arXiv:2602.06408v1 [math.DS] 6 Feb 2026

立方体内非极小台球轨迹的语言

Moussa Barro * Nicolas B´edaride† Julien Cassaigne‡

摘要

我们研究立方体内的一条非极小台球轨迹，并考察对其相关轨道进行编码后得到的语言，其中映射的编码使用与立方体三个不平行的面相对应的三个字母。

1 引言

本文研究单位立方体 $P = [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$内的台球。一个台球，即一个质点，在立方体 P 内以单位速度沿直线运动，直至到达边界 ∂P，随后瞬间根据镜面反射定律改变方向，并沿新的直线继续运动。我们希望定义并研究与台球映射相关的子移位。

用有限字母表 $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ 中的符号标记 P 的各个面（相对的面标记为同一个字母）。对于 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中的一个方向 θ 和 ∂P 中的一个点 m，其轨道 (m, θ)（如果存在）可以编码为一个无限词，它定义了 $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ 的一个子移位，记作 $X_{m,\theta}$。我们也可以考虑子移位 X_θ，它是$\bigcup_m X_{m,\theta}$ 的闭包。最后，我们可以考虑子移位 X，即 $\bigcup_\theta X_\theta$ 的闭包。当然，我们有

$$X_{m,\theta} \subseteq X_\theta \subseteq X.$$

在所有情况下，一个点的轨道都对应于字母表 $\mathcal{A}$ 上的一个（无限）词。换言之，第一个子移位考虑由某一点 (m, θ) 的轨道中得到的词，第二个子移位考虑方向 θ 上得到的所有词，而最后一个子移位考虑所有台球词。

因此，子移位是由无限词组成的集合，而它的语言则是出现在这些词之一中的有限词的集合。

*纳齐·博尼大学，01 BP1091，布基纳法索博博迪乌拉索。电子邮箱：mous.barro@yahoo.com

†艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，I2M UMR 7373，法国马赛 13453。电子邮箱：nicolas.bedaride@univ-amu.fr

‡法国国家科学研究中心，I2M UMR 7373，艾克斯-马赛大学，法国马赛 13453。电子邮箱：julien.cassaigne@math.cnrs.fr

我们将子移位的复杂度定义为函数 $n \mapsto p(n)$，其值为该语言中长度为 n 的词的数量。对于我们的三个子移位，我们有三个函数 $p(n, m, \theta)$ $p(n, \theta)$ 和 $p(n)$，当然还有 $p(n, m, \theta) \leq p(n, \theta) \leq p(n)$。

若方向 θ 上的台球轨道的闭包经过 P中几乎所有的点，则称方向 θ 为极小方向。对于立方体，这等价于 θ 的坐标在 $\mathbb{Q}$上线性无关，参见 [16]。在这种情况下，子移位 X_θ 是极小的。在这一假设下，几乎对每个点 m，$p(n, m, \theta) = p(n, \theta)$。

在二维情形中，针对有理多边形，人们在固定方向下研究了相同的问题。在 [15]中，对于全局复杂度（所有方向的语言），复杂度的增长率已被确定；关于正则 n 边形，更精确的结果见 [4]。

Arnoux、Mauduit、Shiokawa 和 Tamura 在 [3]中计算了立方体中极小方向的方向复杂度，Baryshnikov [6]将其推广到了超立方体。第一篇论文对方向的假设存在错误；关于更严格、强于极小性的良好假设的精确定义，参见 [9]和 [8]。如果 θ 是极小方向但不满足该假设，那么 $p(n, \theta) \sim C_\theta n^2$，其中 $0 < C_\theta < 1$。如果方向不是极小的，那么对于$n \geq 1$， $p(n, \theta) \leq Cn$ ，参见 [9]。本文旨在研究与非极小方向相关联的子移位，并加深对其的理解。

在以下内容中，我们研究方向为 $\theta_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\varphi} & \frac{1}{\varphi^2} \end{pmatrix}$的所有轨迹，其中 φ 为黄金均值 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。我们选取这一方向，使得立方体的一个面上的投影给出一条由 Sturmian 词编码、且斜率与斐波那契词相同的轨迹：$\frac{1}{\varphi}$，并且字母 c 的频率为$1\ 3$。这些结果可以推广：将 $1/2$ 替换为 $r \in \mathbb{Q}$时，结果仍具有相同性质；此外，我们将在最后一节说明如何在其他方向上得到同类型的结果。

这个问题似乎与组合词论中的另一个问题有关。在 [5] 中，作者研究了在一个 Sturmian 词内部插入一个字母（可以来自字母表，也可以不来自字母表），并考察了所得词的组合性质。我们将把这两个问题联系起来，并说明如何推导出一些新结果。关于台球和组合词论的其他相关结果，还可参阅 [14]和 [1] 中关于复杂度函数的结果，或参阅 [2]中关于台球词语言的结果。

2 动力系统的编码

我们给出立方体内台球轨迹编码的定义。这个定义并非通常的定义，但在第4.2节中，我们将说明它与通常定义的联系。

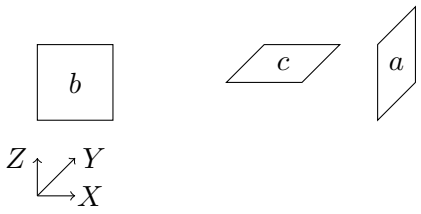

图1：立方体内台球的编码

定义1。考虑一个方向 $\theta \in \mathbb{R}^3_+ \setminus \{0\}$ 和一个点 $m \in \mathbb{R}^3$。假设直线 $m + \mathbb{R}\theta$ 不包含具有多个整数坐标的点（否则轨迹没有定义）。接着考虑半直线 $m + \mathbb{R}_+\theta$ 与胞腔复形 $\mathbb{Z}^3$的交集序列。它定义了字母表 $\{a, b, c\}$ 上的一个无限词 u：与 $X = n$的交集对应于 a，$n \in \mathbb{Z}$，与平面$Y = n$，$n \in \mathbb{Z}$的交集对应于 b，与 $Z = n$的交集对应于 c，见图1。我们称 u为一个**台球词**（其含义将在下一节中解释）。台球轨迹 $(m,\ \theta)$ 的编码映射是几乎处处定义的映射 f_θ：

$$\begin{array}{ccc} P & \mapsto & \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \\ m & \mapsto & f_\theta(m) := u \end{array}$$

我们用 $\mathcal{L}_{m,\ \theta}$ 表示 u 的语言，用 δ_a（分别用 δ_b，δ_c）表示擦除词中的一个字母，见定义2。最后，我们用 π_x（分别用 π_y，π_z）表示到平面 OYZ（分别到平面 OXZ，OXY）上的正交投影。这些投影之间的关系将在引理2中解释。

3 论文的结果与概述

点 m 在方向 θ上的编码见第2节。结果的陈述涉及以下几个对象：一个新的字母表；从新字母表到旧字母表的态射 Φ（见引理4）；区间 $[0, 1]$, 上的一个平移；该平移在这个新字母表上的编码映射 g（见定义6）；以及一个映射 y，使得立方体的面 $X = 0$ 上的点 m 的像是 $[0, 1]$ 中的一个点 $y\,(m)$（见定义4）。第一定理指出，台球词是对 $[0, 1]$ 上一个平移的重新编码，该平移的编码所用区间多于两个。

定理1. 考虑用三个字母 $P = [0, 1]^3$ 编码的立方体，以及先前定义的方向 θ_0。对于面 $X = 0$ 中几乎所有的 m，都存在一个将 $[0, 1]$ 划分为 6 个区间 $(I_i)_{1\leq i\leq 6}$ 的划分，使得 $f_{\theta_0}(m) = \Phi(v)$，其中 $v = g(y(m))$。

第二定理给出了复杂度函数的精确值。证明中用到了第一定理。

定理 2.

- 对于立方体中所有具有良定义台球轨道的 $m = (0, y, z)$，$\mathcal{L}_{m,\theta_0}$ 的复杂度是线性的，并且仅依赖于 $y + z$。
- 当 m在面上变化时，$\mathcal{L}(m, \theta_0)$ 的复杂度函数有6 个取值。

- 对于面 $X = 0$上几乎所有的 m，对每一个足够大的整数 n，我们有 $p(n, m, \theta_0) = 4n - 1$。

最后一条定理给出了 X_{θ_0}的复杂度的一个等价量。

定理 3. 语言 $\mathcal{L}_{\theta_0}$ 的复杂度函数具有如下渐近性质：

$$p(n, \theta_0) \sim \frac{4 + \varphi}{6} n^2.$$

4 背景

4.1 组合学

定义2。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限集合，称为字母表。本文所说的关于 $\mathcal{A}$ 的语言$\mathcal{L}$，均指阶乘可扩展语言：语言是由集合 $(\mathcal{L}_n)_{n\geq 0}$ 构成的集合，其中 $\mathcal{L}_0$ 的唯一元素是空词，并且每个 $\mathcal{L}_n$ 都由形如 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的词组成，其中 $a_i \in \mathcal{A}$，且满足：对于每个 $v \in \mathcal{L}_n$，都存在 $a,\ b \in \mathcal{A}$，使得 $av,\ vb \in \mathcal{L}_{n+1}$；并且对于所有$v \in \mathcal{L}_{n+1}$，若 $v = au = u'b$ 且 $a,\ b \in \mathcal{A}$，则 $u,\ u' \in \mathcal{L}_n$。

复杂度函数 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 定义为 $p(n) = card(\mathcal{L}_n)$。

首先，我们回顾 Cassaigne 关于词组合学的一个著名结果 [12]。

定义3。设 $\mathcal{L}(n)$ 是一个阶乘可扩展语言。对于 $v \in \mathcal{L}(n)$，令$m_l(v) = card\{a \in \mathcal{A}, av \in \mathcal{L}(n+1)\}$，$m_r(v) = card\{b \in \mathcal{A}, vb \in \mathcal{L}(n+1)\}$，并且 $m_b(v) = card\{a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{A}, avb \in, \mathcal{L}(n+2)\}$. 现在令 $i(v) = m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1$.

如果 v $m_r(v) \geq 2$，则称词为右特殊；如果$m_l(v) \geq 2$，则称词为左特殊；若同时具有右特殊和左特殊性质，则称为双特殊。令$\mathcal{BL}(n)$为双特殊词的集合。

Cassaigne [12] 已证明：

引理 1. 设 $\mathcal{L}$ 是一种语言。对于任意 $n \geq 0$，令 $s(n) := p(n+1) - p(n)$。则其复杂度满足

$$\forall n \geq 0 \quad s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} i(v),$$

4.2 台球

设 P 为单位立方体，台球映射称为 T，其定义在 $\partial P \times \mathbb{RP}^2$的一个子集上。该空间称为相空间。

台球轨迹的展开是一种重要工具：我们不再将轨迹在面上反射，而是反射立方体，并沿直线前进。因此，我们考虑 $\mathbb{R}^3$ 按 $\mathbb{Z}^3$铺砌而成的图形，以及与之相关的划分，即将其划分为边长为一的立方体。下文中，我们使用“面”一词时，指的是这些立方体的面。

现在固定一个方向 θ，以及边界 P上的一点 m。如第2节所述，(m, θ) 的台球轨道可用三字母字母表上的无限词 $u = f_\theta(m)$ 编码。

下面的引理非常有用，其证明很简单，留给读者完成。

引理2。考虑立方体某个面上的一个正交投影。台球映射的正交投影是正方形内的一个台球映射。如果 u 对一条轨迹 t进行编码，那么 $\delta_a(u)$ 就对轨迹 $\pi_x(t)$进行编码；其他投影也同理。

在用两个字母编码的正方形中，非周期台球轨迹的编码是一个 *Sturmian* 词，而周期台球轨迹的编码是一个周期词。

由此我们得出以下推论

推论1。设 $\theta = \begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{pmatrix} \neq 0$ 和 m 是立方体边界上的一个点。设 u 是 (m, θ) 的轨道编码。那么 $\delta_a(u)$ 是 *Sturmian* 词，当且仅当 $\begin{pmatrix}\theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上有理线性无关。

证明。考虑在平面 (OYZ) 上的正交投影。由引理2，轨道 (m, θ) 的投影是正方形内的一条台球轨道。与之对应的方向是 $\begin{pmatrix}\theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}$。因此，当且仅当 θ_2, θ_3 在 $\mathbb{Q}$ 上有理线性无关时，它才是非周期的。而且显然，正方形内该轨道的编码是 $\pi_a(u)$。 □

注记 1. 现在，在下文中我们只考虑方向 $\theta \in \mathbb{R}^3_+ \neq\{0\}$，使得 $\theta_i \geq 0$ 对所有 $i = 1$、2、3 都成立。在对称性意义下，我们总可以将问题化归到这种情形。

关于以下经典事实的证明，请参见 [16] 。

引理 3. 考虑方向为 θ 的台球轨迹，则字母 a 的频率等于 $\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$。对于其他字母，经过置换后同样成立。

现在，如果 $\frac{\theta_3}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}$ 等于 $1/k$，$k \geq 1 \in \mathbb{N}$，那么字母 c 在 u 中的频率等于 $1/k$。在一种非常特殊的情况下，可能会出现这种

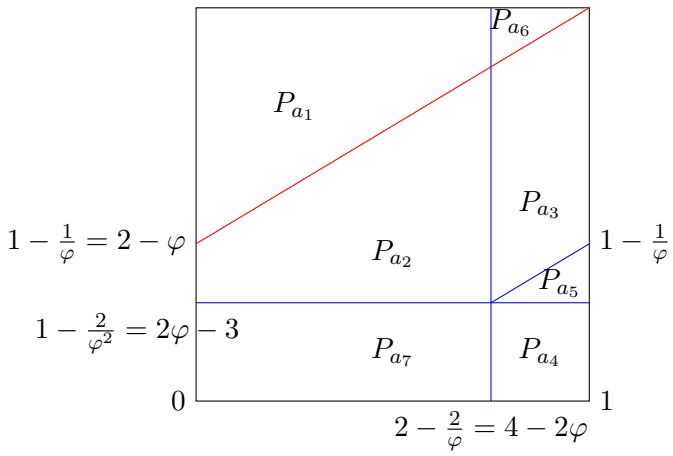

图2：面 $X=0$上的返回词和划分。

字母 c 在 u中每隔 $k-1$ 次出现一次。这正是 [5]中讨论的情形。

因此，我们可以重新表述这个问题：从字母表 $\{b,c\}$上的一个 Sturmian 词 v 出发，寻找字母表 $\{a,b,c\}$ 上的一个词 u，使得 $\pi_a(u)=v$，且 a 在 u 中的频率固定为 $1/3$。

从方向为 $\begin{pmatrix}\theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}$ 且满足 $\theta_2/\theta_3\notin\mathbb{Q}$ 的一个正方形台球轨道出发，根据推论1，我们要寻找一个方向为$\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}$ 的立方体台球轨道，它通过 π_a 投影到词 v 上，并且满足 $\frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2+\theta_3}=\frac{1}{3}$。这解释了为何选择 θ_0。

5 引理与定理1的证明

5.1 引理

考虑立方体的面 $X=0$ 上的 m，则（m, θ_0）的轨道由 u 编码，它以字母 a开头。此外，我们知道 $\pi_a(u)$是字母表 $\{b,c\}$上的斐波那契词。因此，要描述该语言，只需知道 a 在 u中的出现位置。按照 Durand 的研究，我们将 u中以 a 开头、并在下一个 a之前结束的因子称为 a的回归词。我们有以下表达式

$$u=a\ldots a\ldots a\ldots$$

我们将 a 的返回词中第一个称为首个回归词。

引理4. 存在立方体的面 $X=0$ 的一个划分 $\mathcal{P}=\bigcup_{1\le i\le 7}P_{a_i}$，以及一个从 $\{a_1,\ldots,a_7\}$ 到 $\mathcal{A}^*$ 的映射 Φ，使得 $\Phi(x)$ 是 a 在 $f_\theta(m)$ 中的首个回归词，当 $m\in P_x$ 时。

$m \in P_{a_i}$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
$\Phi(a_i)$	acb	abc	$abcb$	abb	$abbc$	$acbb$	ab

证明。 我们将参照图2。考虑标记为 a 的面中的 m 。 m 的轨道编码包含字母 a ，当且仅当方向为 θ 的半直线与面 $X = n$ 相交，其中 $n \in \mathbb{N}$。因此， a 在 u 中的返回词列表由它与这些面的交集给出。我们来考虑沿着 $\mathbb{R}\theta$ 在平面 $X = 0$ 上的投影。

- 直线 $X = n$， $Y = m$，$(n,\ m \in \mathbb{N})$ 的像是方程为 $Y = m - \frac{n\theta_2}{\theta_1}$ 的直线
- 直线 $X = n$， $Z = m$，$(n,\ m \in \mathbb{N})$ 的像是方程为 $Z = m - \frac{n\theta_3}{\theta_1}$ 的直线
- 直线 $Y = n$， $Z = m$，$(n,\ m \in \mathbb{N})$ 的像是直线 $\theta_3 Y - \theta_2 Z = n\theta_3 - m\theta_2$。

注意，$\theta_2 = \frac{1}{\varphi}$， $\theta_3 = \frac{1}{\varphi^2}$ 且 $\varphi < 2 < \varphi^2$。因此，在半直线 $\mathbb{R}_+\theta$ 上，第一个具有一个整数坐标的点是 $(\varphi/2,\ 1,\ 1/\varphi)$。因此，半直线 $\mathbb{R}_+\theta$ 所相交的第一个基面是 $Y = 1$。因此，在方向为 θ 的台球词语言中， aa 不存在。

直线 $Z = Y = 1$ 经过投影后的像是 $\theta_3 Y - \theta_2 Z = \theta_3 - \theta_2$。因此，这条线段将面 $X = 0$ 分成两部分：一部分对应词 ab ，另一部分对应词 ac。注意，在图2中，它对应红色线段。

字母 c 后面跟着字母 b 或字母 a。事实上，考虑在面（OYZ）上的投影，并注意直线的斜率小于 1。因此，有些返回词以 ab 开头，其余的以 acb 开头。平行于（OZ）的直线的投影也平行于（OZ），因此，图2中的蓝色线段对应字母 b。

最后需要注意的是，正方形的一条对角线对应于平行于 $Z = Y = 1$ 的线段的投影。

□

注记 2. 我们将稍微滥用一下记号，在 $m \in P_{a_i}$ 时将 $\Phi(m)$ 记作 $= \Phi(a_i)$。

现在我们必须了解回归词如何在 u 内组合。

引理5. 设 m 是单位立方体的面 $X = 0$ 上的一点，那么台球词 $u = f_\theta(m)$ 中的第 $(k+1)$ 个回归词为 $\Phi(m + 2k\theta_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ 模 1)。

证明。 设 m 位于面 $X = 0$ 中，则第 $(1+k)$ 个回归词在字母 a 第 $k+1$ 次出现之后出现，也就是在半直线 $m + \mathbb{R}\theta$ 与 $X = k$ 相交之后出现。记 m_0： $X = 0$ 中的点 $= m + \lambda_0\theta$ ，

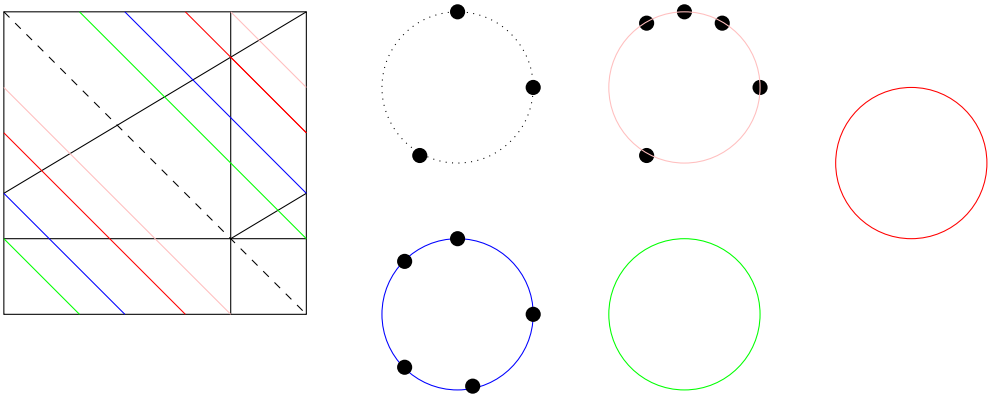

图3：环面上的五个圆，具有不同的划分。点状圆对应三个区间，其余圆对应五个区间。

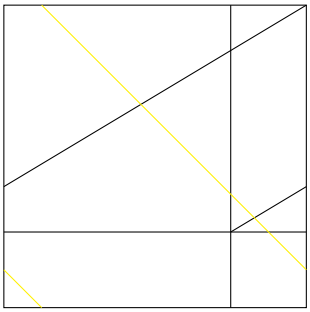

图4：环面上的一个圆，被划分为六个区间。

以及 $X = k$ 中的 $m_k := m + \lambda_k\theta$。因此我们推得，$(\lambda_k - \lambda_0)\theta$ 的第一个坐标为 k，于是 $\lambda_k - \lambda_0 = 2k$ 和 $m_k = m_0 + 2k\theta$。如果我们将轨迹折叠，这意味着在面 $X = 0$ 中，我们有两个点 p_0，p_k 和 $p_k - p_0 = 2k\begin{pmatrix}\theta_2 & \theta_3\end{pmatrix}$ 模 1。但是 $\theta_3 = 1 - \theta_2$，因此

$$p_k - p_0 = 2k\begin{pmatrix}\theta_2 & 1-\theta_2\end{pmatrix} = 2k\theta_2\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix} \mod 1$$

从 m 到 p_k 的台球轨迹的编码，对应于 k 个返回词的连接。

□

换言之，$2\theta_2\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ 模 1 的作用由 $\Phi^{-1}(u)$ 编码。

考虑立方体的面 $X = 0$，这个正方形是环面 $\mathbb{T}^2$的基本域。

引理6。考虑环面 $\mathbb{T}^2$上的线性流 $\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$。设 m是此环面上的一个点。那么，该点在线性流下的轨道是一个圆。其长度不依赖于 m。

m 在流下的轨道与划分$\mathcal{P}$的 $k(m)$ 元素相交，且 $k(m) \in \{3, 5, 6\}$。每个交集都是一个区间。

我们将用 I 表示这条轨道。

证明。由 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ 产生的线性流是周期性的，因为其斜率是一个有理数。因此， I 是一个圆；若假设原点是 $X = 0$ 上的点，我们就可以将其识别为一个区间。

从 $m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ 开始，我们看到划分与平移作用的交集有 $k(m)$ 个部分，并且有（见图3和图4）：

- 如果 $z = 0$，那么 $k(m) = 3$，见虚线圆。
- 如果 $z \in \{2\varphi - 3, \varphi - 1, 2 - \varphi, 4 - 2\varphi\}$，那么 $k(m) = 5$，见粉色、绿色、红色和蓝色的圆。
- 否则， $k(m) = 6$。

□

定义4。我们用 $y(m)$ 表示 m 的第二个坐标。结合前面的结果，它给出了 m 在这个圆上的位置。

定义5. 我们用 R 表示 $[0,1]$ R 上的如下平移： $y \mapsto y + \frac{2}{\varphi}$ 模 1。

–

回顾一下，若将 $[0,1]$ 用作环面 $\mathbb{T}^1$ 的基本域，则此映射与环面上相同距离的平移有关。

固定立方体的面 $X = 0$ 上的点 m，并令 $k(m)$，见引理6。

定义6. 考虑将 I （视为区间 $[0,1]$）与划分 $\mathcal{P}$ 的交集所得到的区间划分。于是我们将 R 的编码映射 g 定义为

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \mapsto & \{a_1, \ldots, a_7\}^{\mathbb{N}} \\ y & \to & g(y) \end{array}$$

其中， $g(y)_n = a_i$ 当且仅当 $R^n(y) \in I_j$，且存在唯一的 a_i 使得 $I_j \subset X_{a_i}$。

5.2 定理1的证明

u 的轨道编码从字母 a开始。只需知道 a的位置。根据引理4，这些位置由返回词确定，而这些词按照引理5给出的顺序连接起来。因此，我们得到一个带有编码的映射，它产生 u。由此得到$f_\theta(m) = \Phi(g(y(m)))$，而引理6给出了区间的数量

6 定理 2 的证明

参见图2和图4。

6.1 证明的第一部分

考虑面 $X = 0$ 上的 $m = \begin{pmatrix} 0 & y & z \end{pmatrix}$。于是我们注意到以下事实。根据引理5，语言 $\mathcal{L}_m$ 仅取决于方向（$1-1$）上的流，因此它仅取决于 $y+z$。根据定理1， m 的轨道编码是一个平移的重新编码。下面的引理将说明如何求出复杂度。

引理 7。考虑环面 $\mathbb{T}^1$ 上角度为无理数 a 的一个平移。考虑将此映射在 d 个区间 $[a_i, a_{i+1}]$、$0 \leq i \leq d-1$ 上进行编码，其中 $a_0 = 0$、$a_d = 1$。那么存在 n_0、A、B，使得点 $[0,1]$ 的几乎每条轨道的复杂度都等于 $p(n) = An + B$，其中 $n \geq n_0$，对某个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 成立。此外， A 等于由 a、a_1、……、a_{d-1} 生成的模在 $\mathbb{Z}$ 上的维数。

证明。语言中的一个词 v 由一条线段表示（线段上的所有点的轨道，其编码都以 v 为前缀）。如果区间包含某个 a_i的反向轨道，那么这个词就是右特殊的。事实上，如果 $R^{-n}a_i$ 位于区间内，那么 $R^{-n}a_i$ 左右两侧的点的轨道，其编码在 n步之后会有所不同。因此，我们需要考察是否存在整数 n使得 $a_i + na = a_j + ma$， m。此类方程的解的数量由 a、a_1、……、a_{d-1}生成的模在 $\mathbb{Z}$ 上的维数给出。因此，当 n 足够大时， $p(n)$ 是 $An+B$形式的线性函数。

□

现在我们陈述以下命题，它将证明定理的最后一点

命题 1。考虑 $p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \end{pmatrix}$，其中 $z \in [0,1]$ 是 $\mathbb{Q}$补集中的一个数（φ），则 $\mathcal{L}'_m$ 的复杂度函数为 $4n+2, n \geq 2$，而$\mathcal{L}_m$ 的复杂度函数为 $4n-1, n \geq 1$。

证明。我们得到圆 I 的一个划分，其中有 $k(p)$ 个 $= 6$ 区间。不连续点如下，见图4： z， $2-\varphi+(\varphi-1)z$， $4-2\varphi$， $4-2\varphi+(\varphi-1)z$， $4-2\varphi+z$。平移的角度为 $2\varphi-3$，见定义5。我们看到，四个不连续点的轨道各不相同，这是由关于 z 的假设所致。因此， $\mathcal{L}'_m$ 的复杂度等于 $p(n) = 4n+2$， $n \geq 2$。现在我们用 Φ 重新编码，并按照前面的相同论证，对于所有 $n \geq 2$，都得到四个长度为 n 的右特殊词。 □

6.2 第二部分

根据引理6，视 m 而定， m 在线性流下的轨道与划分中不同数量的元素相交。在每种情况下，我们都将应用引理 7。

6.2.1 五个区间上的平移

引理 8. 我们考虑由五个区间划分的四个圆。对于每个圆上几乎所有的点 m，复杂度函数 $p(n, m, \theta_0)$ 对某个 a 等于 $2n + a$，且对所有足够大的 n 都成立。

证明。参见图2，计算留给读者完成。这些区间的长度相等（相差一个因子 $\sqrt{2}$）：

- 绿色圆： $2\varphi - 3$， $10 - 6\varphi$， $2\varphi - 3$， $5 - 2\varphi$， $4\varphi - 8$。
- 蓝色圆： $5 - 3\varphi$， $2\varphi - 3$， $2\varphi - 3$， $5 - 3\varphi$， $2\varphi - 3$。
- 粉色圆： $5\varphi - 8$， $5 - 3\varphi$， $2\varphi - 3$， $10 - 6\varphi$， $2\varphi - 3$。
- 红色圆 $\varphi - 1$， $4 - 2\varphi$， 1， $5 - 3\varphi$， $3 - \varphi$。

现在我们应用引理 7，并推出在这四种情形下我们有$p(n, m, \theta_0) \sim 2n$。 □

注记：我们可以更精确地计算常数 a。例如我们有：

命题 2. 考虑点 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2-\varphi \end{pmatrix}$，则 $\mathcal{L}'_m$ 的复杂度函数为 $2n + 5$、$n \geq 2$，且 $\mathcal{L}_m$ 的复杂度函数为 $2n + 8$、$n \geq 8$。

证明。我们对 I 有一个由 5 个区间构成的划分，但其中两个具有相同的标号：事实上标号为 a_2、a_7、a_1、a_2、a_3，不连续点位于 $5 - 3\varphi$、$2 - \varphi$、$\varphi - 1$、$4 - 2\varphi$。该映射是平移 $2\varphi - 3$，见定义5。因此该划分的像由区间 a_3、a_2、a_7、a_1、a_2 构成。我们推出，词 $a_2a_7a_1$ 是一个右特殊词，其右延伸为 a_2、a_3，词 a_2 的右延伸为 a_3、a_7，且 $a_1a_2a_3$ 的延伸为 a_2、a_7。因此该语言的复杂度函数满足 $p(1) = 4$ 以及 $p(n) = 2n + 5$ （对于$n \geq 2$）。

现在我们通过映射 Φ转到 $\mathcal{L}_m$。由此可推得三个右特殊词

$$abcabacbabc, cbabcab, acbabcabcbab.$$

因此，对于 n 足够大，我们有 $s(n) = 2$。现在只需考察 n的较小取值： a、b、c是长度为一的右特殊词。于是 ba、ab、bc是右特殊词。最后， bab、cab、abc也是右特殊词。由此可得，对于 $n \geq 8$， $p(n) = 2n + 8$；以及 $p(1) = 3$、$p(2) = 6$、$p(3) = 9$、$p(4) =12$、$p(5) = 15$、$p(6) = 18$、$p(7) = 21$. □

6.2.2 三个区间上的平移

我们考虑正方形 $X = 0$ 上的对角线 $y + z = 1$。

命题 3. 考虑 $m = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，那么 $\mathcal{L}'_m$ 的复杂度函数为 $2n+1, n \geq 0$，而 $\mathcal{L}_m$ 的复杂度函数为 $2n+3, n \geq 2$。

证明。对于虚线圆：$4 - 2\varphi = l_1 + l_2$，$l_3 = 2\varphi - 3$ 总长度为 1。

由引理6可得 $k(m) = 3$。三个返回词为 acb，abc，abb。它们的长度都相同，这意味着 a 在 u 中以固定间隔出现，间隔为 3，因此其频率为 $1/3$。词 $\delta_a u$ 是一个与斐波那契词具有相同语言的 Sturmian 词。因此，u 是通过将字母 a 每两个一组地插入 Sturmian 词 $\delta_a(u)$ 中得到的，参见 [5]的研究。

平移 R 由三个区间编码，且所有长度都属于 $\mathbb{Q}(\varphi)$：不连续点为 $2 - \varphi$ 和 $4 - 2\varphi$。该平移的角度为 $2\varphi - 3$。不连续点之间不存在鞍连接，这意味着不存在整数 q 使得 $2 - \varphi + q(2\varphi - 3) = 4 - 2\varphi$。因此，对所有 $n \geq 0$，$\mathcal{L}'_m$ 的复杂度等于 $2n + 1$；见引理 7。现在我们需要使用重新编码 Φ。$\mathcal{L}'_m$ 中有两个右特殊词，它们具有无限长的左前缀。它们的右延伸分别为 a_1、a_2 和 a_2、a_4。经过 Φ 映射后的词，其公共后缀为 a 和 ab。由此可得，$\mathcal{L}_m$ 在每个长度上都有两个右特殊词。还需考察长度为 1 的右特殊词：a、b、c。我们可得 $p(2) - p(1) = 4$，$p(n+1) - p(n) = 2$，当 $n \geq 2$时。因此，当 $n \geq 2$时，$p(n) = 2n + 3$。

□

6.3 定理 2 证明的结尾

因此，我们有六种情形：四种情形满足 $k(m) = 5$，此时我们使用命题 2；一种情形满足 $k(m) = 3$，此时我们使用命题 3；还有一种一般情形满足 $k(m) = 6$，此时我们使用命题 1。

7 定理 3 的证明

定义 7. 方向为 θ_0 的广义对角线，是立方体 $\mathbb{R}^3$ 中的一条方向为 θ_0 的线段，其起点和终点均位于一维复形 $\mathbb{Z}^3$ 的单位区间上的点。若这样的轨迹在中途不与该复形的其他边相交，则称其为不可约轨迹。这种不可约线段的长度等于与其相交的立方体数量减一。

考虑 $\mathcal{L}(\theta)$ 的一个双特殊词 v，其胞是一个面内的多边形。根据 [8] 的命题 2，双特殊词与方向为 θ 的不可约广义对角线之间存在一一对应。

注意到 $\frac{1}{\theta_3} = \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{2\theta_2}$. 根据 [9] 的引理40，我们推得 $s(n)$ 等价于 Cn，其中 $C = 2 - \frac{\theta_3}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} = \frac{2}{(4+\varphi)\,6}$。

根据引理 1，双特殊词的数量由 $s(n+1)-s(n)$ 给出。由此得出 $p(n) \sim C\binom{n^2}{2} = \frac{4+\varphi}{6}n^2$。

8 备注与评论

在最后这一部分，我们将说明如何改变方向 θ_0，并用相同的方法得到一些类似的结果。

8.1 第一个例子

我们考虑方向 $\begin{pmatrix} r & \frac{1}{\varphi} & \frac{1}{\varphi^2} \end{pmatrix}$，其中 r 是一个非零有理数。下面说明，稍作修改后，同样的方法仍然适用：

- 红色和蓝色直线的斜率相同，但水平线段和垂直线段会随 r 改变。当然，词的名称也会改变。
- 引理5的公式变为 $\Phi(m + k\frac{\theta_2}{r}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}$ 模 1)。
- 划分 I 的元素个数随 r变化。

经过这些修改后，定理 2 的陈述很容易调整，读者也可以自行完成。

8.2 更一般的例子

考虑一个方向 θ 以及由 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$生成的、定义在 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间 V_θ。有三种情况：

- $dim V_\theta = 3$。此时，根据 $1/\theta_1, 1/\theta_2, 1/\theta_3$在 $\mathbb{Q}$ 上是否线性无关，可分为两种子情况。在所有情况下，$p(n,m,\theta) = p(n,\theta) \sim Cn^2$, $\mathcal{L}(m,\theta) = \mathcal{L}(\theta)$，其语言的精确描述仍然未知。关于平衡性的一些有趣性质，可参阅 [2]；综述可参阅 [7]。
- $dim V_\theta = 1$。每条轨迹都是周期性的，因此我们有 $p(n,m,\theta) \leq p(n,\theta) \leq C$。
- $dim V_\theta = 2$。这就是本文所研究的情形。在对称意义下，这样的方向可写成 $\begin{pmatrix} a\theta_1 + b\theta_2 & \theta_1 & \theta_2 \end{pmatrix}$，其中 $a,\ b \in \mathbb{Q}$。因此，正方形内方向为 $\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}$ 的台球轨迹由一个 Sturmian 词 v编码。我们的目标是找到 u，使得 $\pi(u) = v$，并求出其复杂度。我们可以找到一个类似于图 2 的划分。划分中元素的数量可以用以下方法估计：只需对每个 i 找出满足 $\frac{k_i-1}{\theta_i} < \frac{1}{\theta_3} < \frac{k_i+1}{\theta_i}$ 的数量 k_i 即可。这将给出回归词中字母 i 的数量。由此我们将得到回归词长度的上界，进而得到划分中元素数量的上界。

在我们的例子中，只有一个 c 和一或两个 b。于是，对于面 $X=0$ 中的每个 m，都有一个如引理6中的圆 I。用相同的方法，我们可以推出以下结果

定理4。对于满足 $dimV_\theta = 2$的方向 θ，以及轨道定义良好的点m，有 $p(n,m,\theta) \leq Cn$，其中 C 是 θ的函数。

8.3 高维

我们可以在边长为 $\mathbb{R}^d$ 且满足 $d \geq 4$的超立方体中提出同样的问题。一般情形已在 [6] 中研究，另见 [10]。我们可以猜想如下公式： $p(n,\ m,\ \theta) = \Theta(n^{dimV_\theta - 1})$。关于全局复杂度 $p(n)$，请参阅 [11]，其中我们得到了渐近结果。

作者谨向 Afrimath RT CNRS在本项工作期间给予的帮助表示感谢，并感谢IZES项目 ANR-22-CE40-0011。

参考文献

[1] S. Akiyama. 平衡词的渐近公式。《数论杂志》, 236:144–159, 2022.

[2] M. Andrieu and L. Vivion. 使用 d 个字母书写的无限词的最小复杂度。载于词组合学：第*14*届国际会议，*WORDS 2023*，瑞典于默奥，*2023*年*6*月*12*日至*16*日。会议录, 第3–13页。Cham：施普林格，2023.[3] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J.-I. Tamura. 立方体台球定义的序列复杂度。《法国数学会通报》, 122(1):1–12, 1994.[4] J. Athreya, P. Hubert, and S. Troubetzkoy. 正N边形台球的复杂度。预印本, arXiv:2502.17627 [math.DS] (2025), 2025.[5] M. Barro, I. Kabor´e, and T. Tapsoba. 关于通过在 Sturmian 词中插入字母得到的词。《国际应用数学杂志》, 30(5):387–400, 2017.[6] Y. Baryshnikov. 矩形台球中的轨迹复杂度。《数学物理通讯》, 174(1):43–56, 1995.[7] V. Berth´e. 符号差异的拓扑方法。载于*2019–20 MATRIX* 年鉴, 第673–674页。Cham：施普林格，2021.

[8] N. B´edaride. 有理多面体中的台球复杂度。《规则与混沌动力学》, 8(1):97–104, 2003.[9] N. B´edaride. 环面 $\mathbb{T}^2$ 上的旋转分类。《理论计算机科学》, 385(1-3):214–225, 2007.[10] N. B´edaride. 超立方体台球的方向复杂度。《离散数学》, 309(8):2053–2066, 2009.[11] N. B´edaride and P. Hubert. 超立方体中的台球复杂度。《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》, 57(3):719–738, 2007.[12] J. Cassaigne. 复杂度与特殊因子。《比利时数学会通报——西蒙·斯特芬》, 4(1):67–88, 1997.[13] J. Cassaigne, P. Hubert, and S. Troubetzkoy. 多边形台球的复杂度与增长。《傅里叶研究所年刊》, 52(3):835–847, 2002.[14] A. Frid and D. Jamet. 二进制旋转词的数量。《*RAIRO*：理论与应用信息学》, 48(4):453–465, 2014.[15] P. Hubert. 有理台球定义的序列复杂度。《法国数学会通报》, 123(2):257–270, 1995.[16] S. Tabachnikov. 台球，综合全景丛书第1卷。巴黎：法国数学会，1995.