arXiv:2602.06414v1 [math.AP] 6 Feb 2026

# 半空间上 $n$-拉普拉斯刘维尔方程的非线性诺伊曼边界问题

WEI DAI、CHANGFENG GUI、YICHEN HU、SHAOLONG PENG

Abstract. 本文针对一般的 $n \geq 2$，对半空间 $\mathbb{R}^n_+$上带有正非线性诺伊曼边界条件的 $n$-拉普拉斯刘维尔方程的解进行了分类。在正非线性诺伊曼边界条件下，我们的结果将 [35] 中二阶刘维尔方程的分类结果从 $n = 2$ 推广到一般的 $n \geq 2$，并将 [54] 中临界 $p$-拉普拉斯方程的分类结果从 $p < n$ 推广到 $p = n$。

**关键词：** $n$-拉普拉斯刘维尔方程，非线性Neumann边界条件，分类定理，拟线性椭圆方程，半空间。

**2010 MSC** 主分类：35J92；次分类：35B06, 35B40。

## 1. Introduction

**1.1. 问题背景与设定。** 本文主要研究半空间中具有有限质量的以下 $n$-拉普拉斯刘维尔方程:

$$\begin{cases} -\Delta_n u = e^u & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ |\nabla u|^{n-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = e^{\frac{n-1}{n}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+, \\ \displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x < +\infty, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中， $n \geq 2$ 和 $\nu = (0, \cdots, 0, -1)$是边界 $\partial\mathbb{R}^n_+$上的单位外法向量。若 $u$ 是满足 $u \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$且

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^{n-2}\langle \nabla u, \nabla \psi\rangle \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n_+} e^{u(x)}\psi(x)\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u(x)}\psi(x)\mathrm{d}\sigma$$

对所有 $\psi \in W^{1,n}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$（其中$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界）均成立，则称是-拉普拉斯刘维尔方程（1.1）的一个解。

特别地，当 $n = 2$ 时， $n$-拉普拉斯算子退化为常规的二阶拉普拉斯算子。Li 和 Zhu 利用移动球面法和积分表示公式,

WEI DAI 获得了中国国家自然科学基金（编号：12222102 和 12571113）、国家科技重大专项（2022 ZD0116401）以及中央高校基本科研业务费的资助。CHANGFENG GUI 获得了国家自然科学基金重点项目（项目编号：12531010）、澳门大学研究资助（CPG2024- 00016-FST、CPG2025-00032-FST、CPG2026-00027-FST、SRG2023-00011-FST、MYRGGRG2023-00139-FST- UMDF）、澳门大学数学教授奖学金、澳门特别行政区科学技术发展基金项目（0003/2023/RIA1 和 0024/2023/RIB1）的资助。YICHEN HU 获得了中国国家自然科学基金（编号：12501135）和中央高校基本科研业务费（DUT24RC(3)110）的资助。SHAOLONG PENG 获得了中国国家自然科学基金（编号：12401148）和北京市自然科学基金（编号：1262014）的资助。

[35] 证明了以下 $C^2$-光滑解

$$\begin{cases} -\Delta u = e^u & \text{in } \mathbb{R}^2_+, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \pm e^{\frac{1}{2}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^2_+, \\ \displaystyle\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{\frac{1}{2}u}\mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^2_+} e^u \mathrm{d}x < +\infty \end{cases} \tag{1.2}$$

必为如下形式

$$u(y,t) = \ln\left[\frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 + |y-y_0|^2 + |t-t_0|^2)^2}\right]$$

对某些 $\lambda > 0$、 $y_0 \in \partial\mathbb{R}^2_+$ 和 $t = \mp\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$。Zhang [53] 去掉了 [35] 中的假设 $\int_{\partial\mathbb{R}^2_+} e^{\frac{1}{2}u}\mathrm{d}\sigma_- < +\infty$。

方程(1.1)与全空间 $\mathbb{R}^n$中的如下刘维尔方程有关:

$$\begin{cases} -\Delta_n u = e^u & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^u \mathrm{d}x < +\infty, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中 $n \geq 2$。当 $n = 2$时，Chen和Li [12] 利用移动平面法证明，方程(1.3)的所有 $C^2$-光滑解必为如下形式

$$u(x) = \ln\left[\frac{2\lambda}{1+\lambda^2|x-x_0|^2}\right]$$

刘维尔方程(1.3)最初由刘维尔[38], 研究，它出现于多种情形，例如几何中的指定高斯曲率以及物理中的燃烧理论。在 [11, 13], 中，作者用不同方法重新证明了 [12] 中关于二维刘维尔方程(1.3)的分类结果。通过利用等周不等式和Pohozaev恒等式，Esposito [24]对方程(1.3)的所有解进行了分类。他证明，方程(1.3)的所有弱解必为如下形式

$$u(x) = \ln\left[\frac{c_n\lambda^n}{(1+\lambda^{\frac{n}{n-1}}|x-x_0|^{\frac{n}{n-1}})^n}\right]$$

对某些 $\lambda > 0$ 和 $x_0 \in \mathbb{R}^n$。随后，Ciraolo和Li [17] 得到了全空间 $\mathbb{R}^n$中各向异性 $n$-Laplacian刘维尔方程的分类结果，Dai、Gui和Luo [18]将 [11, 12, 13, 17, 24] 中关于全空间 $\mathbb{R}^n$ 上 $n$维拟线性李乌维尔方程的分类结果推广到一般凸锥 $\mathcal{C}$中的各向异性 $n$-Laplacian刘维尔方程。

应当指出，由于 $n$-Laplacian的非线性以及(1.1)中的非线性Neumann边界条件，移动平面法、与积分表示公式相结合的移动球面法以及等周不等式等方法均不可用。关于球面覆盖不等式及其在刘维尔型方程上的应用，请参阅 [32] ，并参见 [4, 29, 30, 31]。关于借助Jerison-Lee恒等式和不变张量技巧对Heisenberg群或CR流形上半线性方程解的分类，见 [39, 40] 及其中的参考文献。关于刘维尔型方程组或（高阶）刘维尔型方程的分类及其他相关结果，参见[7, 8, 10, 11, 20, 37, 51]及其中的参考文献。

Damascelli、Merch´an、Montoro 和 Sciunzi [21], Sciunzi [46], V´etois [49], Oliva、Sciunzi 和 Vaira [41] 建立了带有 $1 < p < n$ 的临界 $p$-Laplacian 方程的分类结果

通过移动平面法，另见 [9, 19]。关于黎曼流形上带有 $1 < p < n$ 的临界$p$-Laplacian 方程的分类结果，可参见例如 [47]。Ciraolo、Figalli 和 Roncoroni [15]利用向量场与积分法，对一般凸锥 $\mathcal{C}$中的临界各向异性 $p$-Laplacian 方程的正解进行了分类。对于 $\frac{n+1}{3} < p < n$, Ou [42] 也利用向量场与积分法，在没有有限能量条件的情况下，证明了 $\mathbb{R}^n$ 中临界 $p$-Laplacian 方程的分类结果。对于 $1 < p < n$，Zhou [54] 改进了 [15, 42] 的方法，对半空间 $\mathbb{R}^n_+$中带有非线性Neumann边界条件的临界$p$-Laplacian 方程的正解进行了分类。最近，在假设 $\int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u} \mathrm{d}\sigma < +\infty$ 的条件下，Dou、Han、Yuan 和 Zhou [23]证明了半空间 $\mathbb{R}^n_+$ 中带有诺伊曼边界条件 $|\nabla u|^{n-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = e^{\frac{n-1}{n}u}$ 且定义于 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上的 $n$-调和方程 $-\Delta_n u = 0$ 的分类结果。

1.2. **主要结果**。 本文证明了关于 (1.1) 的以下分类定理。

**定理 1.1**。 假设 $n \geq 2$。方程 (1.1) 的任意解 $u$ 都必须具有如下形式：

$$u(x) = \ln \frac{c_n \lambda^n}{\left(1 + (\lambda|x - x^0|)^{\frac{n}{n-1}}\right)^n}$$

[1]其中 $x^0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $\lambda = -\frac{c_n^n}{nx_n^0} > 0$为某些取值，且 $c_n = n(\frac{n^2}{n-1})^{n-1}$。

注 1.2。 在正非线性诺伊曼边界条件下，我们的结果将 [35] 中二阶刘维尔方程的分类结果从 $n = 2$ 推广到一般的 $n \geq 2$，同时也将 [54] 中临界 $p$-拉普拉斯方程的分类结果从 $p < n$ 推广到$p = n$。

1.3. **证明的关键要素及思路**。由于 (1.1) 中 $n$-拉普拉斯算子和非线性诺伊曼边界条件的非线性，移动平面法、结合积分表示公式与等周不等式的移动球面法等方法均不适用。我们将使用向量场与积分法证明定理 1.1。

然而，与 $p < n$ 情形不同，为了将向量场与积分法应用于 $n$-拉普拉斯算子，我们需要先建立解 $u$在 $\infty$处以及 $\nabla u$ 的尖锐渐近估计（见第 3 节）。由于非线性诺伊曼边界条件，为问题 (1.1) 构造合适的辅助上、下解颇为困难。受 [24, 25],启发，我们将使用球面反射变换，把 $\infty$ 处的尖锐渐近估计转化为原点 0 附近的渐近估计，并通过与 [17, 18]中类似的论证，推导出 $\nabla u$ 的尖锐渐近估计。为此，为了处理非线性诺伊曼边界条件，我们需要证明许多有用的技术工具；这些工具本身也具有研究价值和重要性，例如带诺伊曼边界条件的 Brezis-Merle 型指数不等式、诺伊曼边界条件下的全局 $L^\infty$估计、混合边界条件下的全局 $L^\infty$估计，以及诺伊曼边界条件下直至边界的 $L^\infty$估计，见引理 2.2、2.4、2.5 和命题 2.6。

接下来，我们需要证明二阶正则性 $|\nabla u|^{n-2}\nabla u \in W^{1,\,2}_{\mathrm{loc}}$ 并获得关于二阶导数的渐近积分估计（见第4节），这对我们的证明至关重要。然而，由于解 $u$ 仅属于 $W^{1,\,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, 我们无法构造一列光滑且全局有界的近似解来逼近半空间上方程 (1.1) 的解 $u$

相反，我们在每个固定球上构造满足适当近似方程的光滑函数，并使其收敛到方程 (1.1) 的解 $u$ ，见引理 A.1。此外，在我们的情形下，我们不仅需要诺伊曼边界条件的正则性结果，还需要混合边界条件的正则性结果。为此，我们首先需要建立混合边界条件的全局 $L^\infty$-估计，以及诺伊曼边界条件下直至边界的 $L^\infty$-估计，见引理 2.4 和引理 2.5。

最后，在第 5 节中，我们采用 $[27, 54]$, 中的 Bochner技巧 和 Pohozaev恒等式，构造了两个重要的积分恒等式，由此推出定理 1.1。与 $[27, 54]$, 中的方法相比，我们遇到了两个新的困难。首先，如上所述，我们无法在整个半空间上构造光滑近似解。其次，所考虑的积分不再有限，可能趋于无穷大。为解决第一个困难，我们在每个固定的球上构造满足适当近似方程的光滑函数，并使其收敛到方程 (1.1) 的解 $u$ ，见引理 A.2。对于第二个困难，我们在球 $B_R$(0) 上积分时引入了适当的扰动 $\epsilon$ 。接着，我们先令$R \to +\infty$ ，再令 $\epsilon \to 0$，见命题 5.1。

我们只能处理（1.1）中的正非线性诺伊曼边界条件。主要原因是，在第 3 节证明解 $u$ 和 $\nabla u$ 在$\infty$ 处的尖锐渐近估计时，比较原理是关键工具，并且在许多地方都用到了；而对于负诺伊曼边界条件，这些原理并不适用，因为边界值为负，且在 $\partial\mathbb{R}^n_+$上的 $\infty$ 处衰减缓慢。详情请参见命题 3.1 和命题 3.3 的证明。因而，处理负诺伊曼边界条件可能需要一种新的方法。需要指出的是，我们的方法还可以导出 [23]中 $n$-调和方程 $-\Delta_n u = 0$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上的诺伊曼边值问题的分类结果。

1.4. **论文结构**。 本文其余部分安排如下。第 2 节将介绍一些预备知识，包括关于 Finsler$n$-拉普拉斯算子的 Brezis-Merle 型指数不等式、诺伊曼边界条件下 Serrin 的局部 $L^\infty$-估计、比较原理和 Liouville 型结果等。第 3 节和第 4 节分别致力于证明 $u$和 $\nabla u$处的尖锐渐近估计，以及弱解的二阶正则性。第 5 节和第 6 节中，我们利用 Bochner技巧和类似 Pohozaev恒等式的 [27]来证明定理 1.1。在附录 A 中，我们将证明具有混合边界条件的 n-拉普拉斯方程解的存在性，这对弱解的二阶正则性（命题 5.1）很有用。在附录 B 中，我们给出引理 2.4 的证明。

1.5. **一些记号**。 (1) $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$, $\mathbb{R}^n_- := \{x \in \mathbb{R}^n, x_n < 0\}$. (2) $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega)$ 表示，对于任意紧集 $\Omega_1$，使得 $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega$ 且$dist(\partial\Omega_1, \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_+) > 0$，我们有 $u \in W^{1,p}(\Omega_1)$。(3) $u \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega)$ 表示 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega)$ 且 $u|_{\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_+} = 0$。(4) $\omega_n$ 表示 $n$维单位球的体积。

## 2. Preliminaries

首先，我们需要以下关于函数 $u$ 的索博列夫不等式，其中 $u \in W^{1,p}\big(\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(x_0)\big)$ 且 $u|_{\partial B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+} = 0$，其中 $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$。

**引理 2.1**。 设 $1 \le p < n$ 且 $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$。若 $u \in W^{1,p}\big(\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(x_0)\big)$ 且 $u|_{\partial B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+} = 0$, 则

$$\|u\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)} \le C_{n,p}\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)}, \tag{2.1}$$

其中，$C_{n,p}$ 是一个依赖于 $n$ 和 $p$的常数。

证明。 若 $\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(x_0) = \emptyset$, 则由$W^{1,p}_0\big(B_R(x_0)\big)$的索博列夫不等式可直接得到（2.1）。若 $\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0) \ne \emptyset$, 则有 $B_R(x_0) \subset B_{2R}(x_1)$, 其中 $x_1 \in \partial\mathbb{R}^n_+$和 $dist(x_0, x_1) = dist(x_0, \partial\mathbb{R}^n_+)$。令

$$\begin{cases} u_1(x) = u(x), & x \in B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+, \\ u_1(x) = 0, & x \in \big(B_{2R}(x_1)\setminus B_R(x_0)\big)\cap\mathbb{R}^n_+, \\ u_1(x', x_n) = u_1(x', -x_n), & x \in B_{2R}(x_1)\cap\mathbb{R}^n_-. \end{cases}$$

于是 $u_1(x) \in W^{1,p}_0\big(B_R(x_1)\big)$, $\|u_1\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)} = 2\|u\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)}$ 以及$\|\nabla u_1\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)} = 2\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)}$。因此，对 $W^{1,p}_0\big(B_R(x_1)\big)$应用索博列夫不等式，得到

$$\|u\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)} = \frac{1}{2}\|u_1\|_{L^{p^*}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_1)\right)} \le \frac{1}{2}C_{n,p}\|\nabla u_1\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_1)\right)} = C_{n,p}\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(x_0)\right)}.$$

至此，我们完成了引理 2.1 的证明。 □

接下来，我们将证明以下三个引理，分别关于 Finsler $n$-拉普拉斯算子的 Brezis-Merle 型指数不等式（参见 [7]）、混合边界条件的全局 $L^\infty$-估计，以及诺伊曼边界条件直至边界的 $L^\infty$-估计。关于 Brezis-Merle 型指数不等式，参见 [2, 24, 43]（针对 $n$-拉普拉斯算子）以及参见 [17, 50, 52]（针对 Finsler $n$-拉普拉斯算子）。关于 Serrin 的局部 $L^\infty$-估计，参见 [44], , 另见 [17]。然而，由于非线性边界条件，我们需要做一些改进。

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为 一个有界区域，且$\mathbf{a}: \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为一个 Carathodory 函数，使得 at

$$|\mathbf{a}(x,p)| \le c\left(a(x) + |p|^{n-1}\right), \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n, \text{ a.e. } x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$\langle \mathbf{a}(x,p) - \mathbf{a}(x,q), p-q\rangle \ge d|p-q|^n, \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}^n, \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{2.3}$$

对某个 $c, d > 0$ 以及 $a \in L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$。给定 $f \in L^1(\Omega)$, 设 $u \in W^{1,n}(\Omega)$ 为如下方程的弱解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\mathbf{a}(x,\nabla u) = f & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{a}(x,\nabla u)\cdot\nu = g & \text{on } \Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.4}$$

由（2.2）可知，方程（2.4）可按以下方式理解:

$$\int_\Omega \langle \mathbf{a}(x,\nabla u), \nabla\phi\rangle = \int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} g\phi + \int_\Omega f\phi, \quad \forall \phi \in W^{1,n}_0(\Omega\cap\overline{\mathbb{R}^n_+})\cap L^\infty(\Omega). \tag{2.5}$$

由于 $u \in W^{1,n}(\Omega)$，我们来考虑方程的弱解 $h \in W^{1,n}(\Omega)$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\mathbf{a}(x,\nabla h) = 0 & \text{in } \Omega\cap\mathbb{R}^n_+, \\ h = u, & \text{on } \partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+, \\ \mathbf{a}(x,\nabla h)\cdot\nu = 0 & \text{on } \Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{2.6}$$

与 [2, 5, 6, 24], 类似，我们可以证明以下具有诺伊曼边界条件的 Brezis-Merle 型指数不等式。

**引理 2.2**（具有诺伊曼边界条件的 Brezis-Merle 型指数不等式）。设 $f \in L^1(\Omega)$， $g \in L^1(\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$ 并假设 (2.2)-(2.3)。设 $u$ 是满足 (2.4) 且意义为 (2.5)的弱解，并令

$$\Lambda_q = \left( \frac{S_{q,+}^{\frac{n}{q}} d}{\|f\|_1 + \|g\|_1} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

其中 $S_{q,+}$ 是 *Sobolev*嵌入 $\mathcal{D}^{1,q}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \hookrightarrow L^{\frac{nq}{n-q}}\left(\mathbb{R}^n_+\right), 1 \le q < n$的最佳常数。于是，对于每个 $0 < \lambda < \Lambda_1$ 和 $0 < \frac{q}{q-1}\beta < \Lambda_1$，有

$$\int_\Omega e^{\lambda|u-h|} \le \frac{|\Omega|}{1 - \lambda\Lambda_1^{-1}}, \quad \int_\Omega |\nabla(u-h)|^q \le \frac{2S_{q,+}}{\Lambda_q^{\frac{q(n-1)}{n}}} \left( 1 + \frac{2^{\frac{n}{q(n-1)}}}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}\Lambda_q} \right)^{\frac{q}{n}} |\Omega|^{\frac{n-q}{n}}, \tag{2.7}$$

*and*

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\beta|u-h|} \mathrm{d}\sigma \\ \le &\tilde{S}_1\beta \left(\frac{|\Omega|}{1 - \frac{q}{q-1}\beta\Lambda_1^{-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left( \frac{2S_{q,+}}{\Lambda_q^{\frac{q(n-1)}{n}}} \left( 1 + \frac{2^{\frac{n}{q(n-1)}}}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}\Lambda_q} \right)^{\frac{q}{n}} |\Omega|^{\frac{n-q}{n}} \right)^{\frac{1}{q}} + |\Omega \cap \partial\mathbb{R}^n_+|, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中 $\tilde{S}_1$ 是 *Sobolev*迹嵌入 $\mathcal{D}^{1,1}\left(\mathbb{R}^n_+\right) \hookrightarrow L^1\left(\partial\mathbb{R}^n_+\right.$的最佳常数 $\left.\right)$。

证明。 固定 $k \ge 0, a > 0$。我们定义截断算子 $T_k$ $(k > 0)$ 如下

$$T_k(u) = \begin{cases} u, & \text{if } |u| \le k, \\ k\frac{u}{|u|}, & \text{if } |u| > k. \end{cases} \tag{2.9}$$

由于 $T_{k+a}(u-h) - T_k(u-h) \in W^{1,n}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$，由 (2.6)-(2.9)，我们得到

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \mathbf{a}(x, \nabla u) - \mathbf{a}(x, \nabla h), \nabla \left[ T_{k+a}(u-h) - T_k(u-h) \right] \rangle = &\int_\Omega f \left[ T_{k+a}(u-h) - T_k(u-h) \right] \\ &+ \int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} g \left[ T_{k+a}(u-h) - T_k(u-h) \right], \end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{1}{a} \int_{\{k<|u-h|\le k+a\}} |\nabla(u-h)|^n \le \frac{\|f\|_1 + \|g\|_1}{d} \tag{2.10}$$

in 根据式 (2.3)。由式 (2.10) 和引理 2.3，我们可得式 (2.7) 成立 .

由于 $u=h$ 对于 $y\in\partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$，由索博列夫迹不等式可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|e^{\beta|u-h|}-1|\mathrm{d}\sigma \leq&\tilde{S}_1\int_\Omega|\nabla e^{\beta|u-h|}|\mathrm{d}x\\ \leq&\tilde{S}_1\int_\Omega|\beta e^{\beta|u-h|}\nabla|u-h||\mathrm{d}x\\ \leq&\tilde{S}_1\beta\left(\int_\Omega|e^{\frac{q}{q-1}\beta|u-h|}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_\Omega|\nabla(u-h)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\ \leq&\tilde{S}_1\beta\left(\frac{|\Omega|}{1-\frac{q}{q-1}\beta\Lambda_1^{-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{2S_{q,+}}{\Lambda_q^{\frac{q(n-1)}{n}}}\left(1+\frac{2^{\frac{n}{q(n-1)}}}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}\Lambda_q}\right)^{\frac{q}{n}}|\Omega|^{\frac{n-q}{n}}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

其中 $0<\frac{q}{q-1}\beta<\Lambda_1$。因此

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|e^{\beta|u-h|}|\mathrm{d}\sigma\\ \leq&\tilde{S}_1\beta\left(\frac{|\Omega|}{1-\frac{q}{q-1}\beta\Lambda_1^{-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\frac{2S_{q,+}}{\Lambda_q^{\frac{q(n-1)}{n}}}\left(1+\frac{2^{\frac{n}{q(n-1)}}}{(n-1)^{\frac{1}{n-1}}\Lambda_q}\right)^{\frac{q}{n}}|\Omega|^{\frac{n-q}{n}}\right)^{\frac{1}{q}}+|\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+|.\end{aligned}$$

由此我们得出 (2.8) 成立。 □

**引理 2.3**。设 $w$ 为可测函数，使得对所有 $k\geq 0, a>0$, $T_k(w)\in W^{1,n}(\Omega)$,$T_k(w)|_{\partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}=0$ 以及

$$\frac{1}{a}\int_{\{k<|w|\leq k+a\}}|\nabla w|^n\leq C_0$$

对某个 $C_0>0$，其中 $T_k$ 由 (2.9) 给出。则有

$$\int_\Omega e^{\lambda|w|}\leq\frac{|\Omega|}{1-\lambda\Lambda^{-1}},\quad \int_\Omega|\nabla w|^q\leq 2C_0^{\frac{q}{n}}\left(1+\left(\frac{2^{\frac{n}{q}}C_0}{(n-1)S_{q,+}^{\frac{n}{q}}}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{q}{n}}|\Omega|^{\frac{n-q}{n}}$$

对每个 $0<\lambda<\Lambda=\left(\frac{S_1^n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n-1}}$和 $1\leq q<n$均成立。

证明。由于 $T_k(w)\in W^{1,n}(\Omega)$ 且 $T_k(w)|_{\partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}=0$，利用 Sobolev嵌入 $\mathcal{D}^{1,q}\left(\mathbb{R}^n_+\right)\hookrightarrow L^{\frac{nq}{n-q}}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$，我们可以按照 [24] 中引理 2.2 的证明方法证明该引理。□

**引理 2.4**（混合边界条件下的全局 $L^\infty$-估计）。假设 $\mathbf{a}(x,p)$ 是满足以下条件的 *Carathodory* 函数：$\mathbf{a}(x,0)=0$,

$$|\mathbf{a}(x,p)|\leq d\left(s+|p|^{n-1}\right),\qquad\forall p\in\mathbb{R}^n,\ a.e.\ x\in\Omega, \tag{2.11}$$

$$\langle\mathbf{a}(x,p)-\mathbf{a}(x,q),p-q\rangle\geq e|p-q|^n,\qquad\forall p,q\in\mathbb{R}^n,\ a.e.\ x\in\Omega, \tag{2.12}$$

*and*

$$|\mathbf{a}(x,p)-\mathbf{a}(x,p+t)|\geq e\bigg(\left(s+|p|\right)^{n-2}|t|+|t|^{n-1}\bigg),\qquad\forall p,t\in\mathbb{R}^n,\ a.e.\ x\in\Omega \tag{2.13}$$

对某些 $d$、$e$、$s>0$。设 $u\in W^{1,n}(B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+)$ 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} -div\big(\mathbf{a}(x,\nabla u)\big)=f & \text{in } \Omega:=B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+,\\ u=h & \text{on } \Gamma_1:=\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+,\\ \mathbf{a}(x,u,\nabla u)\cdot\nu=g & \text{on } \Gamma_2:=B_R(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases} \tag{2.14}$$

其中 $f\in L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(\Omega)$，$h\in C^1(\Omega)$ 以及 $g\in L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(\Gamma_2)$ 对某个 $0<\varepsilon<1$。则
*(i)* 对任意满足 $B_{2r}(x_0)\cap\Gamma_2=\emptyset$ 的 $r>0$ 和 $x_0\in\Gamma_1$，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0)\cap\Omega)}\le& C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big(\|u\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+\|h\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}\\ &+r^{-\epsilon}\|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+\big(s+s^{n-1}+\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})}\big)^{\frac{1}{n-1}}\Big),\end{aligned}$$

其中 $C_{d,e,n,h,\epsilon}$ 是依赖于 $e$、$d$、$n$、$\|h\|_{C^1(\Omega)}$ 和 $\epsilon$ 的常数；*(ii)* 对任意满足 $B_{2r}(x_0)\cap\Gamma_1=\emptyset$ 的 $r>0$ 和 $x_0\in\Gamma_2$，我们有 *th* $at$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0)\cap\Omega)}\le& C_{d,e,n,\epsilon}\Big(\|u\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+\|u\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Gamma_2)}\\ &+r^{-\epsilon}\|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+r^{-\epsilon}\|g\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}\\ &+\big(s+s^{n-1}+\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})}\big)^{\frac{1}{n-1}}\Big),\end{aligned}$$

其中 $C_{d,e,n,\epsilon}$ 是依赖于 $e$、$d$、$n$ 和 $\epsilon$ 的常数；
*(iii)* 对任意 $0<r<\frac{R}{8}$ 和 $x_0\in\partial\Gamma_2$，我们有

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0)\cap\Omega)}\le& C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big(\|u\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+\|u\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Gamma_2)}\\ &+\|h\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+\|h\|_{L^n(B_{2r}(x_0)\cap\Gamma_2)}\\ &+r^{-\epsilon}\|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}+r^{-\epsilon}\|g\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(B_{2r}(x_0)\cap\Omega)}\\ &+\Big(s+s^{n-1}+\|h\|_{C^1(\overline{\Omega})}\Big)^{\frac{1}{n-1}}\Big),\end{aligned}$$

其中 $C_{d,\ e,\ n,\ h,\ \epsilon}$ 是一个依赖于 $e$、$d$、$n$、$\|h\|_{C^1(\Omega)}$ 和 $\epsilon$ 的常数。

证明。引理 2.4 的证明见附录 B。 □

**引理 2.5** ($L^\infty$-诺伊曼边界条件下至边界的估计)。 假设 $\mathbf{a}(x,p)$ 是满足 $\mathbf{a}(x,0)=0$、(2.11)、(2.12) 和 (2.13) 的 *Carathodory* 函数，其中 $d$、$e$、$s>0$ 如引理 *2.4* 中所述。设 $u\in W^1_{loc}{}^n(\mathbb{R}^n_+)$ 是下列方程的弱解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{a}(x,\nabla u))=f & \text{in } \mathbb{R}^n_+,\\ \mathbf{a}(x,\nabla u)\cdot\nu=g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

对于某个 $0<\varepsilon<1$，满足 $f\in L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(\mathbb{R}^n_+)$ 和 $g\in L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(\partial\mathbb{R}^n_+)$。那么对于任意 $x_0\in\overline{\mathbb{R}^n_+}$，我们有

$$\begin{aligned}\|u^+\|_{L^\infty(B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}\leq& C\Bigg(R^{-1}\|u^+\|_{L^n(B_{2R}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}+R^{-\frac{n}{n-1}}\|u^+\|_{L^n(B_{2R}(x_0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+)}\\&+R^{\frac{\varepsilon}{n-1}}\|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_{2R}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}+R^{\frac{\varepsilon}{n-1}}\|g\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(B_{2R}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}\\&+(s+s^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\Bigg),\end{aligned}$$

其中 $C=C(n,\varepsilon,d,e)$ 为常数。此外，若 $g\equiv0$，则有

$$\begin{aligned}\|u^+\|_{L^\infty(B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}\leq& C\Bigg(R^{-1}\|u^+\|_{L^n(B_{2R}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}+R^{\frac{\varepsilon}{n-1}}\|f\|^{\frac{1}{n-1}}_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_{2R}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+)}\\&+(s+s^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\Bigg),\end{aligned}$$

其中 $C=C(n,\varepsilon,d,e)$ 为常数。

证明。 证明与引理 2.4 中 (ii) 的证明类似，因此略去。 □

引理 2.2 中的估计不足以确立 $u$ 在无穷远处的对数行为，但在极限情形 $f\in L^1(\Omega)$ 和 $g\in L^1(\partial\Omega)$ 下基本上是最优的。与 [44, 45], 类似，只要 $f$ 和 $g$ 具有稍强的可积性，就能得到如下命题所述的全局 $L^\infty$界。我们还可以看出，下面的命题 2.6 是对 [24]中命题 4.1 的改进。

**命题 2.6**。 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n_+$, $p>1$, $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^p(\partial\Omega)$，假设 (2.3) 且 $\mathbf{a}(x,0)=0$。设 $u\in W^{1,n}(\Omega)$ 是以下方程的弱解

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\mathbf{a}(x,\nabla u)=f & in\ \Omega,\\ \mathbf{a}(x,\nabla u)\cdot\nu=g & on\ \Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+,\\ u=0 & on\ \partial\Omega\cap\mathbb{R}^n_+.\end{cases}\tag{2.15}$$

*Then*

$$\begin{aligned}\|u\|_\infty\leq& C\left(\frac{(\|f\|_p+\|g\|_p)(|\Omega|^{\frac{(n-1)(p-1)}{2pn}}+|\Omega|^{\frac{p-1}{2p}})}{d}+1\right)^{\alpha_0}(|\Omega|+|\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+|+1)^{\beta_0}\\&\times\left(\|u\|^{\bar q}_{L^{\frac{npq_1}{p-1}}(\Omega)}+\|u\|^{\bar q}_{L^{\frac{npq_1}{p-1}}(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)}\right)\end{aligned}$$

其中某些常数 $C$、$\alpha_0$、$\beta_0$、$\bar q>0$ 仅依赖于 $n$、$p$ 和 $q_1\geq1$。

证明。 给定 $q\geq1$ 和 $k>0$，我们设

$$F(s)=\begin{cases}s^q, & \text{if } 0\leq s\leq k,\\ qk^{q-1}s-(q-1)k^q, & \text{if } s\geq k,\end{cases}$$

且 $G(s)=F(s)\,[F'(s)]^{n-1}$。注意， $G$是一个分段 $C^1$ 函数，其拐角恰好位于$s=k$ ，因此

$$[F'(s)]^n\leq G'(s),\quad G(s)\leq q^{n-1}F^{\frac{n(q-1)+1}{q}}(s).\tag{2.16}$$

由于 $G(|u|) \in W^{1,n}(\Omega)$ 对于 $G$ 在无穷远处是线性的，我们在 (2.15) 中使用 $\mathrm{sign}(u)G(|u|)$ 作为测试函数，得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla F(|u|)|^n &\le \frac{1}{d}\int_\Omega G'(|u|)\langle \mathbf{a}(x,\nabla u),\nabla u\rangle \\ &= \frac{1}{d}\bigg(\int_\Omega f\,\mathrm{sign}(u)G(|u|)+\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} g\,\mathrm{sign}(u)G(|u|)\bigg)\end{aligned} \tag{2.17}$$

根据 (2.3)、(2.16) 和 $\mathbf{a}(x,0) = 0$. 令 $m = \frac{p}{p-1}$，根据 $p > 1$，由 (2.16) 和 Hölder 不等式可推出

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{sign}(u)G(|u|)\right| \le q^{n-1}\int_\Omega |f|F^{\frac{n(q-1)+1}{q}}(|u|) \le q^{n-1}|\Omega|^{\frac{n-1}{mnq}}\|f\|_p\left(\int_\Omega F^{mn}(|u|)\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}}$$

and

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} g\,\mathrm{sign}(u)G(|u|)\right| &\le q^{n-1}\int_\Omega |g|F^{\frac{n(q-1)+1}{q}}(|u|) \\ &\le q^{n-1}|\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+|^{\frac{n-1}{mnq}}\|g\|_p\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} F^{mn}(|u|)\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

由于 $F(|u|) \in W^{1,n}(\Omega)$ 且 $F(|u|) = 0$ 在 $\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_+$ 上，利用引理 2.1、Hölder 不等式和索博列夫迹不等式，可得

$$\begin{aligned}&\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} F^{2mn}(|u|)\right)^{\frac{1}{2m}} + \left(\int_\Omega F^{2mn}(|u|)\right)^{\frac{1}{2m}} \\ \le& C\left(\left(\int_\Omega |\nabla F(|u|)|^{\frac{2mn^2}{n-1+2mn}}\right)^{\frac{n-1+2mn}{2mn}} + \left(\int_\Omega |\nabla F(|u|)|^{\frac{2mn^2}{n+2mn}}\right)^{\frac{n+2mn}{2mn}}\right) \\ \le& C(|\Omega|^{\frac{n-1}{2mn}} + |\Omega|^{\frac{1}{2m}})\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} |\nabla F(|u|)|^n \\ \le& \frac{C(|\Omega|^{\frac{n-1}{2mn}} + |\Omega|^{\frac{1}{2m}})}{d} q^{n-1}\Big(\|f\|_p + \|g\|_p\Big)\Big(|\Omega| + |\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+|\Big)^{\frac{n-1}{mnq}} \\ &\times\left(\left(\int_\Omega F^{mn}(|u|)\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}} + \left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+} F^{mn}(|u|)\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}}\right)\end{aligned}$$

鉴于 (2.16)、(2.17) 和 (2.18)，对某个 $C \ge 1$。由于 $F(s) \to s^q$ 随 $k \to +\infty$ 以单调方式变化，由 $(a+b)^p \le a^p + b^p$，对 $a, b \ge 0,\ 0 < p < 1$，以及 $a^p + b^p \le 2(a+b)^p$，对 $a, b, p > 0$,

我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{2mnq}+\int_{\Omega}|u|^{2mnq}\right)^{\frac{1}{2mq}}\\
\le&\left(\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{2mnq}\right)^{\frac{1}{2m}}+\left(\int_{\Omega}|u|^{2mnq}\right)^{\frac{1}{2m}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
\le&\exp\left[\frac{1}{q}\ln\frac{CD_{f,g,p,n,\Omega}}{d}+\frac{(n-1)\ln D_\Omega}{mnq^2}+(n-1)\frac{\ln q}{q}\right]\\
&\times\left(\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq}\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}}+\left(\int_{\Omega}|u|^{mnq}\right)^{\frac{n(q-1)+1}{mnq}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
\le&\exp\left[\frac{1}{q}\ln\frac{2CD_{f,g,p,n,\Omega}}{d}+\frac{(n-1)\ln D_\Omega}{mnq^2}+(n-1)\frac{\ln q}{q}\right]\\
&\times\left(\int_{\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq}+\int_{\Omega}|u|^{mnq}\right)^{\frac{1}{mq}\left[1-\frac{n-1}{nq}\right]},
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

其中 $D_{f,g,p,n,\Omega}=(\|f\|_p+\|g\|_p)(|\Omega|^{\frac{(n-1)(p-1)}{2pn}}+|\Omega|^{\frac{p-1}{2p}})$，且 $D_\Omega=|\Omega|+|\Omega\cap\partial\mathbb{R}^n_+|$。现在假设对于某个 $q_1\ge 1$，有 $u\in L^{mnq_1}(\Omega)$。令 $q_j=2^{j-1}q_1, j\in\mathbb{N}$，通过迭代 (2.19)，我们推得

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{2mnq}+\int_{\Omega}|u|^{2mnq}\right)^{\frac{1}{2mq}}\\
\le&\exp\left[\frac{1}{q_j}\ln\frac{CD_{f,g,p,n,\Omega}}{d}+\frac{(n-1)\ln D_\Omega}{mnq_j^2}+(n-1)\frac{\ln q_j}{q_j}\right]\left[\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq_j}+\int_{\Omega}|u|^{mnq_j}\right)^{\frac{1}{mq_j}}\right]^{1-\frac{n-1}{nq_j}}\\
\le&\exp\left[\ln\frac{CD_{f,g,p,n,\Omega}}{d}\sum_{k=j-1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k}+\frac{(n-1)\ln D_\Omega}{mn}\sum_{k=j-1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k^2}+(n-1)\sum_{k=j-1}^{j}\frac{a_k^j\ln q_k}{q_k}\right]\\
&\times\left[\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq_{j-1}}+\int_{\Omega}|u|^{mnq_{j-1}}\right)^{\frac{1}{mq_{j-1}}}\right]^{a_{j-2}^j}\\
\cdots\le&\exp\left[\ln\frac{CD_{f,g,p,n,\Omega}}{d}\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k}+\frac{(n-1)\ln D_\Omega}{mn}\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k^2}+(n-1)\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j\ln q_k}{q_k}\right]\\
&\times\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq_1}+\int_{\Omega}|u|^{mnq_1}\right)^{\frac{a_0^j}{mq_1}},
\end{aligned}
$$

其中

$$
a_k^j=\begin{cases}\left[1-\frac{n-1}{nq_{k+1}}\right]\times\cdots\times\left[1-\frac{n-1}{nq_j}\right], & \text{if } 0\le k<j,\\ 1, & \text{if } k=j.\end{cases}
$$

由于对于所有 $k=0,\ldots,j$，都有 $a_k^j \le 1$，因此我们有

$$\alpha_0 = \frac{1}{n}\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k} \le \frac{1}{n}\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{q_k} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_1 2^k} < \infty,$$

$$\beta_0 = \frac{n-1}{mn^2}\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j}{q_k^2} \le \frac{4(n-1)}{mn^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_1^2 4^k} < +\infty,$$

$$\gamma_0 = \frac{n-1}{n}\sup_{j\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{j}\frac{a_k^j \ln q_k}{q_k} \le 2\frac{n-1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k-1)\ln 2 + \ln q_1}{q_1 2^k} < +\infty.$$

因此我们得到

(2.20)

$$\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq_{j+1}} + \int_{\Omega}|u|^{mnq_{j+1}}\right)^{\frac{1}{mnq_{j+1}}}$$

$$\le \exp\left[\alpha_0 \ln C\left(\frac{D_{f,g,p,n,\Omega}}{d}+1\right) + \beta_0\ln(D_\Omega+1) + \gamma_0\right]\left(\int_{\Omega\cap\mathbb{R}^n_+}|u|^{mnq_1} + \int_{\Omega}|u|^{mnq_1}\right)^{\frac{a_0^j}{mnq_1}}.$$

由于

$$\bar{q} = \lim_{j\to+\infty} a_0^j = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{n-1}{nq_k}\right) < \infty,$$

在（2.20）中令 $j\to+\infty$，最终可推出

$$\|u\|_\infty \le e^{\alpha_0\ln C+\gamma_0}\left(\frac{D_{f,g,p,n,\Omega}}{d}+1\right)^{\alpha_0}(D_\Omega+1)^{\beta_0}(\|u\|^{\bar{q}}_{L^{mnq_1}(\partial\Omega)} + \|u\|^{\bar{q}}_{L^{mnq_1}(\Omega)}),$$

从而完成证明。 □

我们还需要以下来自 [16]的散度定理推广形式。

**引理 2.7.** [16, 引理 4.3] 设 $\Omega$ 是 $\mathbb{R}^n_+$ 的一个有界开子集，且具有 *Lipschitz* 边界，并令 $F\in L^1(\Omega)$。假设 $\mathbf{a}\in C^0(\Omega;\mathbb{R}^n_+)$ 在$\Omega$中以分布的意义满足 $\operatorname{div}\mathbf{a} = F$。那么我们有

$$\int_{\partial\Omega}\langle\mathbf{a},\nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Omega}F(x)\mathrm{d}x.$$

我们还需要以下两个关于 $\mathbb{R}^n_+$ 中比较原理和 Liouville 型结果的引理。

**引理 2.8 (**比较原理 1)。 设 $E\subset\mathbb{R}^n_+$ 是一个有界区域，使得 $\mathcal{H}^{n-1}(\Gamma_0)>0$，其中 $\Gamma_0 := \mathbb{R}^n_+\cap\partial E$。假设 $\mathbb{R}^n_+\cap E$ 是连通的。设 $u, v\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n_+\cap E)\cap C^0\big((\mathbb{R}^n_+\cap E)\cup\Gamma_0\big)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n u \le -\Delta_n v & \text{in } \mathbb{R}^{\mathrm{n}}_+\cap\mathrm{E},\\ u\le v & \text{on } \Gamma_0,\\ \langle|\nabla u|^{n-2}\nabla u,\nu\rangle \le \langle|\nabla v|^{n-2}\nabla v,\nu\rangle & \text{on } \partial(\mathbb{R}^{\mathrm{n}}_+\cap\mathrm{E})\setminus\Gamma_0. \end{cases}$$

则 $u\le v$ 属于 $\mathbb{R}^n_+\cap E$。

证明。由于 $\langle|\nabla u|^{n-2}\nabla u,\ \nu\rangle \le \langle|\nabla v|^{n-2}\nabla v,\ \nu\rangle$ 在 $\partial(\mathbb{R}^n_+ \cap E)$ 上 $\setminus \Gamma_0$，我们可以用与 [16] 中引理 2.4 的证明类似的方法证明本引理。□

**引理 2.9**。 [16, 引理 3。2] 设 $\mathbb{R}^n_+$ 与定理 *1.1* 中的相同。设 $\gamma \in \mathbb{R}$ 为一个常数。假设 $G(x) \in W^{1,\ n}_{loc}(\overline{\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，且函数 $\gamma \log|x| + G(x)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_n(\gamma \log|x| + G(x)) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ \langle|\nabla(\gamma \log|x| + G(x))|^{n-2}\big(\nabla(\gamma \log|x| + G(x))\big), \nu\rangle = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}. \end{cases}$$

则 $G(x)$ 是一个常值函数。

最后，我们还需要以下关于 $B_r(x) \cap \mathbb{R}^n_+$ 的比较原理。

**引理 2.10** （比较原理 2）。 设 $x \in \mathbb{R}^n_+$ 和 $r > 0$。假设 $u$、$v \in W^{1,\ n}\big(\overline{\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)}\big)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n u \le -\Delta_n v & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \cap \mathrm{B_r(x)}, \\ u \le v & \text{on } \partial\big(\mathbb{R}^n_+ \cap \mathrm{B_r(x)}\big). \end{cases}$$

则 $u \le v$ 属于 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)$。

证明。 由于 $u \le v$ 在 $\partial\big(\mathbb{R}^n_+ \cap \mathrm{B_r(x)}\big)$上，我们可以用与证明 [16, 引理 2.4]类似的方法证明 $\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)} |\nabla(u-v)^+|^n \mathrm{d}x = 0$。因此，由 [1], 中的推论 3.32 可知，$(u-v)^+$是 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)$中的一个常数。由于 $(u-v)^+ = 0$ 在 $\partial\big(\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)\big)$上，我们有 $(u-v)^+ = 0$ 在$\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)$中。因此，$u \le v$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_r(x)$中。□

## 3. Behavior of $u$ and $\nabla u$ at infinity

本节中，我们将证明 $u$ 和 $\nabla u$ 在无穷远处的尖锐渐近估计。为此，我们首先给出关于 $u$的以下上界。

**命题 3.1.** 设 $u$ 是下列方程的一个解

$$\begin{cases} -\Delta_n u = e^u & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ |\nabla u|^{n-2}\nabla u \cdot \nu = e^{\frac{n-1}{n}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+, \\ \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x < +\infty \ and \ \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u} \mathrm{d}x < +\infty, \end{cases}$$

其中 $n \ge 2$。则 $u^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ 且 $u \in C^{1,\ \theta}(\mathbb{R}^n_+)$ 对某个 $\theta \in (0,\ 1)$成立。

证明。 对于 $x = (x_1,\ \cdots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n_+$和 $0 < r < 1$，令 $x^* = (x_1,\ \cdots,\ -x_n) \in \mathbb{R}^n_-$。由于$u \in W^{1,\ n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，根据 [5],，我们令 $v \in W^{1,\ n}\big(B_r(x) \cup B_r(x^*)\big)$ 为方程的弱解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{a}(x,v)) = 0 & \text{in } B_r(\overline{x}) \cup B_r(\overline{x}^*), \\ v = 0 & \text{on } \partial\big(B_r(\overline{x}) \cup B_r(\overline{x}^*)\big), \end{cases}$$

其中 $\mathbf{a}(x,\ p) = |\nabla\bar{u}(x)|^{n-2}\nabla\bar{u}(x) - |\nabla\bar{u}(x) - p|^{n-2}(\nabla\bar{u}(x) - p)$ 且

$$\begin{cases} \bar{u}(x', x_n) = u(x', x_n) & \text{for } x_n \ge 0, \\ \bar{u}(x', x_n) = u(x', -x_n) & \text{for } x_n < 0. \end{cases}$$

令 $h=v+\bar{u}$，则 $h$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n h=0 & \text{in } B_r(\overline{x})\cup B_r(\overline{x}^*),\\ h=\bar{u} & \text{on } \partial\big(B_r(\overline{x})\cup B_r(\overline{x}^*)\big). \end{cases}$$

我们将证明 $h(x',x_n)=h(x',-x_n)$。事实上，令 $h_1(x',x_n)=h(x',-x_n)$，其中 $x_n\geq 0$，则 $h_1$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n h_1=0 & \text{in } B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+,\\ h_1=h & \text{on } \partial B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+,\\ h_1=h & \text{on } B_r(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

由引理 2.10，我们得到 $h_1=h$，即 $h(x',x_n)=h(x',-x_n)$。由于 $h(x',x_n)=h(x',-x_n)$，我们得到 $h\in W^{1,n}(B_r(x)\cap\mathbb{R}^n_+)$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n h=0 & \text{in } B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+,\\ h=u & \text{on } \partial B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+,\\ |\nabla h|^{n-2}\dfrac{\partial h}{\partial\nu}=0 & \text{on } B_r(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

由引理 2.8，我们得到 $h\leq u$ 属于 $B_r(x)\cap\mathbb{R}^n_+$。于是有

$$\int_{B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}(h^+)^n\mathrm{d}x\leq\int_{B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}(u^+)^n\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

将引理 2.5 应用于 $h^+$，我们推得

$$\|h^+\|_{L^\infty\left(B_{\frac{r}{2}}(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+\right)}\leq C(r) \tag{3.2}$$

对于某个常数 $C(r)>0$。现在，令 $r>0$ 足够小，使得

$$\left(\int_{B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}e^u\mathrm{d}x+\int_{B_r(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}\leq\frac{S_{1,+}^{\frac{n}{n-1}}(n-1)}{n} \tag{3.3}$$

and

$$\left(\int_{B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}e^u\mathrm{d}x+\int_{B_r(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}\leq\frac{S_{2,+}^{\frac{n}{2(n-1)}}(n-1)}{n}, \tag{3.4}$$

其中 $S_{1,+}$，$S_{2,+}$ 与引理 2.2 中相同。在引理 2.2 中取 $\lambda=\frac{n}{n-1}$、$\beta=\frac{n}{n-1}$ 和 $q=2$，可得

$$\int_{B_r(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}(u-h)}\mathrm{d}x\leq C(r)\qquad\text{and}\qquad\int_{B_r(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}(u-h)}\mathrm{d}x\leq C(r). \tag{3.5}$$

因此，由（3.2）和（3.5），可得

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}u}\mathrm{d}x=\int_{B_{\frac{r}{2}}(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}(u-h)+\frac{n}{n-1}h}\mathrm{d}x\leq C(r)e^{C(r)} \tag{3.6}$$

and

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}u}\mathrm{d}x=\int_{B_{\frac{r}{2}}(\overline{x})\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n}{n-1}(u-h)+\frac{n}{n-1}h}\mathrm{d}x\leq C(r)e^{C(r)}. \tag{3.7}$$

结合（3.1）、（3.6）和（3.7）使用引理 2.5，可得

$$\|u^+\|_{L^\infty\left(B_{\frac{r}{4}}(\overline{x})\cap\mathbb{R}^n_+\right)}\le C(r). \tag{3.8}$$

由于 $\int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x<+\infty$ 且 $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x<+\infty$，存在足够大的 $R>0$，使得

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\setminus B_R(0)} e^u \mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\setminus B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}\le \frac{S_{1,+}^{\frac{n}{n-1}}(n-1)}{n} \tag{3.9}$$

and

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\setminus B_R(0)} e^u \mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\setminus B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n-1}}\le \frac{S_{2,+}^{\frac{n}{2(n-1)}}(n-1)}{n}. \tag{3.10}$$

对于每个 $x\in\mathbb{R}^n_+\setminus\overline{B_{R+1}(0)}$，我们知道 $B_1(x)\cap\mathbb{R}^n_+\subset\mathbb{R}^n_+\setminus B_R(0)$。由 (3.9) 和 (3.10)，可知当 $r=1$ 时，(3.3) 和 (3.4) 成立。因此，根据引理 2.2 和 2.5，我们有

$$\|u^+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+\setminus\overline{B_{R+1}(0)})}\le C(1). \tag{3.11}$$

由 $\mathbb{R}^n_+\cap B_{R+1}$ 的紧性，存在有限个点 $x_i$ 和足够小的 $r_{x_i}>0$（$i=1,\cdots,L$），满足 (3.3)，从而

$$\overline{\mathbb{R}^n_+\cap B_{R+1}}\subset\bigcup_{i=1}^{L} B_{\frac{r_{x_i}}{4}}(x_i).$$

因此，由 (3.8) 可得

$$\|u^+\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n_+\cap\overline{B_{R+1}})}\le\max_{1\le i\le L} C(r_{x_i})<+\infty. \tag{3.12}$$

结合 (3.11) 和 (3.12)，可得 $u^+\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，进而有 $e^u\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$。由于 $u\in L^N_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ 且 $e^u\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，根据 [22, 34, 45, 48]，中的正则性结果，我们推得 $u\in C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$，其中 $\theta\in$ 属于 $(0,1)$。□

**命题 3.2**。设 $u\in W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ 为.....的解

$$\begin{cases} -\Delta_n u=e^u & in\ \mathbb{R}^n_+,\\ |\nabla u|^{n-2}\nabla u\cdot\nu=e^{\frac{n-1}{n}u} & on\ \partial\mathbb{R}^n_+,\\ \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u\mathrm{d}x<+\infty,\ \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x<+\infty \quad and \quad 0\le f(x)\le e^x, \end{cases}$$

并且 $\hat{u}(x)=u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$，则

$$\hat{u}\in W^{1,q}_{loc}(\mathbb{R}^n_+) \tag{3.13}$$

对所有 $1\le q<n$ 均成立。此外，对于足够小的固定 $r$，存在 $U_0,H_0\in C^1(B_r\setminus\{0\})\cap C^0(\overline{B_r\setminus\{0\}})$，使得 $\hat{u}=U_0+H_0$。

证明。 首先，$\hat{u}$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n \hat{u} = \frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}} & \text{in } \mathbb{R}^n_+\backslash\{0\} \\ |\nabla \hat{u}|^{n-2}\frac{\partial \hat{u}}{\partial \nu} = \frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\} \\ \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}} < +\infty, \ \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}} < +\infty \end{cases}$$

在弱意义下

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla \hat{u}|^{n-2}\langle \nabla \hat{u}, \nabla \Phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}}\Phi + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}}\Phi, \quad \forall \Phi \in \hat{H} = \{\Phi : \hat{\Phi} \in H\},$$

其中 $H := \{\Phi \in W_0^{1,n}(\Omega) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ 有界}\}$。

根据命题 3.1，我们知道 $\hat{u} \in C^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}\right)$。由于 $\hat{u} \in C^{1,\alpha}\left(\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}\right)$ 并利用[28, 定理 15.19], 我们固定一个 $r > 0$ 小量，并且对所有 $0 < \epsilon < r$，令 $H_\epsilon \in C^0\left(A_\epsilon\right) \cap \overline{C^{2,\alpha}}(A_\epsilon)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_n H_\epsilon = 0 & \text{in } A_\epsilon := (B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)), \\ H_\epsilon = \hat{u} & \text{on } \partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \mathbb{R}^n_+, \\ H_\epsilon(x', x_n) = \hat{u}(x', -x_n) & \text{on } \partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \mathbb{R}^n_-. \end{cases}$$

由 [22, 定理 2], 可得 $\tilde{H}_\epsilon \in C^{1,\alpha}_{\text{局部}}(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0))$。由于 $\hat{u} \in C^{1,\alpha}_{\text{局部}}\left(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}\right)$，可得 $\tilde{H}_\epsilon \in C^{0,1}(\partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)))$。因此，由 [36, 定理 3.1], 可得 $\tilde{H}_\epsilon \in C^{0,\alpha}\left(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)\right)$。所以 $H_\epsilon \in \overline{C^{1,\alpha}(A_\epsilon) \cap C^{0,\alpha}}\left(A_\epsilon\right)$。

此外，我们有 $H(x', x_n) = H(x', -x_n)$。事实上，令 $H_{1,\epsilon}(x', x_n) = H(x', -x_n)$，对 $x \in A_\epsilon \cap \mathbb{R}^n_+$，则 $H_{1,\epsilon}$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_n H_{1,\epsilon} = 0 & \text{in } A_\epsilon := (B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)), \\ H_{1,\epsilon} = \hat{u} & \text{on } \partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \mathbb{R}^n_+, \\ H_{1,\epsilon} = H_\epsilon & \text{on } (B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \partial\mathbb{R}^n_-. \end{cases}$$

利用引理 2.10 ，我们得到 $H_{1,\epsilon} = H_{\epsilon}$。也就是说，$H(x', x_n) = H(x', -x_n)$。因此 $H_\epsilon$ 满足 es

$$\begin{cases} \Delta_n H_\epsilon = 0 & \text{in } A_\epsilon := (B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \mathbb{R}^n_+, \\ H_\epsilon = \hat{u} & \text{on } \partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0)) \cap \mathbb{R}^n_+, \\ |\nabla H_\epsilon|^{n-2}\frac{\partial H_\epsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{on } A_\epsilon \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{3.14}$$

由 (3.14)，函数 $U_\epsilon = \hat{u} - H_\epsilon \in C^{1,\alpha}(B_\epsilon) \cap C^{0,\alpha}\left(A_\epsilon\right)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_n\left(\hat{u} - U_\epsilon\right) = 0 & \text{in } B_\epsilon := A_\epsilon \cap \mathbb{R}^n_+, \\ U_\epsilon = 0 & \text{on } \partial B_\epsilon \cap \mathbb{R}^n_+, \\ |\nabla(\hat{u} - U_\epsilon)|^{n-2}\frac{\partial(\hat{u} - U_\epsilon)}{\partial \nu} = 0 & \text{on } B_\epsilon \cap \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{3.15}$$

我们的目标是 通过引理 2.2，推导出整个 $B_\epsilon$ 上 $H_\epsilon$ 和 $U_\epsilon$ 的估计

$$\mathbf{a}(x, p) := |\nabla \hat{u}(x)|^{n-2}\nabla \hat{u}(x) - |\nabla \hat{u}(x) - p|^{n-2}(\nabla \hat{u}(x) - p). \tag{3.16}$$

由于 (3.14) 在 $A_\epsilon$ 中成立，(3.17) 可改写为

$$\begin{cases} \Delta_n\left(\hat{u}-U_\epsilon\right)-\Delta_n\hat{u}=\frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}} & \text{in } A_\epsilon, \\ U_\epsilon=0 & \text{on } \partial(B_r(0)\backslash B_\epsilon(0))\cap\mathbb{R}^n_+, \\ \mathbf{a}(x,U_\epsilon)=\frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}} & \text{on } A_\epsilon\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{3.17}$$

由于

$$d=\inf_{v\neq w}\frac{\left\langle|v|^{n-2}v-|w|^{n-2}w,v-w\right\rangle}{|v-w|^n}>0,$$

我们可以将引理 2.2 应用于由 (3.16) 给出的$\mathbf{a}(x,p)$。由于 $|A_\epsilon|\leq\omega_n r^n$ 且 $\mathbf{a}(x,0)=0$，我们推得

$$\int_{A_\epsilon}|\nabla U_\epsilon|^q+\int_{A_\epsilon}e^{pU_\epsilon}+\int_{A_\epsilon\cap\partial\mathbb{R}^n_+}e^{pU_\epsilon}\leq C \tag{3.18}$$

对所有 $1\leq q<n$ 和 $1\leq p<p_r$，当 $r$ 充分小时，其中 $C$ 在 $\epsilon$ 和 $p_r\to+\infty$上是一致的，当 $r\to0$时。注意到

$$\left|\int_{B_r(0)\cap\mathbb{R}^n_+}\frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}}\right|=\left|\int_{\mathbb{R}^n_+\backslash B_{\frac{1}{r}}(0)}e^u\right|\to0,$$

and

$$\int_{B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+}\frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}}=\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\backslash B_{\frac{1}{r}}(0)}e^{\frac{n-1}{n}u}\to0,$$

当 $r\to0$时。由 Sobolev嵌入 $\mathcal{D}^{1,\frac{n}{2}}\left(\mathbb{R}^n_+\right)\hookrightarrow L^n\left(\mathbb{R}^n_+\right)$，估计式 (3.18) 得出

$$\int_{A_\epsilon}|U_\epsilon|^n\leq C \tag{3.19}$$

对于某个关于 $\epsilon$一致的 $C$。由于 $H_\epsilon=\hat{u}-U_\epsilon$，其中 $\hat{u}\in C^{1,\alpha}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}}\right)$，由 (3.19) 我们推得

$$\|H_\epsilon\|_{L^n(A)}\leq C(A),\quad\forall A\subset\subset\overline{B_r(0)}\backslash\{0\}$$

对于所有充分小的 $\epsilon$。由 [28, 定理 10.3], [44, 定理 2], [22, 定理 1，定理2]以及 [36,定理 3.1],可得

$$\|H_\epsilon\|_{C^{1,\alpha}(\overline{A})}\leq C(A),\quad\forall A\subset\subset B_r(0)\backslash\{0\},$$

and

$$\|H_\epsilon\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B})}\leq C\left(B,\sup_{B_r(0)\cap\mathbb{R}^n_+}|\hat{u}|\right),\quad\forall B\subset\subset\overline{B_r(0)}\backslash\{0\}$$

当 $\epsilon$ 足够小时。根据阿斯科利-阿尔泽拉定理和对角线过程，我们可以找到一个序列$\epsilon\to0$，使得 $H_\epsilon\to H_0$ 属于 $C^1_{\text{loc}}\left(B_r(0)\backslash\{0\}\right)$，且 $H_\epsilon\to H_0$ 属于 $C^0_{\text{loc}}\left(\overline{B_r(0)\backslash\{0\}}\right)$，其中 $H_0$满足

$$\begin{cases} \Delta_n H_0=0 & \text{in } B_r(0)\backslash\{0\}, \\ H_0=\hat{u} & \text{on } \partial B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+, \\ H_0(x,x_n)=\hat{u}(x',-x_n) & \text{on } \partial B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_-, \\ |\nabla H_0|^{n-2}\frac{\partial H_0}{\partial\nu}=0 & \text{on } B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

由于 $H_\epsilon \leq \hat{u}$ 属于 $A_\epsilon$，根据引理 2.8，我们有 $U_\epsilon \to U_0 := \hat{u} - H_0$ 属于 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\underline{B_r(0)}\backslash\{0\}\right)$，其中 $U_0$ 满足

$$U_0 \geq 0 \qquad \text{in } B_r(0)\backslash\{0\} \cap \mathbb{R}^n_+.$$

此外，由（3.18）可得

$$U_0 \in W^{1,q}_0\left(B_r(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right), \quad e^{U_0} \in L^p\left(B_r(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right) \tag{3.20}$$

对所有充分小的 $1 \leq q < n$ 和 $1 \leq p < p_r$ 均成立。由于 $H_0$ 是 $B_r(0)\setminus\{0\}$ 中的连续 $n$-调和函数，且

$$\tilde{H}_0 \leq \sup_{\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}} \hat{u} = \sup_{\mathbb{R}^n_+} u < \infty$$

鉴于命题 3.1，应用关于孤立奇点的 [44, 定理 12]，我们得到，$H_0$ 在 0 处要么有一个可去奇点，要么

$$\frac{1}{C} \leq \frac{H_0(x)}{\ln|x|} \leq C$$

在 0 附近对某个 $C > 1$ 成立。根据 [45],，在这两种情况下，我们都有

$$H_0 \in W^{1,q}\left(B_r(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right) \tag{3.21}$$

对所有 $1 \leq q < n$ 均成立。（3.20）与（3.21）结合起来，证明了（3.13）对 $\hat{u} = U_0 + H_0$ 成立。□

**命题 3.3**。令 $u \in W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ 为.....的解

$$\begin{cases} -\Delta_n u = e^u & in\ \mathbb{R}^n_+, \\ |\nabla u|^{n-2}\nabla u\cdot\nu = e^{\frac{n-1}{n}u} & on\ \partial\mathbb{R}^n_+, \\ \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x < +\infty\ and\ \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x < +\infty, \end{cases} \tag{3.22}$$

且 $\hat{u}(x) = u\left(\underline{\frac{x}{|x|^2}}\right)$。则 $u(x)$ 满足

$$u(x) + \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \ln|x| \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

*and*

$$\sup_{|x|=r}|x|\left|\nabla\left(u(x) + \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\ln|x|\right)\right| \to 0$$

*for a sequence* $r \to +\infty$, *where* $\gamma_0 = 2\left(\int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}\sigma\right)$ *and* $\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > n$.

证明。取 $r > 0$ 充分小，由命题 3.2 可知，$\hat{u}$ 已在 $B_r(0)$ 中分解为 $\hat{u} = U_0 + H_0$，其中 $U_0$，$H_0 \in C^1_{\mathrm{loc}}(B_r(0)\backslash\{0\}) \cap C^0_{\mathrm{loc}}\left(\overline{B_r(0)\backslash\{0\}}\right)$，其中 $H_0$ 是 $n$-调和函数，定义在 $B_r(0)\backslash\{0\}$ 上，且 $\sup H_0 < +\infty$，并且 $U_0 \geq 0$ 满足 (3.20)，且 $U_0 = 0$ 在 $\partial B_r(0)$.

根据 $H_0$ 在 0 处的渐近行为（该结果已在 [44, 45] 中建立，并在 [33], 的定理 1 中得到改进），可知存在 $\gamma \geq 0$ 使得

$$H_0(x) - \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \ln|x| \in L^\infty\left(B_r(0)\right), \quad \Delta_n H_0 = \gamma\delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'\left(B_r(0)\right). \tag{3.23}$$

由于 $\hat{u}(x) \geq H_0(x)$ 且 $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u} d\sigma < +\infty$，我们得到 $\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > n$。因此，由 (3.23) 可知，对于充分小的 $r$,

$$\frac{e^{H_0}}{|x|^{2n}} \in L^q\left(B_r(0)\right), \quad \frac{e^{\frac{n-1}{n}H_0}}{|x|^{2(n-1)}} \in L^q\left(B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+\right)$$

对所有 $1 \leq q < \frac{2n-1}{n-1}$，若 $\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} < 2n$；以及 $1 \leq q < +\infty$，若 $\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \geq 2n$。由 (3.20) 可得

$$\left|\frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}}\right| \leq \frac{e^{\hat{u}}}{|x|^{2n}} = e^{U_0}\frac{e^{H_0}}{|x|^{2n}} \in L^q\left(B_r(0)\right), \ \frac{e^{\frac{n-1}{n}\hat{u}}}{|x|^{2(n-1)}} = e^{U_0}\frac{e^{\frac{n-1}{n}H_0}}{|x|^{2(n-1)}} \in L^q\left(B_r(0)\cap\partial\mathbb{R}^n_+\right) \tag{3.24}$$

对于所有 $1 \leq q < \frac{n-1}{n-2}$，若 $r > 0$ 充分小。由 (3.24)，我们可以将命题 2.6 应用于 $A_\epsilon$ 上的 $U_\epsilon$（见 (3.14)-(3.15)），其中 $a(x,p)$ 由 (3.16) 给出，从而得到

$$\|U_\epsilon\|_{\infty,A_\epsilon} \leq C$$

其中某个一致常数为 $C > 0$，这里我们用到了

$$\sup_\epsilon \|U_\epsilon\|_{p,A_\epsilon} < +\infty$$

对于所有 $p \geq 1$，根据 (3.18) 和 Sobolev嵌入定理。令 $\epsilon \to 0$，可得$\|U_0\|_{\infty,\ B_r(0)} < +\infty$，于是

$$\hat{u} = U_0 + H_0 = \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \ln|x| + H(x), \quad H \in L^\infty_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$$

根据 (3.23)。也就是说,

$$u(x) + \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \ln|x| \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^n\right). \tag{3.25}$$

现在，令 $G(x) := u(x) + \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log|x|$，则 (3.25) 意味着 $G(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+ \setminus B_1(0))$，并且

$$u(x) = -\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log|x| + G(x) \qquad \text{for } x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus B_1(0), \tag{3.26}$$

其中 $n < \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$。

对于任意满足 $R_k \to +\infty$ 为 $k \to +\infty$的序列 $R_k > 0$，令

$$\widehat{u}_{R_k}(x) := u(R_k x) + \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log R_k.$$

由（3.26）可知

$$\widehat{u}_{R_k}(x) = -\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log|x| + G_{R_k}(x), \tag{3.27}$$

其中 $G_{R_k}(x) = G(R_k x)$。根据（3.22），我们得到

$$\begin{cases} |-\Delta_n \widehat{u}_{R_k}| = |R_k^n f(\widehat{u}_{R_k})| \le R_k^{n-\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \dfrac{e^{G_{R_k}}}{|x|^{\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}}} & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \setminus B_{\frac{1}{R_k}}(0), \\ a(\nabla \widehat{u}_{R_k}) \cdot \nu = R_k^{n-1-\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \dfrac{e^{\frac{n-1}{n} G_{R_k}}}{|x|^{\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}}} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \setminus B_{\frac{1}{R_k}}(0). \end{cases}$$

由于 $n < \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$，我们得到 $\widehat{u}_{R_k}$, $R_k^{n-\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \frac{e^{G_{R_k}}}{|x|^{\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}$ 和 $R_k^{n-1-\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}} \frac{e^{\frac{n-1}{n} G_{R_k}}}{|x|^{\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}}}$ 在 $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$ 中有界，且关于 $k$ 一致。因此，由 [22, 45, 48] 中的内点正则性估计和 [34], 中的边界正则性估计可得， $\widehat{u}_{R_k}$ 在 $C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$ 中一致有界。然后根据 Ascoli–Arzelà 定理和对角线论证，我们可以找到一个子列 $R_{k_i} \to +\infty$，使得 $\widehat{u}_{R_{k_i}} \to \widehat{u}_\infty$ 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$ 中，当 $i \to +\infty$ 时成立。由 $\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > n$，我们推得 $\widehat{u}_\infty$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta_n \widehat{u}_\infty = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ a(\nabla \widehat{u}_\infty) \cdot \nu = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases} \tag{3.28}$$

鉴于 (3.27)，我们有

$$\widehat{u}_\infty(x) = -\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log|x| + G_\infty(x), \tag{3.29}$$

其中 $G_\infty$ 是 $G_{R_{k_i}}$ 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$ 中的极限。此外， $G_{R_k}$ 的一致有界性蕴含 $G_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$。由 (3.28)、(3.29) 以及 $G_\infty \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$，我们可以对 $\widehat{u}_\infty$ 应用引理 2.9, 并推出 $G_\infty$ 是常值函数。由 (3.26) 以及 $G_{R_{k_i}} \to G_\infty$ 在 $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$ 中，我们知道

$$\begin{aligned} &\sup_{|x|=R_{k_i},\, x\in\mathbb{R}^n_+} |x| \left| \nabla \left( u(x) + \left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \log|x| \right) \right| \\ &= \sup_{|y|=1,\, y\in\mathbb{R}^n_+} \left| \nabla G_{R_{k_i}}(y) \right| \to \sup_{|y|=1,\, y\in\mathbb{R}^n_+} |\nabla G_\infty(y)| = 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

鉴于 $u \in C^1\left(B_R(0) \cap \mathbb{R}^n_+\right)$，通过选取 $\Omega = B_R(0) \cap \mathbb{R}^n_+$, $F(x) = e^u$ 并在引理 2.7 中取 $\mathbf{a}(x) = -|\nabla u|^{n-2}\nabla u$ ，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} \left\langle |\nabla u|^{n-2}\nabla u, -\nu \right\rangle \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_R(0)} \left\langle |\nabla u|^{n-2}\nabla u, -\nu \right\rangle \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

由于 $\langle|\nabla u|^{n-2}\nabla u,\nu\rangle = e^{\frac{n-1}{n}u}$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上成立，我们推得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)}\langle a(\nabla u),-\nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma=\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^u\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x. \tag{3.31}$$

由 (3.30)，可得

$$\nabla u=-\left(\frac{\gamma}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{x}{|x|^2}+o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

当 $R\to+\infty$ 时，对 $x\in\partial B_R(0)$ 一致成立。由 (3.31)，我们推得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^u\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)}|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,-\nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{\gamma}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)}\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}+o\left(\frac{1}{|x|^{n-1}}\right)\right)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

令 $R\to+\infty$，可得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+}e^u\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x=\frac{\gamma}{2}.$$

至此，我们完成了证明。 □

令 $u$ 为 (1.1) 的一个解，利用 Pohozaev 型恒等式和命题 3.3，我们将证明总质量 $\int_{\mathbb{R}^n_+}e^u\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}\sigma$ 的如下量子化结果。

**命题 3.4**。设 $u$ 是 $(1.1)$ 的一个解，则

$$2\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}e^u\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}\sigma\right)=n\omega_n\left(\frac{n^2}{n-1}\right)^{n-1}.$$

证明。设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一个具有 Lipschitz 边界的有界开集，且 $u\in C^1(\Omega)$ 在 $\Omega$ 中满足 $-\Delta_n u=f$，其中 $f\in L^1(\Omega)\cap L^\infty_{loc}(\Omega)$，则对任意 $y\in\mathbb{R}^n$，以下 Pohozaev恒等式（参见 [17,引理 4.2]（情形 $p=n$），另见 [24, 引理 3.3]）成立：

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega f(x)\langle x-y,\nabla u\rangle\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial\Omega}\left[|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,\nu\rangle\langle x-y,\nabla u\rangle-\frac{|\nabla u|^n}{n}\langle x-y,\nu\rangle\right]\mathrm{d}\sigma,\end{aligned}\tag{3.32}$$

其中 $\nu$ 是 $\Omega$ $\partial$的单位外法向量。对于任意 $R>0$，$u\in C^1\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)\right)$，我们可以选取 $\Omega=\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)$，$y=0$ 和 $f=e^u$，代入 Pohozaev恒等式 (3.32)，得到

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^u\langle x,\nabla u\rangle\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\partial(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0))}\left[|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,\nu\rangle\langle x-y,\nabla u\rangle-\frac{|\nabla u|^n}{n}\langle x-y,\nu\rangle\right]\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}\tag{3.33}$$

根据散度定理，我们有

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^u\langle x,\nabla u\rangle\,\mathrm{d}x=n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)}e^u\mathrm{d}x-\int_{\partial(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0))}e^u\langle x,\nu\rangle\,\mathrm{d}\sigma.$$

注意到

$$\int_{\partial(\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0))} e^u \langle x,\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \langle x,\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} e^u \langle x,\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma,$$

因此我们得到

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \langle x,\nabla u\rangle \,\mathrm{d}x = n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \langle x,\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma - \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} e^u \langle x,\nu\rangle \,\mathrm{d}\sigma.$$

由于 $\langle x,\nu\rangle = 0$ 对任意 $x\in\partial\mathbb{R}^n_+$，我们推得

$$-\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \langle x,\nabla u\rangle \,\mathrm{d}x = n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} Re^u \mathrm{d}\sigma. \tag{3.34}$$

此外，根据散度定理，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u}\langle x,\nabla u\rangle \mathrm{d}\sigma &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u}\sum_{i=1}^{n-1} x_i u_{x_i}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap\partial B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u} R\mathrm{d}\sigma - \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B_R(0)} n e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{3.35}$$

由（3.33），我们推得

$$\begin{aligned}&-\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \langle x,\nabla u\rangle \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u}\langle x,\nabla u\rangle \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} \left[|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,\nu\rangle\langle x,\nabla u\rangle - \frac{|\nabla u|^n}{n}\langle x,\nu\rangle\right]\mathrm{d}\sigma,\end{aligned} \tag{3.36}$$

其中我们用到了以下事实：$|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,\nu\rangle = e^{\frac{n-1}{n}u}$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上，以及 $\langle x,\nu\rangle = 0$ 对任意 $x\in\partial\mathbb{R}^n_+$。结合（3.34）、（3.35）和（3.36），我们得到

$$\begin{aligned}&n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap B_R(0)} e^u \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} e^u R\mathrm{d}\sigma \\ &- \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap\partial B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u} R\mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B_R(0)} n e^{\frac{n-1}{n}u}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_R(0)} \left|\nabla u|^{n-2}\langle\nabla u,\nu\rangle\langle x,\nabla u\rangle - \frac{|\nabla u|^n}{n}\langle x,\nu\rangle\right]\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{3.37}$$

由于当 $R\to+\infty$ 时，$\underline{\nabla u} = -\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{x}{R|x|} + o(\frac{1}{R})$ 关于 $x\in\partial B_R(0)$ 一致成立，我们有

$$\langle x,\nabla u\rangle = \left\langle x, -\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\frac{x}{R|x|} + o\left(\frac{1}{R}\right)\right\rangle = -\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + o_R(1)$$

当 $R \to +\infty$ 时，关于 $x \in \partial B_R(0)$ 一致成立。此外，由于当 $R \to +\infty$ 时，$|\nabla u| = \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right)$ 关于$x \in \partial B_R(0)$ 一致成立，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_R(0)} |\nabla u|^{n-2} \langle \nabla u, \nu \rangle \langle x, \nabla u \rangle \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_R(0)} \frac{1}{R} \left( \frac{\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}}{R} + o\left(\frac{1}{R}\right) \right)^{n-2} \left( - \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} + o_R(1) \right)^2 \mathrm{d}\sigma \\ &= n \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \frac{\omega_n}{2} + o_R(1) \end{aligned} \tag{3.38}$$

当 $R \to +\infty$ 时，对 $x \in \partial B_R(0)$ 一致成立。此外，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_R(0)} \frac{|\nabla u|^n}{n} \langle x, \nu \rangle \mathrm{d}\sigma = \left( \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} + o_R(1) \right) \frac{\omega_n}{2} \tag{3.39}$$

当 $R \to +\infty$ 时，对 $x \in \partial B_R(0)$ 一致成立。由命题 3.3 可得

$$e^{u(x)} \le C|x|^{-\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \quad \text{and} \quad e^{\frac{n-1}{n}u(x)} \le C|x|^{-\frac{n-1}{n}\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}}$$

当 $|x| \to +\infty$ 时，对某个常数 $C > 0$ 成立，其中 $x \in \mathbb{R}^n_+$。最后，由命题 3.3 可得

$$\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}} > n.$$

Thus

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_R(0)} e^u R \mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^{n-1} \cap \partial B_R(0)} e^{\frac{n-1}{n}u} R \mathrm{d}\sigma \\ \le & C \left( R^{n - \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} + R^{n-1-\frac{n-1}{n}\left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-1}}} \right) \to 0, \qquad \text{as } R \to +\infty. \end{aligned} \tag{3.40}$$

将 $R \to +\infty$ 代入 (3.37)，并结合 (3.38)、(3.39) 和 (3.40)，可推得

$$n \left( \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u \mathrm{d}x + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u} \mathrm{d}\sigma \right) = (n-1) \left(\frac{\gamma_0}{n\omega_n}\right)^{\frac{n}{n-1}} \frac{\omega_n}{2},$$

至此，命题 3.4 的证明完成。 □

Using命题 3.1 和命题 3.4，我们有如下推论。

**推论 3.5.** 设 $u$是$(1.1)$的一个解。则 $u(x)$ 满足

$$u(x) + \frac{n^2}{n-1} \ln |x| \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n),$$

*and*

$$\sup_{|x|=r} |x| \left| \nabla \left( u(x) + \frac{n^2}{n-1} \ln |x| \right) \right| \to 0,$$

对于一个序列 $r \to +\infty$。

## 4. Second-order regularity for weak solutions

本节中，我们将通过一种逼近方法证明弱解的二阶正则性。

**命题 4.1**。 设 $u$ 是(1.1)的一个解。那么 $|\nabla u|^{n-2}\nabla u \in W^{1,\ 2}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$，且对任意$\gamma \in \mathbb{R}$ ，以下渐近估计成立：

$$\int_{B_R\cap\mathbb{R}^n_+} \left|\nabla\left(|\nabla u|^{n-2}\nabla u\right)\right|^2 e^{\gamma u}\mathrm{d}x \le C\left(1+R^{-n-\gamma\frac{n^2}{n-1}}\right), \quad \forall R>1,$$
$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap(B_{2R}\setminus B_R)} \left|\nabla\left(|\nabla u|^{n-2}\nabla u\right)\right|^2 e^{\gamma u}\mathrm{d}x \le CR^{-n-\gamma\frac{n^2}{n-1}}, \qquad \forall R>1,$$

其中 $C$ 是一个与 $R$无关的正常数。

证明。 该命题可由 Caccioppoli 型不等式得到。我们按照 [3, 14, 15]中的方法，通过逼近进行论证。令

$$a_i(x) := |x|^{n-2}x_i, \quad H(x) := |x|^n, \quad \text{for } x\in\mathbb{R}^n,$$
$$a_i^k(x) := (a_i * \phi_k)(x), \quad H_k(x) := (H*\phi_k)(x), \quad \text{for } x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\{\phi_k\}$ 是一族径向对称光滑磨光函数。卷积的标准性质以及 $a(x)$连续这一事实表明，$a^k \to a$ 在 $\mathbb{R}^n$的紧子集上一致成立。由[26,引理 2.4]和 [15], 可知， $a^k$ 满足

$$\left\langle \nabla a^k(z)\xi,\xi\right\rangle \ge \frac{1}{\lambda}(|z|^2+s_k^2)^{\frac{n-2}{2}}|\xi|^2 \qquad \text{and} \qquad |\nabla a^k(z)| \le \lambda(|z|^2+s_k^2)^{\frac{n-2}{2}}$$

对每个 $z$、 $\xi\in\mathbb{R}^n$，其中 $s_k\neq 0$ 和 $s_k\to 0$ 为 $k\to+\infty$，且 $\lambda>0$ 为常数。固定 $k$ 并使用引理 A.1，我们令 $u_{k,\ R}\in W^{1,\ n}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right)$ 为下列方程的一个解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a^k\left(\nabla u_{k,R}\right)\right) = e^u & \text{in } B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+ \\ u_{k,R} = u & \text{on } \partial B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+ \\ a^k\left(\nabla u_k\right)\cdot\nu = e^{\frac{n-1}{n}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0), \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $\nu$ 是 $\partial\mathbb{R}^n_+$的单位外法向量。

由 $u$ 的局部有界性以及 [34, 44, 48], 中引理 2.4 和引理 A.1 的椭圆估计，可得 $\{u_{k,R}\}$ 在 $C^{1,\ \theta\,\mathrm{loc}}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$中一致有界，其中 $k$，当 $k\to+\infty$时成立。

然后由阿斯科利–阿策拉定理和对角线过程可得，$u_{k,\ R}$在 $C^1_{loc}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中收敛到下列方程的唯一解 $u_R$

$$\begin{cases} -\Delta_n\overline{u_R} = e^u & \text{in } B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+, \\ \overline{u_R} = u & \text{on } \mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0) \\ a(\nabla\overline{u_R})\cdot\nu = e^{\frac{n-1}{n}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0). \end{cases} \tag{4.2}$$

将 (4.1) 和 (4.2) 分别乘以 ( $u_R-u$)，并在 $B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+$ 上进行检验，得到

$$\int_{B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+} (a(\nabla\overline{u_R})-a(\nabla u))\cdot\nabla(\overline{u_R}-u)\mathrm{d}x = 0,$$

这意味着 $u_R - \overline{u} \equiv C$ 属于 $B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$。由于 $u_R = u$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)$ 上，我们得到 $u_R = u$。因此 $u_{k,R} \to u$ 属于 $C^1_{loc}\left(B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$，当 $k \to +\infty$ 时。

注意，(4.1)是一致椭圆的，并且蕴含$u_{k,R} \in C^\infty\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\right)\cap W^{2,2}_{\text{loc}}\left(B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$。由于$u_{k,R} \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}\left(B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$，我们有 $a^k(\nabla u_{k,R}) \in W^{1,2}_{\text{loc}}\left(B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$。此外，由于 $\mathbb{R}^n_+$ 是光滑的，$u_{k,R} \in C^{2,\alpha}_{\text{loc}}\left(B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+ \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$。

给定较大的 $R > 1$，令 $U$ 为满足 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_{4R} \subset U \subset \mathbb{R}^n_+ \cap B_{5R}$ 的 $C^2$ 域。

为简化记号，我们省略 $a$ 对 k 的依赖，并分别用 $a$ 代替 $a^k$。令 $\psi \in C^{0,1}_c(B_{4R})$，并用 $\psi$ 对 (4.1) 进行检验，得到

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} a\left(\nabla u_{k,R}\right) \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u}\psi \mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u\psi \mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

当 $\delta > 0$ 足够小时，我们定义集合

$$U_\delta := \{x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U) > \delta\}.$$

由 [28] 可知，当 $\delta > 0$ 足够小时，有 $d(x) := \operatorname{dist}(x, \partial U) \in C^2(U\setminus U_{2\delta})$，且每个点 $x \in U\setminus U_{2\delta}$ 都可以唯一地表示为 $x = y - |x-y|\nu(y)$，其中 $y(x) \in \partial U$，而 $\nu(y)$ 是 $\partial U$ 在 $y$ 处的单位外法向量。令

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0,\delta], \\ \frac{t-\delta}{\delta}, & t \in [\delta, 2\delta), \\ 1, & t \in [2\delta, \infty), \end{cases} \qquad \text{and} \qquad \xi_\delta(x) = \gamma(d(x)) \text{ in } U.$$

于是有 $\xi_\delta \in C^{0,1}_c(U)$ 满足

$$\xi_\delta = 1 \text{ in } U_{2\delta}, \quad \xi_\delta = 0 \text{ in } U\setminus U_\delta \quad \text{and} \quad \nabla\xi_\delta(x) = -\frac{1}{\delta}\nu(y(x)) \text{ inside } U_\delta\setminus U_{2\delta}.$$

令 $\varphi \in C^2(U) \cap C^1(U)$ 且 $\operatorname{supp}(\varphi) \Subset B_{4R}$。在 (4.3) 中使用 $\psi = \partial_m\varphi\xi_\delta$，令 $1 \le m \le n$ 并分部积分，可得

$$\begin{aligned} &\sum_i \left(-\int_U \partial_i\varphi\partial_m\left(a_i\left(\nabla u_{k,R}\right)\xi_\delta\right)\mathrm{d}x + \int_U a_i\left(\nabla u_{k,R}\right)\partial_m\varphi\partial_i\xi_\delta \mathrm{d}x\right) + \int_U \varphi\partial_m(e^u\xi_\delta \mathrm{d}x) = 0 \\ \Rightarrow &\sum_i \int_U \partial_i\varphi\partial_m a_i\left(\nabla u_{k,R}\right)\xi_\delta \mathrm{d}x = \sum_i \left(-\int_U \partial_i\varphi a_i\left(\nabla u_{k,R}\right)\partial_m\xi_\delta \mathrm{d}x \right. \\ &\qquad \left. + \int_U a_i\left(\nabla u_{k,R}\right)\partial_m\varphi\partial_i\xi_\delta \mathrm{d}x\right) + \int_U \varphi\partial_m(e^u\xi_\delta)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

由于 $\varphi \in C^1(\bar{U})$ 且 $\mathrm{supp}(\varphi) \Subset B_{4R}$，我们可以在 (4.4) 中令 $\delta \to 0$ 并取极限，得到 4.5 ( )

$$\sum_i \int_U \partial_i \varphi \partial_m a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \mathrm{d}x = \sum_i \left( \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \partial_i \varphi a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \nu^m \mathrm{d}\sigma \right.$$
$$\left. - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \partial_m \varphi \nu^i \mathrm{d}\sigma \right) + \int_U \varphi \partial_m (e^u) \mathrm{d}x - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \varphi e^u \nu^m \mathrm{d}\sigma,$$

其中，$\nu = (\nu^1、\ldots\ldots、\nu^n)$ 是 $\partial \mathbb{R}^n_+$ 的单位外法向量。我们有 $\nu = (0、\ldots\ldots、0，-1)$ 位于 $\partial \mathbb{R}^n_+$ 上。令 $\eta \in C_c^\infty(B_{4R})$。我们选取 $\varphi = a_m(\nabla u_{k,\ R}) e^{\gamma u} \eta^2$，并将 $m$ 分为两种情形。**情形 1**：$m \neq n$。由 (4.1) 可知，(4.5) 变为

$$\begin{aligned} &\sum_i \int_U \partial_m a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \partial_i \left( a_m \left(\nabla u_{k,R}\right) e^{\gamma u} \eta^2 \right) \mathrm{d}x \\ =& - \sum_i \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n} u} \partial_m \varphi \mathrm{d}\sigma + \int_U \varphi \partial_m (e^u) \mathrm{d}x \\ =& \sum_i \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \partial_m \left( e^{\frac{n-1}{n} u} \right) a_m \left(\nabla u_{k,R}\right) e^{\gamma u} \eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_U a_m \left(\nabla u_{k,R}\right) e^{\gamma u} \eta^2 \partial_m (e^u) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.6}$$

**情形2**：$m = n$。注意，在此情形下，$\varphi = -e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma)\ u} \eta^2$ 位于 $\partial \mathbb{R}^n_+$ 上。于是，(4.5) 变为

$$\begin{aligned} &\sum_i \int_U \partial_i \varphi \partial_m a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \mathrm{d}x \\ =& \sum_{i=1}^n \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \partial_i \varphi a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \nu^n \mathrm{d}\sigma - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} a_n \left(\nabla u_{k,R}\right) \partial_n \varphi \nu^n \mathrm{d}\sigma + \int_U \varphi \partial_n (e^u) \mathrm{d}x + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \varphi e^u \mathrm{d}\sigma \\ =& - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \partial_i \varphi a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \mathrm{d}\sigma + \int_U \varphi \partial_n (e^u) \mathrm{d}x + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \varphi e^u \mathrm{d}\sigma \\ =& \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \partial_i \left( e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma) u} \eta^2 \right) a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \mathrm{d}\sigma - \int_U e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma) u} \eta^2 \partial_n u \mathrm{d}x - \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma) u} \eta^2 \mathrm{d}\sigma. \end{aligned}$$

结合 (4.5) 和 (4.6)，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i,m=1}^n \left| \int_U \partial_m a_i \left(\nabla u_{k,R}\right) \partial_i \left( a_m \left(\nabla u_{k,R}\right) e^{\gamma u} \eta^2 \right) \mathrm{d}x \right| \\ \leq & C \Bigg( \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \left| a \left(\nabla u_{k,R}\right) \right| |\nabla u| e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma) u} \eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \left| a \left(\nabla u_{k,R}\right) \right| |\nabla \eta| e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma) u} \eta \mathrm{d}\sigma \\ &+ \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma) u} \eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+} \left| a \left(\nabla u_{k,R}\right) \right| |\nabla u| e^{(1+\gamma) u} \eta^2) \mathrm{d}x + \int_U e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma) u} |\nabla u| \eta^2 \mathrm{d}x \Bigg), \end{aligned}$$

其中仅有 $C$ 取决于 $n, p, \gamma$。利用 [3, 引理 4.5] 并按照 [3], 中的论证，可得

$$\begin{aligned}\int_U |\nabla a(\nabla u_{k,R})|^2 e^{\gamma u}\eta^2 \mathrm{d}x \le C\Bigg(&\int_U |a(\nabla u_{k,R})|^2 \left|\nabla\left(e^{(\frac{\gamma}{2})u}\eta\right)\right|^2 \mathrm{d}x\\ &+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u_{k,R})|\,|\nabla u|\, e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma)u}\eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u_{k,R})|\,|\nabla\eta| e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma)u}\eta \mathrm{d}\sigma\\ &+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma)u}\eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u_{k,R})|\,|\nabla u| e^{(1+\gamma)u}\eta^2)\mathrm{d}x + \int_U e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma)u}|\nabla u|\eta^2 \mathrm{d}x\Bigg).\end{aligned} \tag{4.7}$$

由于 $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^{1,\alpha}\,\mathrm{loc}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中有界，取 $\gamma=0$，由 (4.7) 可得 $a^k(\nabla u_{k,R})\in W^{1,2}\,\mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\right)$，且 $\left\{a^k(\nabla u_{k,R})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,2}\,\mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\right)$ 中一致有界。由于 $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中收敛（可能需要取子列）到 $u$，并且在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上一致收敛到 $a^k\to a$，我们得到 $a^k(\nabla u_{k,R})\to a(\nabla u)$ 在 $C^0_{\mathrm{loc}}\left(B_{6R}(0)\cap\mathbb{R}^n_+\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中。因此，当 $k\to\infty$ 时，取子列可得 $a^k(\nabla u_{k,R})\rightharpoonup a(\nabla u)$ 在 $W^{1,2}\,\mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\right)$ 中，且 $a(\nabla u)\in W^{1,2}\,\mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\right)$。因此，取子列并令 $k\to\infty$ 趋于极限代入 (4.7)，得到

$$\begin{aligned}\int_U |\nabla a(\nabla u)|^2 e^{\gamma u}\eta^2 \mathrm{d}x \le C\Bigg(&\int_U |a(\nabla u)|^2 \left|\nabla\left(e^{\frac{\gamma}{2}u}\eta\right)\right|^2 \mathrm{d}x\\ &+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u)||\nabla u| e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma)u}\eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u)||\nabla\eta| e^{(\frac{n-1}{n}+\gamma)u}\eta \mathrm{d}\sigma\\ &+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma)u}\eta^2 \mathrm{d}\sigma + \int_{\mathbb{R}^n_+} |a(\nabla u)|\,|\nabla u| e^{(1+\gamma)u}\eta^2 \mathrm{d}x + \int_U e^{(\frac{2n-1}{n}+\gamma)u}|\nabla u|\eta^2 \mathrm{d}x\Bigg).\end{aligned} \tag{4.8}$$

首先，令 $\eta$ 为非负截断函数，使得 $\eta=1$ 属于 $B_R$，$\eta=0$ 在 $B_{2R}$ 和 $|\nabla\eta|\le\frac{C_n}{R}$ 之外。由命题 3.3 和 (4.8) 可得

$$\int_{B_R\cap\mathbb{R}^n_+} |\nabla(a(\nabla u))|^2 e^{\gamma u}\mathrm{d}x \le C\left(1+R^{-n-\gamma\frac{n^2}{n-1}}\right),\quad \forall R>1.$$

其次，令 $\eta$ 为非负截断函数，使得 $\eta=1$ 属于 $B_{2R}\backslash B_R$，$\eta=0$ 在 $B_{3R}\backslash B_{\frac{R}{2}}$ 和 $|\nabla\eta|\le\frac{C_n}{R}$ 之外。利用命题 3.3 和 (4.8)，可得

$$\int_{(B_{2R}\backslash B_R)\cap\mathbb{R}^n_+} |\nabla(a(\nabla u))|^2 e^{\gamma u}\mathrm{d}x \le CR^{-n-\gamma\frac{n^2}{n-1}},\quad \forall R>1,$$

其中，$C$ 与 $R$ 无关。

□

## 5. Proof of our main Theorem 1.1

在本小节中，我们运用 Bochner技巧和类似于 [27, 54], 的 Pohozaev恒等式，证明 $u$ 满足命题 5.1 中的微分恒等式，由此推出定理 1.1。回顾

that

$$\begin{cases} \Delta_n u(y,t) = -e^u, \quad (y,t) \in \mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1} \times \{t > 0\}, \\ |Du|^{n-2} \frac{\partial u}{\partial t}(y,0) = -e^{\frac{n-1}{n}u}, \\ \int_{\mathbb{R}^n_+} e^u < +\infty \quad \text{and} \quad \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} e^{\frac{n-1}{n}u} < +\infty. \end{cases} \tag{5.1}$$

**命题 5.1.** 设 $u$ 是 (5.1) 的一个解，则 $|\nabla u|^{n-2}\nabla u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$ 并且

$$\partial_j(|\nabla u|^{n-2}u_i) = \frac{n-1}{n}(|\nabla u|^{n-2}u_i u_j - \frac{|\nabla u|^n}{n}\delta_{ij}) - \frac{e^u}{n}\delta_{ij},$$

其中 $u_i := \frac{\partial u}{\partial x_i}$。

证明。由于积分不等式的证明需要通过考察逼近方程 (5.2) 的解来进行正则化论证，我们设

$$a_i(x) := |x|^{n-2}x_i, \quad H(x) := |x|^n \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n,$$
$$a^k_i(x) := \left(\frac{1}{k^2} + |x|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} x_i, \quad H_k(x) := \left(\frac{1}{k^2} + |x|^2\right)^{\frac{n}{2}} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^n.$$

直接计算可得， $a^k \to a$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上一致，并且 $a^k$ 满足条件 (2.11)、(2.12) 和 (2.13)，其中 $s$ 被 $\frac{1}{k^2}$ 替代。利用引理 A.2，我们得到 $u_{k,R} \in W^{1,n}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ 是一个解

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(a^k\left(\nabla u_{k,R}\right)\right) = e^u & \text{in } B_{6R}(0) \cap \mathbb{R}^n_+, \\ a^k\left(\nabla u_{k,R}\right) \cdot \nu = e^{\frac{n-1}{n}u} & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0), \\ u_{k,R} = u & \text{on } \mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0). \end{cases} \tag{5.2}$$

由 $u$ 的局部有界性以及 [34, 44, 48], 引理 2.4 和引理 A.2 中的椭圆估计，我们有 $u_{k,R} \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)) \cap C^{2,\alpha}_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 以及 $u_{k,R} \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$，且该结论对 $k$ 一致。因此，$(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中收敛至 $u$（至多取一个子列）。此外，命题 4.1 的证明表明，当 $k \to \infty$ 时，至多取一个子列，我们有 $a^k(\nabla u_{k,R}) \rightharpoonup a(\nabla u)$ 于 $W^{1,2}_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$ 中成立。以下，我们只考虑满足如下条件的 $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 的子列：$u_{k,R} \to u$ in $C^1_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$，且 $a^k(\nabla u_{k,R}) \overline{\rightharpoonup} a(\nabla u)$ 于 $W^{1,2}_{\text{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$ 中成立。设

$$X = (X_i), \quad X_i := |\nabla u|^{n-2}u_i, \quad X_{ij} := \partial_j X_i, \quad L_{ij} := X_i u_j - \frac{|\nabla u|^n}{n}\delta_{ij},$$
$$X^k_{i,R} := a^k_i\left(\nabla u_{k,R}\right), \quad X^k_{ij,R} := \partial_j X^k_{i,R}, \quad L^k_{ij,R} := X^k_{i,R}\partial_j u_{k,R} - \frac{H_k\left(\nabla u_{k,R}\right)}{n}\delta_{ij} - D^k_{ij,R},$$

其中

$$D^k_{ij,R} = (n-2)\left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\frac{1}{k^2}\partial_i u_{k,R}\partial_j u_{k,R}}{\left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)}.$$

我们记

$$W_{ij} := X_{ij} + \frac{e^u}{n}\delta_{ij}, \quad W^k_{ij,R} := X^k_{ij,R} + \frac{e^u}{n}\delta_{ij}.$$

注意，$L_{ij}$,$L^k_{ij,R}$与$D^k_{ij,R}$具有对称性，但 $X_{ij}$不具有。由于 $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$, $u > 0$与$u_{k,R} \in C^1_{loc}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$关于 $k$一致，我们可以看出 $D^k \to 0$ 在 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)$ 的紧子集上一致。注意，我们可以将矩阵$X^k_{ij,R} - \frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}$写成 $A(B+C)$, 其中 ——

$$A_{ij} = \delta_{ij} + \frac{(n-2)\partial_i u_{k,R}\partial_j u_{k,R}}{\left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)}, \quad B_{ij} = \left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} \partial_{ij} u_{k,R},$$

$$C_{ij} = \frac{(n-1)\left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n}\left[\frac{1}{n}\delta_{ij} - \frac{\partial_i u_{k,R}\partial_j u_{k,R}}{\left(\frac{1}{k^2} + |\nabla u_{k,R}|^2\right)}\right].$$

由 [3, 引理4.5] 可得

$$\sum_{i,j}\left(W^k_{ij} - \frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right)\left(W^k_{ji} - \frac{n-1}{n}L^k_{ji}\right) \ge C_p \sum_{i,j}\left|W^k_{ij} - \frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right|^2 \ge 0. \tag{5.3}$$

为简化记号，我们将省略对 $k$ 的依赖，并分别用 $a$、$\tilde{u}$、$X$、$X_i$、$X_{ij}$、$L_{ij}$、$D_{ij}$、$W_{ij}$ 代替 $a^k$、$u_k$、$_R$、$X^k$、$X^k_i$、$_R$、$X^k_{ij}$、$_R$、$L^k_{ij}$、$_R$、$D^k_{ij}$、$_R$、$W^k_{ij}$。首先，利用 (5.2)，即 $\sum_i X_{ii} = \left(e^u\right)$，我们得到关于 $\epsilon > 0$ 的如下 Serrin-Zou型微分等式 5.4

$$\begin{aligned}
&\sum_i \partial_i\left(\sum_j e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j - \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_i + \frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}X_i\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{iij}X_j + e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_{ji} - \left(\frac{n-1}{n}-\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j u_i\right.\\
&\left. - \left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{1}{n-1}}\frac{X_jX_{ji}X_i}{|X|}\right) + \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)^2\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_iu_i\\
&+ \sum_i\left(\frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}X_{ii} + \left(\frac{1}{n}+\epsilon\right)\frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}u_iX_i - \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_{ii}\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_{ji} - \frac{2(n-1)}{n}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j\tilde{u}_i\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_iu_i\\
&- \frac{n-1}{n}\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j\left(u_i-\tilde{u}_i\right) - \frac{2(n-1)}{n^2}e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}} - \frac{e^{(\frac{n+1}{n}+\epsilon)u}}{n} + \frac{n-1}{n}P^k + P^k_{1,\epsilon}\\
&+ \sum_i\frac{1}{n}\frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}(u_i-\tilde{u}_i)X_i\\
&= \sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(W_{ij} - \frac{n-1}{n}L_{ij}\right)\left(W_{ji} - \frac{n-1}{n}L_{ji}\right) + E^k + M^k + P^k_{1,\epsilon},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M^k =&\frac{2(n-1)}{n^2}e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}\left(-|X|^{\frac{n}{n-1}}+\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}\right)+\sum_i\frac{1}{n}\frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}(u_i-\tilde{u}_i)X_i\\&+2\frac{n-1}{n^2}\sum_i D_{ii}e^u,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^k =&\sum_{i,j}\left(e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j\tilde{u}_i-e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{1}{n-1}}\frac{X_jX_{ji}X_i}{|X|}\right)\\=&e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\sum_{i,j}X_{ij}X_j\left(\tilde{u}_i-|X|^{\frac{1}{n-1}}\frac{\tilde{u}_i}{|\nabla\tilde{u}|}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^k_{1,\epsilon} =&\sum_{i,j}\left(\epsilon e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_ju_i-\epsilon e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{1}{n-1}}\frac{X_jX_{ji}X_i}{|X|}\right)\\&+\left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)^2-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\right)\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_iu_i\\&+\epsilon\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_iu_i+\left(\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}},\\E^k =&\sum_{i,j}\left(-\frac{n-1}{n}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j\left(u_i-\tilde{u}_i\right)-2\frac{n-1}{n}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}D_{ij}\right),\\&+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_i\left(u_i-\tilde{u}_i\right)+\frac{n-1}{n}P^k\\&+\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_i\tilde{u}_i-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}L_{ij}L_{ji}.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}G^k :=&\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_i\tilde{u}_i-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}L_{ij}L_{ji}\\=&\left(\frac{n-1}{n}\right)^3\sum_i e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(|X|^{\frac{n}{n-1}}-\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}\right)X_i\tilde{u}_i\\&+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{n-2}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)|\nabla\tilde{u}|^2-\frac{1}{n}\frac{1}{k^2}\right]+F^k,\end{aligned}$$

其中

$$F^k=-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}D_{ij}D_{ji}+2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(X_i\tilde{u}_j-\frac{\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}}{n}\delta_{ij}\right)D_{ij}.$$

由于 $u>0$，$u_{k,R}\in C^1_{,\underline{\alpha\ \mathrm{loc}}}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(\mathbf{0})\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(\mathbf{0})\right)\right)$，关于 $k$ 一致，且在 $\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(\mathbf{0})\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(\mathbf{0})\right)$ 的紧子集上一致，因此我们有 $F^k\to 0$ 一致

在 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)$ 的紧子集上一致， $G^k$ 也如此。注意，在 $\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)$ 的紧子集上，我们有

$$\left|P^k\right| \le C|\nabla X||X|\left||X|^{\frac{1}{n-1}} - |\nabla\tilde{u}|\right|.$$

由于$(u_{k,\ R})_{k\in\mathbb{N}}$在 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中有界，并且当 $k$ 趋于无穷时，$\left(\frac{1}{k^2} + |x|^2\right)^{\frac{n-2}{2}} x \to |x|^{n-2}x$ 在 $\mathbb{R}^n$的紧子集上一致收敛，我们得到

$$\left|X^k\right| - |\nabla\tilde{u}|^{n-1} \to 0, \quad \left|X^k\right| - \left(\frac{1}{k^2} + |\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \to 0 \quad \text{in } C^0_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)} \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right).$$

由于$(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$中有界， $\left\{a^k(\nabla u_{k,R})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,2}\ \mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$中有界， $x \mapsto x^{\frac{1}{n-1}}$局部利普希茨连续且一致连续，因此我们有 $P^k \to 0$ 属于 $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$。于是，利用$(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中收敛到 $u$这一事实， $D^k \to 0$在$\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0) \setminus \left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \partial B_{6R}(0)\right)$ 的紧子集上一致收敛，并且 $\left\{a^k(\nabla u_{k,R})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $W^{1,2}\ \mathrm{loc}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$中有界，我们得到 $E^k \to 0$ 属于 $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$。

S其次，利用 (5.2)，我们得到如下 Pohozaev 型微分等式

$$\begin{aligned}
&\sum_i \partial_n\left(X_i\tilde{u}_i\right) - n\sum_i \partial_i\left(X_i\tilde{u}_n\right) - n\partial_n(e^u)\\
=&\sum_i X_{in}\tilde{u}_i - (n-1)\sum_i X_i\tilde{u}_{ni} - n\sum_i X_{ii}\tilde{u}_n - ne^u u_n\\
:=&I^k + ne^u(\tilde{u}_n - u_n).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于 $X_{ij} = \left(\frac{1}{k^2} + |\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(\tilde{u}_{ij} + (n-2)\frac{\tilde{u}_i\tilde{u}_u\tilde{u}_{lj}}{k^2 + |\nabla\tilde{u}|^2}\right)$，我们得到

$$\begin{aligned}
\sum_i X_{in}\tilde{u}_i &= \left(\frac{1}{k^2} + |\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(1 + \frac{(n-2)|\nabla\tilde{u}|^2}{\frac{1}{k^2} + |\nabla\tilde{u}|^2}\right)\sum_i \tilde{u}_i\tilde{u}_{ni}\\
&= \left(1 + \frac{(n-2)|\nabla\tilde{u}|^2}{\frac{1}{k^2} + |\nabla\tilde{u}|^2}\right)\sum_i X_i\tilde{u}_{ni}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

利用 (5.5) 和 (5.6)，我们得到

$$
\begin{aligned}
I^k =& \sum_i \partial_n \left(X_i \tilde{u}_i\right) - n \sum_i \partial_i \left(X_i \tilde{u}_n\right) \\
=& -(n-2)\frac{1}{k^2}\frac{1}{\frac{1}{k^2}+|\nabla \tilde{u}|^2}\sum_i X_i \tilde{u}_{ni} \\
=& -\left(1+\frac{(n-2)|\nabla \tilde{u}|^2}{\frac{1}{k^2}+|\nabla \tilde{u}|^2}\right)^{-1}\frac{(n-2)\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+|\nabla \tilde{u}|^2}\sum_i X_{in}\tilde{u}_i.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

注意到

$$
\min\{1, n-1\} \leq \left(1+\frac{(n-2)|\nabla \tilde{u}|^2}{\frac{1}{k^2}+|\nabla \tilde{u}|^2}\right) \leq \max\{1, n-1\}.
$$

因此，利用 $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ 这一事实，我们有

$$
\left|I^k\right| \leq C_n \frac{\frac{1}{k^2}|\nabla \tilde{u}|}{\frac{1}{k^2}+|\nabla \tilde{u}|^2}|\nabla X| \leq C_n \frac{1}{k}|\nabla X|.
$$

由于 $X^k \in W^{1,\,2\,\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$，且关于 k 一致，我们得到 $I^k \to 0$ 在 $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+ \cap B_{6R}(0)\right)$ 中。然后，由（5.4）和（5.7）可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \partial_i \left(\sum_j e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u} X_{ij} X_j - \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right) e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}} X_i + \frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n} X_i\right) \\
&+ \frac{n-1}{n^2}\left[\sum_i \partial_n \left(X_i \tilde{u}_i\right) - n\sum_i \partial_i \left(X_i \tilde{u}_n\right) - n\partial_n(e^u)\right] \\
=& \sum_{i,j} e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(W_{ij} - \frac{n-1}{n}L_{ij}\right)\left(W_{ji} - \frac{n-1}{n}L_{ji}\right) + E^k + \frac{n-1}{n^2} I^k + M^k + P^k_{1,\epsilon}.
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

设 $\eta \in C_c^\infty(B_R)$。我们将 (5.8) 乘以 $\eta$，并在 $\mathbb{R}^n_+$ 上积分。于是，由散度定理以及 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上的 $\nu = (0, \ldots, 0, -1)$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_{i,j} e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(W_{ij} - \frac{n-1}{n}L_{ij}\right)\left(W_{ji} - \frac{n-1}{n}L_{ji}\right) + E^k + \frac{n-1}{n^2} I^k + M^k + P^k_{1,\epsilon}\right)\eta \mathrm{d}x \\
=& -\int_{\mathbb{R}^n_+}\sum_i\left(\sum_j e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u} X_{ij} X_j - \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right) e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}} X_i + \frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n} X_i\right)\eta_i \mathrm{d}x \\
&- \frac{n-1}{n^2}\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_i X_i \tilde{u}_i \eta_n - n\sum_i X_i \tilde{u}_n \eta_i - n e^u \eta_n\right)\mathrm{d}x \\
&- \int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_j e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u} X_{nj} X_j - \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right) e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}} X_n + \frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n} X_n\right)\eta \mathrm{d}\sigma \\
&- \frac{n-1}{n^2}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(\sum X_i \tilde{u}_i - n X_n \tilde{u}_n - n e^u\right)\eta \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

由于 $X_n^k=-e^{\frac{n-1}{n}u}$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上且 $\sum_i X_{ii}^k=-e^u$，我们有

(5.10)

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_j e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{nj}X_j-\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_n+\frac{e^{(\frac{1}{n}+\epsilon)u}}{n}X_n\right)\eta\mathrm{d}\sigma\\
=&\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(-\frac{n-1}{n}e^{\epsilon u}\sum_{j=1}^{n-1}u_jX_j+e^{\epsilon u}\sum_{j=1}^{n-1}X_{jj}+\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{\epsilon u}|X|^{\frac{n}{n-1}}+\frac{n-1}{n}e^{(1+\epsilon)u}\right)\eta\mathrm{d}\sigma\\
=&\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\Bigg[\left(-\frac{n-1}{n}e^{\epsilon u}\sum_{j=1}^{n-1}X_j\tilde{u}_j+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2e^{\epsilon u}\sum_{j=1}^{n}X_j\tilde{u}_j+J^k\right)\eta-\sum_{j=1}^{n-1}e^{\epsilon u}X_j\eta_j\\
&-\epsilon e^{\epsilon u}u_jX_j\eta+\epsilon e^{\epsilon u}|X|^{\frac{n}{n-1}}\Bigg]\mathrm{d}\sigma\\
=&-\frac{n-1}{n^2}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_i X_i\tilde{u}_i-nX_n\tilde{u}_n-ne^{(1+\epsilon)u}\right)\eta\mathrm{d}\sigma+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(J^k\eta-\sum_{j=1}^{n-1}e^{\epsilon u}X_j\eta_j\right)\mathrm{d}\sigma+\epsilon L^k,
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
J^k=&\frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}X_j\left(\tilde{u}_j-u_j\right)+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(|X|^{\frac{n}{n-1}}-\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}\right)\\
&+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1/k^2}{\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2},
\end{aligned}
$$

and

$$
L^k=\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}(e^{\epsilon u}|X|^{\frac{n}{n-1}}-e^{\epsilon u}u_jX_j)\eta\mathrm{d}\sigma.
$$

由于 $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^{1,\alpha}$ 局部 $\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$中有界，我们可以看出

$$
\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2}\to 0
$$

并且在 $\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right.$ 上的紧子集上 $|X|^{\frac{n}{n-1}}\to\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla\tilde{u}|^2\right)^{\frac{n}{2}}$ 一致收敛 $)$。此外，利用 $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ 中收敛到 $u$这一事实，我们得到 $J^k\to 0$ 在 $\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right.$ 上的紧子集上一致收敛 $)$。由此可得

由 (5.9) 和 (5.10) 可知

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_{i,j}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left(W_{ij}-\frac{n-1}{n}L_{ij}\right)\left(W_{ji}-\frac{n-1}{n}L_{ji}\right)\right)\eta\mathrm{d}x\\
=&-\int_{\mathbb{R}^n_+}\sum_{i,j}\left(e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X_{ij}X_j-\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}+\epsilon\right)e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|X|^{\frac{n}{n-1}}X_i\right)\eta_i\mathrm{d}x\\
&-\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left(J^k\eta-e^{\epsilon u}X_j\eta_j\right)\mathrm{d}\sigma+\epsilon L^k\\
&-\frac{n-1}{n^2}\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\sum_i X_i\tilde{u}_i\eta_n-N\sum_i X_i\tilde{u}_n\eta_i\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(E^k+\frac{n-1}{n^2}I^k\right)\eta\mathrm{d}x.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

利用 (5.3) 和 (5.11)，我们得到

(5.12)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left|W^k_{ij,R}-\frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right|^2\eta\mathrm{d}x\\
\leq&C_n\Bigg(\sum_{i,j}\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}X^k_{ij,R}X^k_j\eta_i\mathrm{d}x\right|+\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left|X^k\right|^{\frac{2n-1}{n-1}}|\nabla\eta|\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left|J^k\right|\eta\mathrm{d}\sigma\\
&+\int_{\mathbb{R}^n_+}\left|X^k\right|^{\frac{n}{n-1}}|\nabla\eta|\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}\left|X^k\right||\nabla\eta|\mathrm{d}\sigma+\int_{\mathbb{R}^n_+}\left(\left|E^k\right|+\left|I^k\right|\right)\eta\mathrm{d}x+\epsilon|L^k|+\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}P^k_{1,\epsilon}\eta\mathrm{d}x\right|\Bigg).
\end{aligned}
$$

Note that $(u_{k,R})_{k\in\mathbb{N}}$ converges in $C^1_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)}\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ to $u$, $a^k\left(\nabla u_{k,R}\right)\rightharpoonup a(\nabla u)$ in $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\cap B_{6R}(0)\right)$, $L^k$ is uniform bounded for $k$, as $k\to\infty$ and $\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}P^k_{1,\epsilon}\eta\mathrm{d}x\right|\leq C_n\epsilon$, as $k\to\infty$. Besides, we have shown $E^k, I^k\to 0$ in $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)}\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)\right)$ and $J^k\to 0$ uniformly on compact subset of $\overline{\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)}\setminus\left(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\partial B_{6R}(0)\right)$. So, by passing to the limit as $k\to\infty$ into (5.12), we obtain

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty}\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left|W^k_{ij,R}-\frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right|^2\eta\mathrm{d}x\\
\leq&C_n\left(\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|\nabla a(\nabla u)||\nabla u|^{n-1}|\nabla\eta|\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}|\nabla u|^{2n-1}|\nabla\eta|\mathrm{d}x\right.\\
&\left.+\int_{\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^n|\nabla\eta|\mathrm{d}x+\int_{\partial\mathbb{R}^n_+}|\nabla u|^{n-1}|\nabla\eta|\mathrm{d}\sigma+\epsilon\right).
\end{aligned}
$$

令 $R>1$ 和 $\eta$ 为非负截断函数，使得 $\eta=1$ 属于 $B_R$，$\eta=0$ 在 $B_{2R}$和 $|\nabla\eta|\leq\frac{C_n}{R}$之外。由推论 3.5、命题 4.1 和 (5.12) 可得

$$
\limsup_{k\to\infty}\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left|W^k_{ij,R}-\frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right|^2\eta\mathrm{d}x\leq C\left(R^{-\frac{n^2}{n-1}\epsilon}+\epsilon\right).
\tag{5.13}
$$

由于 $W^k_{ij,\ R}-\frac{n-1}{n}L^k_{ij,\ R}\rightharpoonup W_{ij}-\frac{n-1}{n}L_{ij}$ 属于 $L^2_{\mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+\cap B_{6R}(0)\right)$，$e^{-(\frac{n-1}{2n}-\frac{\epsilon}{2})u}\eta^{\frac{1}{2}}\in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$，因此有

(5.14)
$$e^{-(\frac{n-1}{2n}-\frac{\epsilon}{2})u}\eta^{\frac{1}{2}}\left(W^k_{ij,R}-\frac{n-1}{n}L^k_{ij,R}\right)\rightharpoonup e^{-(\frac{n-1}{2n}-\frac{\epsilon}{2})u}\eta^{\frac{1}{2}}\left(W_{ij}-\frac{n-1}{n}L_{ij}\right)\quad\text{in}\quad L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

因此，由 (5.13) 和 (5.14) 可得

$$\sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n_+}e^{-(\frac{n-1}{n}-\epsilon)u}\left|W_{ij}-\frac{n-1}{n}L_{ij}\right|^2\eta\mathrm{d}x\le C\left(R^{-\frac{n^2}{n-1}\epsilon}+\epsilon\right).$$

先令 $R\to\infty$，再令 $\epsilon\to0$，我们得到 $W_{ij}-\frac{n-1}{n}L_{ij}=0$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中几乎处处成立。由于 $u\in C^{1,\alpha\ \mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$，我们有 $L_{ij}\in C^\alpha_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，从而推出 $X_i\in C^{1,\alpha\ \mathrm{loc}}\left(\mathbb{R}^n_+\right)$。至此，命题 5.1 的证明结束。

□

**定理 1.1 的证明**。我们考虑辅助函数 $v=ne^{-\frac{1}{n}u}$，其中 $u$ 是 (5.1) 的一个解。直接计算表明，$v>0$ 满足如下方程

(5.15)
$$\begin{cases}\Delta_n v=(n-1)\frac{|\nabla v|^n}{v}+n\frac{1}{v} & \text{in }\mathbb{R}^n_+,\\ |\nabla v|^{n-2}\frac{\partial v}{\partial t}=1 & \text{on }\partial\mathbb{R}^n_+.\end{cases}$$

由于 $a(\nabla u)\in C^{0,\alpha\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$ 且 $a(\nabla v)=-e^{-\frac{n-1}{n}u}a(\nabla u)$，我们有 $a(\nabla v)\in C^{0,\alpha\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$。于是，由命题 5.1 可得

(5.16)
$$\partial_j\left(a_i(\nabla v(x))\right)=\lambda(x)\delta_{ij},$$

其中 $\lambda(x)=\frac{1}{n}e^{-\frac{n-1}{n}u}|\nabla u|^n$，$i,\ j\in\{1,\dots,n\}$。椭圆正则性理论表明，$v\in C^{2,\alpha\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，这意味着 $\lambda(x)\in C^{1,\alpha\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$。然后，利用 (5.16)，我们得到 $a(\nabla v)\in C^{2,\alpha\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$。因此，由 (5.16) 可知，对于 $j\ne i$，有

$$\partial_j\lambda(x)=\partial_j\partial_i\left(a_i(\nabla v(x))\right)=\partial_i\partial_j\left(a_i(\nabla v(x))\right)=0$$

对于任意 $x\in\mathbb{R}^n_+$，这意味着 $\lambda(x)$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 上为常数。于是，我们推得

$$a(\nabla v)=\lambda\left(x-x_0\right)\quad\text{in }\mathbb{R}^n_+$$

对于某个 $x_0\in\mathbb{R}^n$。利用 (5.15)，我们得到

(5.17)
$$n\lambda=\mathrm{div}(a(\nabla v))=(n-1)\frac{|\nabla v|^n}{v}+\frac{n}{v}\quad\text{in }\mathbb{R}^n_+.$$

现在，我们将 $x_0$ 分为两种情形。

**情形1：** $x_0\in\mathbb{R}^n_+$。利用 $a_n(\nabla v)=1$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上以及 (5.17)，我们得到 $\lambda=-\frac{1}{x_0^n}<0$ 和 $v<0$，这与 $v=ne^{-\frac{1}{n}u}>0$ 矛盾。

**情形2：** $x_0\in\mathbb{R}^n_-$。由于 $a_n(\nabla v)=1$ 在 $\partial\mathbb{R}^n_+$ 上成立，我们得到 $\lambda=-\frac{1}{x_0^n}>0$。事实是，$|\nabla v|^{n-2}\nabla v=\lambda(x-x_0)$ 在 $\mathbb{R}^n_+$ 中，这意味着 $\nabla v=(\lambda|x-x_0|)^{\frac{1}{n-1}}\frac{x-x_0}{|x-x_0|}$。因此，由（5.17）可得

$$v(x)=\frac{(n-1)(\lambda|x-x_0|)^{\frac{n}{n-1}}+n}{n\lambda},$$

其中 $\lambda=-\frac{1}{x_0^n}>0$。利用 $v=ne^{-\frac{1}{n}u}$，我们得到定理 1.1。

## Appendix A. The existence of the solution of $n$-Laplacian equation with mixed boundary condition

本节将证明以下存在性结果，这一结果在命题 4.1 的证明中很有用。回顾

$$
\begin{aligned}
&a_i(x) := |x|^{n-2}x_i, \quad H(x) := |x|^n, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\\
&a_i^k(x) := (a_i * \phi_k)(x), \quad H_k(x) := (H * \phi_k)(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

其中 $\{\phi_k\}$ 是一族径向对称光滑磨光函数。

**引理 A.1.** 假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$ 是一个有界区域， $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ 且 $u \in W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$。则下列方程

$$
\begin{cases}
-\operatorname{div}\left(a^k(\nabla \bar{v}_k)\right) = f(x) & in\ \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega,\\
a^k(\nabla \bar{v}_k)) \cdot \nu = g(x) & on\ \partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega,\\
\bar{v}_k = u & on\ \mathbb{R}^n_+ \cap \partial\Omega,
\end{cases}
$$

存在一个解 $\bar{v}_k \in W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$。此外，当 $k \to +\infty$ 时，$\|\bar{v}_k\|_{W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)}$ 一致有界。

证明。 考虑变分问题的极小化子 $\bar{v}_k$

$$
\min_v \left\{ J_k(v) := \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \left( \frac{1}{n} H_k\big(\nabla(v_k + u)\big) - fv \right) \mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} gv \mathrm{d}\sigma,\ v \in W^{1,n}_0\left(\overline{\mathbb{R}^n_+} \cap \Omega\right) \right\}.
$$

我们可以看到， $J_k(v) \in C^1\left(W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right), \mathbb{R}\right)$。由于 $v\big|_{\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_+ = 0}$，由索博列夫不等式、索博列夫迹不等式以及 $|a+b|^n \le 2^n(|a|^n + |b|^n)$ 这一事实，可得

$$
\begin{aligned}
J_k(v) &\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{n} H_k\big(\nabla(v_k + u)\big) - C_{\Omega,n} \left( \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla v|^n \right)^{\frac{1}{n}}\\
&= \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_k + u)(x) - y|^n \phi_k(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x - C_{\Omega,n} \left( \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla v|^n \right)^{\frac{1}{n}}\\
&\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2^n n} |\nabla v|^n(x) \phi_k(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{n} H_k\big(\nabla u\big) \mathrm{d}x - C_{\Omega,n} \left( \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla v|^n \right)^{\frac{1}{n}}\\
&\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{2^n n} |\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x - \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^n \phi_k(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x\\
&\quad - \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^n \phi_k(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x - C_{\Omega,n} \left( \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla v|^n \right)^{\frac{1}{n}}\\
&\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{2^n n} |\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x - \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla u(x)|^n \mathrm{d}x\\
&\quad - C_{\Omega,n,k} - C_{\Omega,n} \left( \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} |\nabla v|^n \right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}
$$

由于 $u \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，可得 $J_k(v)$ 有下界。因此，由 Ekeland变分原理可得，存在一个序列 $\{v_{j,k}\}_{j=1}^{+\infty} \subset W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\big)$，使得

$$J_k(v_{j,k}) \to \inf J_k \quad \text{and} \quad J'(v_{j,k}) \to 0, \quad \text{as } j \to 0.$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\inf J + 1 + o_k(1)\|v_{j,k}\|_{W_0^{1,n}\left(\overline{\mathbb{R}^n_+}\cap\Omega\right)} \\
\geq &\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{n-1}{n} H_k\big(\nabla(v_{j,k}+u)\big) - \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_{j,k}+u)(x)-y|^{n-1}|\nabla u(x)-y|\phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
\geq &\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{n-1}{n} H_k\big(\nabla(v_{j,k}+u)\big) - \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{2^{n-1}}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_{j,k}(x)|^{n-1}|\nabla u(x)-y|\phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&- \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{2^{n-1}}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)-y|^{n}\phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
\geq &\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{n-1}{2^n n}|\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x - C_{\Omega,n,u,k}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{n-1}{2^n n}|\nabla v(x)|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} - C_{\Omega,n,u,k}.
\end{aligned}$$

因此，$\{v_{j,k}\}_{j=1}^{+\infty} \subset W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$ 在 $W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$中有界。我们可以假设$v_{j,k} \rightharpoonup v_k$属于$W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$。于是，对于所有 $p>0$, $v_{j,k}\to v_k$，均有 $L^p\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$ 和 $L^p\big(\partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$。由于$v_{j,k}$, $v$ 在 $W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$中有界，且$v_{j,k}\rightharpoonup v_k$属于 $W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$，我们得到 $\langle J'_k(v_{j,k}) - J'_k(v)\, v_{j,k} - v_k\rangle \to 0$。因此

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \langle a^k\big(\nabla(v_{j,k}+u)\big) - a^k\big(\nabla(v_k+u)\big), \nabla v_{j,k} - \nabla v_k\rangle \to 0. \tag{A.1}$$

由于 $\langle |\xi|^{n-2}\xi - |\eta|^{n-2}\eta, \xi-\eta\rangle \geq C_n|\xi-\eta|^n$，其中 $C_n>0$ 是依赖于 $n$的常数，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \langle a^k\big(\nabla(v_{j,k}+u)\big) - a^k\big(\nabla(v_k+u)\big), \nabla v_{j,k} - \nabla v_k\rangle \\
=&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \Big\langle \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_{j,k}+u)(x)-y|^{n-2}\big(\nabla(v_{j,k}+u)(x)-y\big)\phi_k(y)\mathrm{d}y \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_k+u)(x)-y|^{n-2}\big(\nabla(v_{j,k}+u)(x)-y\big)\phi_k(y)\mathrm{d}y, \nabla v_{j,k}(x) - \nabla v(x)\Big\rangle \mathrm{d}x \qquad \text{(A.2)} \\
\geq &C_n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_{j,k}-v_k)(x)|^n\phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
= &C_n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla(v_{j,k}-v_k)(x)|^n\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

结合 (A.1) 和 (A.2)，我们得到 $v_{j,k}\to v_k$ 在 $W^{1,n}_0\big(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega\big)$中。因此我们推得

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} a^k\big(\nabla(v_k+u)\big)\nabla\eta\mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} g\eta = 0,$$

其中 $\eta \in W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega)$。也就是说， $v$ 是以下方程的解

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a^k\left(\nabla(v_k+u)\right)\right) = f & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ a^k\left(\nabla(v_k+u)\right)\cdot \nu = g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n_+ \cap \partial\Omega. \end{cases} \tag{A.3}$$

令 $\bar{v}_k = v_k + u$，则 $u$ 是

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a^k\left(\nabla \bar{v}_k\right)\right) = f & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ a^k\left(\nabla \bar{v}_k\right)\cdot \nu = g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ \bar{v}_k = u & \text{on } \mathbb{R}^n_+ \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

现在，我们证明 $\|\bar{v}_k\|_{W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega)}$ 在 $k \to +\infty$ 时一致有界。由于 $u \in C^{1,\alpha}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，通过用 $v_k$ 测试 (A.3)，我们得到

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{1}{n} H_k\big(\nabla(v_k+u)\big) \\ =&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(v_k+u)(x)-y|^{n-1} |(\nabla u(x)-y)\phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} f v_k + \int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} g v_k \\ \le&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k(x)|^{n-1} |\nabla u(x)-y| \phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{2^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)-y|^{n} \phi_k(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &+ C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla v_k|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \\ \le&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} \frac{2^n}{n} |\nabla v_k(x)|^{n-1} (|\nabla u| + o_k(1))\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} o_k(1)\mathrm{d}x + C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla v_k|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \\ \le&\big(C_{\Omega,n,u} + o_k(1)\big)\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla v_k|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} + C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla v_k|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} + o_k(1)。 \end{aligned} \tag{A.4}$$

与 (A.4) 类似，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla v_k|^n \mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} H_k\big(\nabla(v_k+u)\big) + \int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega} |\nabla u|^n \mathrm{d}x + o_k(1). \tag{A.5}$$

结合 (A.4) 和 (A.5)，我们得到$\|v_k\|_{W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)}$ 一致有界，当 $k \to +\infty$时。因此$\|\bar{v}_k\|_{W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)}$ 一致有界，当 $k \to +\infty$时。 □

**引理 A.2**。 假设$\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$是一个有界区域， $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$且 $u \in W^{1,n}_{loc}(\mathbb{R}^n_+)$。则下列方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla \bar{v}_k|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla \bar{v}_k\right) = f(x) & in\ \mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ \left|\frac{1}{k^2}+|\nabla \bar{v}_k|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla \bar{v}_k \cdot \nu = g(x) & on\ \partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega, \\ \bar{v}_k = u & on\ \mathbb{R}^n_+ \cap \partial\Omega, \end{cases}$$

存在解 $\bar{v}_k \in W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$。此外，当 $k \to +\infty$ 时，$\|\bar{v}_k\|_{W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)}$ 一致有界。

证明。 我们考虑变分问题的极小化子 $\bar{v}_k$

$$\min_v \left\{ J_k(v) := \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \left( \frac{1}{n}\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n}{2}} - fv \right) \mathrm{d}x - \int_{\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} gv \mathrm{d}\sigma, \right.$$
$$\left. v \in W^{1,n}_0\left(\overline{\mathbb{R}^n_+} \cap \Omega\right) \right\}.$$

我们可以看出， $J_k(v) \in C^1\left(W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right), \mathbb{R}\right)$。由于 $v|_{\partial\Omega \cap \mathbb{R}^n_+ = 0}$，根据索博列夫不等式、索博列夫迹不等式以及 $|a+b|^n \le 2^n(|a|^n + |b|^n)$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned} J_k(v) &\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{n}\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n}{2}} - C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}|\nabla v|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{1}{2^n n}|\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}|\nabla u(x)|^n \mathrm{d}x \\ &\quad - C_{\Omega,n,k} - C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}|\nabla v|^n\right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

由于 $u \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，我们得知 $J_k(v)$ 有下界。因此，根据 Ekeland变分原理，存在一个序列 $\{v_{j,k}\}_{j=1}^{+\infty} \subset W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$，使得

$$J_k(v_{j,k}) \to \inf J \quad \text{and} \quad J'(v_{j,k}) \to 0, \quad \text{as } k \to 0.$$

Thus

$$\begin{aligned} &\inf J + 1 + o_k(1)\|v_{j,k}\|_{W^{1,n}_0\left(\overline{\mathbb{R}^n_+} \cap \Omega\right)} \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega} \frac{n-1}{n}\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_{j,k}+u)|^2\right|^{\frac{n}{2}} - \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_{j,k}+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\left(\frac{1}{k^2}+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x \\ &\ge \int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}\frac{n-1}{2^n n}|\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x - C_{\Omega,n,u,k}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega}\frac{n-1}{2^n n}|\nabla v(x)|^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}} - C_{\Omega,n,u,k}. \end{aligned}$$

因此 $\{v_{j,k}\}_{j=1}^{+\infty} \subset W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$ 在 $W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$中有界。于是我们可以假设$v_{j,k} \rightharpoonup v_k$ 在 $W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$中。 因此对所有 $p > 0$， $v_{j,k} \to v_k$ 在$L^p\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$ 和 $L^p\left(\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$中。 由于$v_{j,k}, v$在 $W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$ 中有界，且$v_{j,k} \rightharpoonup v_k$在 $W^{1,n}_0\left(\mathbb{R}^n_+ \cap \Omega\right)$中，我们得到

$\langle J_k'(v_{j,k}) - J_k'(v)\, v_{j,k} - v_k\rangle \to 0$。因此

(A.6)
$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}\left\langle\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_{j,k}+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_{j,k}+u)-\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_k+u),\nabla v_{j,k}-\nabla v_k\right\rangle\to 0.$$

由于 $\left\langle\left|\frac{1}{k^2}+|\xi|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\xi-\left|\frac{1}{k^2}+|\eta|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\eta,\xi-\eta\right\rangle \geq C_n|\xi-\eta|^n$，其中 $C_n>0$ 是一个依赖于 $n$ 的常数，我们得到

(A.7)
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}\left\langle\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_{j,k}+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_{j,k}+u)-\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_k+u),\nabla v_{j,k}-\nabla v_k\right\rangle\\ \geq& C_n\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}|\nabla(v_{j,k}-v_k)(x)|^n\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

结合 (A.6) 和 (A.7)，我们得到 $v_{j,k}\to v_k$ 属于 $W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)$。因此我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_k+u)\cdot\nabla\eta\mathrm{d}x-\int_{\partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}g\eta=0,$$

其中 $\eta\in W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)$。也就是说，$v$ 是下列方程的解

(A.8)
$$\begin{cases}-\operatorname{div}\left(\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_k+u)\right)=f & \text{in } \mathbb{R}^n_+\cap\Omega,\\ \left|\frac{1}{k^2}+|\nabla(v_k+u)|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla(v_k+u)\cdot\nu=g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega,\\ v=0 & \text{on } \mathbb{R}^n_+\cap\partial\Omega.\end{cases}$$

令 $\bar v_k=v_k+u$，则 $u$ 是

$$\begin{cases}-\operatorname{div}\left(\left|\frac{1}{k^2}+|\nabla\bar v_k|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla\bar v_k\right)=f & \text{in } \mathbb{R}^n_+\cap\Omega,\\ \left|\frac{1}{k^2}+|\nabla\bar v_k|^2\right|^{\frac{n-2}{2}}\nabla\bar v_k\cdot\nu=g & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+\cap\Omega,\\ \bar v_k=u & \text{on } \mathbb{R}^n_+\cap\partial\Omega.\end{cases}$$

现在，我们证明当 $k\to+\infty$ 时，$\|\bar v_k\|_{W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)}$ 一致有界。由于 $u\in C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$，对 (A.8) 用 $v_k$ 进行测试，类似于引理 A.1 的证明，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}|\nabla v_k|^n\mathrm{d}x\leq&\big(C_{\Omega,n,u}+o_k(1)\big)\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}|\nabla v_k|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{n-1}{n}}+C_{\Omega,n}\left(\int_{\mathbb{R}^n_+\cap\Omega}|\nabla v_k|^n\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\\ &+o_k(1)+C_{\Omega,n,u}.\end{aligned}$$

这意味着当 $k\to+\infty$ 时，$\|\bar v_k\|_{W^{1,n}_0(\mathbb{R}^n_+\cap\Omega)}$ 一致有界。 □

## Appendix B. Proof of Lemma 2.4

本节将给出引理 2.4 的证明。

**引理 2.4 的证明。** 我们可以采用与[17, 引理 2.3]的证明类似的方法来证明引理 2.4。只需对情形 $r=1$ 证明该结果即可。令 $k=(s+s^{n-1}+$

$\|h\|_{C^1(\Omega)}^{\frac{1}{n-1}} + \|f\|_{L^{\frac{n}{n-\varepsilon}}(B_2(x_0)\cap\Omega)}^{\frac{1}{n-1}} + \|g\|_{L^{\frac{n-1}{n-1-\varepsilon}}(B_2(x_0)\cap\Omega)}^{\frac{1}{n-1}}$。对于固定的数 $q \geqslant 1$ 和 $l > k$，我们定义这些函数

$$F(x) = \begin{cases} x^q & \text{if} \quad k \leqslant x \leqslant l, \\ q l^{q-1} x - (q-1) l^q & \text{if} \quad l \leqslant x, \end{cases}$$

and

$$G(x) = \operatorname{sign} x \cdot \left\{ F(|x|+k) F'(|x|+k)^{n-1} - q^{n-1} k^{\beta} \right\}, \quad -\infty < x < \infty,$$

其中， $q$ 和 $\beta$ 由 $nq = n + \beta - 1$联系起来。

**（i）的证明**。令 $\eta$ 为 $B_3(x_0)$中的一个非负光滑函数，且具有紧支撑，$\phi(x) = \eta^n G(w)$， $w = u - h$ 和 $w = |w| + k$。我们知道，对于任意实数值 $\beta > 0$， $\phi(x)$是（2.14）的一个测试函数。因此我们得到

$$\int_\Omega \langle \mathbf{a}(x, \nabla u), \nabla \phi(x) \rangle = \int_\Omega f(x) \phi(x).$$

由（2.11）和（2.13），我们得到

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}(x, \nabla u) - \mathbf{a}(x, \nabla \overline{w})| 1_{\{u(x) > h(x)\}} + |\mathbf{a}(x, \nabla u) + \mathbf{a}(x, \nabla \overline{w})| 1_{\{u(x) < h(x)\}} \\ \leq & C_{d,e} \Big( |\mathbf{a}(x, \nabla h)| + \big(s + |\nabla \overline{w}|\big)^{n-2} |\nabla h| + |\nabla h|^{n-1} \Big) \\ \leq & C_{d,e} \Big( s + s^{n-1} + |\nabla \overline{w}|^{n-2} |\nabla h| + |\nabla h|^{n-1} \Big). \end{aligned}$$

令 $v = w^q$ 和 $q = \frac{n+\beta-1}{n}$。通过与 [44], 中定理 2 的证明类似的计算，我们得到

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |\eta F'(\overline{w}) \nabla(\overline{w})|^n \\ \leq & C_{d,e,n} \int_\Omega \Big( |f \eta^n G(w)| + (s + |\nabla h|^{n-1} + |\nabla \overline{w}|^{n-1}) |\nabla \eta| \eta^{n-1} G(w) \\ & + \big( s + s^{n-1} + |\nabla \overline{w}|^{n-2} |\nabla h| + |\nabla h|^{n-1} \big) q^{-1} \beta |F'(\overline{w})^n| |\nabla \overline{w}| \eta^n \Big) \\ \leq & C_{d,e,n} \int_\Omega \Big( |f \eta^n F(\overline{w}) F'(\overline{w})^{n-1}| + (k^{n-1} + |\nabla \overline{w}|^{n-1}) |\nabla \eta| \eta^{n-1} F(\overline{w}) |F'(\overline{w})^{n-1}| \\ & + \big( k^{n-1} + C_h |\nabla \overline{w}|^{n-2} \big) q^{-1} \beta |F'(\overline{w})^n| |\nabla \overline{w}| \eta^n \Big). \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |\eta \nabla v|^n \\ \leq & C_{d,e,n} \Big( \int_\Omega \left| \frac{q^{n-1} f}{k^{n-1}} \right| |\eta v|^n + (1+\beta) \int_\Omega |v \nabla \eta| |\eta \nabla v|^{n-1} \\ & + q^{n-1} \int_\Omega |v \nabla \eta| |\eta v|^{n-1} + q^{n-1} \beta \int_\Omega |\nabla v \eta| |\eta v|^{n-1} \Big). \end{aligned} \tag{B.1}$$

令 $\alpha_1 = \frac{n}{1+\frac{\epsilon}{2n}}$，由 H¨older 不等式和索博列夫不等式，我们得到

$$\int_\Omega |v\nabla\eta||\eta\nabla v|^{n-1} \leq \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}, \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{f}{k^{n-1}}\right| |\eta v|^n =& \int_\Omega \left|\frac{f}{k^{n-1}}\right| |\eta v|^{\frac{\epsilon}{2}} |\eta v|^{n-\frac{\epsilon}{2}} \\ \leq& k^{1-n}\|f\|_{L^{\frac{n}{n-\epsilon}}(\Omega)}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1}(\Omega)}\|\eta v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \\ \leq& C_{\epsilon,n}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)} + \|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}),\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v\nabla\eta||\eta v|^{n-1} \leq& C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta v\|^{n-1}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \\ \leq& C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|^{n-1}_n + \|\nabla v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}),\end{aligned} \tag{B.4}$$

and

$$\int_\Omega |\nabla v\eta||\eta v|^{n-1} \leq \|v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}, \tag{B.5}$$

其中 $\alpha_1^* = \frac{\alpha_1 n}{n-\alpha_1}$。由 (B.1)、(B.2)、(B.3)、(B.4) 和 (B.5)，可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\eta\nabla v|^n \\ \leq& C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big((1+\beta)\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|^{n-1}_{L^n(\Omega)} + q^{n-1}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)} + \|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}) \\ &+ q^{n-1}\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|^{n-1}_n + \|\nabla v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}) + q^{n-1}\|v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

由杨不等式可得

$$\int_\Omega |\eta\nabla v|^n \leq C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big((1+\beta+q)^{n^2}\|v\nabla\eta\|^n_{L^n(\Omega)} + \epsilon(q)^{\frac{2n^2}{\epsilon}}\|\eta v\|^n_{L^n(\Omega)}\Big).$$

Thus

$$\left(\int_\Omega |\eta\nabla v|^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{2n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Omega)} + \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}).$$

由索博列夫不等式可得

$$\|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \leq C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{2n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Omega)} + \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}). \tag{B.6}$$

令 $m > m' > 0$，并设 $\eta$ 为满足以下条件的光滑函数： $\eta \equiv 1$ 属于 $B_{m'}(x_0)$， $\eta \equiv 0$ 属于 $B^c_m(x_0)$，且 $|\nabla\eta| \leq \frac{C}{m-m'}$。由 (B.6)，可推得

$$\begin{aligned}&\|v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega\cap B_{m'}(x_0))} \\ \leq& C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{2n}{\epsilon}}(m-m')\|v\|_{L^n(\Omega\cap B_m(x_0))}.\end{aligned}$$

因此，通过经典的Moser迭代论证，我们得到了所需的结果。

**（ii）的证明**。设 $\eta$ 是一个在 $B_3(x_0)$、$\phi(x) = \eta^n G(u)$ 和 $u = |u| + k$ 中具有紧支撑的非负光滑函数。我们知道，对任意 $\beta > 0$， $\phi(x)$ 都是（2.14）的测试函数。因此我们得到

$$\int_\Omega \langle \mathbf{a}(x, \nabla u), \nabla \phi(x) \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x) + \int_{\Gamma_2} g(x)\phi(x).$$

设 $v = \varpi^q$ 和 $q = \frac{n+\beta-1}{n}$。通过与 [44], 中定理 2 的证明类似的计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\eta F'(\overline{u})\nabla(\overline{u})|^n \\
\leq& C_{d,e,n}\int_\Omega \Big( |f\eta^n G(w)| + (s + |\nabla \overline{u}|^{n-1})|\nabla\eta|\eta^{n-1}G(w) \Big) + \int_{\Gamma_2} g(x)G(w) \\
\leq& C_{d,e,n}\int_\Omega \Big( |f\eta^n F(\overline{u})F'(\overline{u})^{n-1}| + (k^{n-1} + |\nabla\overline{u}|^{n-1})|\nabla\eta|\eta^{n-1}F(\overline{u})|F'(\overline{u})^{n-1}| \Big) \\
&+ \int_{\Gamma_2} g(x)F(\overline{u})|F'(\overline{u})^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\eta\nabla v|^n \\
\leq& C_{d,e,n}\Big( \int_\Omega \left|\frac{q^{n-1}f}{k^{n-1}}\right| |\eta v|^n + \int_\Omega |v\nabla\eta||\eta\nabla v|^{n-1} \\
&+ q^{n-1}\int_\Omega |v\nabla\eta||\eta v|^{n-1} + \int_{\Gamma_2}\left|\frac{q^{n-1}g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n \Big).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

令 $\alpha_1 = \frac{n}{1+\frac{\epsilon}{2n}}$ 和 $\alpha_2 = \frac{n^2-\frac{\epsilon}{4}}{n}$，由赫尔德不等式、引理 2.1 和索博列夫迹不等式可得

$$\int_\Omega |v\nabla\eta||\eta\nabla v|^{n-1} \leq \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}, \tag{B.8}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left|\frac{f}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n &= \int_\Omega \left|\frac{f}{k^{n-1}}\right||\eta v|^{\frac{\epsilon}{2}}|\eta v|^{n-\frac{\epsilon}{2}} \\
&\leq k^{1-n}\|f\|_{L^{\frac{n}{n-\epsilon}}(\Omega)}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1}(\Omega)}\|\eta v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \\
&\leq C_{\epsilon,n}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)} + \|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v\nabla\eta||\eta v|^{n-1} &\leq C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta v\|^{n-1}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \\
&\leq C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|^{n-1}_n + \|\nabla v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_2}\left|\frac{g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n &= \int_{\Gamma_2}\left|\frac{g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^{\frac{\epsilon}{4}}|\eta v|^{n-\frac{\epsilon}{4}} \\
&\leq \|g\|_{L^{\frac{n-1}{n-1-\frac{\epsilon}{4}}(\Gamma_2)}}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{4}}_{L^{\alpha_2}(\Gamma_2)}\|\eta v\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^{\alpha_{2,*}}(\Gamma_2)} \\
&\leq C_{\epsilon,n}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Gamma_2)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)} + \|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{B.11}$$

其中 $\alpha_1^* = \frac{\alpha_1 n}{n-\alpha_1}$ 且 $\alpha_{2,*} = \frac{\alpha_2(n-1)}{n-\alpha_2}$。由 (B.7)、(B.8)、(B.9)、(B.10) 和 (B.11)，可得

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\eta\nabla v|^n \\
\leq& C_{d,e,n,\epsilon}\bigg((1+\beta)\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}^{n-1} + q^{n-1}\|\eta v\|_{L^n(\Omega)}^{\frac{\epsilon}{2}}(\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}^{n-\frac{\epsilon}{2}} + \|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}^{n-\frac{\epsilon}{2}}) \\
&+ q^{n-1}\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|_{L^n(\Omega)}^{n-1} + \|\nabla v\eta\|_{L^n(\Omega)}^{n-1}) + q^{n-1}\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}^{\frac{\epsilon}{4}}(\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}^{n-\frac{\epsilon}{4}} + \|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}^{n-\frac{\epsilon}{4}})\bigg).
\end{aligned}$$

由杨不等式可得

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\eta\nabla v|^n \leq& C_{d,e,n,\epsilon}\bigg((1+\beta+q)^{n^2}\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}^n + \epsilon\big((q^n)^{\frac{4n}{\epsilon}} + (q^n)^{\frac{2n}{\epsilon}}\big)(\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}^n + \|\eta v\|_{L^n(\Omega)}^n) \\
&+ q^n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}^n\bigg).
\end{aligned}$$

Thus

$$\left(\int_\Omega |\eta\nabla v|^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq C_{d,e,n,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Omega)} + \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)} + \|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}^n).$$

由引理 2.1 和索博列夫迹不等式，可得

$$\|\eta v\|_{L^{\alpha_{2,*}}(\Gamma_2)} + \|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \leq C_{d,e,n,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)} + \|\eta v\|_{L^n(\Omega)} + \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}).$$

由于 $\alpha_{2,*} \geq \alpha_1^*$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Gamma_2)} + \|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)} \\
\leq& C_{d,e,n,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)} + \|\eta v\|_{L^n(\Omega)} + \|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}).
\end{aligned} \tag{B.12}$$

令 $m > m' > 0$，并设 $\eta$ 为满足以下条件的光滑函数：$\eta \equiv 1$ 属于 $B_{m'}(x_0)$，$\eta \equiv 0$ 属于 $B_m^c(x_0)$，且 $|\nabla\eta| \leq \frac{C}{m-m'}$。由 (B.12)，我们推得

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Gamma_2\cap B_{m'}(x_0))} + \|v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega\cap B_{m'}(x_0))} \\
\leq& C_{d,e,n,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(m-m')(\|v\|_{L^n(\Gamma_2\cap B_m(x_0))} + \|v\|_{L^n(\Omega\cap B_m(x_0))}).
\end{aligned}$$

因此，通过经典的Moser迭代论证，我们得到所需结果。

**（iii）的证明**设 $\eta$ 是 $B_3(x_0)$ 中具有紧支撑的非负光滑函数，$\phi(x) = \eta^n G(w)$，$w = u - h$ 且 $w = |w| + k$。我们知道，对任意 $\beta > 0$，$\phi(x)$ 是 (2.14) 的测试函数。因此我们得到

$$\int_\Omega \langle \mathbf{a}(x,\nabla u), \nabla\phi(x)\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x) + \int_{\Gamma_2} g(x)\phi(x).$$

由 (2.11) 和 (2.13)，我们得到

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{a}(x,\nabla u) - \mathbf{a}(x,\nabla\overline{w})|1_{\{u(x)>h(x)\}} + |\mathbf{a}(x,\nabla u) + \mathbf{a}(x,\nabla\overline{w})|1_{\{u(x)<h(x)\}} \\
\leq& C_{d,e}\bigg(|\mathbf{a}(x,\nabla h)| + \big(s + |\nabla\overline{w}|\big)^{n-2}|\nabla h| + |\nabla h|^{n-1}\bigg) \\
\leq& C_{d,e}\bigg(s + s^{n-1} + |\nabla\overline{w}|^{n-2}|\nabla h| + |\nabla h|^{n-1}\bigg).
\end{aligned}$$

设 $v=\varpi^q$ 和 $q=\frac{n+\beta-1}{n}$。通过类似于 [44], 中定理 2 证明的计算，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\eta F'(\overline{w})\nabla(\overline{w})|^n\\
\leq& C_{d,e,n}\int_\Omega \bigg(|f\eta^n G(w)|+(s+|\nabla h|^{n-1}+|\nabla\overline{w}|^{n-1})|\nabla\eta|\eta^{n-1}G(w)\\
&+\big(s+s^{n-1}+|\nabla\overline{w}|^{n-2}|\nabla h|+|\nabla h|^{n-1}\big)q^{-1}\beta|F'(\overline{w})^n||\nabla\overline{w}|\eta^n\bigg)\\
&+C_{d,e,n}\int_{\Gamma_2} g(x)G(w)\\
\leq& C_{d,e,n}\int_\Omega \bigg(|f\eta^n F(\overline{w})F'(\overline{w})^{n-1}|+(k^{n-1}+|\nabla\overline{w}|^{n-1})|\nabla\eta|\eta^{n-1}F(\overline{w})|F'(\overline{w})^{n-1}|\\
&+\big(k^{n-1}+C_h|\nabla\overline{w}|^{n-2}\big)q^{-1}\beta|F'(\overline{w})^n||\nabla\overline{w}|\eta^n\bigg)\\
&+C_{d,e,n}\int_{\Gamma_2} g(x)F(\overline{w})|F'(\overline{w})^{n-1}|.
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |\eta\nabla v|^n\\
\leq& C_{d,e,n}\bigg(\int_\Omega\left|\frac{q^{n-1}f}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n+(1+\beta)\int_\Omega|v\nabla\eta||\eta\nabla v|^{n-1}\\
&+q^{n-1}\int_\Omega|v\nabla\eta||\eta v|^{n-1}+q^{n-1}\beta\int_\Omega|\nabla v\eta||\eta v|^{n-1}+\int_{\Gamma_2}\left|\frac{q^{n-1}g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n\bigg).
\end{aligned}\tag{B.13}$$

令 $\alpha_1=\frac{n}{1+\frac{\epsilon}{2n}}$ 和 $\alpha_2=\frac{n^2-\frac{\epsilon}{4}}{n-\epsilon}$, 由 H¨older 不等式和索博列夫不等式可得

$$\int_\Omega|v\nabla\eta||\eta\nabla v|^{n-1}\leq\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|^{n-1}_{L^n(\Omega)},\tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left|\frac{f}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n=&\int_\Omega\left|\frac{f}{k^{n-1}}\right||\eta v|^{\frac{\epsilon}{2}}|\eta v|^{n-\frac{\epsilon}{2}}\\
\leq& k^{1-n}\|f\|_{L^{\frac{n}{n-\epsilon}}(\Omega)}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1}(\Omega)}\|\eta v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)}\\
\leq& C_{\epsilon,n}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}+\|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}),
\end{aligned}\tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega|v\nabla\eta||\eta v|^{n-1}\leq& C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta v\|^{n-1}_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)}\\
\leq& C_n\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|^{n-1}_n+\|\nabla v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}),
\end{aligned}\tag{B.16}$$

$$\int_\Omega|\nabla v\eta||\eta v|^{n-1}\leq\|v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)},\tag{B.17}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}\left|\frac{g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^n=&\int_{\Gamma_2}\left|\frac{g}{k^{n-1}}\right||\eta v|^{\frac{\epsilon}{4}}|\eta v|^{n-\frac{\epsilon}{4}}\\ \leq&\|g\|_{L^{\frac{n-1}{n-1-\frac{\epsilon}{4}}}(\Gamma_2)}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{4}}_{L^{\alpha_2}(\Gamma_2)}\|\eta v\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^{\alpha_{2,*}}(\Gamma_2)}\\ \leq&C_{\epsilon,n}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Gamma_2)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)}+\|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)}),\end{aligned}\tag{B.18}$$

其中 $\alpha_1^*=\frac{\alpha_1 n}{n-\alpha_1}$和 $\alpha_{2,*}=\frac{\alpha_2(n-1)n}{n-\alpha_2}$。由 (B.13)、(B.14)、(B.15)、(B.16)、(B.17) 和 (B.18) 可得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\eta\nabla v|^n\\ \leq&C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big((1+\beta)\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}+q^{n-1}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)}+\|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{2}}_{L^n(\Omega)})\\ &+q^{n-1}\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}(\|\nabla\eta v\|^{n-1}_n+\|\nabla v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)})+q^{n-1}\|v\eta\|^{n-1}_{L^n(\Omega)}\|\eta\nabla v\|_{L^n(\Omega)}\\ &+q^{n-1}\|\eta v\|^{\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Gamma_2)}(\|v\nabla\eta\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)}+\|\eta\nabla v\|^{n-\frac{\epsilon}{4}}_{L^n(\Omega)})\Big).\end{aligned}$$

根据杨不等式，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|\eta\nabla v|^n\\ \leq&C_{d,e,n,h,\epsilon}\Big((1+\beta+q)^{n^2}\|v\nabla\eta\|^n_{L^n(\Omega)}+\epsilon\big((q^n)^{\frac{4n}{\epsilon}}+(q^n)^{\frac{2n}{\epsilon}}\big)\left(\|\eta v\|^n_{L^n(\Gamma_2)}+\|\eta v\|^n_{L^n(\Omega)}\right)\Big).\end{aligned}$$

Thus

$$\left(\int_\Omega|\eta\nabla v|^n\right)^{\frac{1}{n}}\leq C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Omega)}+\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}+\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}).$$

根据引理 2.1 和索博列夫迹不等式，我们得到

$$\|\eta v\|_{L^{\alpha_2,*}(\Gamma_2)}+\|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)}\leq C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}+\|\eta v\|_{L^n(\Omega)}+\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}).$$

由于 $\alpha_{2,*}\geq\alpha_1^*$，我们得到

$$\begin{aligned}&\|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Gamma_2)}+\|\eta v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega)}\\ \leq&C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(\|\eta v\|_{L^n(\Gamma_2)}+\|\eta v\|_{L^n(\Omega)}+\|v\nabla\eta\|_{L^n(\Omega)}).\end{aligned}\tag{B.19}$$

令 $m>m'>0$，并设 $\eta$ 为一个光滑函数，使得 $\eta\equiv1$ 属于 $B_{m'}(x_0)$，$\eta\equiv0$ 属于 $B^c_m(x_0)$，且 $|\nabla\eta|\leq\frac{C}{m-m'}$。由 (B.19)，我们推得

$$\begin{aligned}&\|v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Gamma_2\cap B_{m'}(x_0))}+\|v\|_{L^{\alpha_1^*}(\Omega\cap B_{m'}(x_0))}\\ \leq&C_{d,e,n,h,\epsilon}(1+\beta+q)^{\frac{4n}{\epsilon}}(m-m')(\|v\|_{L^n(\Gamma_2\cap B_m(x_0))}+\|v\|_{L^n(\Omega\cap B_m(x_0))}).\end{aligned}$$

因此，通过标准的Moser迭代论证，我们得到了所需的结果。

## 声明

Data 可用性声明：所需的所有数据均包含在稿件中 .

资金和/或利益冲突/竞争性利益：作者声明不存在任何财务利益、竞争性利益或利益冲突。

## References

[1] *R. A. Adams* 和 *J. J. F. Fournier*，《索伯列夫空间》，第二版，纯粹与应用数学（阿姆斯特丹），第 *140* 卷，爱思唯尔/学术出版社，阿姆斯特丹，*2003* 年。[2] *J. A. Aguilar Crespo* 和 *I. Peral Alonso*，$-\Delta_n u = V(x)e^u$ 在 $\mathbb{R}^n_+$有界区域中解的爆破解行为，《非线性分析：理论、方法与应用》，*29*（*1997*），*365-384*。[3] *B. Avelin*、*T. Kuusi* 和 *G. Mingione*，极限情形下的非线性 *Calder´on-Zygmund* 理论，《理性力学与分析档案》，*227*（*2018*），*663-714*。[4] *D. Bartolucci*、*C. Gui*、*A. Jevnikar* 和 *A. Moradifam*，奇异球面覆盖不等式：奇异李乌维尔型方程解的唯一性与对称性，《数学年刊》，*374*（*2019*），第 *3-4* 期，*1883-1922*。[5] *P. B´enilan*、*L. Boccardo*、*T. Gallout*、*R. Gariepy*、*M. Pierre* 和 *J. L. V´azquez*，非线性椭圆方程解的存在性与唯一性的 $L^1$ 理论，《比萨高等师范学校科学年刊》，科学辑（第 *4* 辑）*22*（*1995*），第 *2* 期，*241-273*。[6] *L. Boccardo* 和 *T. Gallout*，含测度数据的非线性椭圆方程与抛物方程，《泛函分析杂志》，*87*（*1989*），第 *1* 期，*149-169*。[7] *H. Br´ezis* 和 *F. Merle*，二维中 $-\Delta u = V(x)e^u$ 解的一致估计与爆破解行为，《偏微分方程通讯》，*16*（*1991*），*1223-1253*。[8] *D. Cao*，$\mathbb{R}^2$中带临界指数的半线性椭圆方程的非平凡解，《偏微分方程通讯》，*17*（*1992*），第 *3-4* 期，*407-435*。[9] *D. Cao*、*W. Dai* 和 *Y. Li*，带 *Hardy*势的加权双重 $D^{1,p}$-临界拟线性非局部椭圆方程非负解的径向对称性与精确渐近行为，《中国科学：数学》，*2025*，*54* 页，数字对象标识符：*10.1007/s11425-025-2428-7*。[10] *S.-Y. A. Chang* 和 *P. C. Yang*，关于共形几何中 $n$阶微分方程解的唯一性，《数学研究快报》，*4*（*1997*），*91-102*。[11] *S. Chanillo* 和 *M. K.-H. Kiessling*，李乌维尔型非线性偏微分方程的共形不变系统，《几何与泛函分析》，*5*（*1995*），第 *6* 期，*924-947*。[12] *W. Chen* 和 *C. Li*，若干非线性椭圆方程解的分类，《杜克数学杂志》，*62*（*1991*），第 *3* 期，*615-622*。[13] *K. S. Chou* 和 *T. Y. H. Wan*，穿孔圆盘中 $\Delta u + e^u = 0$ 解的渐近径向对称性，《太平洋数学杂志》，*163*（*1994*），*269-276*。[14] *A. Cianchi* 和 *V. Mazya*，非线性椭圆问题的二阶双边估计，《理性力学与分析档案》，*229*（*2018*），*569-599*。[15] *G. Ciraolo*、*A. Figalli* 和 *A. Roncoroni*，凸锥中临界各向异性 $p$-拉普拉斯方程的对称性结果，《几何与泛函分析》，*30*（*2020*），*770-803*。[16] *G. Ciraolo* 和 *X. Li*，凸锥中 *Finsler* $n$- 拉普拉斯方程的外部超定问题，《变分法与偏微分方程》，*61*（*2022*），论文编号 *121*，*27* 页。[17] *G. Ciraolo* 和 *X. Li*，$\mathbb{R}^n$中各向异性 $n$-李乌维尔方程解的分类，《国际数学研究通知》，*2024*（*2024*），第 *19* 期，*12824-12856*。[18] *W. Dai*、*C. Gui* 和 *Y. Luo*，凸锥中的各向异性 *Finsler* $N$-拉普拉斯李乌维尔方程，*arXiv:2407.04987*，*39* 页。[19] *W. Dai*、*Y. Li* 和 *Z. Liu*，含 $p$-拉普拉斯 $-\Delta_p$的$D^{1,p}$-临界拟线性静态 *Schr¨odinger-Hartree* 方程非负解的径向对称性与精确渐近行为，《数学年刊》，*391*（*2024*），第 *2* 期，*2653-2708*。[20] *W. Dai* 和 *G. Qin*，具有混合阶以及指数增长或非局部非线性的共形不变系统解的分类，《工业与应用数学学会数学分析杂志》，*55*（*2023*），第 *3* 期，*2111-2149*。[21] *L. Damascelli*、*S. Merch´an*、*L. Montoro* 和 *B. Sciunzi*，$-\Delta_p(\cdot)$算子及 $\mathbb{R}^N$中临界非线性相关问题的径向对称性及其应用，《数学进展》，*265*（*2014*），*313-335*。[22] *E. DiBenedetto*，退化椭圆方程弱解的 $C^{1+\alpha}$ 局部正则性，《非线性分析》，*7*（*1983*），*827-850*。[23] *J. Dou*、*Y. Han*、*S. Yuan* 和 *Y. Zhou*，上半空间上的精确奥诺弗里迹不等式及带诺伊曼边界的拟线性李乌维尔方程，*arXiv:2509.17031*。

[24] *P. Esposito*，拟线性李乌维尔方程的一个分类结果，《亨利·庞加莱研究所分析与非线性分析年刊》，*35*（*2018*），*781-801*。[25] *P. Esposito*，$n$-李乌维尔方程的孤立奇点，《变分法与偏微分方程》，*60*（*2021*），论文编号 *137*，*17* 页。[26] *I. Fonseca* 和 *N. Fusco*，各向异性图像分割模型的正则性结果，《比萨高等师范学校科学年刊》，科学辑（第 *4* 辑），*24*（*1997*），*463-499*。[27] *P. X. Gu*、*H. Z. Li*，证明 *Guo-Wang* 关于单位球内正调和函数唯一性的猜想，《数学年刊》，*391*（*2025*），第 *3* 期，*3501-3517*。[28] *D. Gilbarg* 和 *N. S. Trudinger*，《二阶椭圆型偏微分方程》，施普林格出版社，柏林-纽约（*1977*）。[29] *C. Gui*、*F. Hang* 和 *A. Moradifam*，球面覆盖不等式及其对偶，《纯粹与应用数学通讯》，*73*（*2020*），第 *12* 期，*2685-2707*。[30] *C. Gui*、*A. Jevnikar* 和 *A. Moradifam*，若干李乌维尔型方程与系统解的对称性和唯一性，《偏微分方程通讯》，*43*（*2018*），第 *3* 期，*428-447*。[31] *C. Gui* 和 *Q. Li*，与李乌维尔方程相关的一些几何不等式，《数学杂志》，*305*（*2023*），第 *3* 期，论文编号 *40*，*30* 页。[32] *C. Gui* 和 *A. Moradifam*，球面覆盖不等式及其应用，《数学发明》，*214*（*2018*），第 *3* 期，*1169-1204*。[33] *S. Kichenassamy* 和 *L. Veron*，*p*-拉普拉斯方程的奇异解，《数学年刊》，*275*（*1986*），第 *4* 期，*599-615*。[34] *G. M. Lieberman*，退化椭圆方程解的边界正则性，《非线性分析》，*12*（*1988*），第 *11* 期，*1203-1219*。[35] *Y. Y. Li* 和 *M. Zhu*，通过移动球面法得到的唯一性定理，《杜克数学杂志》，*80*（*1995*），第 *2* 期，*383-417*。[36] *G. M. Lieberman*，边界值为 *Hölder* 连续函数的拟线性椭圆方程狄利克雷问题，《理性力学与分析档案》，*79*（*1982*），第 *4* 期，*305-323*。[37] *C. S. Lin*，$\mathbb{R}^n_+$中共形不变四阶方程解的分类，《瑞士数学评论》，*73*（*1998*），*206-231*。[38] *J. Liouville*，关于偏 ′微分方程 $\partial^2 \log\lambda/\partial u\partial v \pm 2\lambda a^2 = 0$，《数学杂志》，*18*（*1853*），*71-72*。[39] *X. Ma* 和 *Q. Ou*，*Heisenberg*群上一类半线性椭圆方程的李乌维尔定理，《数学进展》，*413*（*2023*），论文编号 *108851*，*20* 页。[40] *X. Ma*、*Q. Ou* 和 *T. Wu*，*CR*流形上的 *Jerison-Lee* 恒等式与半线性次椭圆方程，预印本，*arXiv:2311.16428*，*38* 页。[41] *F. Oliva*、*B. Sciunzi* 和 *G. Vaira*，具有临界 *Sobolev* 增长和*Hardy*势的拟线性椭圆方程的径向对称性，《纯粹与应用数学杂志》，*140*（*2020*），*89-109*。[42] *Q. Ou*，临界 $p$-拉普拉斯方程整体解的分类，《数学年刊》，*392*（*2025*），*1711-1729*。[43] *X. Ren* 和 *J. Wei*，带大指数的若干拟线性椭圆方程解的峰值计数，《微分方程杂志》，*117*（*1995*），*28-55*。[44] *J. Serrin*，拟线性方程解的局部行为，《数学学报》，*111*（*1964*），*247-302*。[45] *J. Serrin*，非线性方程解的奇点，《应用数学研讨会论文集》，第 *XVII* 卷，第 *68-88* 页，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州（*1965*）。[46] *B. Sciunzi*，$\mathbb{R}^n_+$中临界 $p$-拉普拉斯方程的正 $D^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$-解的分类，《数学进展》，*291*（*2016*），*12-23*。[47] *L. Sun* 和 *Y. Wang*，黎曼流形上的临界拟线性方程，预印本，*arXiv:2502.08495*。[48] *P. Tolksdorf*，更一般的一类拟线性椭圆方程的正则性，《微分方程杂志》，*51*（*1984*），*126-150*。[49] *J. V´etois*，临界 $p$-拉普拉斯方程的先验估计及其在解的对称性中的应用，《微分方程杂志》，*260*（*2016*），第 *1* 期，*149-161*。[50] *G. Wang* 和 *C. Xia*，二维 *Finsler*-李乌维尔方程的爆破解析，《微分方程杂志》，*252*（*2012*），*1668-1700*。[51] *J. Wei* 和 *X. Xu*，高阶共形不变方程解的分类，《数学年刊》，*313*（*1999*），第 *2* 期，*207-228*。[52] *R. Xie* 和 *H. Gong*，$-Q_n u = Ve^u$ 在 $\mathbb{R}^n_+$有界区域中解的先验估计与爆破解行为，《中国科学：数学》，*59*（*2016*），*479-492*。

[53] L.Zhang, 在各种积分有限性假设下， $\mathbb{R}^2_+$ 上具有常高斯曲率及边界测地曲率的共形度量的分类,Calc.Var.& PDEs,**16**(2003), 405-430.[54] Y.Zhou, 索博列夫迹不等式正临界点的分类定理 , arXiv: 2402.17602v3.

School of Mathematical Sciences, Beihang University (BUAA), Beijing 100191, P. R. China,
and Key Laboratory of Mathematics, Informatics and Behavioral Semantics, Ministry of Ed-ucation,
Beijing 100191, P. R. China
电子邮箱: weidai@buaa.edu.cn

Department of Mathematics, University of Macau, Macau SAR, P. R. China电子
邮箱地址：changfenggui@um.edu.mo

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, P. R.
China*E*
*mail add*$_{ress}$: huyc24@dlut.edu.cn

School of Mathematical Sciences, Beihang University (BUAA), Beijing, 100191, P.R.China电子邮
箱地址：slpeng@am.ss.ac.cn