arXiv:2602.06417v1 [math.SP] 6 Feb 2026

# 六阶比尔霍夫正则问题

NOKUKHANYA THANDIWE MZOBE 和 BERTIN ZINSOU

Abstract. 对于自伴边值问题，总是可以推导出特征值渐近公式。不过，对于非自伴但满足比尔霍夫正则条件的边值问题，也可以推导出此类公式。本文研究一个特征值参数以二次形式出现的正则六阶微分方程 $\lambda$，并考虑若干类与 $\lambda$ 无关或关于 $\lambda$ 呈线性关系的可分离边界条件。文中给出了使这些问题成为比尔霍夫正则问题的条件。

## 1. 引言

谱理论的发展是数学史上最重要的篇章之一。谱理论源于为理解各种物理现象提供数学框架的尝试，后来发展成为一个极大丰富了整个数学领域的分支。人们通过许多定性和定量方法对其进行了研究，例如斯图姆–刘维尔理论、分离变量法、傅里叶变换和拉普拉斯变换、微扰理论、特征函数展开、变分方法、随机分析以及数值方法（包括有限元等），这里仅举数例。

谱理论一直是数学领域持续研究的重要方向。谱理论最显著的贡献之一，是线性微分系统及其推广理论。常微分方程的谱理论是谱理论的一个分支，研究如何确定线性常微分方程的谱及其相关的特征函数展开。常微分方程在研究自然科学、物理学、工程学和航空学中的诸多问题时具有重要应用。这些应用可通过线性算子加以研究。

斯图姆-刘维尔算子为算子谱理论不断带来新思想和新问题，而高阶微分算子则在缓慢但稳步地发展。应用中会出现高阶线性微分方程，无论边界条件中是否含有特征值参数都是如此。关于依赖边界条件问题的全面研究，请参阅 [11, 12, 13, 10, 17, 14, 15, 16, 3, 1, 7]。这些特征值问题的数学模型导出了依赖于特征值参数的二次微分算子。这类问题被称为算子多项式，也称算子铅笔，其算子表示为

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A \tag{1}$$

在希尔伯特空间 $H = L_2(I) \oplus \mathbb{C}^l$ 中，其中 $I$ 是一个区间，$l$ 是依赖于特征值参数的边界条件数目，$M$，$K$ 而 $A$ 是系数算子。

在微分方程边值问题理论中，具有正则边界条件的微分算子发挥着重要作用。20世纪初，比尔霍夫首次为常微分算子引入了正则边界条件 [4]。比尔霍夫正则性对于边界特征值问题而言，最重要的结果之一是：对于 $\lambda$，适当的特征矩阵函数的行列式在圆盘的并集 $\Gamma_\nu$，($\nu \in \mathbb{N}$) 上与零有正距离；这些圆盘以零为圆心，半径为 $\rho_\nu$，并且随着 $\nu$ 趋于无穷大而趋于无穷大 [8, 页 129]。

在 [4], 比尔霍夫证明了一个关于特征函数展开的定理，并给出了满足某些行列式不等式的一类正则边界条件所对应的格林函数估计。Stone [19]证明，比尔霍夫展开在某种意义上等价于傅里叶级数。Salaff 在其颇具影响力的论文 [18], 中对这一结果作了部分论证，证明了偶数阶算子中自伴性蕴含比尔霍夫正则性。文献 [16, 11, 13, 21, 22]研究了均匀梁受压或受拉时小横向振动的比尔霍夫正则边界条件。关于比尔霍夫正则边界条件的大多数研究都集中在四阶特征值问题上。此外，关于六阶比尔霍夫正则问题的研究似乎几乎空白。因此，我们认为这仍是一个尚未解决的问题，亟须开展研究。

我们研究具有比尔霍夫正则边界条件的六阶特征值问题。六阶微分算子应用于曲拱振动的数学模型，见 [2]。关于研究六阶边值问题解的数值方法及其他技术，参见 [5, 20, 9, 6]。Moller 和 Zinsou [14] 研究了由算子铅笔描述的六阶问题的谱性质

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A, \tag{2}$$

其中， $M$、 $K$ 和 $A$ 是自伴算子。

我们考虑由微分方程给出的六阶边值问题

$$-y^{(6)} + (g_2 y'')'' - (g_1 y')' + g_0 y = \lambda^2 y, \tag{3}$$

其中 $g_m \in C^m[a,b]$ 对于 $m = 0$，1，2 为实值，并考虑一类可分离边界条件

$$B_j(\lambda) = 0 \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \tag{4}$$

边界条件（4）与 $\lambda$无关，或线性依赖于 $\lambda$。与所考虑问题相关联的二次算子铅笔由（2）给出，其中主算子 A 不一定是自伴的。我们给出了使问题（3）、（4）成为比尔霍夫正则问题的条件。在后续论文中，我们将研究六阶边值问题为比尔霍夫正则时特征值的渐近性。

我们在第 2 节介绍所研究的特征值问题。在第 3 节中，我们给出开展研究所需的框架。最后，在第 4 节中，我们给出研究结果。

## 2. Sixth order eigenvalue problem

我们考虑六阶特征值问题

$$-y^{(6)}+\sum_{r=0}^{2}\left(g_r y^{(r)}\right)^{(r)}=\lambda^2 y, \tag{5}$$

$$B_j(\lambda)y=0,\quad j=1,2,3,4,5,6, \tag{6}$$

其中，$y\in W_2^6(a,\ b)$、$g_r\in C^r[a,b]$（$r=0,\ 1,\ 2$）为实值函数，且（6）是关于 $\lambda$ 线性相关或线性无关的分离边界条件。我们假设

$$B_j(\lambda)y=\sum_{k=0}^{p_j}\alpha_{j,k}y^{(k)}(a_j)+i\lambda\sum_{k=0}^{q_j}\beta_{j,k}y^{(k)}(a_j), \tag{7}$$

其中，$p_j,\ q_j\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$，数 $p_j,\ q_j\neq-\infty$, $j\in\{1,2,3,4,5,6\}$ 中至少有一个。对于 $j=1,\ 2,\ 3$，我们设 $a_j=a$；对于 $j=4,\ 5,\ 6$，我们设 $a_j=b$。我们设

$$\alpha_{j,p_j}=1 \text{ if } p_j\neq-\infty \quad \text{and} \quad \beta_{j,q_j}\neq 0 \text{ if } q_j\neq-\infty. \tag{8}$$

定义

$$\Theta_1=\{s\in\{1,2,3,4,5,6\}:B_s(\lambda)\text{ depends on }\lambda\},\ \ \Theta_0=\{1,2,3,4,5,6\}\backslash\Theta_1,$$
$$\Theta_1^a=\Theta_1\cap\{1,2,3\},\ \ \Theta_1^b=\Theta_1\cap\{4,5,6\},$$

and

$$\Lambda=\{s\in\{1,2,3,4,5,6\}:p_s>-\infty\},\ \ \Lambda^a=\Lambda\cap\{1,2,3\},\ \ \Lambda^b=\Lambda\cap\{4,5,6\}. \tag{9}$$

**假设1**。我们假设，对于 $s\in\Lambda^a,\ p_s$；对于 $j\in\Theta_1^a,\ q_j$，这些数互不相同；对于 $s\in\Lambda^b,\ p_s$；对于 $j\in\Theta_1^b,\ q_j$，这些数也互不相同。

上述假设意味着，对于任意一对（$r,a_j$），项 $y^{(r)}(a_j)$ 在边界条件 (6) 中至多出现一次。

将 (6) 中边界条件的集合记为 $U$，我们定义与 $U$ 相关的以下算子:

$$U_r y=\left(\sum_{k=0}^{p_j}\alpha_{j,k}y^{(k)}\right)_{j\in\Theta_r},\ r=0,1 \text{ and } \ V_1 y=\left(\sum_{k=0}^{q_j}\beta_{j,k}y^{(k)}\right)_{j\in\Theta_1}, \tag{10}$$

其中 $y\in W_2^6(a,b)$ 和 $W_2^6(a,b)$ 是区间 $(a,b)$ 上的六阶索 Sobole夫空间。

令 $l:=|\Theta_1|$，我们在空间$L_2(a,b)\oplus\mathbb{C}^l$ 中考虑线性算子 $A(U)$ $K$和 $M$，其定义域为

$$\mathcal{D}(A(U))=\left\{\widetilde{y}=\begin{pmatrix}y\\V_1y\end{pmatrix}:y\in W_2^6(a,b),U_0y=0\right\},$$
$$\mathcal{D}(K)=\mathcal{D}(M)=L_2(a,b)\oplus\mathbb{C}^l,$$

其中

$$(A(U))\widetilde{y} = \begin{pmatrix} -y^{(6)} + \sum_{r=0}^{2} \left(g_r y^{(r)}\right)^{(r)} \\ U_1 y \end{pmatrix} \text{ for } \widetilde{y} \in \mathcal{D}(A(U)),$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ and } M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

我们可以观察到 $K \geq 0, M \geq 0$、 $M + K = I$和 $M|_{\mathcal{D}(A(U)} > 0$。我们关联一个二次算子铅笔

$$L(\lambda) = \lambda^2 M - i\lambda K - A(U), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

在空间 $L_2(a, b) \oplus \mathbb{C}^l$ 中与问题(5)、(6)相关联。算子铅笔(11)是特征值问题(5)、(6)的算子实现，使得函数 $y$满足(5)、(6)当且仅当 $\widetilde{y}$ 满足 $L(\lambda)\widetilde{y} = 0$。

我们将问题(5)、(6)写成如下形式

$$-y^{(6)} + \sum_{r=0}^{2} \left(g_r y^{(r)}\right)^{(r)} = \lambda^2 y, \tag{12}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{6} \omega_{j,k}^{(0)}(\lambda) y^{(k-1)}(a) + \omega_{j,k}^{(1)}(\lambda) y^{(k-1)}(b)\right)_{j=1}^{6} = 0. \tag{13}$$

$\omega_{j\,k}^{(0)}$,和 $\omega_{j\,k}^{(1)}$,、 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$的表示是

$$\begin{cases} \omega_{j,k}^{(0)}(\lambda) = \alpha_{j,k} + i\lambda\beta_{j,k} \text{ if } j = 1, 2, 3, \\ \omega_{j,k}^{(0)}(\lambda) = 0 \text{ if } j = 4, 5, 6, \end{cases} \tag{14}$$

而

$$\begin{cases} \omega_{j,k}^{(1)}(\lambda) = 0 \text{ if } j = 1, 2, 3, \\ \omega_{j,k}^{(1)}(\lambda) = \alpha_{j,k} + i\lambda\beta_{j,k} \text{ if } j = 4, 5, 6, \end{cases} \tag{15}$$

其中 $k = 1, \ldots, p_j$对$\alpha_{j,k}$并且其中 $k = 1, \ldots, q_j$对$\beta_{j,k}$。

## 3. Birkhoff regular problems

微分方程(5)的特征函数，如 [8, 7.1.4]中所定义，由 $\pi(\rho) = \rho^6 + 1$给出，其根为 $\left(\sqrt{3}/2 + i/2\right)^{(j-1)(2k+1)}$, 对 $k, j$ =1, 2, 3, 4, 5, 6。

我们选取

$$C(x, \mu) = \operatorname{diag}(1, \mu^1, \mu^2, \mu^3, \mu^4, \mu^5)\Big(\left(\sqrt{3}/2 + i/2\right)^{(j-1)(2k+1)}\Big), \tag{16}$$

参见 [8, 定理 7.2.4 A], , 其中 $\lambda = \mu^3$。在 [8,(7.3.1)] 中定义的边界矩阵为

$$W^{(u)} = (\omega_{j,k}^{(u)}(\mu^3) C(a_u, \mu))_{j,k=1}^{6}, \quad u = 0, 1, \tag{17}$$

其中，对于 $a_u = 0 \quad u = 0$ 和对于 $a_u = a \quad u = 1$，其定义与 $\lambda = \mu^3$ 的 (14) 和 (15) 中相同。因此，

$$W^{(0)}(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma_{1,k} \\ \gamma_{2,k} \\ \gamma_{3,k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=1}^{6}, \quad W^{(1)}(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{4,k} \\ \gamma_{5,k} \\ \gamma_{6,k} \end{pmatrix}_{k=1}^{6}, \tag{18}$$

其中 $\gamma_{j,\ k} = \sum_{l=1}^{6} (\omega_{j\ l}^{(u)}{}_{,}\ )\xi^{(l-1)(2k+1)}\mu^{l-1}$，当 $\xi = \sqrt{3}/2 + i/2$, $j = 1$，2，3 对于 $u = 0$，以及 $j = 4$，5，6 对于 $u = 1$。

注意， $p_j$ 和 $q_j$ 取决于假设1中所述的条件，并且$\beta_{j,\ q_j} \neq 0$ 如果 $q_j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，而 $\alpha_{j,\ p_j} = 1$ 如果 $j \in \Lambda$，参见 (9)。

Put

$$\nu_j = \max\{p_j, q_j + 3\}. \tag{19}$$

取 $C_2(\mu) = \text{diag}(\mu^{\nu_1}, \ \mu^{\nu_2}, \ \mu^{\nu_3}, \ \mu^{\nu_4}, \ \mu^{\nu_5}, \ \mu^{\nu_6})$，如 [8], 中所定义，得到

$$C_2(\mu)^{-1} \cdot W^{(u)}(\mu) = W_0^{(u)} + O(\mu^{-1}), \quad u = 0, 1, \tag{20}$$

其中

$$W_0^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega_{1,k}^{(0)} \\ \omega_{2,k}^{(0)} \\ \omega_{3,k}^{(0)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=1}^{6} \quad \text{and} \quad W_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_{4,k}^{(1)} \\ \omega_{5,k}^{(1)} \\ \omega_{6,k}^{(1)} \end{pmatrix}_{k=1}^{6}. \tag{21}$$

各项 $\omega_{j\ k}^{(u)}{}_{,}, u = 0,1$, 表示多项式 $\gamma_{j,k}$ 中最高次数项的系数，其中 $\mu$, $k = 1,2,3,4,5,6$，且 $j = 1,2,3,4,5,6$。为简便起见，令

$$\omega_{j,k}^{(u)} = \omega_{j+3u,k+3u}, \tag{22}$$

对于 $k = 1,2,3,4,5,6$ 以及 $j = 1,2,3,4,5,6$，取 $u = 0,1$。比尔霍夫矩阵为

$$W_0^{(0)}\Delta_k + W_0^{(1)}(I_6 - \Delta_k), \tag{23}$$

其中 $\Delta_k$、 $k = 1$，.....，6 是 $6 \times 6$ 矩阵，其对角线上按循环排列包含连续的三个 1 和连续的三个 0。对列进行置换后，矩阵 (23) 分别是从 $W_{(0)\,0}$ 的前三行和 $W_0^{(1)}$ 的最后三行中连续三列取出的对角矩阵分块。

我们将这些分块对角矩阵 $\Gamma_{3u,\ k+3u}$ 定义为

$$\Gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} \omega_{1+3u,k+3u} & \omega_{1+3u,k+1+3u} & \omega_{1+3u,k+2+3u} \\ \omega_{2+3u,k+3u} & \omega_{2+3u,k+1+3u} & \omega_{2+3u,k+2+3u} \\ \omega_{3+3u,k+3u} & \omega_{3+3u,k+1+3u} & \omega_{3+3u,k+2+3u} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

对于 $k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 和 $u = 0,\ 1$。上述矩阵中各项的指标可以简化为 $k+3u \equiv k+3u-6$ 模 6 和 $k+1+3u \equiv k+1+3u-6$ 模 6，其中 $u = 0,\ 1$。式 (23) 中的比尔霍夫矩阵的行列式可写成以下形式：

$$\det\left[W_0^{(0)}\Delta_k + W_0^{(1)}(I_6 - \Delta_k)\right] = \pm \det \Gamma_{0,k} \times \Gamma_{3,k+3}. \tag{25}$$

我们可以根据边界条件 (13) 中导数的幂 $p_j$ 和 $q_j$ 对特征值问题 (5)、(6) 进行分类。这些分类如下：

$$\begin{cases} p_{j+3u} < q_{j+3u} + 3, \\ p_{j+3u} > q_{j+3u} + 3, \\ p_{j+3u} = q_{j+3u} + 3, \end{cases} \tag{26}$$

对于每组边界条件，我们有三种不同的情形。由于每个端点处都有三个边界条件，因此每个端点有 27 种不同的情形。在上述 27 种不同的情形中，三种情形并非冗余，另有七组冗余情形。这三种非冗余情形如下：

1. $p_{1+3u} < q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} < q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} < q_{3+3u} + 3;$
2. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} > q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} > q_{3+3u} + 3;$
3. $p_{1+3u} = q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} = q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3.$

将假设1应用于剩余的24个边界条件后，我们发现其中17个无法成立。因此，还剩下7个边界条件。这些边界条件如下：

1. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} < q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} < q_{3+3u} + 3;$
2. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} > q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} < q_{3+3u} + 3;$
3. $p_{1+3u} < q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} < q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3;$
4. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} < q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3;$
5. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} > q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3;$
6. $p_{1+3u} > q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} = q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3;$
7. $p_{1+3u} < q_{1+3u} + 3, \quad p_{2+3u} = q_{2+3u} + 3, \quad p_{3+3u} = q_{3+3u} + 3.$

为便于实际应用，我们令

$$\theta_{j,u} = p_{j+3u} \quad \text{and} \quad \varphi_{j,u} = q_{j+3u}. \tag{27}$$

因此，式（26）中的条件为

$$\begin{cases} \theta_{j,u} < \varphi_{j,u} + 3, \\ \theta_{j,u} > \varphi_{j,u} + 3, \\ \theta_{j,u} = \varphi_{j,u} + 3. \end{cases} \tag{28}$$

我们将每个端点的 10 种不同情形记为情形$^{(u)}r$，其中 $u = 0,1$ 和 $r = 1,2,\ldots,10$。于是有

(1) Case$^{(u)}$ 1: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3, \quad \theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3, \quad \theta_{3,u} > \varphi_{3,u} + 3,$

(2) 情形$^{(u)}$ 2: $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$, (3) 情形$^{(u)}$ 3: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$, (4) 情形$^{(u)}$ 4: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$, (5) 情形$^{(u)}$ 5: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$ $\theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$, (6) 情形$^{(u)}$ 6: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$, (7) 情形$^{(u)}$ 7: $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$, (8) 情形$^{(u)}$ 8: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} = \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$, (9) 情形$^{(u)}$ 9: $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} = \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$, (10) 情形$^{(u)}$ 10: $\theta_{1,u} = \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} = \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$。

## 4. Classification of sixth order Birkhoff regular problems

现在我们将考察式（24）中给出的 $\det\Gamma_{3u,k+3u}$，对应 10 种不同情形。我们采用以下条件

1) 若 $\theta_{j,u} > \varphi_{j,u} + 3$，则由 $\gamma_{j,k}$可推得，多项式 $\gamma_{j,k}$ 在 $\mu$ 中，对于 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，以及 $u = 0, 1$，其最高次数项的系数为

$$\omega_{j+3u,k+3u} = \xi^{\theta_{j,u}(2(k+3u)+1)}, \tag{29}$$

其中 $\theta_{j,u} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\alpha_{j,\theta_{j,u}} = 1$。

2) 若 $\theta_{j,u} < \varphi_{j,u} + 3$，则由 $\gamma_{j,k}$ 可推得，多项式 $\gamma_{j,k}$ 在 $\mu$ 中，对于 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 和 $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，其最高次数项的系数为

$$\omega_{j+3u,k+3u} = i\xi^{\varphi_{j,u}(2(k+3u)+1)}\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}, \tag{30}$$

其中 $\varphi_{j,\ u} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 且 $\beta_{j,\ \varphi_{j,\ u}} \neq 0$。

3) 若 $\theta_{j,\ u} = \varphi_{j,\ u} + 3$，由 $\gamma_{j,\ k}$ 可推知，多项式 $\gamma_{j,\ k}$ 中关于 $\mu$ 的最高次数项的系数，对于 $k = 1$， 2， 3， 4， 5， 6，以及 $j$ =1， 2， 3， 4， 5， 6，由下式给出

$$\omega_{j+3u,k+3u} = \xi^{\varphi_{j,u}(2(k+3u)+1)}(i^{2(k+3u)+1} + i\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}), \tag{31}$$

其中 $\theta_{j,\ u}$， $\varphi_{j,\ u} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，其中 $\alpha_{j,\ \theta_{j,\ u}} = 1$ 且 $\beta_{j,\ \varphi_{j,\ u}} \neq 0$。令

$$\tau_{k,u} = 2(k + 3u) + 1, \tag{32}$$

then

$$\tau_{k+p,u} = \tau_{k,u} + 2p, \tag{33}$$

其中 $p$ 是一个自然数。因此，

**引理1**。

1) $i^{\tau_{k,\ u}} = \pm i$， 2) $i^{\tau_{k,\ u}+1} = \pm 1$， 3) $i^{\tau_{k,\ u}+2} = \mp i$， 4) $i^{2\tau_{k,\ u}} = -1$。

我们将观察到

$$\begin{cases} \omega_{j+3u,k+3u} = \xi^{(\tau_{k,u})\theta_{j,u}}, \text{ for } \theta_{j,u} > \varphi_{j,u} + 3, \\ \omega_{j+3u,k+3u} = i\xi^{\tau_{k,u}\varphi_{j,u}}\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}, \text{ for } \theta_{j,u} < \varphi_{j,u} + 3, \\ \omega_{j+3u,k+3u} = \xi^{\tau_{k,u}\varphi_{j,u}}\phi_{j,\tau_{k,u}}, \text{ for } \theta_{j,u} = \varphi_{j,u} + 3, \end{cases} \tag{34}$$

其中

$$\phi_{j,\tau_{k,u}} = i^{\tau_{k,u}} + i\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}. \tag{35}$$

利用离散傅里叶变换，我们将矩阵 $\Gamma_{3u,\ k+3u}$ 写为

$$\Gamma_{3u,k+3} = A \cdot \gamma_{3u,k+3u},$$

其中 $A = \mathrm{diag}(\xi^{m} i\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}, \xi^{n} i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}, \xi^{q} i\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}})$，若 $\theta_{j,u} < \varphi_{j,u} + 3$。注意，若 $\theta_{j,u} \geq \varphi_{j,u} + 3$，$j = 1$，则 $i\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}} = 1$，2、3 和 $u = 0$，1。容易看出，对于 $\theta_{j,u}, \varphi_{j,u} \in \{0,1,2,3,4,5\}$，$j = 1$，2、3、4、5、6、$u = 0$，1，有 $\xi^{\theta_{j,u}}, \xi^{\varphi_{j,u}} \neq 0$，且 $m, n, q \in \mathbb{N}$。因此，由式（8）可得 $\det\ A \neq 0$。

由于 $\det\ A \neq 0$，将 $\det\Gamma_{3u,k+3}$ 与零比较可归结为将 $\det\gamma_{3u,k+3}$ 与零比较。现在我们将计算 $\det\gamma_{3u,k+3}$，$u = 0, 1$，$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$。对于上述10种情形，我们得到：

情形$^{(u)}$ 1: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3, \quad \theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3, \quad \theta_{3,u} > \varphi_{3,u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{1,u}} & \xi^{4\theta_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\theta_{2,u}} & \xi^{4\theta_{2,u}} \\ 1 & \xi^{2\theta_{3,u}} & \xi^{4\theta_{3,u}} \end{pmatrix} \tag{36}$$

and

$$\det\gamma_{3u,k+3u} = (\xi^{2\theta_{2,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\theta_{3,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\theta_{3,u}} - \xi^{2\theta_{2,u}}) \neq 0, \tag{37}$$

由于 $\theta_{1,u}, \theta_{2,u}$ 和 $\theta_{3,u}$ 对于 $u = 0,1$ 两两互异，参见假设1。情形$^{(u)}$ 2: $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3, \quad \theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3, \quad \theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\varphi_{1,u}} & \xi^{4\varphi_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{2,u}} & \xi^{4\varphi_{2,u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{3,u}} & \xi^{4\varphi_{3,u}} \end{pmatrix} \tag{38}$$

并且由（8）可得

$$\det\gamma_{3u,k+3u} = (\xi^{2\varphi_{2,u}} - \xi^{2\varphi_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3,u}} - \xi^{2\varphi_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3,u}} - \xi^{2\varphi_{2,u}}) \neq 0, \tag{39}$$

因为 $\varphi_{j,\ u}$，$j = 1$，2，3 和 $u = 0$，1 彼此不同。

情形$^{(u)}$ 3: $\theta_{1,\ u} > \varphi_{1,\ u} + 3, \quad \theta_{2,\ u} > \varphi_{2,\ u} + 3, \quad \theta_{3,\ u} < \varphi_{3,\ u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{1,u}} & \xi^{4\theta_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\theta_{2,u}} & \xi^{4\theta_{2,u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{3,u}} & \xi^{4\varphi_{3,u}} \end{pmatrix}. \tag{40}$$

因此，

$$\det\gamma_{3u,k+3u} = (\xi^{2\varphi_{2,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\theta_{3,u}} - \xi^{2\varphi_{2,u}}) \neq 0. \tag{41}$$

情形$^{(u)}$ 4: $\theta_{1,\ u} > \varphi_{1,\ u} + 3, \quad \theta_{2,\ u} < \varphi_{2,\ u} + 3, \quad \theta_{3,\ u} < \varphi_{3,\ u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{u}} & \xi^{4\theta_{u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{2u}} & \xi^{4\varphi_{2u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{3u}} & \xi^{4\varphi_{3u}} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

由于 $\theta_{j,\ u}$，$\varphi_{k,\ u}$，$j,\ \ k = 1$，2，3 和 $u = 0$，1 彼此不同，

$$\det\gamma_{3u,k+3u} = (\xi^{2\varphi_{2,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{2,u}} - \xi^{2\varphi_{3,u}}) \neq 0. \tag{43}$$

由以上分析可得以下结果：

**命题1.** 设 $\theta_{j,u} \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\varphi_{j,u} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$，其中$\theta_{j,u} = p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,u} = q_{j+3u}$ 互不相交，而 $j = 1,2, 3$ 和 $u = 0,1$。则

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0$$

对于下列条件：

*(1)* $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} > \varphi_{3,u} + 3$, *(2)* $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$, *(3)* $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$, *(4)* $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} < \varphi_{3,u} + 3$.

接下来，我们研究其余情形，其中需要对 $\det\Gamma_{2u,k+2u} \neq 0$ 施加条件。

情形$^{(u)}$ 5: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3 \quad \theta_{2,u} > \varphi_{2,u} + 3, \quad \theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{1,u}} & \xi^{4\theta_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\theta_{2,u}} & \xi^{4\theta_{2,u}} \\ \phi_{3,\tau_{k,u}} & \xi^{2\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} & \xi^{4\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

由引理1可知

$$\phi_{j,\tau_{k,u}} = 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{j,u}} = \pm 1, \ u = 0, 1. \tag{45}$$

因此,

$$\det \gamma_{3u,k+3u} = 0. \tag{46}$$

对于 $\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}} \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} \det \gamma_{3u,k+3u} =& (\xi^{2\theta_{2,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{4\varphi_{3},u}\phi_{3,\tau_{k,u}} - \xi^{4\theta_{1,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}}) \\ & - (\xi^{4\theta_{2,u}} - \xi^{4\theta_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3},u}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} - \xi^{2\theta_{1,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}}) \\ =& (\xi^{2\theta_{2,u}} - \xi^{2\theta_{1,u}})(\xi^{2\varphi_{3,u}} + \xi^{2\theta_{2,u}}) \end{aligned} \tag{47}$$

$$\times \left[ i^{\tau_{3,u}}(\xi^{2\varphi_{3,u}} + \xi^{2\theta_{1,u}}) + i\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(\xi^{2\varphi_{3,u}} - \xi^{2\theta_{2,u}}) \right]. \tag{48}$$

由于 $\theta_1$、$\theta_2$ 和 $\varphi_3$ 互不相同，且 $\varphi_3 \in \{0, 1, 2\}$，因此

$$\det \gamma_{3u,k+3u} = 0 \iff \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}} = \mp\frac{\xi^{2\varphi_3} + \xi^{2\theta_1}}{\xi^{2\varphi_3} - \xi^{2\theta_2}}. \tag{49}$$

因此,

**命题2.** 设 $\xi = \sqrt{3}/2 + i/2$、$\theta_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\varphi_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$, 其中 $\theta_{j,\ u} = p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,\ u} = q_{j+3u}$ 互不相交，而 $j = 1$、2、3、 $u = 0$、1。

对于 $\theta_{1,\ u} > \varphi_{1,\ u} + 3, \quad \theta_{2,\ u} > \varphi_{2,\ u} + 3, \quad \theta_{3,\ u} = \varphi_{3,\ u} + 3,$

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{j,u}} \neq \begin{cases} \pm 1, \\ \mp\dfrac{\xi^{2\varphi_3} + \xi^{2\theta_1}}{\xi^{2\varphi_3} - \xi^{2\theta_2}}. \end{cases}$$

情形$^{(u)}$ 6: $\theta_{1,\ u} > \varphi_{1,\ u} + 3, \quad \theta_{2,\ u} < \varphi_{2,\ u} + 3, \quad \theta_{3,\ u} = \varphi_{3,\ u} + 3,$

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{1,u}} & \xi^{4\theta_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{2,u}} & \xi^{4\varphi_{2,u}} \\ \phi_{3,\tau_{k,u}} & \xi^{2\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} & \xi^{4\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

由（44）、（50）和命题2可得以下结果

**命题3**。 设 $\xi = \sqrt{3/2 + i/2}$、$\theta_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\varphi_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$, 其中 $\theta_{j,\ u} = p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,\ u} = q_{j+3u}$ 彼此互斥，而 $j = 1$、2、3、 $u = 0$、1。

对于情形$^{(u)}$ 6: $\theta_{1,\ u} > \varphi_{1,\ u} + 3$, $\theta_{2,\ u} < \varphi_{2,\ u} + 3$, $\theta_{3,\ u} = \varphi_{3,\ u} + 3$,

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{j,u}} \neq \begin{cases} \pm 1, \\ \mp \dfrac{\xi^{2\varphi_3} + \xi^{2\theta_1}}{\xi^{2\varphi_3} - \xi^{2\varphi_2}}. \end{cases}$$

情形$^{(u)}$ 7: $\theta_{1,\ u} < \varphi_{1,\ u} + 3$, $\theta_{2,\ u} < \varphi_{2,\ u} + 3$, $\theta_{3,\ u} = \varphi_{3,\ u} + 3$,

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\varphi_{1,u}} & \xi^{4\varphi_{1,u}} \\ 1 & \xi^{2\varphi_{2,u}} & \xi^{4\varphi_{2,u}} \\ \phi_{3,\tau_{k,u}} & \xi^{2\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} & \xi^{4\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

因此，由（44）和命题2可得以下结果,

**命题4**。 设 $\xi = \sqrt{3/2 + i/2}$, $\theta_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\varphi_{j,\ u} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$, 其中 $\theta_{j,\ u} = p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,\ u} = q_{j+3u}$ 互不相交，而 $j = 1,2, 3$, $u = 0, 1$。

对于情形$^{(u)}$ 7: $\theta_{1,u} < \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} < \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$,

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{j,u}} \neq \begin{cases} \pm 1, \\ \mp \dfrac{\xi^{2\varphi_3} + \xi^{2\varphi_1}}{\xi^{2\varphi_3} - \xi^{2\varphi_2}}. \end{cases}$$

情形$^{(u)}$ 8: $\theta_{1,u} > \varphi_{1,u} + 3$, $\theta_{2,u} = \varphi_{2,u} + 3$, $\theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$,

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^{2\theta_{1,u}} & \xi^{4\theta_{1,u}} \\ \phi_{2,\tau_{k,u}} & \xi^{2\varphi_{2,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}+2} & \xi^{4\varphi_{2,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}} \\ \phi_{3,\tau_{k,u}} & \xi^{2\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} & \xi^{4\varphi_{3,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}} \end{pmatrix}. \tag{52}$$

因此,

(53)

$$\begin{aligned} \det \gamma_{3u,k+3u} =& (\xi^{2\varphi_{2,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}+2} - \xi^{2\theta_{1,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}})(\xi^{4\varphi_{3},u}\phi_{3,\tau_{k,u}} - \xi^{4\theta_{1,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}}) \\ & - (\xi^{4\varphi_{2,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}} - \xi^{4\theta_{1,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}})(\xi^{2\varphi_{3},u}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} - \xi^{2\theta_{1,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}}). \end{aligned}$$

根据$\beta_{j+3u,\varphi_{3,u}} \neq \pm 1$, $j = 2,3$以及假设1，我们观察到以下子情形

1）子情形$^{(u)}$ 8.1： $\theta_1 = 2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 1$, 2）子情形$^{(u)}$ 8.2： $\theta_1 = 5$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 1$, 3）子情形$^{(u)}$ 8.3： $\theta_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 2$, 4）子情形$^{(u)}$ 8.4： $\theta_1 = 4$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 2$, 5）子情形$^{(u)}$ 8.5： $\theta_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = 2$, 6）子情形$^{(u)}$ 8.6： $\theta_1 = 3$, $\varphi_2 = 1$, $\varphi_3 = 2$。

接下来，我们将研究情形 $8^{(u)}$ 中的不同子情形。

1) **子情形$^{(u)}$ 8.1**： $\theta_1 = 2$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 1$,

$$\begin{aligned} \det \gamma_{3u,k+3u} =& -\sqrt{3}i\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(i^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}) \\ & + ((-1)^{\tau_{k,u}} + 3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_2)\xi^4 + ((-1)^{\tau_{k,u}} + 2i^{\tau_{k,u}+1})\xi^2. \end{aligned} \tag{54}$$

由引理1可得

$\det\gamma_{3u,k+3u}=0\Longleftrightarrow$

$$\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}=\frac{((-1)^{\tau_{k,u}}+3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_2)\xi^4+((-1)^{\tau_{k,u}}+2i^{\tau_{k,u}+1})\xi^2}{\sqrt{3}i(i^{\tau_{k,u}+1}+\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})}. \tag{55}$$

**引理 2.** 设 $\xi=\sqrt{3}/2\overline{+}i/2$, $\theta_{j,u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 和 $\varphi_{j,u}\in\{-\infty,0,1,2\}$，其中 $\theta_{j,u}=p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,u}=q_{j+3u}$ 互不相交，而 $j=1,2,3,u=0,1$。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

对于 $\theta_1=2,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=1,$

$\det\Gamma_{3u,k+3u}\neq0\Longleftrightarrow$

$$\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\neq\frac{((-1)^{\tau_{k,u}}+3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_2)\xi^4+((-1)^{\tau_{k,u}}+2i^{\tau_{k,u}+1})\xi^2}{\sqrt{3}i(i^{\tau_{k,u}+1}+\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})}. \tag{56}$$

2) **子情形**$^{(u)}$ **8.2**: $\theta_1=5,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=1,$

$$\begin{aligned}\det\gamma_{3u,k+3u}=&\sqrt{3}i\Big(\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}-3i^{\tau_{k,u}+1})\\&+((-1)^{\tau_{k,u}+1}+i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\Big).\end{aligned} \tag{57}$$

如果 $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}=\pm3$，那么 $\det\gamma_{3u,\ k+3u}\neq0$。然而，如果 $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}\neq\pm3$，那么

$$\det\gamma_{3u,k+3u}\neq0\Longleftrightarrow\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\neq\frac{(-1)^{\tau_{k,u}+1}+i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}{3i^{\tau_{k,u}+1}-\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}. \tag{58}$$

**引理 3.** 设 $\xi=\sqrt{3}/2\overline{+}i/2$, $\theta_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 和 $\varphi_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2\}$，其中 $\theta_{j,\ u}=p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,\ u}=q_{j+3u}$ 互斥，而 $j=1,2,3,u=0,1$。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

*For* $\theta_1=5,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=1,$

$$\det\Gamma_{3u,k+3u}\neq0$$

当且仅当以下条件之一成立时:

***1)*** $\beta_{2+3u,\varphi_{2,\ u}}=\pm3$,

*2)* $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\neq\pm3$ *and* $\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\neq\dfrac{(-1)^{\tau_{k,u}+1}+i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}{3i^{\tau_{k,u}+1}-\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}$.

3) **子情形**$^{(u)}$ **8.3**: $\theta_1=1,\ \ \varphi_2=0,\ \ \varphi_3=2,$

$$\begin{aligned}\det\gamma_{3u,k+3u}=&\Big(\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}+i^{\tau_{k,u}+1})\\&+(3(-1)^{\tau_{k,u}+1}+i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\Big)(\xi^4+\xi^2).\end{aligned} \tag{59}$$

由于 $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}\neq\pm1$，因此

$$\det\gamma_{3u,k+3u}\neq0\Longleftrightarrow\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\neq-\frac{3(-1)^{\tau_{k,u}+1}+i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}{i^{\tau_{k,u}+1}+\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}. \tag{60}$$

**引理 4**。设 $\xi=\sqrt{3}/\overline{2+}i/2$、$\theta_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 和 $\varphi_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2\}$，其中 $\theta_{j,\ u}=p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,\ u}=q_{j+3u}$ 互不相交，而 $j=1$、2、3、$u=0$、1。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

对于 $\theta_1 = 1$、 $\varphi_2 = 0$、 $\varphi_3 = 2.$ ，则

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}} \neq -\frac{3(-1)^{\tau_{k,u}+1} + i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}{i^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}.$$

4) **子情形**$^{(u)}$ **8.4**: $\theta_1 = 4,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 2,$

$$\begin{aligned}\det \gamma_{3u,k+3u} =& \Big(\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} - 3i^{\tau_{k,u}+1})\xi^4 + (i^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2 \\ &+ (i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^4 \\ &+ ((-1)^{\tau_{k,u}+1} - 3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2. \end{aligned} \tag{61}$$

如果 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} = \pm 3$，则 $\det\gamma_{3u,k+3u} \neq 0$。然而，如果 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} \neq \pm 3$，则

$$\begin{aligned}\det \gamma_{3u,k+3u} \neq 0 \Longleftrightarrow \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}} \neq& -\frac{(i^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})(\xi^2 + i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4)}{3i^{\tau_{k,u}+1} - \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}} \\ &- \frac{((-1)^{\tau_{k,u}+1} - 3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2}{3i^{\tau_{k,u}+1} - \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}. \end{aligned} \tag{62}$$

**引理 5.** 设 $\xi = \sqrt{3}/2 + \bar{i}/2$, $\theta_{j,u} \in \{-\infty, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\varphi_{j,u} \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$，其中 $\theta_{j,u} = p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,u} = q_{j+3u}$ 互斥，而 $j = 1,2,3, u = 0,1$。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}} \neq \pm 1,\ j = 2, 3.$$

*and*

$$\begin{aligned}\alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}} =& -\frac{(i^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})(\xi^2 + i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4)}{3i^{\tau_{k,u}+1} - \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}} \\ &- \frac{((-1)^{\tau_{k,u}+1} - 3i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2}{3i^{\tau_{k,u}+1} - \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}. \end{aligned}$$

对于 $\theta_1 = 4,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 2,$

$$\det \Gamma_{3u,k+3u} \neq 0$$

当且仅当以下条件之一成立时:

*1)* $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}} = \pm 3$,

*2)* $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} \neq \pm 3$ 和 $\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}} \neq \alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}}$。

5) **子情形**$^{(u)}$ **8.5**: $\theta_1 = 0,\ \varphi_2 = 1,\ \varphi_3 = 2,$

$$\begin{aligned}\det \gamma_{3u,k+3u} =& \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}(-\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}(\xi^4 + \xi^2) + 3i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4 - i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2) \\ &+ ((-1)^{\tau_{k,u}+1} - i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^4 \\ &- 3((-1)^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2 \end{aligned} \tag{63}$$

若 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} = \dfrac{3i^{\tau_k}{}_{,u+1}\xi^4 - i^{\tau_{k,}}{}_{u+1}\xi^2}{\sqrt{3i}}$，则 $\det\gamma_{3u,\varphi_{k+3u}} \neq 0$。然而，

若 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} \neq \dfrac{3i^{\tau_k}{}_{,u+1}\xi^4 - i^{\tau_{k,}}{}_{u+1}\xi^2}{\sqrt{3i}}$，则

$\det\gamma_{3u,\ \varphi_{k+3u}} \neq 0 \Longleftrightarrow$

$$\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}} \neq \frac{3((-1)^{\tau_{k,u}+1} + \beta_{2+3u,\varphi_{j,u}})\xi^2 + (i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}} - (-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^4}{3i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4 - i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2 + \sqrt{3}i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}. \tag{64}$$

**引理 6.** 设 $\xi=\sqrt{3}/2\overline{+}i/2$, $\theta_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 与 $\varphi_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2\}$, 其中 $\theta_{j,\ u}=p_{j+3u}$ 与 $\varphi_{j,\ u}=q_{j+3u}$ 互斥，而 $j=1$，$2$，$3$，$u=0$，$1$。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

*and*

$$\alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}}=\frac{3((-1)^{\tau_{k,u}+1}+\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}})\xi^2+(i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}-(-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^4}{3i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4-i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2+\sqrt{3}i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}}.$$

对于 $\theta_1=0$, $\varphi_2=1$, $\varphi_3=2$,

$$\det\Gamma_{3u,k+3u}\neq0$$

当且仅当以下条件之一成立时:

*1)* $\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}=\dfrac{3i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4-i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2}{\sqrt{3}i}$,

*2)* $\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}\neq\dfrac{3i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4-i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2}{\sqrt{3}i}$ *and* $\beta_{3+3u,\varphi_{j,u}}\neq\alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}}$.

6) **子情形**$^{(u)}$ **8.6**: $\theta_1=3$, $\varphi_2=1$, $\varphi_3=2$,

$$\begin{aligned}\det\gamma_{3u,k+3u}=&\beta_{3+3u,\varphi_{j,u}}(2i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4+2\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}\xi^2)-2i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}\xi^4\\&-(4i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{j,u}}+(-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^2.\end{aligned}\tag{65}$$

若 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}=-i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2$，则 $\det\gamma_{3u,\varphi_{k+3u}}\neq0$。另一方面，若 $\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\neq-i^{\tau_{k,u}+1}\xi^2$, 则

$$\begin{aligned}&\det\gamma_{3u,k+3u}\neq0\Longleftrightarrow\\&\beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\neq\frac{2i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\xi^4+(4i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}+(-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^2}{2i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4+2\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\xi^2}.\end{aligned}\tag{66}$$

**引理 7.** 设 $\xi=\sqrt{3}/2\overline{+}i/2$, $\theta_{j,u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 和 $\varphi_{j,u}\in\{-\infty,0,1,2\}$，其中 $\theta_{j,u}=p_{j+3u}$ 和 $\varphi_{j,u}=q_{j+3u}$ 互斥，而 $j=1$,2, 3,$u=0$,1。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

*and*

$$\alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}}=\frac{2i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\xi^4+(4i^{\tau_{k,u}+1}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}+(-1)^{\tau_{k,u}+1})\xi^2}{2i^{\tau_{k,u}+1}\xi^4+2\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\xi^2}.$$

对于 $\theta_1=3$、 $\varphi_2=1$、 $\varphi_3=2$,

$$\det\Gamma_{3u,k+3u}\neq0$$

当且仅当以下条件之一成立时:

***1)*** $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}=-i^{\tau_{k,\ u}+1}\xi^2$; ***2)*** $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}\neq-i^{\tau_{k,\ u}+1}\xi^2$ 以及$\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}\neq\alpha_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$。

**命题5**。 设 $\xi=\sqrt{3}/2+i/2$、$\overline{\ }\theta_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2,3,4,5\}$ 和$\varphi_{j,\ u}\in\{-\infty,0,1,2\}$, 其中$\theta_{j,\ u}=p_{j+3u}$和$\varphi_{j,\ u}=q_{j+3u}$互斥，而$j=1$、2、3和 $u=0$、1。设

$$\beta_{j+3u,\varphi_{j,u}}\neq\pm1,\ j=2,3.$$

对于 $\theta_{1,u}>\varphi_{1,u}+3$, $\theta_{2,u}=\varphi_{2,u}+3$, $\theta_{3,u}=\varphi_{3,u}+3$, 我们有:

***1)*** 对于子情形$^{(u)}$ *8.1*: $\theta_1=2$、 $\varphi_2=0$、 $\varphi_3=1$,

$\det\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当$\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和$\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *2* 的条件。

*2)* 对于子情形$^{(u)}$ *8.2*： $\theta_1 = 5,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 1,$

行列式$\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当 $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和 $\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *3* 的条件。

*3)* 对于子情形$^{(u)}$ *8.3*： $\theta_1 = 1,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 2,$

行列式$\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当 $\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和 $\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *4* 的条件。

*4*）对于子情形$^{(u)}$ *8.4*： $\theta_1 = 4,\ \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = 2,$

行列式$\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当$\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和$\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *5* 的条件。

*5*）对于子情形$^{(u)}$ *8.5*： $\theta_1 = 0,\ \varphi_2 = 1,\ \varphi_3 = 2,$

行列式$\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当$\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和$\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *6* 的条件。

*6*）子情形$^{(u)}$ *8.6*： $\theta_1 = 3,\ \varphi_2 = 1,\ \varphi_3 = 2,$

行列式$\Gamma_{3u,\ k+3u} \neq 0$ 当且仅当$\beta_{2+3u,\ \varphi_{2,\ u}}$ 和$\beta_{3+3u,\ \varphi_{3,\ u}}$ 满足引理 *7* 的条件。

注 1。 由于 $\varphi_j$、 $j = 1$、2、3 彼此不同，因此情形$^{(u)}$ 9: $\theta_{1、\ u} < \varphi_{1、\ u} + 3$、 $\theta_{2、\ u} = \varphi_{2、\ u} + 3$、 $\theta_{3、\ u} = \varphi_{3、\ u} + 3$ 是情形$^{(u)}$ 8的特定子情形$^{(u)}$ 8.5，其中 $\theta_1 = 0$ 被 $\varphi_1 = 0$ 替换。

情形$^{(u)}$ 10: $\theta_{1,u} = \varphi_{1,u} + 3,\quad \theta_{2,u} = \varphi_{2,u} + 3,\quad \theta_{3,u} = \varphi_{3,u} + 3$，由于$\theta_{j,u} = \varphi_{j,u} + 3$，$j = 1, 2, 3$且 $u = 0$,1，则由假设1可得$\varphi_{1,u} = 0,\quad \varphi_{2,u} = 1$ 且$\varphi_{3,u} = 2$。因此，

$$\gamma_{3u,k+3u} = \begin{pmatrix} \phi_{1,\tau_{k,u}} & \phi_{1,\tau_{k,u}+2} & \phi_{1,\tau_{k,u}} \\ \phi_{2,\tau_{k,u}} & \xi^2\phi_{2,\tau_{k,u}+2} & \xi^4\phi_{2,\tau_{k,u}} \\ \phi_{3,\tau_{k,u}} & \xi^4\phi_{3,\tau_{k,u}+2} & \xi^8\phi_{3,\tau_{k,u}} \end{pmatrix}. \tag{67}$$

$$\begin{aligned} \det\gamma_{3u,k+3u} &= (\xi^8-1)\phi_{3,\tau_{k,u}}(\xi^2\phi_{1,\tau_{k,u}}\phi_{2,\tau_{k,u}+2} - \phi_{2,\tau_{k,u}}\phi_{1,\tau_{k,u}+2}) \\ &\quad - (\xi^4-1)\phi_{2,\tau_{k,u}}(\xi^4\phi_{1,\tau_{k,u}}\phi_{3,\tau_{k,u}+2} - \phi_{3,\tau_{k,u}}\phi_{1,\tau_{k,u}+2}) \\ &= \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\Big[\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}(-i\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}(2\xi^4+1) + i^{\tau_{k,u}}(2\xi^2-1)) \\ &\quad + (-1)^{\tau_{k,u}}i(\xi^4+\xi^2) - 3i^{\tau_{k,u}}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}\Big] \\ &\quad + \sqrt{3}i^{\tau_{k,u}+1}(\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (-1)^{\tau_{k,u}+1}) \\ &\quad + (-1)^{\tau_{k,u}+1}i(3\sqrt{3}i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (\xi^2+1)\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} - 3\xi^2) \\ &= \beta_{3+3u,\varphi_{3,u}}\Big[\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}(\sqrt{3}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} + \sqrt{3}i^{\tau_{k,u}+1}) \\ &\quad + (-1)^{\tau_{k,u}} - 3i^{\tau_{k,u}}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}\Big] \\ &\quad + \sqrt{3}i^{\tau_{k,u}+1}(\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (-1)^{\tau_{k,u}+1}) \\ &\quad + (-1)^{\tau_{k,u}+1}i(3\sqrt{3}i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (\xi^2+1)\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} - 3\xi^2). \end{aligned} \tag{68}$$

Let

$$\begin{aligned}\alpha_{3+3u,\varphi_{3,u}} =&(-1)^{\tau_{k,u}} - 3i^{\tau_{k,u}}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} + \sqrt{3}i^{\tau_{k,u}+1}\big(\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}\\ &+(-1)^{\tau_{k,u}+1}\big)\\ &+(-1)^{\tau_{k,u}+1}i(3\sqrt{3}i\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} + (\xi^2+1)\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} - 3\xi^2)\end{aligned} \tag{69}$$

and

$$\delta_{3+3u,\varphi_{3,u}} = \beta_{2+3u,\varphi_{2,u}}(\sqrt{3}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}} + \sqrt{3}i^{\tau_{k,u}+1}) + (-1)^{\tau_{k,u}} - 3i^{\tau_{k,u}}\beta_{1+3u,\varphi_{1,u}}. \tag{70}$$

注意到$\det\gamma_{3u,k+3u} \neq 0$若$\beta_{2+3u,\varphi_{2,u}} = \frac{3i^{\tau_k}}{\sqrt{3}\,\beta_{1+3u\,\varphi_{1\,u}} + i^{\tau_{k\,u}+1}}$,,,

5. Abdesslam Boutayeb 和 Edward Twizell, *Numerical methods for the solution of special sixth-order boundary-value problems*, 《国际计算数学杂志》45 (1992), 第 3-4 期, 207–223。6. Ghasem Loghmani 和 Mahdi Ahmadinia, *Numerical solution of sixth order boundary value problems with sixth degree B-spline functions*, 《应用数学与计算》186 (2007), 第 2 期, 992–999。7. Marco Marletta、Andrei Shkalikov 和 Christiane Tretter, *Pencils of differential operators containing the eigenvalue parameter in the boundary conditions*, 《爱丁堡皇家学会会刊 A辑：数学》133 (2003), 第 4 期, 893–917。8. Reinhard Mennicken 和 Manfred M¨oller, *Non-self-adjoint boundary eigenvalue problems*, 第 192 卷, 荷兰：爱思唯尔, 2003。9. Syed Tauseef Mohyud-Din、Muhammad Aslam Noor 和 Asif Waheed, *Variation of parameters method for solving sixth-order boundary value problems*, 《韩国数学会通讯》24 (2009), 第 4 期, 605–615。10. Boitumelo Moletsane 和 Bertin Zinsou, *Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent and periodic boundary conditions*, 边值问题 2017 (2017), 第 1 期, 1–15。11. Manfred M¨oller 和 Vyacheslav Pivovarchik, *Spectral properties of a fourth order differential equation*, Zeitschrift f¨ur Analysis und ihre Anwendungen 25 (2006), 第 3 期, 341–366。12. Manfred M¨oller 和 Bertin Zinsou, *Self-adjoint fourth order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions* **34** 2011 3, , 《数学393, 406
问题》( ), 第 – 期。13. , *Spectral asymptotics of self-adjoint fourth order boundary value problems with eigenvalue parameter dependent boundary conditions*, 边值问题 2012 (2012), 第 1 期, 1–18。14. , *Sixth order differential operators with eigenvalue dependent boundary conditions*, 《应用分析与离散数学》(2013), 378–389。15. , *Self-adjoint higher order differential operators with eigenvalue parameter dependent boundary conditions* **2015** 2015 1, 1 12 , 边值问题 ( ), 第 – 期。16. , *Asymptotics of the eigenvalues of self-adjoint fourth order differential operators with separated eigenvalue parameter dependent boundary conditions*, 《落基山数学杂志》47 (2017), 第 6 期, 2013–2042。17. Vjacheslav Pivovarchik 和 Cornelis van der Mee, *The inverse generalized Regge problem*, 《逆问题》17 (2001), 第 6 期, 1831。18. Stephen Salaff, *Regular boundary conditions for ordinary differential operators*, 《美国数学会会刊》134 (1968), 第 2 期, 355–373。19. Marshall Stone, *A comparison of the series of Fourier and Birkhoff*, 《美国数学会会刊》28 (1926), 第 4 期, 695–761。20. Edward Twizell, *Numerical methods for sixth-order boundary value problems*, 《新加坡数值数学》1988, 施普林格, 1988, 第 495–506 页。21. Bertin Zinsou, *Fourth-order Birkhoff regular problems with eigenvalue parameter dependent boundary conditions* **40** 2016 4, 864 873 , 《土耳其数学杂志》( ), 第 – 期。22. Bertin Zinsou, *Asymptotics of the eigenvalue of self-adjoint fourth order boundary value problems* 2021 1 22 , 《微分方程与动力系统》( ), –。

School of Mathematics, University of the Witwatersrand, Johannesburg 2050, SouthAfrica

National Institute for Theoretical and Computational Sciences (NITheCS), South Africa

*Email address*: thandiwe.mzobe1@wits.ac.za

*Email address*: bertin.zinsou@wits.ac.za