{\gamma}}\le-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+\|C(\tilde{y})^{-1}\|^{-2}<0$，那么 $|F(\mathbf{0})|\le 10^{-3}(p^s\wedge p^u)^2$。

(AM2)：根据 $\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}}=\|d.G\|_{C^0}+Höl_{\frac{\beta}{2}}(d.G)\le\frac{1}{2}$ 以及断言 1(a)，

$$\|d_{\phi^{-1}(0)}G\|\le\|d_0G\|+Höl_{\frac{\beta}{2}}d.G\cdot|\phi^{-1}(0)|^{\frac{\beta}{2}}\le\|d_0G\|+\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}})^{\frac{\beta}{2}}\le\|d_0G\|+\epsilon^2\eta^{\beta}(<\epsilon).\quad(3.22)$$

根据定理 3.6 的证明和不等式（3.21），

$$\|d_{(\phi^{-1}(0),G(\phi^{-1}(0))}h_u^-\|\le\sqrt{\epsilon}|(\phi^{-1}(0),G(\phi^{-1}(0))|^{\frac{\beta}{2}}\le\sqrt{\epsilon}\eta^{\beta}.\quad(3.23)$$

接下来，我们估计 $\|d_0F\|$:

$$\begin{aligned}
\|d_0F\|&=\left\|D_u^{-1}\cdot d_{\phi^{-1}(0)}G\cdot d_0\phi^{-1}+d_{(\phi^{-1}(0),G(\phi^{-1}(0))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{\phi^{-1}(0)}G\end{pmatrix}d_0\phi^{-1}\right\|\\
&\le\left[\|D_u^{-1}\|\cdot\|d_{\phi^{-1}(0)}G\|+\|d_{(\phi^{-1}(0),G(\phi^{-1}(0))}h_u^-\|\cdot(1+\|d_{\phi^{-1}(0)}G\|)\right]\cdot\|d_0\phi^{-1}\|\\
&\le\left[\|D_u^{-1}\|\cdot(\|d_0G\|+\epsilon^2\eta^{\beta})+\sqrt{\epsilon}\eta^{\beta}\cdot 2\right]\cdot e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}\ \text{(by inequalities (3.22), (3.23), claim 1(a))}\\
&\le e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}\cdot(\|d_0G\|+\epsilon^2\eta^{\beta}+2\sqrt{2}d(p(\tilde{y}),\Gamma_\infty)^{-a}\sqrt{\epsilon}\eta^{\beta})\ \text{(by Lemma 3.2(2))}\\
&\le e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}\cdot\frac{1}{2}(p^s\wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}\left[\frac{\|d_0G\|}{\frac{1}{2}(p^s\wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}}+(\frac{q^s\wedge q^u}{p^s\wedge p^u})^{\frac{\beta}{2}}\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}}\right]\\
&\le e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}\cdot\frac{1}{2}(p^s\wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}\cdot e^{\frac{\beta}{2}\Gamma(p^s\wedge p^u)^{\frac{1}{\gamma}}}(1+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}})\ \text{(by } q^s\wedge q^u\le I(p^s\wedge p^u))\\
&\le\frac{1}{2}(p^s\wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}\cdot e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+\frac{\beta}{2}\Gamma(p^s\wedge p^u)^{\frac{1}{\gamma}}+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}}}.
\end{aligned}$$

类似于不等式（3.17）的计算，存在一个常数 $k_0=k_0(\Gamma,\ \beta,\ \epsilon)$，使得

$$\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}\ge k_0Q(\tilde{y})^{\frac{1}{\gamma}}\ge k_0Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}},\quad(3.24)$$

and

$$\frac{1}{u^2(\tilde{y})}\ge k_0Q(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{\frac{1}{\gamma}}\ge k_0Q(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))^{\frac{\beta}{2}}.\quad(3.25)$$

那么 $(q^s)^{-\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+\frac{\beta}{2}\Gamma(p^s\wedge p^u)^{\frac{1}{\gamma}}+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{4}}\le Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+\frac{\beta}{2}\Gamma\epsilon^{\frac{1}{\gamma}}\eta^{\frac{1}{\gamma}}+Q(\tilde{y})^{\frac{\beta}{4}}<0$.因此，$\|d_0F\|\le\frac{1}{2}(p^s\wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}}$.

(AM3)：根据定理 3.6，$(1+\epsilon)q^s+10^{-3}\eta^2\le 2q^s$。并且 $\|d.h_u^-\|_{\frac{\beta}{2}}\le\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}\le 3\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}$。

$$\begin{aligned}
\|d.F\|_{\frac{\beta}{2}}&=\|D_u^{-1}\cdot d_{\phi^{-1}(\cdot)}G\cdot d.\phi^{-1}+d_{(\phi^{-1}(\cdot),G(\phi^{-1}(\cdot))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{\phi^{-1}(\cdot)}G\end{pmatrix}d.\phi^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}}\\
&\le\left[\|D_u^{-1}\|\cdot\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}}+\|d.h_u^-\|_{\frac{\beta}{2}}(1+\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}})\right]\|d.\phi^{-1}\|_{\frac{\beta}{2}}\\
&\le e^{6\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}}(\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}}\|D_u^{-1}\|+4\sqrt{\epsilon})\\
&\le e^{6\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}(\|d.G\|_{\frac{\beta}{2}}+4e^{\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon})\\
&\le\frac{1}{2}e^{6\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}}\cdot e^{8e^{\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}}.
\end{aligned}$$

并且根据不等式 (3.24)，$6\sqrt{\epsilon}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+8e^{\frac{1}{2}}\sqrt{\epsilon}<0$，则 $\|d.F\|_{\frac{\beta}{2}}<\frac{1}{2}$。 □

由于 $\frac{1}{u^2(\tilde{y})}>\|C(\tilde{y})^{-1}\|^{-2}\ge(\frac{1}{2}+\Gamma)(q^s)^{\frac{1}{\gamma}}\ge\frac{1}{2}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}+\Gamma(q^s)^{\frac{1}{\gamma}}$且 $p^s=\min\{I(q^s)\ Q(\tilde{x})\}$，对于 $v\in B^{d_s(\tilde{y})\ q^s}(\mathbf{0})$，

$$e^{\frac{1}{u^2(\tilde{y})}-\frac{1}{2}(q^s)^{\frac{\beta}{2}}}q^s\ge e^{\Gamma(q^s)^{\frac{1}{\gamma}}}q^s=I(q^s)\ge p^s,\quad(3.26)$$

□

当 ϵ足够小时。因此，$f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$包含一个 s-容许流形 $\mathcal{F}^s_{w_1,\ w_2}(V^s)=\psi_{\tilde{x}}\{(w,\ F(w)):\ w\in_{B^{d_s(\tilde{x})\ p^s}}(0)\}$。包含于 s中的 $f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$-容许流形的唯一性证明与 [13]中的证明相同。

(2) 对任意 u-容许 V^u 属于 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$，$f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$ 与 V^u 至少有一点相交，这是由命题 3.11(1) 得出的。根据 McShane 延拓公式，可以证明 $f_{\tilde{x}}^{-1}V^s$ 与 V^u 至多有一点相交。详细证明见 [13]。

(3) 根据定理 3.6 和 $|G(0)| \le 10^{-3}(p^s \wedge p^u)^2$, ，我们有

$$|h_s^-(0,G(0))| \le |h_s^-(0,0)| + \|d.h\| \cdot |G(0)| \le \epsilon\eta^3 + \sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10^{-3}\eta^2 \le \sqrt{\epsilon}\eta^{2+\frac{\beta}{2}} \le \sqrt{\epsilon}(I(p^s \wedge p^u))^{2+\frac{\beta}{2}} \ll p^s.$$

注 4 由于映射 f 存在奇点，因此 $\|D_s\|$ 和 $\|D_u^{-1}\|$没有一致下界。根据引理 3.2(2)，我们有 $\|D_s\|$, $\|D_u^{-1}\| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}d(x,\ \Gamma_\infty)^a$。因此，在证明 F 满足可容许参数 (AM1)-(AM3)时，需要对原点偏移$|G(0)|$ 进行更严格的控制。

定义 3.10 设 $v_1 \to v_2$，其中 $v_1 = \psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$，$v_2 = \psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$。

(1) 图变换 $\mathcal{F}^s_{v_1,\ v_2}$ 将一个 s-可容许流形 V^s 映射至 $\psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$ 其表示函数为$F: B^{d_s}(\tilde{y})\ q^s\ (0) \to \mathbb{R}^{d_u(\tilde{y})}$，并将其映射到 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$ 中的唯一 s-可容许流形，其表示函数为$\tilde{F}: B^{d_s(\tilde{x})\ p^s}(0) \to \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x})}$，且该流形包含于 $f_{\tilde{x}}^{-1}(V^s)$ 中，并且

$$\{(v,\tilde{F}(v)) : v \in B_{p^s}^{d_s(\tilde{x})}(0)\} \subset F^{-1}_{\tilde{x},\tilde{y}}\{(v,F(v)) : v \in B_{q^s}^{d_s(\tilde{y})}(0)\}.$$

(2) 图变换$\mathcal{F}^u_{v_1,\ v_2}$ 将流形 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$ 中由表示函数$G:\ B^{d_u(\tilde{x})\ p^u}(0) \to \mathbb{R}^{d_s(\tilde{x})}$ 表示的 u-容许流形 V^u 映射为流形 $\psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$ 中由表示函数$\tilde{G}: B^{d_u(\tilde{y})\ q^u}(0) \to \mathbb{R}^{d_s(\tilde{y})}$ 表示的唯一 u-容许流形，并且该流形包含于 $f(V^u)$ 中，且

$$\{(\tilde{G}(v),v) : v \in B_{q^u}^{d_u(\tilde{y})}(0)\} \subset F_{\tilde{x},\tilde{y}}\{(G(v),v) : v \in B_{p^u}^{d_u(\tilde{x})}(0)\}.$$

命题 3.13 设 $w_1 \to w_2$，其中 $w_1 = \psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}, w_2 = \psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$。对于足够小的 ϵ，以及流形 $\psi^{q^s,\ q^u}_{\tilde{y}}$ 中分别具有表示函数 F_1, F_2 的 s-容许流形 V_1^s, V_2^s:

(1) $d_{C^0}(\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s)\ \mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{y})}} d_{C^0}(V_1^s,V_2^s)$。

(2) $d_{C^1}(\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s), \mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}))} - \frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{y})}} \left((1+\epsilon(q^s \wedge q^u)^{\frac{\beta}{2}})\|d.F_1 - d.F_2\| + 10\epsilon\|F_1 - F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right)$.

对于 u-容许流形 V_1^u, V_2^u，其中 $\psi^{p^s,\ p^u}_{\tilde{x}}$ 分别对应表示函数 G_1, G_2:

(3) $d_{C^0}(\mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(V_1^u)\ \mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(V_1^u)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x})}} d_{C^0}(V_1^u,V_2^u)$.

(4) $d_{C^1}(\mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(V_1^u), \mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(V_1^u)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x})} - \frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{f}(\tilde{x}))}} \left((1+\epsilon(p^s \wedge p^u)^{\frac{\beta}{2}})\|d.G_1 - d.G_2\| + 10\epsilon\|G_1 - G_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right)$.

证明：由定理 3.12，$\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s) = \psi_{\tilde{x}}[\{(v,\tilde{F}_i(v):\ v \in B^{d_s}(\tilde{x})\ p^s\ (0)\}]$，其中 $\tilde{F}_i = [D_u^{-1}(F_i(\cdot)) + h_u^-(\cdot, F_i(\cdot))] \circ \phi_i^{-1}$, $\phi_i(v): = D_s^{-1}(v) + h_s^-(v, F_i(v))$ 在 $B^{d_s}(\tilde{y})\ q^s\ (0)$。

(1)

$$\begin{aligned}
\|\phi_1^{-1} - \phi_2^{-1}\| &\le \|\phi_1^{-1} \circ \phi_1 - \phi_2^{-1} \circ \phi_1\| = \|Id - \phi_2^{-1} \circ \phi_1\| \\
&= \|\phi_2^{-1} \circ \phi_2 - \phi_2^{-1} \circ \phi_1\| \le \|d.\phi_2^{-1}\| \cdot \|\phi_1 - \phi_2\| \\
&\le \|d.\phi_2^{-1}\| \cdot \|h_s^-(\cdot,F_1(\cdot)) - h_s^-(\cdot,F_2(\cdot))\| \\
&\le \|d.\phi_2^{-1}\| \cdot \|d.h_s^-\| \cdot \|F_1 - F_2\|,
\end{aligned} \tag{3.27}$$

第一个不等式由 $\phi_i(B^{d_s(\tilde{y})\ q^s}(0)) \supset B^{d_s(\tilde{x})\ p^s}(0)$ 得出。然后 $\frac{\|\phi_1^{-1} - \phi_2^{-1}\|}{\|F_1 - F_2\|} \le \sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}$ 由于 $\|d.\phi_2^{-1}\| \le 1$ (由命题 1(a)，$\eta = q^s \wedge q^u$)。并且

$$\begin{aligned}
\|F_1 \circ \phi_1^{-1} - F_2 \circ \phi_2^{-1}\| &\le \|F_1 \circ \phi_1^{-1} - F_1 \circ \phi_2^{-1}\| + \|F_1 \circ \phi_2^{-1} - F_2 \circ \phi_2^{-1}\| \\
&\le Lip(F_1)\|\phi_1^{-1} - \phi_2^{-1}\| + \|F_1 - F_2\|,
\end{aligned}$$

由于 ϕ_i 在 $B^{d_s(\tilde{y})q^s}(0)$ 上是扩张的，因此 $\frac{\|F_1\circ\phi_1^{-1}-F_2\circ\phi_2^{-1}\|}{\|F_1-F_2\|}\le 1+\epsilon^{\frac{3}{2}}\eta^{\frac{\beta}{2}}$由不等式 (3.14)。因此，我们可以估计

$$\begin{aligned}
d_{C^0}(\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(V_1^s),^s(V_2^s)) &= \|[D_u^{-1}(F_1(\cdot))+h_u^-(\cdot,F_1(\cdot))]\circ\phi_1^{-1}-[D_u^{-1}(F_2(\cdot))+h_u^-(\cdot,F_2(\cdot))]\circ\phi_2^{-1}\|\\
&\le \|D_u^{-1}\|\cdot\|F_1\circ\phi_1^{-1}-F_2\circ\phi_2^{-1}\|+\|d.h_u^-\|(\|\phi_1^{-1}-\phi_2^{-1}\|+\|F_1\circ\phi_1^{-1}-F_2\circ\phi_2^{-1}\|)\\
&\le \|D_u^{-1}\|[(1+\epsilon^{\frac{3}{2}}\eta^{\frac{\beta}{2}})+\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}+1+\epsilon^{\frac{3}{2}}\eta^{\frac{\beta}{2}})]\|F_1-F_2\|\\
&\le e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{y})}+2\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}}\|F_1-F_2\|.
\end{aligned}$$

当 $\epsilon,\ u^{2^{\epsilon}}(\tilde{y})\ge 2\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}$足够小时，因此部分 (1) 得证。

(2) For $\tilde{v}\in B^{d_s(\tilde{y})}_{e^{\frac{1}{s^2(\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}))}-\frac{1}{2}\eta^{\frac{\beta}{2}}}q^s}(0)$, and let $\tilde{v}=\phi_1(v)$:

$$\begin{aligned}
\|d_{\tilde{v}}\phi_1^{-1}-d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\| &\le \|Id-d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\cdot d_v\phi_1\| = \|d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\cdot d_v\phi_2-d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\cdot d_v\phi_1\|\\
&\le \|d_v\phi_1-d_v\phi_2\|\cdot\|d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\|\\
&\le \left\|d_{(v,F_1(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_1\end{pmatrix}-d_{(v,F_2(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_2\end{pmatrix}\right\|\cdot\|d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\|\\
&\le \Big[\left\|d_{(v,F_1(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_1\end{pmatrix}-d_{(v,F_1(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_2\end{pmatrix}\right\|\\
&+\left\|d_{(v,F_1(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_2\end{pmatrix}-d_{(v,F_2(v))}h_s^-\begin{pmatrix}I\\ d_vF_2\end{pmatrix}\right\|\Big]\cdot\|d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\|\\
&\le [\|d.h_s^-\|\cdot\|d.F_1-d.F_2\|+Hol_{\frac{\beta}{2}}(d.h_s^-)\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}(1+\|d.F_2\|)]\cdot\|d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\|,
\end{aligned}$$

then

$$\|d_{\tilde{v}}\phi_1^{-1}-d_{\tilde{v}}\phi_2^{-1}\|\le e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\tilde{f}^{-1}(\tilde{y}))}}(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\|d.F_1-d.F_2\|+2\sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}). \tag{3.28}$$

记 $v_1:=\phi_1^{-1}(\tilde{v})$ 和 $v_2:=\phi_2^{-1}(\tilde{v})$，我们估计

$$\begin{aligned}
&\|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^- - d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\| \le \|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^- - d_{(v_1,F_2(v_1))}h_u^-\| + \|d_{(v_1,F_2(v_1))}h_u^- - d_{(v_1,F_2(v_2))}h_u^-\| + \|d_{(v_1,F_2(v_2))}h_u^- - d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\|\\
&\le \sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\epsilon}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\epsilon}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}} \le 3\sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}},
\end{aligned}$$

由于 $|v_1-v_2|=|\phi_1^{-1}(\tilde{v})-\phi_2^{-1}(\tilde{v})|\le\|F_1-F_2\|$ 根据部分 (1)。然后

$$\begin{aligned}
&\left\|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}-d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}\right\|\\
&\le \|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^- - d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}\right\| + \|d.h_u^-\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}\right\|\\
&\le Hol_{\frac{\beta}{2}}(h_u^-)3\sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}(1+\|d.F_1\|)+\|d.h_u^-\|\cdot\|d_{v_1}F_1-d_{v_2}F_2\|\\
&\le 6\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}(\|d_{v_1}F_1-d_{v_2}F_1\|+\|d_{v_2}F_1-d_{v_2}F_2\|)\\
&\le 6\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\left(\frac{1}{2}|v_1-v_2|^{\frac{\beta}{2}}+\|d.F_1-d.F_2\|\right)\\
&\le 7\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\|d.F_1-d.F_2\|.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\left\|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}d_{\tilde v}\phi_1^{-1}-d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}d_{\tilde v}\phi_2^{-1}\right\|\\
\le&\left\|d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}-d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}\right\|\cdot\|d_{\tilde v}\phi_1^{-1}\|\\
+&\left\|d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}\right\|\cdot\|d_{\tilde v}\phi_1^{-1}-d_{\tilde v}\phi_2^{-1}\|\\
\le& e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}(7\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\|d.F_1-d.F_2\|)\\
+&2\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\|d.F_1-d.F_2\|+2\sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}})\\
\le& e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}\left[(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}+2\epsilon\eta^{\beta})\|d.F_1-d.F_2\|+(7\epsilon+4\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right].
\end{aligned}$$

根据命题 1(a)和不等式 (3.28)，我们有

$$\begin{aligned}
&\|d_{v_1}F_1\cdot d_{\tilde v}\phi_1^{-1}-d_{v_2}F_2\cdot d_{\tilde v}\phi_2^{-1}\|\le\|d.F_1-d.F_2\|\cdot\|d.\phi_1^{-1}\|+\|d.F_2\|\cdot\|d.\phi_1^{-1}-d.\phi_2^{-1}\|\\
\le& e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}\|d.F_1-d.F_2\|+\epsilon e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}\|d.F_1-d.F_2\|+2\sqrt{\epsilon}\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}})\\
\le& e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}[(1+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\|d.F_1-d.F_2\|+2\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}].
\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}
\|d_{\tilde v}\tilde F_1-d_{\tilde v}\tilde F_2\|=&\left\|D_u^{-1}\cdot d_{v_1}F_1\cdot d_{\tilde v}\phi_1^{-1}+d_{(v_1,F_1(v_1))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_1}F_1\end{pmatrix}d_{\tilde v}\phi_1^{-1}\right.\\
&\left.-D_u^{-1}\cdot d_{v_2}F_2\cdot d_{\tilde v}\phi_2^{-1}-d_{(v_2,F_2(v_2))}h_u^-\begin{pmatrix}I\\ d_{v_2}F_2\end{pmatrix}d_{\tilde v}\phi_2^{-1}\right\|\\
\le&\|D_u^{-1}\|e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}\left[(1+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\|d.F_1-d.F_2\|+2\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right]\\
&+e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}}\left[(\sqrt{\epsilon}\eta^{\frac{\beta}{2}}+2\epsilon\eta^{\beta})\|d.F_1-d.F_2\|+(7\epsilon+4\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right]\\
\le& e^{(q^s)^{\frac{\beta}{2}}-\frac{1}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}-\frac{1}{u^2(\tilde y)}}\left((1+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\|d.F_1-d.F_2\|+10\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right).
\end{aligned}$$

当 ϵ，s^2 ϵ $(\hat f^{-1}(\tilde y))+\underline{u^2}$ ϵ $(\tilde y)\ge 2(q^s)^{\frac{\beta}{2}}$ 足够小时，因此 $\|d.\tilde F_1-d.\tilde F_2\|\le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2\hat f^{-1}(\tilde y))}-\frac{1-\epsilon}{u^2}(\tilde y)}\left((1+\epsilon\eta^{\frac{\beta}{2}})\right.$ $\|d.F_1-d.F_2\|+10\epsilon\|F_\perp-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\left.\right)$。

同理，我们可以得到 u-情形。 □

在此背景下，我们研究可能具有 0 个李雅普诺夫指数的轨道，因此，对这些轨道上的点进行编码时，编码映射可能不 *Hölder* 连续。Ovadia 通过缩小容许流形的大小引入了叶核，此后，编码映射关于叶核具有可求和变差。

定义 3.11 给定一个双图表 $\psi^{p^s}{}_{,\tilde x}{}^{p^u}$。 s/u-容许流形 $V^{s/u}$ 的叶核 为

$$\hat V^{s/u}:=\psi_{\tilde x}\circ Graph(F^{s/u})\text{ on }B_{\eta^2}^{d_{s/u}(\tilde x)}(0),$$

其中 $\eta:=p^s\wedge p^u$，且 $F^{s/u}$ 是 s/u-容许流形 $V^{s/u}$的表示函数。

注意，如果 $\hat V^{s/u}$ 是 $V^{s/u}$的叶核，则 $\hat V^{s/u}\subset V^{s/u}$。

推论 3.14 设 $w_1\to w_2$，其中 $w_1=\psi^{p^s}{}_{,\tilde x}{}^{p^u}, w_2=\psi^{q^s}{}_{,\tilde y}{}^{q^u}$。对于足够小的 ϵ，以及 s-容许流形 V_1^s,V_2^s 属于 $\psi^{q^s}{}_{,\tilde y}{}^{q^u}$，其表示函数分别为 F_1,F_2:

(1) $d_{C^0}(\mathcal{F}^s_{w_1,\ w_2}(\hat V_1^s)\mathcal{F}^s_{w_1,\ w_2}(\hat V_1^s))\le e^{-\frac{1-\epsilon}{u^2\ \tilde y\ (\tilde y))}}d_{C^0}(\hat V_1^s,\ \hat V_2^s)$。

(2) $d_{C^1}(\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(\hat V_1^s),\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(\hat V_1^s))\le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\hat f^{-1}(\tilde y))}-\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde y)}}\left((1+\epsilon(q^s\wedge q^u)^\beta)\|d.F_1-d.F_2\|+10\epsilon\|F_1-F_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right)$.

对于具有各自表示函数 G_1、G_2 的 $\psi^{p^s}{}_{,\tilde x}{}^{p^u}$ 中的 u-容许流形 V_1^u、V_2^u:

(3) $d_{C^0}(\mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(\hat{V}_1^u)\mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(\hat{V}_1^u)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}))}} d_{C^0}(\hat{V}_1^u, \hat{V}_2^u)$.

(4) $d_{C^1}(\mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(\hat{V}_1^u), \mathcal{F}^u_{w_1,w_2}(\hat{V}_1^u)) \le e^{-\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}))} - \frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{f}(\tilde{x}))}} \left((1+\epsilon(p^s \wedge p^u)^\beta)\|d.G_1 - d.G_2\| + 10\epsilon\|G_1 - G_2\|^{\frac{\beta}{2}}\right)$。

证明 我们将定理 3.12 的证明限制在 $B^{d_s(\tilde{x})}\ \eta^2$ (0) 上，其中 $\eta = q^s \wedge q^u$，如同不等式（3.26）的计算，我们有 $e^{u^2}{}^{1}{}_{(\tilde{y})} - \frac{1}{2}(\eta^2)^{\frac{\beta}{2}} \eta^2 \ge \bar{e}^{\overline{2\Gamma(\eta)}^{\frac{1}{\gamma}}} \eta^2 = \bar{I}^{(\eta)^2} \ge (p^s \wedge p^u)^2$。因此，

$$\mathcal{F}^s_{w_1,w_2}(\hat{V}_1^s) = \psi_{\tilde{x}}[\{(v, \tilde{F}_i(v)) : v \in B^{d_s(\tilde{x})}_{(p^s \wedge p^u)^2}(0)\}],$$

其中 $\tilde{F}_i = [D_u^{-1}(F_i(\cdot)) + h_u^-(\cdot, F_i(\cdot))] \circ \phi_i^{-1}$, $\phi_i(v) := D_s^{-1}(v) + h_s^-(v, F_i(v))$ 在 $B^{d_s(\tilde{y})\,\eta^2}$ (0) 上。然后，通过将命题3.13 的证明限制在 $B^{d_s(\tilde{x})}\ \eta^2$ (0) 上，我们得到该推论。□

定义 3.12 给定一个双图表 $\psi^{p^s}{}_{,\tilde{x}}{}^{p^u}$，设 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 s/u-容许流形构成的序列，其表示函数 F_n 属于 $\psi^{p^s}{}_{,\tilde{x}}{}^{p^u}$。若序列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛到 s/u- 容许流形 V，即表示函数 F_n 一致收敛到 V 的表示函数，则称该序列一致收敛。

若将表示函数 F_n 的定义域限制为 $B^{d_{s/u}(\tilde{x})\ (p^s \wedge p^u)^2}$，便得到叶核 V_n 一致收敛到叶核 V的定义。并且注意到，若容许流形 $\{V_n\}$ ˆ一致收敛到容许流形 V，则相应的叶核 $\{V_n\}$ ˆ一致收敛到叶核 V。

命题 3.15 对于足够小的 $\epsilon > 0$ 以及一条链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $v_i = \psi^{p_i^s}{}_{,\tilde{x}_i}{}^{p_i^u}$。任取一个 v_{-n} 中的序列 u，其元素均为容许流形 V^u_{-n}，再取一个 v_n, $n \ge 0$中的序列 s，其元素均为容许流形 V^s_n。以下命题成立：

(1) 记作

$$V^u((v_i)_{i\le 0}) := \lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n}),\ V^s((v_i)_{i\ge 0}) := \lim_{n\to\infty} (\mathcal{F}^s)^n(V^s_n),$$

其中，$(\mathcal{F}^u)^n = \mathcal{F}^u_{v_{-1},v_0} \circ \cdots \circ \mathcal{F}^u_{v_{-n+1},v_{-n+2}} \circ \mathcal{F}^u_{v_{-n},v_{-n+1}}$和 $(\mathcal{F}^s)^n = \mathcal{F}^u_{v_0,v_1} \circ \cdots \circ \mathcal{F}^u_{v_{n-2},v_{n-1}} \circ \mathcal{F}^u_{v_{n-1},v_n}$。$V^u((v_i)_{i\le 0})$、$V^s((v_i)_{i\ge 0})$均良定义，且不依赖于 $V^u_{-n} \in \mathcal{M}^u(v_{-n}), V^s_n \in \mathcal{M}^s(v_n)$ $n \ge 0$的选取。

(2) $V^u((v_i)_{i\le 0})/V^s((v_i)_{i\ge 0})$ 是 v_0中的一个 u/s-容许流形。

(3)（不变性） $f[V^s((v_i)_{i\ge 0})] \subset V^s((v_{i+1})_{i\ge 0})$和 $f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}[V^u((v_i)_{i\le 0})] \subset V^u((v_{i-1})_{i\le 0})$。

(4)（跟踪）

$$V^s((v_i)_{i\ge 0}) = \{y \in \psi_{\tilde{x}_0}[B_{p_0^s}(0)] : f^n(y) \in \psi_{\tilde{x}_n}[B_{10Q(\tilde{x}_n)}(0)], \forall n \ge 0\};$$

and

$$V^u((v_i)_{i\le 0}) = \{y \in \psi_{\tilde{x}_0}[B_{p_0^u}(0)] : f^{-1}_{\tilde{x}_{-n}} \circ \cdots \circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(y) \in \psi_{\tilde{x}_{-n}}[B_{10Q(\tilde{x}_{-n})}(0)], \forall n \ge 0\}.$$

(5)（可求和变差）对于所有 $N \ge 0$，假设由双重图表构成的链$(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足 $v_i = w_i$，其中 $|i| \le N$，则存在常数 $C, \alpha(\Gamma, \gamma, \beta) > 0$，使得

$$d_{C^1}(\hat{V}^u((v_i)_{i\le 0}), \hat{V}^u((w_i)_{i\le 0}) \le C(I^{-N}(p_0^s \wedge p_0^u))^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}.$$

映射$(v_i)_{i\ge 0} \mapsto$ ˆ$V^s((v_i)_{i\ge 0})$的类似陈述。

(6)（双曲性）若 $y\ z \in V^s\ \ v_i\ _{i\ge 0}$ $d\ f^n\ y\ \ f^n\ z\ \ \le 8I^{-n}\ p_0^s$ $n \ge 0$ $y\ z \in,(()),$ 则对于所有；$V^u\ \ v_i\ _{i\le 0}$ $d\ f^{-1}_{\tilde{x}_n} \circ \cdots \circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}\ y\ \ f^{-1}_{\tilde{x}_n} \circ \cdots \circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}\ z\ \ \le 8I^n\ p_0^u$ $n \le 0$

都有$(()())()$；并且若$,(()),$ 则对于所有. 都有$(()())()$。

证明 我们证明 u 情形下的结果；类似的证明也适用于 s 情形。

(1) $\{(\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$是一个柯西序列：设 W^u_{-n}是 u 中任意一个 -容许流形 v_{-n}，对所有 $n>0$。由命题 3.13，得到

$$\begin{aligned} d_{C^0}((\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n}),(\mathcal{F}^u)^n(W^u_{-n}) &\le e^{-\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-k})}}d(V^u_{-n},W^u_{-n}) \\ &\le e^{-(1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}\sum_{k=1}^{n}(p^u_{-k+1})^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot(2p^u_{-n}) \text{ (by inequality (3.24))} \\ &\le 2e^{-(1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}\sum_{k=0}^{n-1}(p^u_{-k})^{\frac{1}{\gamma}}}p^u_0 e^{\Gamma\sum_{i=0}^{n-1}(p^u_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}} \\ &= 2e^{-[((1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}-\Gamma)\cdot\frac{1}{\Gamma}]\Gamma\sum_{k=0}^{n-1}(p^u_{-k})^{\frac{1}{\gamma}}}p^u_0 \\ &\le 2e^{-\Gamma\sum_{k=0}^{n-1}(I^{-k}(p^u_0))^{\frac{1}{\gamma}}}p^u_0 \\ &\le 2I^{-n}(p^u_0). \end{aligned} \tag{3.29}$$

倒数第二个不等式成立，因为当 ϵ 足够小时，$((1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}-\Gamma)\cdot\frac{1}{\Gamma}>1$，且 $p^u_{k+1}=\min\{I(p^u_k)\ Q(\tilde{x}_{k+1})\}$。因此 $\forall n,\ m\in\mathbb{N}(n\ge m)$，我们有

$$d_{C^0}((\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n}),(\mathcal{F}^u)^m(W^u_{-m}))=d_{C^0}((\mathcal{F}^u)^m[(\mathcal{F}^u)^{n-m}(V^u_{-n})],(\mathcal{F}^u)^m(W^u_{-m}))\le 2I^{-m}(p^u_0).$$

因此，$\{(\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 由命题3.1(6)可知是柯西序列。

(2) 只需证明 $V^u((v_i)i\le 0)/V^s((v_i)i\ge 0)$ 的表示函数满足 (AM1)-(AM3)。证明与 [13] 中命题 3.14(2) 的证明相同。

(3) 根据定义和定理 3.12，我们有

$$\begin{aligned} V^u((v_i)_{i\le 0}) &= \lim_{n\to\infty}(\mathcal{F}^u)^n(V^u_{-n})=\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^u_{v_{-1},v_0}\circ\mathcal{F}^u_{v_{-2,-1}}\cdots\circ\mathcal{F}^u_{v_{-n},v_{-n+1}}(V^u_{-n}) \\ &= \mathcal{F}^u_{v_{-1},v_0}(\lim_{n\to\infty}\mathcal{F}^u_{v_{-2,-1}}\cdots\circ\mathcal{F}^u_{v_{-n},v_{-n+1}}(V^u_{-n}))=\mathcal{F}^u_{v_{-1},v_0}(V^u((v_{i-1})_{i\le 0})\subset f(V^u((v_{i-1})_{i\le 0}). \end{aligned}$$

因此，$f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}[V^u((v_i)i\le 0)]\subset V^u((v_{i-1})i\le 0)$。

（4）证明主要利用了$F^{\pm 1}_{\tilde{x}_n}$、$\tilde{x}_{n+1}$（命题3.6）的性质；详情请参见 [13]。

（5）记 $V^u_k:=V^u$（$(v_{i-k})\ i\le 0$）和 $W^u_k:=V^u$（$(w_{i-k})\ i\le 0$），相应的表示函数为 F_k 和 $G_k\forall 0\le k\le N$。根据关于不等式（3.29）的估计，我们可以对叶核 V^u_k和 W^u_k进行类似的计算：

$$\begin{aligned} d_{C^0}(\hat{V}^u_k,\hat{W}^u_k)=d_{C^0}((\mathcal{F}^u)^{N-k}(\hat{V}^u_{-N}),(\mathcal{F}^u)^{N-k}(\hat{W}^u_{-N}) &\le e^{-\sum_{i=k+1}^{N}\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-i})}}d(\hat{V}^u_{-N},\hat{W}^u_{-N}) \\ &\le e^{-(1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}\sum_{i=k+1}^{N}(p^u_{-i+1}\wedge p^s_{-i+1})^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot 2(p^u_{-N}\wedge p^s_{-N})^2 \text{ (by inequality (3.24))} \\ &\le 2e^{-(1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}\sum_{i=k}^{N-1}(p^u_{-i}\wedge p^s_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})^2 e^{2\Gamma\sum_{i=k}^{N-1}(p^u_{-i}\wedge p^s_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}} \\ &= 2e^{-[((1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{-\frac{1}{\gamma}}-2\Gamma)\frac{1}{2\Gamma}]2\Gamma\sum_{i=k}^{N-1}(p^u_{-i}\wedge p^s_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}}\cdot(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})^2 \\ &\le 2e^{-2\Gamma\sum_{i=k}^{N-1}(p^u_{-i}\wedge p^s_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})^2 \text{ (for small enough } \epsilon) \\ &\le 2\big(e^{-\Gamma\sum_{i=0}^{N-k-1}[I^{-i}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})]^{\frac{1}{\gamma}}}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})\big)^2. \end{aligned} \tag{3.30}$$

对于任意 $0\le k\le N$ 和 $t\in B^{d_u}(\tilde{x}_{-k})\ (p^s_{-k}\wedge p^u_{-k})^2$（0），由不等式（$\|d_tF_k\|\le(p^s_{-k}\wedge p^u_{-k})^{\beta}$ 和 $\|d_tG_k\|\le(p^s_{-k}\wedge p^u_{-k})^{\beta}$，根据不等式（3.14）。根据命题3.13（4），我们有

$$\begin{aligned} \|d.F_0-d.G_0\| &\le 2e^{-\sum_{k=1}^{N}(\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-k})}+\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-k+1})})}\|d.F_N-d.G_N\|+10\epsilon\sum_{k=1}^{N}e^{-\sum_{i=1}^{k}(\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-i})}+\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-i+1})})}\|F_k-G_k\|^{\frac{\beta}{2}} \\ &:= I'+II', \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} I' &\le 4(p^s_{-N}\wedge p^u_{-N})^{\beta}e^{-\sum_{k=1}^{N}(\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-k})}+\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-k+1})})} \\ &\le 4(p^s_{-k}\wedge p^u_{-k})^{\beta}\Big[e^{\beta\sum_{k=0}^{N-1}\Gamma(p^s_0\wedge p^u_0)^{\frac{1}{\gamma}}}e^{-\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-k+1})}}\Big]e^{-\sum_{k=1}^{N}\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-k})}} \\ &\le 4(p^s_0\wedge p^u_0)^{\beta}e^{-\beta\sum_{k=0}^{N-1}\Gamma(p^s_{-k}\wedge p^u_{-k})^{\frac{1}{\gamma}}} \text{ (by inequality (3.24))} \\ &\le 4(p^s_0\wedge p^u_0)^{\beta}e^{-\beta\sum_{k=0}^{N-1}\Gamma[I^{-k}(p^s_0\wedge p^u_0)]^{\frac{1}{\gamma}}} \\ &\le 4(I^{-N}(p^s_0\wedge p^u_0))^{\beta}. \end{aligned}$$

and

$$
\begin{aligned}
II' &\overset{(a)}{\leq} 2^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10\epsilon \sum_{k=1}^{N} e^{-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-i})}+\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-i+1})}\right)} \cdot \left[e^{-\Gamma\sum_{i=0}^{N-k-1}[I^{-i}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})]^{\frac{1}{\gamma}}}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})\right]^{\beta} \\
&\leq 2^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10\epsilon \sum_{k=1}^{N} (p^s_0\wedge p^u_0)^{\beta}\left[e^{\beta\sum_{i=0}^{k-1}\Gamma(p^s_{-i}\wedge p^u_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}} e^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-i+1})}}\right] \\
&\quad \cdot e^{-\sum_{i=1}^{k}\frac{1-\epsilon}{s^2(\tilde{x}_{-i})}} \cdot e^{-\beta\Gamma\sum_{i=0}^{N-k-1}[I^{-i}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})]^{\frac{1}{\gamma}}} \\
&\leq 2^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10\epsilon \sum_{k=1}^{N} (p^s_0\wedge p^u_0)^{\beta} e^{-\beta\sum_{i=0}^{k-1}\Gamma(p^s_{-i}\wedge p^u_{-i})^{\frac{1}{\gamma}}} \cdot e^{-\beta\Gamma\sum_{i=0}^{N-k-1}[I^{-i}(p^u_{-k}\wedge p^s_{-k})]^{\frac{1}{\gamma}}} \\
&\leq 2^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10\epsilon \sum_{k=1}^{N} (p^s_0\wedge p^u_0)^{\beta} e^{-\beta\sum_{i=0}^{N-1}\Gamma[I^{-i}(p^s_0\wedge p^u_0)]^{\frac{1}{\gamma}}} \\
&\leq 2^{\frac{\beta}{2}} \cdot 10\epsilon \sum_{k=1}^{N} (I^{-N}(p^s_0\wedge p^u_0))^{\beta} \leq 2N(I^{-N}(p^s_0\wedge p^u_0))^{\beta},
\end{aligned}
$$

不等式 (a) 由不等式 (3.30) 得出。令 $\alpha = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\gamma} > 0$ ($\gamma > \frac{20}{\beta}$) 且 $C = \text{上确界}_{N\geq 1} 2(N+1)(I^{-N}(1))^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}$ (C有界，因为 $(I^{-N}(1)^{\frac{1}{\gamma}} = O(\frac{1}{N+\delta})$ 对某个 $\delta > 0$) 成立，接着

$$
\|d.F_0 - d.G_0\| \leq 2(N+1)(I^{-N}(1))^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}(I^{-N}(p^s_0\wedge p^u_0))^{\frac{1}{\gamma}+\alpha} \leq C(I^{-N}(p^s_0\wedge p^u_0))^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}.
$$

(6) 根据定理 3.15(3)，存在 u-容许流形 $V^u((v_{i+n})_{i\leq 0})$ 位于 v_n，其表示函数为 G_n，使得 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u((v_i)_{i\leq 0})) \subset V^u((v_{i+n})_{i\leq 0})(n\leq 0)$。因此 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(y)$ $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(z)$ 可写为 $\psi_{\tilde{x}_n}(y'_n)\,\psi_{\tilde{x}_n}(z'_n)$，其中 $y'_n = (G_n(y_n)\ y_n)$ 且 $z'_n = (G_n(z_n)\ z_n)$。对于所有$n\leq 0$，$y'_{n-1} = F^{-1}_{\tilde{x}_{n-1},\tilde{x}_n}(y'_n)$ 和 $z'_{n-1} = F^{-1}_{\tilde{x}_{n-1},\tilde{x}_n}(z'_n)$，则

$$
\begin{aligned}
|y_{n-1} - z_{n-1}| &\leq \|D^{-1}_{u,n-1}\| \cdot |y_n - z_n| + |h_{u,n}(G_n(y_n), y_n) - h_{u,n}(G_n(z_n), z_n)| \\
&\leq e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{x}_n)}}|y_n - z_n| + \sqrt{\epsilon}\eta_n^{\frac{\beta}{2}}(1+\epsilon)|y_n - z_n| \\
&\leq e^{-\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_n)}}|y_n - z_n| \leq \cdots \leq e^{-\sum_{i=0}^{n}\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_{-k})}}|y_0 - z_0| \\
&\leq e^{-[(1-\epsilon)(\epsilon^{\frac{20}{\beta}})^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{\Gamma}]\Gamma\sum_{k=0}^{n}(p^u_{-k})^{-\frac{1}{\gamma}}}|y_0 - z_0| \\
&\leq 2e^{-\Gamma\sum_{k=0}^{n}(I^k(p^u_0))^{\frac{1}{\gamma}}}p^u_0 \ (\text{ for small enough } \epsilon) \\
&\leq 2I^{(n-1)}(p^u_0).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Thus

$$
|y'_{n-1} - z'_{n-1}| \leq (1+\epsilon)|y_{n-1} - z_{n-1}| \leq 4I^{(n-1)}(p^u_0) \text{ for all } n\leq 0,
$$

从而 $|f^n(y) - f^n(z)| \leq \|\psi_{\tilde{x}_n}\| \cdot |y'_n - z'_n| \leq 8I^{-n}(p^u_0)$。 □

我们的目的是为子集构造马尔可夫划分 $RST \subset M^f$。根据 Bowen 为公理 A 构造马尔可夫划分的思想 [7]，，在下文中，我们将给出 ($\hat{}f$, M^f) 的相应定义与性质。给定一条 I-链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $v_i = \psi^{p^s_i}_{\tilde{x}_i}{}^{p^u_i}$。

定义 3.13 稳定集 $(v_i)_{i\geq 0}$ 是

$$
\tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0}) := \{\tilde{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in M^f : y_0 \in V^s((v_i)_{i\geq 0})\}.
$$

不稳定集 $(v_i)_{i\leq 0}$ 是

$$
\tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0}) := \{\tilde{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in M^f : y_0 \in V^u((v_i)_{i\leq 0}) \text{ and } y_n = f^{-1}_{\tilde{x}_n}(y_{n+1}) \text{ for all } n < 0\}.
$$

根据命题3.15(4)，稳定/不稳定集有如下等价定义：

$$
\tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0}) = \{\tilde{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in M^f : y_0 \in \psi_{\tilde{x}_0}[B_{p^s_0}(0)] \text{ and } y_n \in \psi_{\tilde{x}_n}[B_{10Q(\tilde{x}_n)}(0)], \forall n \geq 0\},
$$

and

$$
\tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0}) = \{\tilde{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in M^f : y_0 \in \psi_{\tilde{x}_0}[B_{p^u_0}(0)] \text{ and } y_n = f^{-1}_{\tilde{x}_n}(y_{n+1}) \in \psi_{\tilde{x}_n}[B_{10Q(\tilde{x}_n)}(0)], \forall n < 0\}.
$$

给定一个双图表 v，如果稳定/不稳定集 $V^s((v_i)_{i\geq 0})/V^u((v_i)_{i\leq 0})$ 满足 $v_0=v$，则分别称其为 v处的稳定/不稳定集。记 $\tilde{M}^{s/u}(v)$ 为所有 v处稳定/不稳定集的集合。于是，稳定/不稳定集的变换图可定义为

$$\tilde{\mathcal{F}}^s_{v_i,v_{i+1}}:\tilde{M}^s(v_{i+1})\to\tilde{M}^s(v_i),\tilde{V}^s(v_{i+1+k})_{k\geq 0})\mapsto\tilde{V}^s(v_{i+k})_{k\geq 0});$$

and

$$\tilde{\mathcal{F}}^s_{v_{i-1},v_i}:\tilde{M}^s(v_{i-1})\to\tilde{M}^s(v_i),\tilde{V}^u(v_{i-1+k})_{k\leq 0})\mapsto\tilde{V}^u(v_{i+k})_{k\leq 0}).$$

与 s/u-容许流形的性质类似，稳定集/不稳定集也具有一些类似的性质：

命题 3.16 当 $\epsilon>0$ 足够小时，

(1) 对于任意稳定集 $V^s\in M^s(v)$和不稳定集 $V^u\in M^u(v)$，其中 v 是一个双重图表，存在唯一点 $\tilde{p}\in M^f$，使得 $\tilde{V}^s\bigcap\tilde{V}^u=\{\tilde{p}\}$。

(2) 给定双重图表 v、w，使得 $v\to w$。若 $\tilde{V}^s\in\tilde{M}^s(w)$且 $\tilde{V}^u\in\tilde{M}^u(v)$，则 $\tilde{\mathcal{F}}^s_{v,w}[\tilde{V}^s]\subset\hat{f}^{-1}(\tilde{V}^s)$，$\tilde{\mathcal{F}}^u_{v,w}[V^u]\subset f(V^u)$。

(3) $\hat{f}[\tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0})]\subset\tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 1})$ 以及$\hat{f}^{-1}[\tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0})]\subset\tilde{V}^u((v_i)_{i\leq -1})$。

(4) 如果 $\tilde{y}=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，$\tilde{z}=(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0})$，其中 $v_i=\psi^{p^s_i}_{\tilde{x}_i}{}^{p^u_i}$、$\forall i\geq 0$，那么对于所有 $n\geq 0$，$d(\hat{f}^n(\tilde{y}),\hat{f}^n(\tilde{z}))\leq 8I^{-n}(p^s_0)$；如果 $\tilde{y}=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，$\tilde{z}=(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in\tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0})$，其中 $v_i=\psi^{p^s_i}_{\tilde{x}_i}{}^{p^u_i}$、$\forall i\leq 0$，那么对于所有 $n\leq 0$，$d(\hat{f}^n(\tilde{y}),\hat{f}^n(\tilde{z}))\leq 8I^n(p^u_0)$。

(5) 对于足够小的 $\epsilon>0$，给定分别位于 $\psi^{p^s}_{\cdot,\tilde{x}}{}^{p^u}$、$\psi^{q^s}_{\cdot,\tilde{y}}{}^{q^u}$ 处的稳定集/不稳定集 $\tilde{V}^{s/u}$、$\tilde{W}^{s/u}$。若 $\tilde{x}=\tilde{y}$，则 $\tilde{V}^{s/u}$ 与 $\tilde{W}^{s/u}$ 不相交，或者其中一个包含另一个。

(6) 给定双重图表 v、w，使得 $v\to w$。对于不稳定集 $V^u\in M^u(v)$，$f(V^u)$与 $\tilde{M}^s(w)$ 中的任一稳定集相交于唯一点；对于任一稳定集 $\tilde{W}^s\in\tilde{M}^s(w)$，$\hat{f}^{-1}(\tilde{W}^s)$与 $M^u(v)$ 中的任一不稳定集相交于唯一点。

证明 根据命题 3.11(1)、定理 3.12(1)、命题 3.13(2)以及 s/u-容许流形与稳定集/不稳定集之间的关系，第(1)-(3)部分可以容易地证明。

(4) 回忆一下，距离 $d(\tilde{x},\tilde{y})=\sup\{2^i d(x_i,y_i):i\leq 0\}$对于 $\tilde{x}=(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，$\tilde{y}=(y_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in M^f$。如果 $\tilde{y}=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}},\tilde{z}=(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in V^s((v_i)_{i\geq 0})$，对于每个 $k\leq 0$ 和 $n>0$:

(i) $0\leq n\leq -k$ $(k+n\leq 0)$: $2^k d(y_{k+n},z_{k+n})\leq 2^k\leq 2^{-n}$;

(ii) $n>-k$ $(k+n>0)$：根据命题 3.1，我们有

$$\begin{aligned}I^{-n}(p^s_0)&=I^{-1}(I^{-n+1}(p^s_0))\geq I^{-n+1}(p^s_0)e^{-\Gamma(I^{-n+1}(p^s_0))^{\frac{1}{\gamma}}}\\&\geq\cdots\geq I^{-n-k}(p^s_0)e^{-\sum_{i=n+k}^{n-1}\Gamma(I^{-i}(p^s_0))^{\frac{1}{\gamma}}}\geq 2^k I^{-n-k}(p^s_0),\end{aligned}\tag{3.32}$$

由于 $e^{-\Gamma(I^{-i}(p^s_0))^{\frac{1}{\gamma}}}\geq e^{-\Gamma(p^s_0)^{\frac{1}{\gamma}}}>-\frac{1}{2}\forall i\geq 0$对足够小的 ϵ成立。于是 $2^k d(y_{k+n},z_{k+n})\leq 2^k\cdot 8I^{-(n+k)}(p^s_0)\leq 8I^{-n}(p^s_0)$ 根据命题 3.15(6)。因此，

$$\begin{aligned}d(\hat{f}^n(\tilde{y}),\hat{f}^n(\tilde{z}))&=d((y_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}},(z_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}})=\sup\{2^k d(y_{k+n},z_{k+n}):k\leq 0\}\\&\leq\max\{2^{-n},8I^{-n}(p^s_0)\}\leq 8I^{-n}(p^s_0),\end{aligned}$$

因为对足够小的 ϵ，$8I^{-n}(p^s_0)\geq e^{-\Gamma\sum_{i=0}^{n-1}(I^{-i}(p^s_0))^{\frac{1}{\gamma}}}$以及 $e^{-\Gamma(I^{-j}(p^s_0))^{\frac{1}{\gamma}}}\geq e^{-\Gamma(p^s_0)^{\frac{1}{\gamma}}}>\frac{1}{2}\forall i\geq 0$成立。若 $\tilde{y}=(y_k)_{k\in\mathbb{Z}},\tilde{z}=(z_k)_{k\in\mathbb{Z}}\in V^u((v_i)_{i\leq 0})$，根据命题 3.15(6)，对每个 $k\leq 0$ 和 $n\leq 0$:

$$\begin{aligned}d(\hat{f}^n(\tilde{y}),\hat{f}^n(\tilde{z}))&=d((y_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}},(z_{k+n})_{k\in\mathbb{Z}})=\sup\{2^k d(y_{k+n},z_{k+n}):k\leq 0\}\\&\leq\sup\{2^k\cdot 8I^{k+n}(p^u_0):k\leq 0\}\leq 8I^n(p^u_0).\end{aligned}$$

(5) 我们证明 u-情形；类似的证明也适用于 s-情形。

Let $\tilde{V}^u((\tilde{v}_i)_{i\leq 0})=\{\tilde{z}=(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in M^f:\ z_0\in V^u((v_i)_{i\leq 0})$ 和 $z_n=f^{-1}_{\tilde{x}_n}(z_{n+1})$ 对所有 $n<0\}$，以及 $\tilde{W}^u=\tilde{W}^u((w_i)_{i\leq 0})=\{\tilde{z}=(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in M^f:\ z_0\in W^u((w_i)_{i\leq 0})$ 和 $z_n=f^{-1}_{\tilde{y}_n}(z_{n+1})$ 对所有 $n<0\}$

其中 $v_i = \psi^{p_i^s}_{\cdot,\tilde{x}_i}{}^{p_i^u}$， $w_i = \psi^{q_i^s}_{\cdot,\tilde{y}_i}{}^{q_i^u}$ 和 $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$， $\tilde{y}_0 = \tilde{y}$。假设 $\tilde{z} \in \tilde{V}^u \bigcap \tilde{W}^u$ 和 $p_0^u \le q_0^u$，那么我们要证明 $\tilde{V}^u \subset \tilde{W}^u$。我们将通过证明 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}$、 $f^{-1}_{\tilde{y}_n}$ 在相关定义域内对所有 $n<0$ 以及足够大（$n<0$）的 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \subset f^{-1}_{\tilde{y}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{y}_{-1}}(W^u)$ $|n|$ 时重合来证明这一点。

C命题 3 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \subset \mathfrak{E}_{\tilde{y}_{n-1}}$ 以及 $f^{-1}_{\tilde{x}_{n-1}}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \subset f^{-1}_{\tilde{y}_{n-1}}(\mathfrak{E}_{\tilde{y}_{n-1}})$ 对所有 $n \le 0$

证明 设 $z_n \in f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \bigcap f^{-1}_{\tilde{y}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{y}_{-1}}(W^u)$，对于任意 $t_n \in f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u)$，我们有 $d(z_n,t_n) \le 8I^n(p_0^u) \le 8I^n(q_0^u) \le 8q_n^u$ 根据命题 3.15(6)，映射 I^{-1} 在 $(0,e^\Gamma)$ 上严格递增。并且，由命题 3.15(4)， $z_n \in B(p(\tilde{y}_n)\ 20Q(\tilde{y}_n))$，因此

$$t_n \in B(p(\tilde{y}_n), 20Q(\tilde{y}_n)+8q_n^u) \subset B(p_1(\tilde{y}_{n-1}), 21Q(\tilde{y}_n)+8q_n^u), \tag{3.33}$$

由于 $d(p_0(\tilde{y}_n)\ p_1(\tilde{y}_{n-1})) \ll q_n^s \wedge q_n^u < Q(\tilde{y}_n)$。根据不等式 (3.12) 的计算，对所有 $n \le 0$，我们得到 $Q(\tilde{y}_n) \le \epsilon\tau(\tilde{y}_{n-1})$。因此， $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \subset B(p_1(\tilde{y}_{n-1})\ 30Q(\tilde{y}_n)) \subset B(p_1(\tilde{y}_{n-1})\ 30\epsilon\tau(\tilde{y}_{n-1})) \subset \mathfrak{E}_{\tilde{y}_{n-1}}$。

对于 $t_{n-1} \in f^{-1}_{\tilde{x}_{n-1}}\circ f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u)$，由不等式 (3.33) 可得 $t_{n-1} \in B(p(\tilde{y}_{n-1})\ 30Q(\tilde{y}_{n-1}))$。根据假设 (A2)， $f^{-1}_{\tilde{y}_{n-1}}(\mathfrak{E}_{\tilde{y}_{n-1}}) \supset B(p(\tilde{y}_{n-1})\ 2d(p(\tilde{y}_{n-1})\ \Gamma)^a\tau(\tilde{y}_{n-1})) \supset B(p(\tilde{y}_{n-1})\ 2\rho(\tilde{y}_{n-1})^{2a}) \supset B(p(\tilde{y}_{n-1})\ 30Q(\tilde{y}_{n-1}))$。□

记 $V_n^u := V^u((v_{i+n})_{i\le 0})$ 的表示函数为 F_n，并记 $W_n^u := W^u((w_{i+n})_{i\le 0})$ 的表示函数为 G_n $(n \le 0)$。给定 $t \in (0,1)$， $I^n(t) \to 0$ as $n \to \infty$ （由引理 3.1(6)），则存在 $n_0 \le 0$，使得对所有 $n \le n_0$， $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \subset \psi_{\tilde{x}_n}[B_{\frac{1}{2}Q(\tilde{x}_n)}(0)]$。假设 $z_n \in f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\bar{\circ} f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) \bigcap f^{-1}_{\tilde{y}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{y}_{-1}}(W^u)$ 且 $w_n \in f^{-1}_{\tilde{y}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{y}_{-1}}(W^u)$。注意，对所有 $n<0$， $f^{-1}_{\tilde{x}_n}$ 和 $f^{-1}_{\tilde{y}_n}$ 在相关定义域上重合。由命题 3.15(6) 的证明可知，当 $|n|$ 足够大时， $d(\psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(z_n)\ \psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(w_n)) \le 4I^n(q_0^u) \le \frac{1}{2}Q(\tilde{x}_n)$。因此，

$$|\psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(w_n)| \le |\psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(z_n)| + \frac{1}{2}Q(\tilde{x}_n) \le Q(\tilde{x}_n).$$

也就是说，存在 $n_0' < 0$，使得 $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(W^u) \subset \psi_{\tilde{x}_n}[B_{Q(\tilde{x}_n)}(0)]$ 对所有 $n \le n_0'$ 以及充分小的 ϵ 都成立。

接下来，我们将证明，如果 $p_0^u \le q_0^u$ 且 $\tilde{x}_0 = \tilde{y}_0$，则 $\tilde{V}^u \subset \tilde{W}^u$。由于对所有 $|n| \ge \max\{|n_0|,|n_0'|\}$， $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u)$ $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(W^u) \subset \psi_{\tilde{x}_n}[B_{Q(\tilde{x}_n)}(0)]$，因此根据命题 3.15(4)， $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u)$ $f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(W^u) \subset V_n^u$。它们是 $graph(F_n)$ 的两个连通子集，因此存在两个闭子集 $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x}_n)}$，使得

$$f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(V^u) = \psi_{\tilde{x}_n}\{(F_n(v),v) : v \in S_1\},$$

and

$$f^{-1}_{\tilde{x}_n}\circ\cdots\circ f^{-1}_{\tilde{x}_{-1}}(W^u) = \psi_{\tilde{x}_n}\{(G_n(v),v) : v \in S_2\}.$$

根据假设， $S_1 \bigcap S_2 \ne \emptyset$ 和 S_1， S_2 与 $\mathbb{R}^{d_u(\tilde{x}_0)}$ 中的闭单位球同胚。因此，若 S_1 不包含于 S_2 中，则存在一个元素 $z \in \partial S_2 \bigcap S_1$。

(a) 若 $p_0^u < q_0^u$：由于 $f^n\circ\psi_{\tilde{x}_n}$ 连续， $f^n\circ\psi_{\tilde{x}_n}(F_n(z)\ z) \in \partial(W^u)$，且 $f(\partial A) \subset \partial(f(A))$（$A$是 M的任意子集）。于是 $q_0^u \le p_0^u < q_0^u$，这是一个压缩。因此， $S_1 \subset S_2$。

(b) 若 $p_0^u = q_0^u$：给定 $\delta_0 = \frac{p_0^u}{2}$ 和 $\delta \in (0,\ \delta_0)$，考虑 $V_\delta^u := \psi_{\tilde{x}_0}\{(F_0(v)\ v) :\ v \in B_{p_0^u-\delta}(0)\}$。那么 $V_\delta^u \subset W^u$ 由前面的论证可得。因此， $\bigcup_{\delta\in(0,\ \delta_0)} V_\delta^u \subset W^u$，所以 $V^u \subset W^u$。

u 情形同理。

(6) 对于任意稳定集 $W^s \in M^s(w)$，由部分(1)，假设 $\tilde{z} \in f(V^u) \bigcap W^s$。根据定理 3.12，元素 $p(\tilde{z})$ 是唯一的，并且存在一个不稳定集 $W^u \in M^u(w) \subset f(V^u)$。此外， $\tilde{z} \in W^s \bigcap W^u$，于是 $\tilde{z}$ 的负位置由 W^u 唯一确定。□

给定一个 I-链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 其中 $v_i = \psi^{p_i^s}_{\cdot,\tilde{x}_i}{}^{p_i^u}$。令 $\tilde{V}^s := \tilde{V}^s((v_i)_{i\ge 0})$、 $\tilde{V}^u := \tilde{V}^u((v_i)_{i\le 0})$ 分别为稳定集和不稳定集。记 $T\tilde{V}^{s/u}$ 为切丛 $TV^{s/u} \subset TM^f$，即 $\forall \tilde{y} \in \tilde{V}^{s/u}$，

$T_{\tilde{y}}\tilde{V}^{s/u} = T_{p(\tilde{y})}V^{s/u} \subset T_{\tilde{y}}M^f$ $V^s = V^s(v_i)_{i\ge 0}$ $V^u = V^u(v_i)_{i\le 0}$ 其中：((·)·)：((·)·)。

命题 3.17 对于足够小的 ϵ：如果 $\tilde{y} = (y_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in V^s((v_i)_{i\geq 0})$ 且 ξ 属于单位球 $T_{\tilde{y}}\tilde{V}^s(1) = T_{p(\tilde{y})}V^s(1)$，则对所有 $n \geq 0$，$|d_{\tilde{y}}\hat{f}^n(\xi)| \leq 4I^{-n}(p_0^s) \cdot \|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|$；并且如果 $\tilde{y} \in \tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0})$ 且 ξ 属于单位球 $T_{\tilde{y}}\tilde{V}^u(1) = T_{p(\tilde{y})}V^u(1)$，则对所有 $n \leq 0$，$|d_{\tilde{y}}\hat{f}^n(\xi)| \leq 4I^n(p_0^u) \cdot \|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|$。

证明 假设 $p(\tilde{y}) = y$, $V^u := V^u((v_i)_{i\leq 0})$, 且 $V^u := V^u((v_i)_{i\leq 0})$。设 $V_n^u := V^u((v_{i+n})_{i\leq 0})$，其表示函数为 $G_n, \forall n \leq 0$。根据假设 $\tilde{y} \in \tilde{V}^u$，因此 $y_n = f_{y_n}^{-1} \circ \cdots f_{y-1}^{-1}(y) = f_{\tilde{x}_n}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\tilde{x}_{-1}}^{-1}(y) = \psi_{\tilde{x}_n}(G_n(v_n), v_n), v_n \in B_{Q(\tilde{x}_n)}(0)$。并且 $(G_n(v_{n-1}), v_{n-1}) = F_{\tilde{x}_{n-1},\tilde{x}_n}^{-1}(G_n(v_n), v_n) = (D_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_n)^{-1}) + \bar{H}_n^-)(G_n(v_n), v_n)$，由定理 3.6 可得。将 ξ 写作

$$d_{(G_0(v_0),v_0)}\psi_{\tilde{x}_0}\begin{pmatrix} d_{v_0}G_0(w_0) \\ w_0 \end{pmatrix}, \text{ for some } w_0 \in \mathbb{R}^{d_u(\tilde{x}_0)}.$$

对于任意 $n \leq 0$，定义

$$\begin{pmatrix} d_{v_{n-1}}G_{n-1}(w_{n-1}) \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} D_{s,n}^{-1} & 0 \\ 0 & D_{u,n}^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_{(G_n(v_n),v_n)}H_{s,n}^- \\ d_{(G_n(v_n),v_n)}H_{u,n}^- \end{pmatrix}^T\right]\begin{pmatrix} d_{v_n}G_n(w_n) \\ w_n \end{pmatrix},$$

其中 $D_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_n)) = \begin{pmatrix} D_{s,n} & 0 \\ 0 & D_u \end{pmatrix}$ 且 $H_n^- = H_{s,n}^- + H_{u,n}^-$。以下计算与不等式（3.31）的估计类似：

$$\begin{aligned} |w_{n-1}| &\leq \|D_{u,n}^{-1}\| \cdot |w_n| + \|d_{(G_n(v_n),v_n)}H_{s,n}^-\| \cdot |(d_{v_n}G_n(w_n), w_n)| \\ &\leq (e^{-\frac{1}{u^2(\tilde{x}_n)}} + 2\sqrt{\epsilon}\eta_n^{\frac{\beta}{2}})|w_n| \\ &\leq e^{-\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_n)}}|w_n| \leq \cdots \leq e^{-\sum_{i=0}^n \frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_i)}}|w_0|, \end{aligned}$$

其中 $\eta_n = p_n^s \wedge p_n^u$。且 $|w_0| \leq \frac{1}{2}\|d_{(G_0(v_0),v_0)}\psi_{\tilde{x}_0}\|^{-1} \cdot |\xi| \leq \|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|$。因此，

$$\begin{aligned} |d_{\tilde{y}}\hat{f}^n(\xi)| &= \|d_{(G_n(v_n),v_n)}\psi_{\tilde{x}_i}\| \cdot \left|\begin{pmatrix} d_{v_n}G_n(w_n) \\ w_n \end{pmatrix}\right| \\ &\leq 4e^{-\sum_{i=0}^{n+1}\frac{1-\epsilon}{u^2(\tilde{x}_n)}}|w_0| \\ &\leq 4I^n(p_0^u) \cdot \frac{\|C_0(\tilde{x}_0)\|^{-1}}{p_0^u}. \end{aligned}$$

将 $F_{\tilde{x}_n,\,\tilde{x}_{n+1}}$ 的性质应用于 s-情形（$n \geq 0$）；对 s-情形也有类似论证。 □

回顾一下，$\Sigma := \Sigma(\mathcal{G}) = \{\{\psi_{\tilde{x}_i}^{p_i^s,p_i^u}\}_{i\in\mathbb{Z}} : (\psi^{p_i^s}, {}_{\tilde{x}_i}{}^{p_i^u}, \psi^{p_{i+1}^s}, {}_{\tilde{x}_{i+1}}{}^{p_{i+1}^u}) \in \mathcal{E}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$。定义映射 $\pi: \Sigma(\mathcal{G}) \to M^f$，使得 $\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := \tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0}) \bigcap \tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0})$。根据命题 3.16(1)，映射 π 是良定义的。

定理 3.18 当 ϵ 足够小时，给定 I-链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 $v_i = \psi^{p_i^s}{}_{\tilde{x}_{i+1}}{}^{p_i^u}$。那么

(1) $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$。(2) $\pi : \Sigma \to M^f$ 一致连续。(3) $\pi(\Sigma) \supset \pi(\Sigma^{\#}) \supset RST$。

证明 (1) 假设 $f^k(y) \in V^s, k \geq 0$，$y_k = f_{\tilde{x}_k}^{-1}(y_{k+1})$，$(v_i)_{i\geq 0}$；$k < 0$，$y_{k+1} = f(y_k) \in V^s$，$(v_{k+1+i})_{i\geq 0}$；$k \geq 0$，$y_k = (\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}), (v_i)_{i\leq 0}) = \tilde{y} \in V^s((v_i)_{i\geq 0}) \bigcap V^u((v_i)_{i\leq 0})$ 且 $\tilde{y} = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$。根据定义，对所有 都有 $(v_i)_{i\geq 0}$；对所有 都有 $(v_i)_{i\leq 0}$。于是，对所有 都有 $(v_i)_{i\geq 0}$，$(v_i)_{i\leq 0}$；并且根据命题 3.16(3)，对所有 $k < 0$ 都有 $y_{k+1} = f_{\tilde{x}_{k+1}}^{-1}(y_{k+2}) = \cdots = f_{\tilde{x}_{k+1}}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\tilde{x}_{-1}}^{-1}(y_0) \in V^u((v_{k+1+i})_{i\leq 0})$。因此，$f \circ \pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (f(y_k))_{k\in\mathbb{Z}} = (y_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} = V^s((v_{i+1})_{i\geq 0}) \bigcap V^u((v_{i+1})_{i\leq 0}) = \pi \circ \sigma((v_i)_{i\in\mathbb{Z}})$。

(2) 对所有 $N \geq 0$，假设双重图表的链 $(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 满足 $v_i = w_i$ 对于 $|i| \leq N$，令 $\tilde{p}^1 = (p_k^1)_{k\in\mathbb{Z}} = \tilde{V}_1^s((v_i)_{i\geq 0}) \bigcap \tilde{V}_1^u((v_i)_{i\leq 0})$，并令 $\tilde{p}^2 = (p_k^2)_{k\in\mathbb{Z}} = \tilde{V}_2^s((w_i)_{i\geq 0}) \bigcap \tilde{V}_2^u((w_i)_{i\leq 0})$。根据命题 3.11(2) 和部分 (1)，对于 $-N \leq n \leq 0$，

$$\begin{aligned} d(p_n^1, p_n^2) &\leq 3[d_{C^0}(\hat{V}_1^s((v_{i+n})_{i\geq 0}), \hat{V}_2^s((v_{i+n})_{i\geq 0})) + d_{C^0}(\hat{V}_1^u((v_{i+n})_{i\leq 0}), \hat{V}_2^u((v_{i+n})_{i\leq 0}))] \\ &\leq 6C[I^{-(N+n)}(p_0^u \wedge p_0^u)]^{\frac{1}{\gamma}+\alpha} (\text{ by Proposition 3.15(5)}). \end{aligned}$$

注意，命题 3.11(2) 并非针对叶核的结论，但很容易得出同样的论证也适用于叶核。类似于不等式（3.32）的计算，

$$\begin{aligned} d(\tilde{p}^1,\tilde{p}^2) &\le \max\{2^{-N-1}, 6\cdot 2^n C[I^{-(N+n)}(p_0^u \wedge p_0^u)]^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}\} \\ &\le \max\{2^{-N-1}, 6C[I^{-N}(p_0^s \wedge p_0^u)]^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}\} \le 6C[I^{-N}(p_0^s \wedge p_0^u)]^{\frac{1}{\gamma}+\alpha}. \end{aligned}$$

(3) 对任意 $\tilde{x} \in RST$，存在一条链 $\{\psi^{p_k^s,p_k^u}_{\tilde{x}_k}\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma(\mathcal{G})$，使得 $\psi^{p_k^s}_{,\tilde{x}_k\ \ p_k^u}$ I-与 $\psi^{p_k^s}_{,p_k^u}\hat{}f^k(\tilde{x})$ 重叠，并由命题 3.10 得到 $p_k^s \wedge p_k^u \ge q_k\ \forall k \in \mathbb{Z}$，其中 $q_k \in \mathcal{I} \bigcap [I^{-\frac{1}{4}}(q(\hat{}f^n(\tilde{x}))) \ I^{\frac{1}{4}}(q(\hat{}f^n(\tilde{x})))]$，且函数 q 与 RST 的定义相同。对所有 $k \in \mathbb{Z}$，记 $v_k = \psi^{p_k^s}_{,\tilde{x}_k\ \ p_k^u}$，则 $\tilde{x} = \pi((v_k)_{k\in\mathbb{Z}})$。$\hat{}$ 根据 RST 的定义，$\limsup_{n\to\pm\infty} q(f^n(\tilde{x})) > 0$，因此存在无穷多个 $k_i \le 0, k_j \ge 0$，使得 $p_{k_i}^s \wedge p_{k_i}^s \ge q_{k_i} > 0$ 且 $p_{k_j}^s \wedge p_{k_j}^s \ge q_{k_j} > 0$。由命题 3.7(1) 的离散性，存在 $(w_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$，使得 $\pi((w_i))_{i\in\mathbb{Z}} = \tilde{x}$。□

3.4 逆定理

在本小节中，我们始终假设 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\psi^{p_i^s}_{,\tilde{x}_i\ \ p_i^u})_{i\in\mathbb{Z}}$，$(w_i)_{i\in\mathbb{Z}} = (\psi^{q_i^s}_{,\tilde{y}_i\ \ q_i^u})_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$ s.t.$\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \pi((w_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \tilde{z}$，$p(\tilde{z}) = \psi_{\tilde{x}_0}(v)$ 且 $p(\tilde{z}) = \psi_{\tilde{y}_0}(w)$，$v,\ w \in \mathbb{R}^d$。我们将证明这两条 I-链几乎相同，即相应的参数非常“接近”。

1. 估计 $\tilde{x}_i$ 与 $\tilde{y}_i$ 之间的距离，并比较 $\rho(\tilde{x}_i)$与 $\rho(\tilde{y}_i)$:

根据命题3.11(2)，$|v| \le 10^{-2}(p_0^s \wedge p_0^u)^2$。于是

$$d(p(\tilde{x}_0), p(\tilde{z})) = d(\psi_{\tilde{x}_0}(0), \psi_{\tilde{x}_0}(v)) \le 50^{-1}(p_0^s \wedge p_0^u)^2. \tag{3.34}$$

同理，$d(p(\tilde{y}_0)\ p(\tilde{z})) \le 50^{-1}(q_0^s \wedge q_0^u)^2$。因此，$d(p(\tilde{x}_0)\ p(\tilde{y}_0)) \le 25^{-1}\max\{(p_0^s \wedge p_0^u)^2, (q_0^s \wedge q_0^u)^2\}$。

由不等式 (3.34)，$d(p(\tilde{x}_0)\ p(\tilde{z})) \le \epsilon^2\rho(\tilde{x}_0) \le \epsilon^2 d(p(\tilde{x}_0)\ \Gamma_\infty)$，因此，当 ϵ 足够小时，$p(\tilde{z}) \in D_{\tilde{x}_0}$ 且 $p(\tilde{z}) \in \mathcal{E}_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_0)}$。接着

$$d(p(\tilde{z}), \Gamma_\infty) = d(p(\tilde{x}_0), \Gamma_\infty) \pm d(p(\tilde{x}_0), p(\tilde{z})) = e^{\pm\epsilon} d(p(\tilde{x}_0), \Gamma_\infty).$$

根据假设 (A2) 和不等式 (3.34)，$d(p_{\pm1}(\tilde{x}_0)\ p_{\pm1}(\tilde{z})) \le d(p(\tilde{x}_0)\ \Gamma_\infty)^{-a} d(p(\tilde{x}_0)\ p(\tilde{z})) \le \epsilon^2\rho(\tilde{x}_0) \le \epsilon^2 d(p_{\pm1}(\tilde{x}_0)\ \Gamma_\infty)$。因此，$d(p_{\pm1}(\tilde{z})\ \Gamma_\infty) = e^{\pm\epsilon} d(p_{\pm1}(\tilde{x}_0)\ \Gamma_\infty)$。接着 $\rho(\tilde{x}_0)\ \rho(\tilde{z}) = e^{\pm\epsilon}$。同理，$\rho(\tilde{y}_0)\ \rho(\tilde{z}) = e^{\pm\epsilon}$。因此，$\rho(\tilde{x}_0)\ \rho(\tilde{y}_0) = e^{\pm 2\epsilon}$。

将此应用于 $(\psi^{p_{i+k}^s}_{,\tilde{x}_{i+k}\ \ p_{i+k}^u})_{k\in\mathbb{Z}}, (\psi^{q_{i+k}^s}_{,\tilde{y}_{i+k}\ \ p_{i+k}^u})_{k\in\mathbb{Z}}$，对于其他 $i \ne 0$，同样的论证也成立。

2. 比较 $\|C_0(\tilde{x}_i)^{-1}\|$与 $\|C_0(\tilde{y}_i)^{-1}\|$:

假设 $\tilde{z}$ 属于稳定集 $V^s((v_i)_{i\ge0})$，则 $\tilde{z} \in 0$-summ:

$$\begin{aligned} s^2(\tilde{z}) &\le 2\sum_{n=0}^{\infty}\Big(4I^{-n}(p_0^s)\cdot\frac{\|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|}{p_0^s}\Big)^2 \ \text{(by Proposition 3.17)} \\ &\le 32\Big(\frac{\|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|}{p_0^s}\Big)^2\sum_{n=0}^{\infty}(I^{-n}(1))^2 \ (I^-(x) \text{ is an increasing function}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

由于 $\tilde{x}_0$ 是 0-summ，因此 $s^2(\tilde{x}_0) < \infty$ 且 $u^2(\tilde{x}_0) < \infty$，从而根据命题 3.2(1)，$\|C_0(\tilde{x}_0)^{-1}\|^2 < \infty$。又根据命题 3.1(4)，$(\sum_{n=0}^{\infty} I^{-n}(1))^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(I^{-n}(1))^{\frac{1}{\gamma}+(2-\frac{1}{\gamma})} < \infty$。因此，根据不等式 (3.35)，$s^2(\tilde{z}) < \infty$。类似地，$u^2(\tilde{z}) < \infty$。

Let $V_n^u := V^u((v_{i+n})_{i\le0})$ 以及 $V_n^s := V^s((\tilde{v}_{i+n})_{i\ge0})$，其表示函数为 G_n，$V_n^u := V^u((v_{i+n})_{i\le0})$，其表示函数 F_n 在 $\psi^{p_n^s}_{,\tilde{x}_n\ \ p_n^u}$ 处，对所有 $n \in \mathbb{Z}$。对任意 $\tilde{x} \in \tilde{V}_n^s$，定义映射 $\pi^s_{\tilde{x}_n} : T_{\tilde{x}}V_n^s \to E^s_{\tilde{x}_n}$ 为

$$\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi) := d_0\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}\ \forall \xi \in T_{\tilde{x}}\tilde{V}_n^s,$$

其中 $\xi = d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ d_v G_n(w) \end{pmatrix}$ 和 $z = (v,\ G_n(v)) = \psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(p(\tilde{x}))$。类似地，定义映射 $\pi^u_{\tilde{x}_n} : T_{\tilde{x}}\tilde{V}_n^u \to E^u_{\tilde{x}_n}$，使得

$$\pi^u_{\tilde{x}_n}(\zeta) := d_0\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix}\ \forall \zeta \in T_{\tilde{x}}\tilde{V}_n^u,$$

where $\zeta = d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} d_vF_n(w) \\ w \end{pmatrix}$ and $z = (F_n(v), v) = \psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(p(\tilde{x}))$.

引理 3.19 假设 ξ 满足上述条件，则 $\frac{|\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)|}{|\xi|} = e^{\pm Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}}$，$\forall \xi \in T_{\tilde{x}}\tilde{V}^s_n$。

证明 当 ϵ 足够小时，存在一个集合 $D \in \mathcal{D}$，使得 $p(\tilde{x}_n)$ $p(\tilde{x})$ 属于 D，并令 $\Theta := \Theta_D$。然后我们可以估计 $\pi^s_{\tilde{x}_n}$ 的畸变：设 $p(\tilde{x}) = \psi_{\tilde{x}_n}(v, G_n(v))$，则

$$\left|\exp^{-1}_{p(\tilde{x}_n)}(p(\tilde{x}))\right| = d(p(\tilde{x}), p(\tilde{x}_n)) \le |\psi_{\tilde{x}_n}(v, G_n(v)) - \psi_{\tilde{x}_n}(0,0)| \le 4p^s_n. \tag{3.36}$$

因此，

$$\begin{aligned}
|\Theta(\xi) - \Theta(\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))| &= \left|\Theta d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ d_vG_n(w)\end{pmatrix} - \Theta d_0\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ 0\end{pmatrix}\right| \\
&\le \left|\Theta d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ d_vG_n(w)\end{pmatrix} - \Theta d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ 0\end{pmatrix}\right| + \left|\Theta d_z\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ 0\end{pmatrix} - \Theta d_0\psi_{\tilde{x}_n}\begin{pmatrix} w \\ 0\end{pmatrix}\right| \\
&\le 2\|C_0(\tilde{x}_n)\| \cdot \left|\begin{pmatrix} w \\ d_vG_n(w)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w \\ 0\end{pmatrix}\right| + L_3|C_0(\tilde{x}_n)(z)| \\
&\le 2\|d.G_n\| \cdot |w| + L_3 \exp^{-1}_{p(\tilde{x}_n)}(p(\tilde{x})) \text{ (since } z = \psi^{-1}_{\tilde{x}_n}(p(\tilde{x}))) \\
&\le 4(p^s_n)^{\frac{\beta}{2}} \cdot \|C_0(\tilde{x}_n)^{-1}\| + 4L_3p^s_n \text{ (by inequalities (3.14) and (3.36))} \\
&\le Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}.
\end{aligned}$$

□

类似地，$\frac{|\pi^u_{\tilde{x}_n}(\zeta)|}{|\zeta|} = e^{\pm Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}}$，$\forall \zeta \in T_{\tilde{x}}\tilde{V}^u_n$。

引理 *3.20* 令 $\tilde{x} \in \hat{f}(\tilde{\mathcal{F}}_{v_n, v_{n+1}}(\tilde{V}^s_{n+1})) = \hat{f}(\tilde{V}^s_n) \subset \tilde{V}^s_{n+1}$，$\xi \in T_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\tilde{V}^s_n$。对于所有 $\rho_0 \ge e^{\Gamma Q^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}(\tilde{x}_n)}$，如果 $S(\tilde{x}, d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))\, S(\tilde{x}_{n+1}, \pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))) \in [\rho_0^{-1}, \rho_0]$，那么 $S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}), \xi)\, S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)) \in \left[e^{\frac{1}{2}\Gamma Q^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}(\tilde{x}_n)}\rho_0^{-1}, e^{-\frac{1}{2}\Gamma Q^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}(\tilde{x}_n)}\rho_0\right]$。不稳定集也有类似的结论。

证明 不失一般性，假设 $|\xi| = 1$，则 $|\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)| \ge e^{-Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}} \ge \frac{1}{2}$ 当 ϵ 足够小时，由引理 3.19。分解

$$\frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}), \xi)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} = \frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} \cdot \frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}), \xi)}{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}, \tag{3.37}$$

其中 $\zeta = d_{\tilde{x}_{n+1}}\hat{f}^{-1}(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))) \in E^s(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}))$.

首先，我们估计等式（3.37）左侧的因子：

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} - 1\right| &= \left|\frac{|C_0^{-1}(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}))\zeta|}{|C_0^{-1}(\tilde{x}_n)\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)|} - 1\right| \\
&\le 2\left[|C^{-1}_{n+1} \circ \Theta\zeta - C^{-1}_n\Theta\zeta| + |C^{-1}_n\Theta\zeta - C^{-1}_n \circ \Theta\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)|\right] \\
&\le 2\left[\|C^{-1}_{n+1} - C^{-1}_n\| \cdot |\zeta| + \|C^{-1}_n\| \cdot |\Theta\zeta - \Theta\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)|\right],
\end{aligned}$$

其中 $C_n := \Theta \circ C_0(\tilde{x}_n)$ 且 $C_{n+1} := \Theta \circ C_0(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}))$ $\Theta := \Theta_D$（$D \in \mathcal{D}$ 包含 $p(\tilde{x}_n)$ $p(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}))$ 和 $p(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}))$。由命题 3.4(2)，$\|C^{-1}_{n+1} - C^{-1}_n\| \le \eta^3_n\eta^3_{n+1}$ 其中 $\eta_n := p^s_n \wedge p^u_n$。注意，$p(\tilde{x}_{n+1}) \in \mathfrak{E}_{p(\tilde{x}_n)}$ 且 $p(\hat{f}^{-1}(\tilde{x})) \in D_{p(\tilde{x}_n)}$，当 ϵ 足够小时成立。因此，由假设 (A2) 和引理 3.19，

$$|\zeta| = |d_{\tilde{x}_{n+1}}\hat{f}^{-1}(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)))| \le d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-2a}e^{Q(\tilde{x}_{n+1})^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}} \le 2d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-2a}.$$

因此，

$$\left|\frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} - 1\right| \le 4d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-2a}\eta^3_n\eta^3_{n+1} + 2\|C_0(\tilde{x}_n)^{-1}\| \cdot \left(|\Theta\zeta - \Theta\xi| + |\Theta\xi - \Theta\pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi)|\right).$$

接下来，我们估计 $|\Theta\zeta - \Theta\xi|$。假设 $D' \in \mathcal{D}$ 包含点 $p(\tilde{x}_{n+1})$ $p(\tilde{x})$，且 $\Theta' := \Theta_{D'}$。由于 $\tilde{x} \in \hat{f}(\tilde{V}_n^s)$，因此 $\hat{f}^{-1}(\tilde{x}) \in \tilde{V}_n^s$。假设 $p(\hat{f}^{-1}(\tilde{x})) = \psi_{\tilde{x}_n}(v, G_n(v))$ $|v| \le p_n^s$ 且 $p(\tilde{x}) = \psi_{\tilde{x}_{n+1}}(w, G_{n+1}(w))$，则 $|w| \le (e^{-s^2})^{-1}(\overline{\tilde{x}_n) + \epsilon}(p_n^s)^3 + \sqrt{\epsilon}(p_n^s)^{\frac{\beta}{2}}) \cdot |\bar{v}| \le p_n^s$，因此 $d(p(\tilde{x}_{n+1}) \; p(\tilde{x})) \le |\psi_{\tilde{x}_{n+1}}(w, G_{n+1}(w)) - \psi_{\tilde{x}_{n+1}}(0,0)| \le 4p_n^s$，

$$
\begin{aligned}
&|\Theta'\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)) - \Theta' d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)| \le 4(p_n^s)^{\frac{\beta}{2}} \cdot \|C_0(\tilde{x}_{n+1})^{-1}\| + 4L_3 p_n^s \\
&\le Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}} \cdot [(I(p_{n+1}^s))^{\frac{1}{2\gamma}} \cdot \|C_0(\tilde{x}_{n+1})^{-1}\|] + 4L_3 Q(\tilde{x}_n) \le Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}},
\end{aligned}
$$

and

$$
|\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))| \le e^{Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}} \cdot |d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)| \le d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-a} e^{Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}} \tag{3.38}
$$

根据引理3.19的证明。因此，根据假设(A2)、(A3)，

$$
\begin{aligned}
|\Theta\zeta - \Theta\xi| &= |\Theta d_{\tilde{x}_{n+1}}\hat{f}^{-1}(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))) - \Theta d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))| \\
&\le |\Theta d_{\tilde{x}_{n+1}}\hat{f}^{-1}(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))) - \Theta d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}\nu_{\tilde{x}}\Theta'(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)))| \\
&+ |\Theta d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}\nu_{\tilde{x}}\Theta'(\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))) - \Theta d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))| \\
&\le \|\Theta d_{\tilde{x}_{n+1}}\hat{f}^{-1}\nu_{\tilde{x}_{n+1}} - \Theta d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}\nu_{\tilde{x}}\| \cdot |\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi))| \\
&+ \|d_{\tilde{x}}\hat{f}^{-1}\| \cdot |\Theta'\pi^s_{\tilde{x}_{n+1}}(d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)) - \Theta' d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)| \\
&\le Kd(p(\tilde{x}_{n+1}), p(\tilde{x}))^\beta d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-a} e^{Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}} + d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-a} Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}} \\
&\le 2^{1+2\beta} Kd(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-a}[(p_n^s)^\beta + Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}] \\
&\le Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}.
\end{aligned} \tag{3.39}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} - 1\right| &\le 4d(p(\tilde{x}_n), \Gamma_\infty)^{-2a} Q(\tilde{x}_n)^3 Q(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}))^3 + 2\|C_0(\tilde{x}_n)^{-1}\| \cdot \left(Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}} + Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}}\right) \\
&\le Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}.
\end{aligned}
$$

这意味着

$$
\frac{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta)}{S(\tilde{x}_n, \pi^s_{\tilde{x}_n}(\xi))} = e^{\pm Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}. \tag{3.40}
$$

对于等式右边的因子（3.37）$^{S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}) \; \xi) \; S(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}) \; \zeta)}$：根据定义，我们有

$$
S^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}), \xi) = 2\sum_{m=0}^{\infty} |d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}^m(\xi)|^2 = 2|\xi|^2 + S^2(\tilde{x}, d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x})}\hat{f}(\xi)),
$$

and

$$
S^2(\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1}), \zeta) = 2\sum_{m=0}^{\infty} |d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1})}\hat{f}^m(\zeta)|^2 = 2|\zeta|^2 + S^2(\tilde{x}_{n+1}, d_{\hat{f}^{-1}(\tilde{x}_{n+1})}\hat{f}(\zeta)).
$$

根据不等式（3.39），

$$
e^{-Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}} \le |\zeta| \le e^{Q(\tilde{x}_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}}. \tag{3.41}
$$

Then

$$\begin{aligned}
\frac{S^2(\hat f^{-1}(\tilde x),\xi)}{S^2(\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1}),\zeta)} &= \frac{2|\xi|^2+S^2(\tilde x, d_{\hat f^{-1}(\tilde x)}\hat f(\xi))}{2|\zeta|^2+S^2(\tilde x_{n+1}, d_{\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1})}\hat f(\zeta))} \overset{\text{by assumption}}{\le} \frac{2|\xi|^2+\rho_0^2 S^2(\tilde x_{n+1}, \pi^s_{\tilde x_{n+1}}(d_{\hat f^{-1}}(\tilde x)\hat f(\xi)))}{2|\zeta|^2+S^2(\tilde x_{n+1}, d_{\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1})}\hat f(\zeta))}\\
&= \frac{2|\xi|^2+\rho_0^2 S^2(\tilde x_{n+1}, d_{\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1})}\hat f(\zeta))}{2|\zeta|^2+S^2(\tilde x_{n+1}, d_{\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1})}\hat f(\zeta))} = \rho_0^2 - \frac{2(\rho_0^2-1)|\zeta|^2+2(|\zeta|^2-1)}{S^2(\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1}),\zeta)}\\
&\le \rho_0^2 - 2(\rho_0^2-1)\frac{|\zeta|^2+\frac{|\zeta|^2-1}{\rho_0^2-1}}{S^2(\tilde x_n, \pi^s_{\tilde x_n}(\xi))}\cdot e^{-Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}} \text{ (by inequality (3.40))}\\
&\le \rho_0^2 - 2(\rho_0^2-1)\frac{e^{-2Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}}+\frac{e^{-2Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}}-1}{e^{2\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}-1}}{S^2(\tilde x_n, \pi^s_{\tilde x_n}(\xi))}\cdot e^{-Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}\\
&\le \rho_0^2 - 2(\rho_0^2-1)\frac{e^{-2Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}}-\frac{1}{\Gamma}Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}{\|C_0(\tilde x_n)^{-1}\|^2\cdot|\pi^s_{\tilde x_n}(\xi)|^2}\cdot e^{-Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}\\
&\le \rho_0^2 - 2(\rho_0^2-1)\frac{1-2Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{2\gamma}}-\frac{1}{\Gamma}Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}{\|C_0(\tilde x_n)^{-1}\|^2}\cdot e^{-Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}-2Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2\gamma}}}\\
&\le \rho_0^2\Big(1-\frac{2(1-\frac{1}{\rho_0^2})e^{-\frac{3}{\Gamma}Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}}{\|C_0(\tilde x_n)^{-1}\|^2}\cdot e^{-3Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}\Big)\\
&\le \rho_0^2\Big(1-\frac{\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}{\|C_0(\tilde x_n)^{-1}\|^2}\cdot e^{-\frac{4}{\Gamma}Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}\Big)\\
&\le \rho_0^2\Big(1-\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}+\frac{1}{\gamma}}\Big) \text{ (since } Q(\tilde x_n)^{\frac{1}{\gamma}}\le\|C_0(\tilde x_n)^{-1}\|^{-2}).
\end{aligned}$$

因此，$S^2(\hat f^{-1}(\tilde x),\xi)\,S^2(\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1}),\zeta) \le \rho_0^2 e^{-\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}$。类似地，$S^2(\hat f^{-1}(\tilde x),\xi)\,S^2(\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1}),\zeta) \ge \rho_0^{-2} e^{\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}$。将不等式(3.37)与不等式(3.40)结合，

$$\begin{aligned}
&\frac{S^2(\hat f^{-1}(\tilde x),\xi)}{S^2(\tilde x_n,\pi^s_{\tilde x_n}(\xi))} \le \rho_0^2 e^{Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}-\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}\\
&\le \rho_0^2 e^{-\frac{1}{4}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}+(Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}-\frac{1}{4}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}})} \le \rho_0^2 e^{-\frac{1}{4}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}.
\end{aligned}$$

同理，$S^2(\hat f^{-1}(\tilde x),\xi)\,S^2(\tilde x_n,\pi^s_{\tilde x_n}(\xi)) \ge \rho_0^{-2} e^{\frac{1}{4}\Gamma Q(\tilde x_n)^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}$。

注意，如果 $\psi^{p_0^s}_{\tilde x_n,\,p_0^u} \to \psi^{p_1^s,\,p_1^u}_{\tilde x_{n+1}}$，那么 $f^{-1}_{\tilde x_n}$，$f^{-1}\circ\hat f^{-1}(\tilde x_{n+1})$ 重合。类似地，该结论对不稳定集也成立。□

注 5 在我们的情形下，比例 $Q(\hat f(\tilde x))/Q(\tilde x)$ 的界并不确定，因为 $\rho(\hat f(\tilde x))$ 和 $\rho(\tilde x)$ 难以比较。因此，我们无法直接利用引理 3.19 得到 $|\Theta\zeta-\Theta\xi|$ 的估计。

引理 *3.21* 对任意 I-链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(\psi^{p_i^s}_{\tilde x_i,\,p_i^u})_{i\in\mathbb{Z}}$、$(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(\psi^{q_i^s}_{\tilde y_i,\,q_i^u})_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma^{\#}$，若 $\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\pi((w_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\tilde z$，则 $\forall i\in\mathbb{Z}$，且 $\xi\in T_{\hat f^i(\tilde z)}V_i^s$，

$$\frac{S(\tilde x_i,\pi^s_{\tilde x_i}(\xi))}{S(\tilde y_i,\pi^s_{\tilde y_i}(\xi))} = e^{\pm 2\Gamma Q(\tilde x_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}.$$

证明 将 $S(\tilde x_i,\pi^s_{\tilde x_i}(\xi))\,S(\tilde y_i,\pi^s_{\tilde y_i}(\xi))=S(\tilde x_i,\pi^s_{\tilde x_i}(\xi))\,S(\hat f^i(\tilde z),\xi)\,S(\hat f^i(\tilde z),\xi)\,S(\tilde y_i,\pi^s_{\tilde y_i}(\xi))$ 分解。接下来，我们估计 $S(\hat f^i(\tilde z),\xi)\,S(\tilde x_i,\pi^s_{\tilde x_i}(\xi))$：不失一般性，假设对于无穷多个 $n_k>0$，$v_{n_k}=v$，其中 $v=\psi^{p_{j_0}^s,\,p_{j_0}^u}_{\tilde x_{j_0}}$。由不等式 (3.35)，存在一个仅依赖于 v 的常数 $C_v>1$，使得 $s(\hat f^{n_k}(\tilde z))<C_v$。令 $k_v:=\Big[\frac{\log C_v}{\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde x_{j_0})^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}\Big]+1$，并令 $\xi\in T_{\hat f^{n_{k_v}}(\tilde z)}\tilde V^s_{n_{k_v}}(1)$。由引理 3.20，存在 $j\in\{0,\cdots,n_{k_v}\}$，使得

$$\frac{S(\hat f^j(\tilde z),d_{\hat f^{n_{k_v}}(\tilde z)}\hat f^{-(n_{k_v}-j)}(\xi))}{S(\tilde x_j,\pi^s_{\tilde x_j}(d_{\hat f^{n_{k_v}}(\tilde z)}\hat f^{-(n_{k_v}-j)}(\xi)))} = e^{\pm\Gamma Q(\tilde x_j)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}.$$

否则，该比值会增加 $e^{k_v\cdot\frac{1}{2}\Gamma Q(\tilde{x}_{j_0})^{\frac{\beta}{8}+\frac{3}{4\gamma}}}\geq C_v$，因此该比值大于 C_v；此时初始比值小于 C_v。将 j 向后拉回至 0 后，该比值会增加或保持不变，增加量为 $\epsilon e^{\pm Q(\tilde{x}_j)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}$，由不等式（3.40）的证明可知。对于所有 $\xi'\in T_{\tilde{z}}\tilde{V}_0^s(1)$，满足 $\hat{}\xi=d_{\tilde{z}}f^{n_{k_v}}(\xi')$ 的 $\exists\xi\in T_{\hat{}f^{n_{k_v}}(\tilde{z})}\tilde{V}^s_{n_{k_v}}$，则

$$\frac{S(\tilde{z},\xi')}{S(\tilde{x}_0,\pi^s_{\tilde{x}_0}\xi')}=e^{\pm\max\left\{\epsilon Q(\tilde{x}_0)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}},\Gamma Q(\tilde{x}_0)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}\right\}}=e^{\pm\Gamma Q(\tilde{x}_0)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}.$$

类似地，$S_{(\tilde{z},\xi')}S(\tilde{y}_0,\pi^s_{\tilde{y}_0}\xi')=e^{\pm\Gamma Q(\tilde{x}_0)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}$。因此，该结论对 $i=0$ 成立。对I-链 $(v_{i+k})_{i\in\mathbb{Z}}$ 和 $(w_{i+k})_{i\in\mathbb{Z}}$应用该过程，我们得到关于 $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 的相同结论。□

定义 $P_i:=P_i^s+P_i^u:=\pi^s_{\tilde{y}_i}\circ(\pi^s_{\tilde{x}_i})^{-1}+\pi^u_{\tilde{y}_i}\circ(\pi^u_{\tilde{x}_i})^{-1}\colon T_{\tilde{x}_i}M^f\to T_{\tilde{y}_i}M^f$，且它满足下述引理，证明见[13]。

引理 3.22 $\|P_i\|,\|P_i^{-1}\|\leq e^{Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{4}-\frac{1}{\gamma}}}$，对所有 $i\in\mathbb{Z}$。

命题 3.23 对于任意满足 $\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\pi((w_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\tilde{z}$ 的 I 链 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(\psi^{p_i^s}_{\tilde{x}_i,p_i^u})_{i\in\mathbb{Z}}$、$(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}=(\psi^{q_i^s}_{\tilde{y}_i,q_i^u})_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma^{\#}$，则 $\forall i\in\mathbb{Z}$，

$$\frac{\|C_0^{-1}(\tilde{x}_i)\|}{\|C_0^{-1}(\tilde{y}_i)\|}=e^{\pm(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\min\{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{\gamma},\frac{\beta}{4}-\frac{1}{4\gamma}\}}}.$$

证明 根据引理 3.2(1)，$\frac{|C_0^{-1}\tilde{x}_i\ \xi|}{|C_0^{-1}\tilde{y}_i\ P_i\xi|}=\sqrt{\frac{S^2(\tilde{x}_i,\xi_s)+U^2(\tilde{x}_i,\xi_u)}{S^2(\tilde{y}_i,P_i(\xi_s))+U^2(\tilde{y}_i,P_i(\xi_u))}}$，其中 $\xi:=\xi^s+\xi^u\in E^s_{\tilde{x}_i}\oplus E^u_{\tilde{x}_i}$。又由引理 3.21，$\frac{S^2(\tilde{x}_i,\xi_s)}{S^2(\tilde{y}_i,P_i(\xi_s))}=e^{\pm4\Gamma Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}$，$\frac{U^2(\tilde{x}_i,\xi_u)}{U^2(\tilde{y}_i,P_i(\xi_u))}=e^{\pm4\Gamma Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}$。于是 $\frac{|C_0^{-1}\tilde{x}_i\ \xi|}{|C_0^{-1}\tilde{y}_i\ P_i\xi|}=e^{\pm2\Gamma Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}$。由引理 3.22，我们得到

$$\frac{\|C_0^{-1}(\tilde{x}_i)\|}{\|C_0^{-1}(\tilde{y}_i)\|}=e^{\pm(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}.$$

3. 比较 $Q(\tilde{x}_i)$与 $Q(\tilde{y}_i)$：

回想一下，$Q_\epsilon(\tilde{x}):=\max\{q\in\mathcal{I}\mid q\leq\tilde{Q}_\epsilon(\tilde{x})\}$，其中 $\tilde{Q}_\epsilon(\tilde{x}):=\epsilon^{\frac{20}{\beta}}\rho(\tilde{x})^{\frac{8a}{\beta}}\cdot\|C_0(\tilde{x})^{-1}\|^{-2\gamma}$。由命题 3.23，$\frac{\|C_0^{-1}(\tilde{x}_i\|^{-2\gamma}}{\|C_0^{-1}\tilde{y}_i\|^{-2\gamma}}=e^{\pm2\gamma(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}}$。并且根据本小节第一部分 1，$\frac{\rho(\tilde{x}_i)^{\frac{8a}{\beta}}}{\rho(\tilde{y}_i)^{\frac{8a}{\beta}}}=e^{\pm\frac{16a\epsilon}{\beta}}$。于是 $\forall i\in\mathbb{Z}$，

$$\frac{\tilde{Q}(\tilde{x}_i)}{\tilde{Q}(\tilde{y}_i)}=e^{\pm\left(2\gamma(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}+\frac{16a\epsilon}{\beta}\right)},$$

因此，对于足够小的 $Q(\tilde{x}_i)$，有 $Q(\tilde{y}_i)\in\left[I^{-\frac{1}{4}}(1)e^{-\left(2\gamma(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}+\frac{16a\epsilon}{\beta}\right)},\ I^{\frac{1}{4}}(1)e^{\left(2\gamma(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i)^{\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}}+\frac{16a\epsilon}{\beta}\right)}\right]$，因为 $I^{-\frac{1}{4}}(1)\tilde{Q}(\tilde{x})\leq Q(\tilde{x})\leq Q(\tilde{x})$。此外，当 ϵ 足够小时，我们有 $Q(\tilde{y}_i)=I^{\pm1}(Q(\tilde{x}_i))$（因为 $\frac{\beta}{8}-\frac{1}{4\gamma}-\frac{1}{\gamma}>0$）。

断言 4 $\pi(\Sigma^{\#})=RST$。

证明 由定理 3.18(3)，$\pi(\Sigma^{\#})\supset RST$。接下来，我们将证明 $\pi(\Sigma^{\#})\subset RST$：对于任意 $(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma^{\#}$，其中 $u_i=\psi^{p_i^s}_{\tilde{x}_i,p_i^u}$，则 $\limsup_{i\to\pm\infty}(p_i^s\wedge p_i^u)>0$。令 $\tilde{z}:=\pi((u_i)_{i\in\mathbb{Z}})$，则根据引理 3.21 和命题 3.23 的证明，$Q(\hat{}f^i(\tilde{z}))=I^{\pm1}(Q(\tilde{x}_i))$。因此，$I^{-1}(p_i^s\wedge p_i^u)\leq I^{-1}(Q(\tilde{x}_i))\leq Q(\hat{}f^i(\tilde{z}))$。将点 $\tilde{z}$ 处的映射 $q(\cdot)$ 定义为 $q(\hat{}f^i(\tilde{z}))=I^{-1}(p_i^s\wedge p_i^u)$，则

(i) $q\circ\hat{f}=I^{\pm1}(q)$：$\forall i\in\mathbb{Z}$，$q\circ\hat{f}(\hat{f}^i(\tilde{z}))=q(\hat{f}^{i+1}(\tilde{z}))=I^{-1}(p^s_{i+1}\wedge p^u_{i+1})=I^{-1}(I^{\pm1}(p_i^s\wedge p_i^u))=I^{\pm1}(I^{-1}(p_i^s\wedge p_i^u))=I^{\pm1}(q(\hat{f}^i(\tilde{z})))$；

(ii) $q(\hat{}f^i(\tilde{z}))=I^{-1}(p_i^s\wedge p_i^u)\leq I^{-1}(Q(\tilde{x}_i))\leq Q(\hat{}f^i(\tilde{z}))$；(iii) 上极限 $_{i\to\pm\infty}I^{-1}(p_i^s\wedge p_i^u)\geq$ 上极限$_{i\to\pm\infty}(p_i^s\wedge p_i^u)e^{-\Gamma(p_i^s\wedge p_i^u)^{-\gamma}}>0$。

因此，该点为 $\tilde{z} \in RST$。 □

4. 比较 $p^{s/u}(\tilde{x}_i)$与 $q^{s/u}(\tilde{y}_i)$:

由于 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$，上极限$_{i\to\pm\infty}(p_i^s \wedge p_i^u) > 0$。那么存在 $l_1 > 0$ 和 $l_2 < 0$，使得 $p_{l_1}^s = Q(\tilde{x}_{l_1})$ 以及 $p_{l_2}^u = Q\ \tilde{x}_{l_2}$ 3 9 $Q\ \tilde{x}_{l_1} \geq I^{-1}\ Q\ \tilde{y}_{l_1} \geq I^{-1}\ q_{l_1}^s$ $Q\ \tilde{x}_{l_2} \geq I^{-1}\ Q\ \tilde{y}_{l_2} \geq ($), 根据引理。。由于 ( ) I^{-1} (( )) ( ) 且 ( ) (( )) $(q_{l_2}^u)$，因此 $p_{l_1}^s \geq I^{-1}(q_{l_1}^s)$ 以及 $p_{l_2}^u \geq I^{-1}(q_{l_2}^u)$。根据定义

$$\begin{aligned} p_{l_1-1}^s &= \min\left\{I(p_{l_1}^s), Q(\tilde{x}_{l_1-1})\right\} \geq \min\left\{I(I^{-1}(q_{l_1}^s)), I^{-1}(Q(\tilde{y}_{l_1-1}))\right\} \\ &= I^{-1}\min\left\{I(q_{l_1}^s), Q(\tilde{y}_{l_1-1})\right\} = I^{-1}(q_{l_1-1}^s), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} p_{l_2+1}^u &= \min\left\{I(p_{l_2}^u), Q(\tilde{x}_{l_2+1})\right\} \geq \min\left\{I(I^{-1}(q_{l_2}^u)), I^{-1}(Q(\tilde{y}_{l_2+1}))\right\} \\ &= I^{-1}\min\left\{I(q_{l_2}^u), Q(\tilde{y}_{l_2+1})\right\} = I^{-1}(q_{l_2+1}^u). \end{aligned}$$

通过归纳法，我们有 $p_0^s \geq I^{-1}(q_0^s)$和 $p_0^u \geq I^{-1}(q_0^u)$。对称地，对于$(w_i)_{i\in\mathbb{Z}}$也有相同的结论： $q_0^s \geq I^{-1}(p_0^s)$和 $q_0^u \geq I^{-1}(p_0^u)$。因此， $p_0^s = I^{\pm}(q_0^s)$和 $p_0^u = I^{\pm}(q_0^u)$。将此应用于$(\psi^{p_{i+k}^s}_{\cdot,\ \tilde{x}_{i+k}}{}^{p_{i+k}^u})_{k\in\mathbb{Z}}$，$(\psi^{q_{i+k}^s}_{\cdot,\ \tilde{y}_{i+k}}{}^{p_{i+k}^u})_{k\in\mathbb{Z}}$，我们得到 $p_i^s = I^{\pm 1}(q_i^s)$、 $p_i^u = I^{\pm 1}(q_i^u)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$。

下面的定理总结了本小节的结论。最后一项的证明与 [12]中的证明类似。

定理 3.24 对于任意 I-链($\pi\ \ w_i\ _{i\in\mathbb{Z}} = \tilde{z}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ $v_i\ _{i\in\mathbb{Z}} =$ $_{i\in\mathbb{Z}}\ \ w_i\ _{i\in\mathbb{Z}} =$ $\pi\ \ v_i\ _{i\in\mathbb{Z}} =$) $(\psi^{p_i^s}_{\cdot,\tilde{x}_i}{}^{p_i^u})$, $()(\psi^{q_i^s}_{\cdot,\tilde{y}_i}{}^{q_i^u})_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$，使得$(())(())$，则，

(1) $d(p(\tilde{x}_i)\ p(\tilde{y}_i)) \leq 25^{-1}\,max\left\{(p_i^s \wedge p_i^u)^2, (q_i^s \wedge q_i^u)^2\right\}$. *(2)* $\frac{\|C_0^{-1}\ \tilde{x}_i\ \|}{\|C_0^{-1}\ \tilde{y}_i}$ ( ) ( ) $= e^{\pm(2\Gamma+1)Q(\tilde{x}_i}{}^{\beta}_{8}{}^{-\frac{1}{4\gamma}}$. *(3)* Q $(\tilde{y}_i) = I^{\pm 1}(Q(\tilde{x}_i))$. *(4)* $p_i^s = I^{\pm 1}(q_i^s)$, $p_i^u = I^{\pm 1}(q_i^u)$. *(5)* $(\psi_{\tilde{y}_n}^{-1} \circ \psi_{\tilde{x}_n})(u) = O_n(u) + a_n + \Delta_n(u)$ $\forall u \in B_\epsilon(0)$, 其中 a_n 是 $\mathbb{R}^d$ 中的常向量，满足$|a_n| \leq 10^{-1}(q_n^s \wedge q_n^u)$； O_n 是一个正交矩阵，保持 $\mathbb{R}^{d_s}(\tilde{x}_0)$ 和 $\mathbb{R}^{d-d_s}(\tilde{x}_0)$；且 $\Delta_n : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^d$满足 $\Delta_n(0) = 0$, $\|d_u\Delta_n\| \leq \epsilon^{\frac{1}{3}}$。

-

3.5 局部有限马尔可夫分割

Let

$$Z(v) = \{\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) : (v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#} \text{ and } v_0 = v\},$$

于是 $\mathcal{Z} := \{Z(v) : v \in \mathcal{V}\}$是集合 RST的覆盖，因为 $\pi(\Sigma^{\#}) = RST$。 $\mathcal{Z}$称为马尔可夫覆盖。对于任意 $\tilde{x} \in Z := Z(v)$，存在 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$ 使得 $v_0 = v$ 且 $\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \tilde{x}$。记 $\tilde{V}^s(\tilde{x}, Z) := \tilde{V}^s((v_i)_{i\geq 0})$, $\tilde{V}^u(\tilde{x}, Z) := \tilde{V}^u((v_i)_{i\leq 0})$; 并且 $\tilde{W}^s(\tilde{x}, Z) := V^s(\tilde{x}, Z) \bigcap Z$, $\tilde{W}^u(\tilde{x}, Z) := V^u(\tilde{x}, Z) \bigcap Z$。根据稳定集/不稳定集的性质，下面的命题给出了 $\tilde{W}^s(\tilde{x}, Z)$, $\tilde{W}^u(\tilde{x}, Z)$的性质。这为局部有限马尔可夫分割的构造做准备。

命题 3.25 对每个 $Z \in \mathcal{Z}$，假设 $\tilde{x} = \pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \in Z$ 其中 $(v_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^{\#}$。下列陈述对足够小的 $\epsilon > 0$ 成立：

(1)（局部有限） $|\{Z' \in \mathcal{Z} : \tilde{Z}' \bigcap \tilde{Z} \neq \emptyset\}| < \infty$。

(2) 对每个 $\tilde{y} \in Z$， $\tilde{W}^s(\tilde{x}, Z)$ $\tilde{W}^s(\tilde{y}, Z)$ 要么相等，要么不相交。对 $\tilde{W}^u(\tilde{x}, Z)$ $\tilde{W}^u(\tilde{y}, Z)$ 亦然。 *(3)* 对每个 $\tilde{y} \in Z$，存在唯一元素 $\tilde{z}$，使得 $\tilde{W}^s(\tilde{x}, Z) \bigcap \tilde{W}^u(\tilde{y}, Z) = \{\tilde{z}\}$。*(4)*（马尔可夫性质） $\hat{}\, f(\tilde{W}^s(\tilde{x}, Z(v_0))) \subset \tilde{W}^s(\hat{}\, f(\tilde{x})$ $Z(v_1))$ 且 $\hat{}\, f^{-1}(\tilde{W}^u(\hat{}\, f(\tilde{x})\ Z(v_1))) \subset \tilde{W}^u(\tilde{x}, Z(v_0))$。

(5) 存在一个映射 $[\cdot,\cdot]_Z : \tilde{W}^s(\cdot, Z) \times \tilde{W}^u(\cdot, Z)$。若 $\tilde{y} \in Z(v_0)$ $f(\tilde{y}) \in Z(v_1)$，则 $f([\tilde{x}, \tilde{y}]_{Z(v_0)}) = \hat{}\,[f(\tilde{x})\ f(\tilde{y})]_{Z(v_1)}$。

(6)（一致收缩/扩张）若 $\tilde{y} \in W^s(\tilde{x}, Z)$ $\tilde{z} \in W^u(\tilde{x}, Z)$，则

$$d(\hat{f}^n(\tilde{x}), \hat{f}^n(\tilde{y})) \leq 8I^{-n}(1), d(\hat{f}^{-n}(\tilde{x}), \hat{f}^{-n}(\tilde{z})) \leq 8I^{-n}(1) \forall n \in \mathbb{N}.$$

(7) 若 $Z' \in \mathcal{Z}$ with $Z \bigcap Z' \neq \emptyset$，其中 $Z = Z(\psi^{p_0^s}_{\tilde{x}_0, p_0^u})$ $Z' = Z'(\psi^{q_0^s}_{\tilde{y}_0, q_0^u})$。则

(a) $p(Z) \subset \psi_{\tilde{y}_0}[B_{q_0^s \wedge q_0^u}(0)]$; (b) 若 $\tilde{x} \in Z \bigcap Z'$，则 $W^s(\tilde{x}, Z) \subset V^s(\tilde{x}, Z')$ 且 $W^u(\tilde{x}, Z) \subset V^u(\tilde{x}, Z')$; (c) 若 $\tilde{y} \in Z'$ 且 $\tilde{x} \in Z \bigcap Z'$，则存在唯一的元素 $\tilde{o}$，使得 $V^s(\tilde{x}, Z) \bigcap V^u(\tilde{y}, Z') = \{\tilde{o}\}$。

证明 (1) 假设 $Z = Z(\psi^{p_0^s}_{\tilde{x}_0, p_0^u})$ $Z' = Z'(\psi^{q_0^s}_{\tilde{y}_0, q_0^u})$，且 $\tilde{x} = \pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \pi((w_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \in Z' \bigcap Z$ 其中 $v_0 = \psi^{p_0^s}_{\tilde{x}_0, p_0^u}, w_0 = \psi^{q_0^s}_{\tilde{y}_0, q_0^u}$。由定理 3.24(4)，$q_0^s \geq I^{-1}(p_0^s)$ 与 $q_0^u \geq I^{-1}(p_0^u)$。因此，由离散性，在 $\mathcal{V}$ 中仅有有限多个双重图表 $\psi^{q_0^s}_{\tilde{y}_0, q_0^u}$，使得 $\tilde{x} = \pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = \pi((w_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \in Z' \bigcap Z$。

(2) 由命题 3.16(5)，稳定/不稳定集 $\tilde{V}^{s/u}(\tilde{x}, Z)$ $\tilde{V}^{s/u}(\tilde{y}, Z)$ 要么相等，要么不相交。于是对 $\tilde{W}^{s/u}(\tilde{x}, Z)$ $\tilde{W}^{s/u}(\tilde{y}, Z)$ 由定义成立。

(3) 根据命题 3.16(1)，稳定集（点 $\tilde{z} \in Z$ 的构造见 [16]）因此不稳定集 $W^s(\tilde{x}, Z) \bigcap W^u(\tilde{y}, Z) = \{\tilde{z}\}$。

(4) 使用 $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$ 和命题3.16(3)，第 (4) 部分可按照 [16]中命题 10.9 的证明来证明。

(5) 映射 $[\cdot, \cdot]_Z$ 良定义 (3)，它称为斯梅尔括号。由命题 3.16(6)，部分 (4) 可仿照 [16] 中引理 10.7 的证明得出。

(6) 利用命题 3.11(4)，部分 (6) 成立。

(7) (a) 由命题 3.11(1)，$p(Z) \subset \psi_{\tilde{x}_0}[B_{10^{-2}(p_0^s \wedge p_0^u)^2}(0)]$。于是

$$p(Z) \subset \psi_{\tilde{y}_0} \circ (\psi_{\tilde{y}_0}^{-1} \circ \psi_{\tilde{x}_0})[B_{10^{-2}(p_0^s \wedge p_0^u)^2}(0)] \subset \psi_{\tilde{y}_0}[B_{q_0^s \wedge q_0^u}(0)],$$

由定理 3.24(5)。

(b) 证明的关键在于利用稳定集/不稳定集的等价定义来证明 $\tilde{V}^{s/u}(\tilde{x}, Z) = \tilde{V}^{s/u}(\tilde{x}, Z')$。

(c) 利用定理 3.24(5) 和图变换，$V^s = p(V^s(\tilde{x}, Z))$ 可表示为 $\psi_{\tilde{y}_0}$ 中的图。假设 $V^s = \psi_{\tilde{y}_0}\{(\tilde{w}, G(\tilde{w})) : \tilde{w} \text{ 在某个区域}\}$中，由定理 3.24(5) 可知 G 是压缩的。然后我们由不动点定理和 Kirszbraun定理得到 $V^s(\tilde{x}, Z)$ 与 $V^s(\tilde{y}, Z')$ 相交于单一点。□

利用由 Sinaĭ 和 Bowen 首先发展的方法 [4, 5, 7], 存在一个局部有限的马尔可夫划分$\mathcal{R}$ 它由 RST 上如下的等价关系定义：

$$\tilde{x} = \tilde{y} \iff \forall Z, Z' \in \mathcal{Z} : \begin{cases} \tilde{x} \in Z \iff \tilde{y} \in Z \\ \tilde{W}^s(\tilde{x}, Z) \bigcap Z' \neq \emptyset \iff \tilde{W}^s(\tilde{y}, Z) \bigcap Z' \neq \emptyset \\ \tilde{W}^u(\tilde{x}, Z) \bigcap Z' \neq \emptyset \iff \tilde{W}^u(\tilde{y}, Z) \bigcap Z' \neq \emptyset. \end{cases}$$

根据命题3.25，划分 $\mathcal{R}$满足：

(1) 乘积结构。(2) 马尔可夫性质。(3) $Z \in \mathcal{Z}$ 包含有限个 $R \in \mathcal{R}$、$\forall Z \in \mathcal{Z}$。

设 $\mathcal{G}$ 为一个具有顶点 $\mathcal{V} = \mathcal{R}$ 和边 $\mathcal{E}$ 的可数有向图：$= \{(R, S) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} : R \bigcap \hat{f}^{-1}(S) \neq \emptyset\}$. 记 $\tilde{\Sigma} := \tilde{\Sigma}(\tilde{\mathcal{G}})$为与 $\tilde{\mathcal{G}}$关联的拓扑马尔可夫移位。我们断言，的每个顶点 $\mathcal{G}$ 都具有有限度，即 $|\{S \in \mathcal{R} : R \to S\}| < \infty$：设 $R \to S$ 和 $R \subset Z(u)$，其中$u \in \mathcal{V}$。并且 $R \bigcap \hat{f}^{-1}(S) \neq \emptyset \iff \hat{f}(R) \bigcap S \neq$，因为 $\hat{f}$ 是同胚。如果 $\tilde{x} \in \hat{f}(R) \bigcap S$，则存在 $v \in \mathcal{V}$ 使得 $u \to v$ 和 $S \subset Z(v)$。注意到 $Z \in \mathcal{Z}$ 包含有限个 $R \in \mathcal{R}$、$\forall Z \in \mathcal{Z}$，且 $\mathcal{V}$ 具有有限度。因此该断言成立。此外，Σ是局部紧的。

以下引理可见于 [3]。

引理 3.26 *(1)* 若 $\underline{R} = (R_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ 且 $R_0 \subset Z(v)$，则存在 $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$，使得 $v_0 = v$ *s.t.* $\bigcap_{i=m}^n \hat{f}^{-i}(R_i) \subset \bigcap_{i=m}^n \hat{f}^{-i}(Z(v_i))$ $\forall m \leq n$。并且若 $R \in \tilde{\Sigma}^\#$，则 $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma^\#$。

(2)（*Bowen*性质）若 $R=(R_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $S=(S_n)_{n\in\mathbb{Z}}\in\Sigma$，则 $\tilde{\pi}(R)=\tilde{\pi}(S)$ 当且仅当 $R_n\sim S_n\ \forall n\in\mathbb{Z}$, 其中$R_n\sim S_n \iff \exists Z_n,\ Z_n'\in\mathcal{Z}$ *s.t.* $R_n\subset Z_n,\ S_n\subset Z_n'$ 且 $Z_n\bigcap Z_n'\neq\emptyset$。

考虑路径 $R_m\to R_{m+1}\to\cdots\to R_n$ 在 $\tilde{\mathcal{G}}(m<n)$ 上，则根据 $\mathcal{R}$ 的马尔可夫性质，$\bigcap_{i=m}^{n}\hat{f}^{-1}(R_i)\neq\emptyset$，且 $\bigcap_{i=-n}^{n}\hat{f}^{-i}(R_i)$ 的直径 $\leq 16I^{-n}$(1)，于是直径趋于零。定义 $\tilde{\pi}:\ \tilde{\Sigma}\to M^f$，使得 $\{\tilde{\pi}(R)\}=\bigcap_{n\geq 0}\bigcap_{i=-n}^{n}\hat{f}^{-i}(R_i)$。对于 $R\in\mathcal{R}$，定义

$$N(R):=|\{(R',v')\in\mathcal{R}\times\mathcal{A}:R'\sim R \text{ and } R'\subset Z(v')\}|.$$

现在我们可以给出主定理。

定理 3.27 当 $\epsilon>0$ 足够小时，映射 $\tilde{\pi}$ 满足：

(1) $\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})=RST$。*(2)* 若 $\tilde{x}=\tilde{\pi}(R)$，其中 $R_n=R$ 对无穷多个 $n<0$ 成立，且 $R_n=S$ 对无穷多个 $n>0$ 成立，则 $|\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{x})\bigcap\tilde{\Sigma}^{\#}|\leq N(R)\cdot N(S)$（$\tilde{\pi}$ 是有限到一映射）。*(3)* $\tilde{\pi}\circ\sigma=f\circ\tilde{\pi}$。*(4)* $\tilde{\pi}$ 在 Σ 上一致连续。

证明 (1) $RST\subset\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})$：如果 $\tilde{x}\in RST$, $\exists(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma^{\#}$ s.t. $\pi((v_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\tilde{x}$，则由定理 3.18(3)可得。根据 $\mathcal{R}$的构造，存在 $R_i\in\mathcal{R}$，使得 $R_i\subset Z(v_i)\ \forall i\in\mathbb{Z}$ 且 $\tilde{\pi}((R_i)_{i\in\mathbb{Z}})=\tilde{x}$，并且 $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\tilde{\Sigma}^{\#}$，因为 $Z\in\mathcal{Z}$只包含有限多个 $R\in\mathcal{R}$, $\forall Z\in\mathcal{Z}$。并且 $\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})\subset RST$：由断言 4，$RST=\pi(\Sigma^{\#})$。由引理3.26(1)，$\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})\subset\pi(\Sigma^{\#})$。因此，$\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})=\pi(\Sigma^{\#})=RST$。

(2) 证明与 [3]中的定理 7.6 的证明相同。（3）由引理3.26(1)和定理3.18(1)，部分（3）成立。

(4) 假设 $R=(R_i)_{i\in\mathbb{Z}},\ S=(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in\tilde{\Sigma}^{\#}$ 满足 $d(\tilde{\pi}(R),\tilde{\pi}(S))=\epsilon$，则 $R_i\in S_i,\ \forall|i|\leq n$。因此，$d(\tilde{\pi}(R),\tilde{\pi}(S))\leq diam(\bigcap_{i=-n}^{n}\hat{f}^{-i}(R_i))\leq 16I^{-n}(1)=16I^{\log d(R,S)}(1)$。□

命题 3.28 假设 $\tilde{x}\in\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})$，则存在一个分裂 $T_{\tilde{x}}M^f=E^s(\tilde{x})\oplus E^u(\tilde{x})$，其中

$$\sup_{\xi^s\in E^s_{\tilde{x}},\ |\xi^s|=1}\sum_{m\geq 0}|d\hat{f}^m\xi_s|^2<\infty,\qquad \sup_{\xi^u\in E^u_{\tilde{x}},\ |\xi^u|=1}\sum_{m\geq 0}|d\hat{f}^{-m}\xi_u|^2<\infty.$$

并且，映射 $R\in\tilde{\Sigma}^{\#}\to E^{s/u}$（$\tilde{\pi}(R)$）具有可求和变差。

证明 由定理 3.27（1），$\tilde{x}\in\tilde{\pi}(\tilde{\Sigma}^{\#})=RST$。于是，$T_{\tilde{x}}M^f$的分解存在。由于 $\tilde{\pi}\ \tilde{\Sigma}^{\#}\ \exists\ u_i\ _{i\in\mathbb{Z}}\in\Sigma^{\#}\quad\pi\ u_i\ _{i\in\mathbb{Z}}=\tilde{x}\quad E^s\ \tilde{x}\ =T_{\tilde{x}}\tilde{V}^s\ \ u_i\ _{i\geq 0}\quad E^u\ \tilde{x}\ =T_{\tilde{x}}\tilde{V}^u\ \ u_i\ _{i\leq 0}\quad(\Sigma^{\#})\ (\ ),\ (\ )$ 使得（（））。于是，根据唯一性，（）（（））且（）（（））。由命题3.15（5），其余部分成立。□

4 应用与示例

4.1 $P_n(f)$ 的增长率与最大熵测度的数量

对于任意 f-不变概率测度 μ，我们要求系统（M, f, μ）满足以下可积性条件

$$\log d(x,\Gamma_\infty)\in L^1(\mu).$$

如果 f-不变概率测度 μ满足可积性条件，则称 μ是 f-适配的。根据可积性条件，$\mu(\Gamma_\infty)=0$。根据定义，容易看出，μ 是 f-适配的，当且仅当 $\log\rho\in L^1(\tilde{\mu})$，其中 $\tilde{\mu}$是 M^f上的 $\hat{}$ f-不变博雷尔概率测度，并且满足 $p\tilde{\mu}=\mu$。

将 $P_n(f)$记为 n-周期点的数量，并且 $h_{top}(f,$ 0-summ) 是 $f|_{0\text{-summ}}$的拓扑熵。

定理 4.1 设 f 是一个 $C^{1+\beta}$ 带奇点的自同态，并满足假设 *(A1)-(A3)*。

(1) 如果 f 在 0–*summ* 上具有最大熵测度，则存在 $p\in\mathbb{N}$ 使得

$$\liminf_{n\to\infty,p|n}e^{-nh_{top}(f,0\text{-}summ)}P_n(f)>0,\forall n\in\mathbb{N}.$$

(2) $f|_{0\text{-}summ}$ 至多拥有可数多个遍历极大熵测度，其中 *M.M.E.* 是极大熵测度。

证明 根据 定理 3.27，证明与 [16]中的定理1.1和1.2类似。 □

4.2 一个例子

在本节中，我们将构造一个满足此背景条件的例子。考虑线性映射 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，并将 E^u, E^s 分别记为特征值 $\lambda_u = 2+\sqrt{2}, \lambda_s = 2-\sqrt{2}$对应的子空间。令 T: $\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ 为 $\mathbb{T}^2$ 上满足 $p \circ A = T \circ p$ 的自同态，其中 p 是从 $\mathbb{R}^2$ 到 $\mathbb{T}^2$ 的典范投影。显然， $p_1 := (0,0)$ 是一个不动点。接下来，我们将通过以下步骤修改自同态 T :

步骤 1: A 根据“减速技术”[8], 存在一个 C^r 映射 T_1 满足（$r \geq 2$）： $\exists$ functions $K^s, K^u : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ 使得 wo fun

(1) $K^s(x) = 2-\sqrt{2}$ 是常值函数，且 $|dT_1|_{E^s}| \leq K^s(x)\ \forall x \in \mathbb{T}^2$; (2) $K^u(\cdot)$ 在 $\mathbb{T}^2$ 上连续，且 $|dT_1|_{E^u}| \geq K^u(x)\ \forall x \in \mathbb{T}^2$; (3) $K^u(x) > 1\ \forall x \in \mathbb{T}^2 \backslash \{p_1\}$ 且 $K^u(p_1) = 1$。

步骤 2: 设 $p_2 \in \mathbb{T}^2 \backslash \{p_1\}$ 是 T 的周期点。对于任意小的 $r_1 > 0$，存在一个 C^r 映射 T_2，使得 $T_2(D_{r_1}(p_2)) = \{p_2\}$，且 $T_2(x) = T_1(x)$ 位于 $\mathbb{T}^2 \backslash D_{r_1}(p_2)$ 中，其中 $D_{r_1}(p_2)$ 是以 p_2 为中心、半径为 r_1 的球，则 $\det(d_{p_2} T_2) = 0$，即 p_2 是 T_2 的奇点。

令 $\Gamma_\infty := \{p_2\}$，通过将度量乘以一个小常数，假定 $\mathbb{T}^2$ 的直径小于 1。由上述构造，我们可以验证映射 T_2 满足条件 (A1)-(A3): 对于满足 x 的 $x \in \mathbb{T}^2$， $T_2(x) \notin \Gamma_\infty$，给定常数 $a > 1, K < \frac{1}{2}$ 使得 $\tau(x) := K \min\{d(x,\Gamma_\infty)\ d(x,\Gamma_\infty)\} \geq \min\{d(x,\Gamma_\infty)^a, d(x,\Gamma_\infty)^a\}$。对于邻域 $^-D_x := B(x, 2\tau(x))$ 与 $\mathfrak{E}(x) := B(T_2(x)\ 2\tau(x))$,

- (A1): $T_2|_{D(x)}$ 与 $T_2^{-1}{}_{,x}|_{\mathfrak{E}(x)}$ 是到像上的微分同胚，其中 $T_2^{-1}{}_{,x}$ 是 T_2 的逆分支，它将 $T_2(x)$ 映到 x。

- (A2): 对于任意 $x \in \mathbb{T}^2 \backslash \{p_2\}$, $d(x,\Gamma_\infty)^a \leq 1$ 和 $d(x,\Gamma_\infty)^{-a} \geq 1$。由于 $\mathbb{T}^2$ 是紧的，且 T_2是一个 C^r 映射，因此 $\|dT_2\|$ 在 $\mathbb{T}^2$上有界。并且 $|\det d_x T_2| = \|d_x T_2\| \cdot \|(d_x T_2)^{-1}\|^{-1}\ \forall x \notin \Gamma_\infty$。因此，存在一个常数 $K' < 1$，使得 $K' d(x,\Gamma_\infty)^a \leq \|d_y T_2\| \leq \frac{1}{K'} d(x,\Gamma_\infty)^{-a}\ \forall y \in D(x)$ 且$K' d(x,\Gamma_\infty)^a \leq \|d_y T_2^{-1}{}_{,x}\| \leq \frac{1}{K'} d(x,\Gamma_\infty)^{-a}\ \forall y \in \mathfrak{E}(x)$。

- (A3): 映射 $T_2|_{D(x)}$ 和 $T_2^{-1}{}_{,x}|_{\mathfrak{E}(x)}$ 是 C^r 映射，因此它们满足局部 $H\ddot{o}lder$ 性质。

将 $\mathbb{T}^{2^T}$、$\hat{}T$记作 $\mathbb{T}^2$， T_2的自然扩张。Ovadia 在 [13] 中证明，对于几乎阿诺索夫微分同胚 M， f，集合 $M \backslash \{p\}$是 0-summ 集合，其中 p是唯一的非双曲点。因此，根据自然扩张的性质，$\tilde{x} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{T}^{2^T} \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \hat{}T^n\big(p^{-1}(\{p_1, p_2\})\big)$ 是 0-summ 集合。

致谢

参考文献

[1] R. L. Adler 和 B. Weiss, 《熵：环面自同构的完全度量不变量》, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 美国, 57（1967年）, 1573–1576。[2] R. L. Adler 和 B. Weiss, 《环面自同构的相似性》, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 98（1970年）, 罗得岛州普罗维登斯。[3] E. Araujo、Y. Lima 和 M. Poletti, 《高维中带奇点的非一致双曲映射的符号动力学》, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 301（2024年）, 第1511号, vi+117 页。[4] R. Bowen, 《Axiom A 微分同胚的马尔可夫划分》, *Amer. J. Math.*, 92（1970年）, 725–747。[5] R. Bowen, 《论 Axiom A 微分同胚》, *Amer. J. Math.*, （35）1978年, 《数学区域会议丛书》, 罗得岛州普罗维登斯。[6] J. Buzzi, 《分段仿射曲面同胚的极大熵测度》, *Ergodic TheoryDynam. Systems*, 29(6)（2009年）, 1723–1763。

[7] R. Bowen, 《平衡态与阿诺索夫微分同胚的遍历理论》, *Lect. NotesMath.*, 470（1975）, 施普林格出版社, 纽约。[8] A. Katok, 《曲面上的伯努利微分同胚》, *Ann. Math.*, 110(3)（1979）, 529-547。[9] A. Katok 和 L. Mendoza, 《具有非一致双曲行为的动力系统》, 《现代动力系统理论导论》增刊, *Encyclopedia Math. Appl.*, 54（1995）, 剑桥大学出版社, 剑桥, xviii+802页。[10] A. Katok, 《动力学中的熵：五十年：1958–2007》, *J. Mod. Dyn.* 1(4)(2007), 545–596。[11] Y. Lima 和 O. Sarig, 《具有正拓扑熵的三维流的符号动力学》, *J. Eur. Math. Soc.*, 21(1)（2019）, 199–256。[12] S. Ben Ovadia, 《紧致光滑流形上非一致双曲微分同胚的符号动力学》, *J. Mod. Dyn.*, 13（2018）, 43–113。[13] S. Ben Ovadia, 《可求和轨道》, *J. Mod. Dyn.*, 19（2023）, 625-715。[14] M. Qian、J. Xie 和 S. Zhu, 《端同态的光滑遍历理论》, *Lecture Notes in Math.*, 1978（2009年）, 施普林格出版社, 柏林, xiv+277页。[15] M. Qian 和 Z.-S. Zhang, 《Axiom A 端同态的遍历理论》, *Ergodic Theory Dynam.Systems*, 15(1)（1995）, 161–174[16] O. Sarig, 《具有正拓扑熵的曲面微分同胚的符号动力学》, *J. Amer. Math. Soc.*, 26(2)（2013）, 341-426。[17] J. G. Sinaˇı, 《马尔可夫划分的构造》, *Funkcional. Anal. i Priloˇzen.*, 2(3)（1968）, 70–80（附勘误）。[18] J. G. Sinaˇı, 《马尔可夫划分与 U-微分同胚》, *Funkcional. Anal. i Priloˇzen.*, 2(1)（1968）, 64–89。