arXiv:2602.06428v1 [math.DS] 6 Feb 2026

具有非一致结构的流的极大测度

QIAO LIU、TIANYU WANG 和 WEISHENG WU

摘要。本文通过考察极大化测度的熵谱，研究流的连续函数的遍历优化。具体而言，对于一大类具有非一致双曲结构的流，我们描绘了这样一种共存现象：在 C^0 拓扑下，存在极大化测度分别具有较大和较小熵的连续函数。我们的证明依赖于轨道分解技术，该技术最初由 Climenhaga 和 Thompson 为具有弱化版本扩张性和规范性质的流引入。特别地，我们的结果将 [31] 从符号空间上的非马尔可夫移位推广到一大类具有非一致结构的连续流。为说明这一点，我们将一般结果应用于非正曲率闭秩一流形上的测地流和标架流。

1. 引言

设 (X, F) 表示紧致度量空间 X 上的连续流 $F = \{f_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 或同胚，$\mathcal{M}_F(X)$（分别为 $\mathcal{M}_F^e(X)$）表示 X 上 F-不变（分别为 F-遍历）的博雷尔概率测度空间，并赋予弱-*拓扑。记 $C(X, \mathbb{R})$ 为 X 上实值连续函数空间。对于每个 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$，定义其最大值泛函

$$\Lambda_F(\varphi) := \sup\Big\{\int \varphi d\nu : \nu \in \mathcal{M}_F(X)\Big\} \tag{1.1}$$

以及 φ 的所有极大化测度组成的集合，

$$\mathcal{M}_{\max}(\varphi) := \Big\{\mu \in \mathcal{M}_F(X) : \int \varphi d\mu = \Lambda_F(\varphi)\Big\}.$$

对极大化测度性质的研究，如今称为遍历优化，起源于 20 世纪 90 年代，并引起了众多研究者的兴趣。特别值得关注的是，当 φ 属于由适当正则的连续函数构成的巴拿赫空间的一个泛型 [1] 子集时，研究 $\mathcal{M}_{\max}(\varphi)$ 的性质。其中一项特定性质是，极大化测度支撑在周期轨道上。关于典型极大化测度可能是周期的猜想，最早由遍历优化方面的早期研究提出

[1]本文中，若某性质在一个稠密 集合上成立，我们就称该性质为泛型。1

，后来被表述为“典型周期优化”猜想。连续函数的正则性对极大化测度的统计性质起着至关重要的作用。事实上，连续函数空间中极大化测度的典型性质，与 Hölder 函数或利普希茨函数等正则性更高的函数所对应的典型性质大不相同。

遍历优化中另一条重要的研究路径，是将极大化测度解释为平衡态的零温极限。回想一下，平衡态是使量 $h_\mu(F) + \int \varphi d\mu$ 达到最大的不变概率测度。对 $\alpha \in \mathbb{R}$ 将 φ 替换为 $\alpha\varphi$，当 $\alpha \to \infty$ 时，我们观察到熵项失去相对重要性，而极大化测度的齐次性意味着，对于较大的 α， $\alpha\varphi$ 的平衡测度 $\mu_{\alpha\varphi}$ 对 f 几乎是极大化的（参数 α 的热力学解释是逆温度，因此令 $\alpha \to \infty$ 被称为零温极限）。遵循这一思想，在许多情形下，一个合理的前提是平衡态的存在性与唯一性。这些性质可由系统与函数（后者在热力学形式中常称为势函数）的某些动力学行为来建立，其思想可追溯到 Bowen 在 20世纪70年代 [5] 的杰出工作。在这项工作中，他证明了，在同胚 (X, F, φ) 的情形下，(X, F) 的扩张性与规范性质，再加上 φ 的有界畸变性质（如今也称为 Bowen 性质），将表明 (X, F, φ) 的平衡态的存在性与唯一性。Bowen判据由 Climenhaga 和 Thompson [13] 通过放宽上述三个一致条件而得到改进。

最近，Shinoda、Takahasi 和 Yamamoto [31] 证明，在具有某些非马尔可夫结构的移位空间上，连续函数空间包含两个互不相交的子集：第一个是一个典型集，其中所有极大化测度的熵都“相对较小”；第二个则由那些拥有不可数多个、全支撑的遍历极大化测度且其熵“相对较大”的函数组成。尽管第二个集合本身未必是典型集，但它仍然相当丰富，因为它在第一个集合的补集中稠密。

本文从典型极大化测度的熵谱这一视角，研究连续函数的遍历优化，并将上述符号动力系统的结果推广到一个范围相当广泛的流族。我们关注的所有系统都具有多种非一致双曲结构，重点考察其中两种常见的非一致版本：扩张性和规范性。在过去二十年里，随着非一致扩张性与规范性理论的发展，人们逐渐认识到，具有这类性质的系统可能呈现各种不同类型的非一致双曲性；其中包括具有支配分裂、部分双曲或非部分双曲的系统，以及其他源自阿诺索夫的系统（见 [11, 12, 14, 35, 10, 29]）。

因此，结合 [31]，中的结果，我们的研究展现了遍历优化在均匀双曲系统或马尔可夫系统之外的丰富结构。

1.1. 一般结果。 设 (X, F) 是紧致度量空间 (X,d) 上的连续流，且没有不动点[2]。我们主要关注具有非一致双曲结构的流中，连续函数的极大化测度的度量熵。如上所述，在我们的设定下，此类结构的一个主要障碍是扩张性的不一致版本。具体而言，我们考虑以下两种弱化的扩张性：

(E1) (X, F) 是熵扩张的；(E2) (X, F) 不是熵扩张的，
但 $h^{\perp}_{\exp} < h$。

这里，$h := h_{\mathrm{top}}(F)$ 表示该流的拓扑熵，而 $h^{\perp}_{\exp}$ 表示扩张性的障碍熵（见定义 2.6）。粗略地说，$h^{\perp}_{\exp}$ 衡量系统非扩张部分的熵，而条件 $h^{\perp}_{\exp} < h$ 表明，所有具有较大测度论熵 $h_\mu(F)$ 的 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$ 都是几乎扩张的。

我们在 $C(X, \mathbb{R})$ 上赋予通常的 C^0-范数，其定义为

$$\|\varphi\|_{C^0} := \max\{|\varphi(x)| : x \in X\} \quad \text{for each } \varphi \in C(X, \mathbb{R}).$$

对于任意 $H \geq 0$，令

$$\mathcal{R}_H := \{\varphi \in C(X, \mathbb{R}) : h_\mu(F) \leq H \text{ for all } \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}.$$

我们的第一个结果表述如下。

定理 A. 设 (X, F) 是在一个紧致度量空间上的无不动点连续流。假设(X, F)具有(E1) 或(E2)型的胀性，并且 $X \times \mathbb{R}^+$ 存在一个分解$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$，使得 $\mathcal{G}$ 在所有尺度 $\eta > 0$ 上满足弱受控规范性，其间隙函数 $h^{\mathcal{G}}_\eta$ 满足$\liminf_{t\to\infty} h^{\mathcal{G}}_\eta(t)/\log t = 0$，且 $h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]) < h$。记

$$H^{\perp} := \begin{cases} h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]), & \text{if } (X, F) \text{ is of expansive type (E1)}, \\ \max\{h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]), h^{\perp}_{\exp}\}, & \text{if } (X, F) \text{ is of expansive type (E2)}. \end{cases}$$

则对于所有 $H \in [H^{\perp}, h)$，R_H 在 $C(X, \mathbb{R})$ 中稠密 G_δ。

轨道分解和弱受控规范性的定义分别见定义 2.3 和 2.4。与一致双曲情形相比，在该情形中，针对极大化测度周期性的周期优化通常可针对典型的利普希茨函数或赫尔德函数得到；定理 A 揭示，许多一般的非一致双曲系统中，典型连续函数的极大化具有“小熵”特征，

[2]尽管全文都在流的背景下展开，但我们的结果很容易推广到那些同胚情形，因为我们针对流的所有策略都适用于此，只需采用相对简单的论证即可。

这与 [31] 中关于非马尔可夫移位的结果相呼应，并部分推广了 Morris 关于具有 Bowen 的规范性质的系统的 [27] 结果。

由于典型连续函数具有唯一的极大化测度（见命题 2.22），记

$$\mathcal{U}_H := \{\varphi \in C(X,\mathbb{R}) : h_\mu(F) \le H \text{ for the unique } \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$$

对所有 $H \ge 0$，我们立即得到如下结论。

定理 B. 在定理 *A* 的设定下，$\mathcal{U}_H$ 在 $C(X,\mathbb{R})$中对所有 $H \in [H^\perp, h)$是稠密的 G_δ 。

下一定理表明，其极大化测度具有“相对较大”熵的连续函数并非孤立的，而是持续且大量存在的。此外，此类连续函数的优化是复杂的，其特征是存在不可数多个遍历测度。

定理 C. 设 $h^\perp_{\exp} < h$，且 $X \times \mathbb{R}^+$ 容许定理 *A* 中的分解$(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{S})$。再假设 $C(X,\mathbb{R})$ 中的每个 ***Lipschitz*** 函数沿 $\mathcal{G}$满足 ***Bowen*** 性质。则对任意 $H \in [H^\perp, h)$，$\varphi \in C(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{R}_H$ 以及任意邻域 U（即 φ 在 $C(X,\mathbb{R})$ 中的邻域），存在$\psi \in U$，使得集合 $\{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\psi) : h_\mu(F) > H\}$ 包含不可数多个遍历测度。

读者可参阅 [30, 定理 A] 和 [31, 定理 B]，了解定理 C 的符号类比。在定理 C 的证明中，我们使用凸分析中的逼近结果，得到所需的连续函数及其对应的极大化测度。由于低温平衡态几乎极大化了势函数，因此可以在此类平衡态的一个小邻域内找到极大化测度。平衡态的丰富性使我们能够找到不可数多个极大化测度。导向定理 C 的一般技术结果，其精神可由以下内容体现。

定理 D. （基态）设 (X,F) 如定理 *C* 中所述。那么，对于每个 $\mu \in \mathcal{M}_F^e(X)$ 满足 $h_\mu(F) > H^\perp$ 的情形，以下结论成立：对于任意常数 $H_0 \in (H^\perp, h_\mu(F))$，以及任意包含 μ 的 $\mathcal{M}_F(X)$ 的开子集 U，存在一个 ***Lipschitz*** 连续函数 φ： $X \to \mathbb{R}$，使得：

(1) 对于任意 $\alpha \ge 0$，势函数$\alpha\varphi$都存在唯一平衡态，记为 $\mu_{\alpha\varphi}$。***(2)*** 映射 $\alpha \mapsto \mu_{\alpha\varphi} \in \mathcal{M}_F(X)$ 连续。***(3)*** 对所有充分大的 $\alpha > 0$，我们都有 $\mu_{\alpha\varphi} \in U$，并且

$$\lim_{\alpha\to\infty} h_{\mu_{\alpha\varphi}}(F) > H_0.$$

(4) 存在一对常数 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$，使得映射 $\alpha \mapsto \mu_{\alpha\varphi}$ 在 (α_1, α_2) 上是单射，并且对于所有 $\alpha \in (\alpha_1,\alpha_2)$， $h_{\mu_{\alpha\varphi}}(F) > H_0$。

1.2. **测地流的应用**。 作为一项应用，我们考虑非正曲率闭秩一流形上的测地流。

设 M 是一个非正曲率的闭秩一流形， SM 是它的单位切丛。令 $G = \{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$: $SM \to SM$ 表示测地流。根据 Knieper [26] 和 Burns-Climenhaga-Fisher-Thompson [10]，有 h_{top}(Sing) $< h_{\text{top}}(G)$, 其中 Sing 表示测地流的奇异集。

定理 E. 设 M 是一个非正曲率的闭秩一流形，且 $G = \{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$: $SM \to SM$ 是测地流。令 $H \in [h_{top}(\textit{Sing}),\ h_{top}(G))$。则有以下一般性结果:

(1) 对所有 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$，集合 $\mathcal{R}_H := \{\varphi \in C(SM,\mathbb{R})$: $h_\mu(G) \le H$ 在 $C(SM,\mathbb{R})$ 中稠密。 *(2)* 对任意 $\varphi \in C(SM,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{R}_H$ 以及 $SM,\mathbb{R})$ 中 φ 的任意邻域 U，存在 $\psi \in U$，使集合 $\{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\psi)\}$ 包含不可数多个全支撑遍历测度。

此外，设 $\mu \in \mathcal{M}_G^e(SM)$ 满足 $h_\mu(G) > H$。那么，对于包含 μ 的 $\mathcal{M}_G($ $SM)$ 的任意开子集U，存在一个 *Lipschitz* 连续函数φ : $SM \to \mathbb{R}$，使得:

(1) 对任意 $\beta \ge 0$，势函数$\beta\varphi$存在唯一的平衡态，具有弱 *Gibbs* 性质，记为 $\mu_{\beta\varphi}$。*(2)* 映射 $\beta \mapsto \mu_{\beta\varphi} \in \mathcal{M}_G(SM)$ 是连续且单射的。*(3)* 对所有充分大的 $\beta > 0$，我们有 $\mu_{\beta\varphi} \in U$，并且存在$H_0 > H$使得 $\lim_{\beta\to\infty} h_{\mu_{\beta\varphi}}(F) = H_0$。

结合命题 2.22，我们得到

定理 F。 设 M 是一个非正曲率的闭秩一流形，且 $G = \{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$: $SM \to SM$ 是测地流。那么，对于任意 $H \in [h_{top}($奇异集$),\ h_{top}(G))$，集合

$$\mathcal{U}_H := \{\varphi \in C(SM,\mathbb{R}) : h_\mu(G) \le H \textit{ for the unique } \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$$

在 $C(SM,\mathbb{R})$ 中稠密。

我们还研究紧致非正曲率秩一黎曼流形上的标架流。标架流是测地流的群扩张，可视为一种兼具非一致双曲性和部分双曲性的系统。如果流形的曲率满足某种丛状条件，我们也能够得到定理 E 中所述的结果。

定理 G。 设 M 是一个闭的、定向的秩一 n 流形，其具有丛化的非正曲率。假设标架流 $F = \{F^t\}_{t\in\mathbb{R}}$: $FM \to FM$ 是拓扑传递的。设 $H \in [h_{top}($奇异集$)\ h_{top}(G))$。那么以下一般性结果成立:

(1) 对所有 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$，集合 $\mathcal{R}_H := \{\varphi \in C(FM,\mathbb{R})$: $h_\mu(F) \le H$在 $C(FM,\mathbb{R})$ 中稠密。

(2) 对任意 $\varphi \in C(FM,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{R}_H$ 及其在$C(FM,\mathbb{R})$ 中的任意邻域 U，存在 $\psi \in U$，使集合 $\{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\psi)\}$包含不可数多个全支撑遍历测度。

此外，设 $\mu \in \mathcal{M}_F^e(FM)$ 满足 $h_\mu(F) > H$。那么，对于包含 μ 的 $\mathcal{M}_F($ $FM)$ 的任意开子集U，存在一个 ***Lipschitz*** 连续函数$\varphi: FM \to \mathbb{R}$，使得:

(3) 对任意 $\beta \geq 0$，势函数$\beta\varphi$存在唯一的平衡态，记为 $\mu_{\beta\varphi}$。*(4)* 映射 $\beta \mapsto \mu_{\beta\varphi} \in \mathcal{M}_F(FM)$ 连续且为单射。*(5)* 对所有充分大的 $\beta > 0$，都有 $\mu_{\beta\varphi} \in U$，并且存在$H_0 > H$，使得 $\lim_{\beta\to\infty} h_{\mu_{\beta\varphi}}(F) = H_0$。

要将定理 G 的结论推广到具体例子之外，主要障碍在于：除了需要充分控制 Lipschitz 函数沿 $\mathcal{G}$ 的畸变外，还必须保证这类函数的压强能在某个固定尺度上得到反映。一般而言，这并非总是成立的，即使在熵扩张情形下也是如此。与此同时，尽管目前通常并不清楚 [13] 或 [36] 中得到的平衡态是否全支撑，但这些工作的论证为我们提供了与 $\mathcal{G}$ 中轨道段相关的 Bowen 球的下 Gibbs 性质；这进而表明，由于相应几何结构带来的额外动力学性质，定理 4.3 和定理 G (2) 中的那些测度确实是全支撑的。

1.3. **一些历史**。 对于扩张变换，Bousch [3] 证明，典型连续函数的极大化测度是全支撑的。Jenkinson 在 [23] 中介绍了 Bousch 定理在双曲情形下的结论。这不仅与通常的周期优化形成对比，也有悖于直觉。事实上，一个开放问题是，能否构造性地给出一个定义在扩张系统或 Anosov 系统上的连续函数，使其唯一的极大化测度为全支撑测度。Brémont [6] 证明，若动力系统具有如下性质：支撑在周期轨道上的测度在$\mathcal{M}_F(X)$中稠密，且熵映射上半连续，则典型的极大化测度具有零熵。

Morris [27] 结合了 Bousch [3], 、Jenkinson [23] 和 Brémont[6], 的结果，证明对于具有 Bowen 规范性性质的系统和典型连续函数，极大化测度是唯一的、全支撑的且具有零熵。与 Morris 的结果相反，Shinoda [30] 证明，在拓扑混合马尔可夫移位上，存在一个连续函数稠密集，使得对其中的每个函数，都存在不可数多个全支撑的遍历极大化测度，且这些测度具有正熵。Morris 的结果 [27] 与 Shinoda 的结果 [30]在 [31]中得到统一，并推广到包括非马尔可夫移位在内的广泛类别。

尽管已证明连续函数情形下遍历优化具有丰富结构，周期优化的典型性仍可预期

对于更正则的可观测量 [15]。最近，Huang等人 [18] 已针对包括Axiom A吸引子、Anosov微分同胚和一致扩张映射在内的一大类动力系统，以及分别具有Hölder、利普希茨和 C^1 正则性的可观测量，解决了TPO猜想。关于在各种情形下推进TPO猜想之解决的结果，参见 [3, 15,24, 18, 16, 17] 及其中的参考文献。

1.4. 论文的组织结构。 本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾拓扑动力学与热力学形式中的若干基本概念和结果。特别地，我们陈述轨道分解（$\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$）以及 Climenhaga–Thompson 关于平衡态的唯一性的关键热力学结果。连续函数空间中流的极大化测度的通有性质也已得到确立。在第 3 节中，首先给出两条关键引理，分别涉及具有长坏前缀/后缀的轨道片段以及剩余好片段的熵贡献。定理 A 的证明在很大程度上依赖于命题 3.4：其中将规范性应用于精心选取的好轨道段，以构造一个具有低复杂度的紧不变集。定理 D 的证明采用类似的策略。我们构造一个具有所需熵控制的紧致不变子集（见命题 3.6），其余部分则由热力学结果得出。定理 C 的证明结束第 3 节。在第 4 节中，我们将这些结果应用于非正曲率秩一流形上的测地流与标架流。为使内容自洽，关于流的若干结果的技术性证明放在附录中。

2. 预备知识

2.1. 热力学形式主义背景。 设 $F = (f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是紧致度量空间 (X, d) 上的连续流，令 $\mathcal{M}_F(X)$（分别为 $\mathcal{M}_F^e(X)$）表示在 F 作用下 X 上所有不变（分别为遍历）概率测度的集合。给定任意 $t > 0$, t 阶 Bowen度量定义为

$$d_t(x, y) = d_t^F(x, y) := \max_{0\le s\le t} d(f_s x, f_s y), \quad \forall x, y \in X.$$

t 阶 Bowen球是相对于 d_t 的球。具体而言，给定$\varepsilon, t > 0$，以 $x \in X$ 为中心、半径为 ε 的 t 阶 Bowen球定义为

$$B_t(x, \varepsilon) := \{y \in X : d_t(x, y) < \varepsilon\}.$$

集合 $A \subset X$ 称为 (t, ε)-分离的，如果对任意互异的 $x, y \in A$,$d_t(x, y) > \varepsilon$。对于任意 $\varepsilon > 0$，令 $\Lambda_t(X, \varepsilon)$ 表示 X 的最大 (t, ε)- 分离集的基数。拓扑熵可通过分离集基数的指数增长率定义如下，

$$h_{\mathrm{top}}(F) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \Lambda_t(X, \varepsilon).$$

2.1.1. 压强与轨道分解。将 $X \times \mathbb{R}^+$ 记为 (X, F) 的有限轨道段空间。对于任意 $\mathcal{C} \subset X \times \mathbb{R}^+$ 和 $t > 0$，记

$$\mathcal{C}_t := \{x \in X \mid (x, t) \in \mathcal{C}\}.$$

给定一个势函数 $\varphi: X \to \mathbb{R}$ 和时间 $t > 0$，记

$$\Phi(x, t) := \int_0^t \varphi(f_s x) ds.$$

定义 2.1. 给定 $\mathcal{C} \subset X \times \mathbb{R}^+$ 和 $t, \varepsilon > 0$，φ 的（分离）分划函数定义为

$$\Lambda_t(\mathcal{C}, \varphi, \varepsilon) := \sup\Big\{ \sum_{x \in E} e^{\Phi(x,t)} \mid E \subset \mathcal{C}_t \text{ is } (t, \varepsilon)\text{-separated}\Big\}.$$

φ 在尺度 ε 下关于 $\mathcal{C}$ 的压强定义为

$$P(\mathcal{C}, \varphi, \varepsilon) = \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \Lambda_t(\mathcal{C}, \varphi, \varepsilon),$$

那么我们将的压强 $\mathcal{C}$ 上定义为

$$P(\mathcal{C}, \varphi) = \limsup_{\varepsilon \to 0} P(\mathcal{C}, \varphi, \varepsilon).$$

注 2.2. *(1)* 若 $\mathcal{C} = X \times \mathbb{R}^+,$，记作 $P(\varphi, \varepsilon) := P(X \times \mathbb{R}^+, \varphi, \varepsilon)$，并将 φ 的压强定义为 $P(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} P(\varphi, \varepsilon)$。

(2) 当 $\varphi = 0$ 时，我们得到拓扑熵

$$h(\mathcal{C}, \varepsilon) := P(\mathcal{C}, 0, \varepsilon), \quad h(\mathcal{C}) := P(\mathcal{C}, 0), \quad h_{top}(F) := P(0).$$

For any subset $Y \subset X$, we also write $h(Y) := h(Y \times \mathbb{R}^+)$.

由 $P(\mathcal{C}, \varphi)$ 的定义显然可知，$\forall \delta, \varepsilon > 0$，存在某个常数 $C_\delta(\mathcal{C}, \varepsilon) > 0$ 使得

$$\Lambda_t(\mathcal{C}, \varphi, \varepsilon) < C_\delta(\mathcal{C}, \varepsilon) e^{t(P(\mathcal{C}, \varphi) + \delta)}, \quad \forall t > 0. \tag{2.1}$$

本文后续部分将在不同情形下使用这一估计。

定义 2.3. 对于 $\mathcal{D} \subset X \times \mathbb{R}^+$，一个分解 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$ 由三个集合 $\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S} \subset X \times \mathbb{R}^+$ 以及函数 $p, g, s: \mathcal{D} \to \mathbb{R}^+$ 组成，并满足：对于每个$(x, t) \in \mathcal{D}$，记 $p(x, t)$ $g(x, t)$ $s(x, t)$ 分别为 p, g, s，则有 $t = p + g + s$，并且

$$(x, p) \in \mathcal{P}, \qquad (f_p(x), g) \in \mathcal{G}, \qquad (f_{p+g}(x), s) \in \mathcal{S}.$$

默认情况下，我们总是假设 $X \times \{0\}$ 属于所有集合$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$。

如 [13, (2.9)]，所示，由于本文中频繁使用离散化论证，给定 $\mathcal{C} \subset X \times \mathbb{R}^+$，后，我们经常需要处理以下稍大的轨道片段集合

$$[\mathcal{C}] := \{(x, n) \in X \times \mathbb{N} \mid (f_{-s_1}(x), n + s_1 + s_2) \in \mathcal{C} \text{ for some } s_1, s_2 \in [0, 1]\}.$$

在本文中，我们总是假设 $X \times \mathbb{R}^+$ 本身具有一个分解 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$。于是，对于 $X \times \mathbb{R}^+$, 中的每个元素，去掉其

分别对应于 $[\mathcal{P}]$ 和 $[\mathcal{S}]$ 的头部与尾部后，所得余项记为 $\mathcal{G}^1$，其定义如下

$$\mathcal{G}^1 := \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ \mid (f_{s_1}(x), t - s_1 - s_2) \in \mathcal{G} \text{ for some } s_1, s_2 \in [0,1]\}$$

2.1.2. 畸变、规范性与扩张性。设 g 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的正函数，φ 是定义在 X 上的势函数。对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathcal{C} \in X \times \mathbb{R}^+$, , 若对任意 $(x,t) \in \mathcal{C}$，都有

$$|\Phi(x,t) - \Phi(y,t)| \le g(t) \quad \text{for all } y \in B_t(x,\varepsilon).$$

此外，若 g 有上界，则称 φ 在尺度 ε 下于 $\mathcal{C}$ 上满足 *Bowen* 性质。若 φ 在某个尺度下于 $\mathcal{C}$ 上满足 Bowen 性质，我们也称其满足 Bowen 性质。

定义 2.4。设 h 是定义在 $\mathbb{R}^+$ 上的非递减函数，$\eta > 0$ 是一个常数。若对每个 $n \ge 2$ 和$((x_i, t_i))_{i=1}^n \subset \mathcal{C}$，都存在

(1) a sequence $(\tau_i)_{i=1}^{n-1}$ *with* $\tau_i \le \max\{h_\eta^{\mathcal{C}}(t_i), h_\eta^{\mathcal{C}}(t_{i+1})\}$ *for each* i,
(2) a point $y \in X$, *for which we denoted by* $Spec_{(\tau_i)}^{n,\eta}(((x_i,t_i)))$

使得

$$d_{t_i}(f_{\sum_{j=1}^{i-1}(t_j+\tau_j)}(y), x_i) < \eta, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

如果我们可以选取 $h_\eta^{\mathcal{C}}$ 为一个常数 $\tau > 0$，则称 $\mathcal{C}$ 满足弱拼接性质，其间隙为 τ，尺度为 η。我们称 $\mathcal{C}$ 满足弱拼接性质，如果它在每一个尺度 $\eta > 0$上都满足弱拼接性质。

为简化某些条件的表述，全文始终假定间隙函数 $h_\eta^{\mathcal{C}}$ 大于1。

对每个 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$，考虑由下式给出的相应双侧无穷Bowen球

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(f_t(x), f_t(y)) \le \varepsilon \text{ for all } t \in \mathbb{R}\}.$$

$\{\Gamma_\varepsilon(x)\}_{x\in X}$的大小经常用于刻画$(X,F)$的非扩张性。确切地说，本文考虑弱化扩张性的两个版本。第一个称为“熵扩张性”，它涉及 $\Gamma_\varepsilon(x)$的拓扑熵，定义如下。

定义2.5. 给定 $\varepsilon > 0$，我们称(X,F) 在尺度上熵扩张ε，如果对每个 $x \in X$，有 $h(\Gamma_\varepsilon(x)) = 0$。$(X,F)$ 是熵扩张 的，如果它在某个尺度上如此。

第二种定义借助所谓的扩张性障碍，它是扩张性的测度论类比，要求所有熵较大的测度都几乎具有扩张性。给定 $\varepsilon > 0$，令 F 在尺度 ε 下的非扩张点集合为

$$\mathrm{NE}(\varepsilon) := \{x \in X : \Gamma_\varepsilon(x) \not\subseteq f_{[-s,s]}(x) \text{ for any } s > 0\}.$$

在 [13, §2.5] 中引入的下列量刻画了非扩张遍历测度所包含的最大信息量。

定义 2.6. 给定一个势函数 $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ 和 $\varepsilon > 0$，在尺度 ε 下的扩张性障碍压力定义为

$$P^{\perp}_{\exp}(\varphi,\varepsilon) := \sup_{\mu\in\mathcal{M}^{e}_{F}(X)} \Big\{ h_{\mu}(f_1) + \int \varphi d\mu : \mu(NE(\varepsilon)) = 1 \Big\},$$

and

$$P^{\perp}_{\exp}(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} P^{\perp}_{\exp}(\varphi,\varepsilon).$$

当 $\varphi = 0$ 时，我们记作 $h^{\perp}_{\exp} := P^{\perp}_{\exp}(0)$。

注意，若 $\mu \in \mathcal{M}^{e}_{F}(X)$ 满足 $h_{\mu}(f_1) + \int \varphi d\mu > P^{\perp}_{\exp}(\varphi,\varepsilon)$，则 $\mu(\mathrm{NE}(\varepsilon)) = 0$。换言之，$\mu$ 在尺度 ε下是几乎扩张的。特别地，由流的连续性和 X 的紧致性可知，μ 是几乎熵扩张的，这意味着对于 μ-几乎处处的 x，$h(\Gamma_{\varepsilon}(x)) = 0$。显然，当 (X,F) 是熵扩张的时，每个 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$ 都是几乎熵扩张的。

2.1.3. 平衡态的唯一性。我们现在可以陈述 Climenhaga 和 Thompson 在 [13] 中的定理。

定理 2.7。*(*[13, 定理 A]*)* 设 (X, F) 是紧致度量空间上的连续流，且 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 是连续势函数。假设 $P^{\perp}_{\exp}(\varphi) < P(\varphi)$，并且 $X \times \mathbb{R}^{+}$ 存在一个分解$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$，满足以下性质：

(1) $\mathcal{G}$ 具有弱拼接性质；*(2)* φ 在 $\mathcal{G}$ 上具有 *Bowen* 性质；*(3)* $P([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}], \varphi) < P(\varphi)$。

那么 φ 存在唯一平衡态。

注意，当系统存在一个不沿流方向的中性方向时，条件 $P^{\perp}_{\exp}(\varphi) < P(\varphi)$ 通常不成立。为了解决这一问题，并使 Climenhaga–Thompson 的判据仍然适用，受 Pavlov 在 [28][3], 中工作的启发，第二和第三作者 [36] 提出了一个一般性判据，用于刻画具有更精细受控规范性的熵扩张系统的热力学形式。

定理 2.8。*(*[36, 定理 A]*)* 设 (X, F) 是紧致度量空间上的连续流，且 $\varphi : X \to \mathbb{R}$ 是连续势函数。假设存在某个 $\varepsilon > 0$，使得在该处 (X, F) 具有熵扩张性，并且 $X \times \mathbb{R}^{+}$具有一个分解 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$，满足以下条件：

(1) 对于每个 $\eta > 0$，$\mathcal{G}$ 在尺度 η 下满足弱受控规范性，间隙函数为 $h^{\mathcal{G}}_{\eta}$;

[3]这个想法可以追溯到 Climenhaga 在网上发布的一篇数学博客；其网址为 https://vaughnclimenhaga.wordpress.com/2015/06/12/unique-mmes-with-specification-an-alternate-proof/ e

(2) φ 在尺度 ε 下于 $X \times \mathbb{R}^+$ 上是 g-扭曲的（见 [36, §2.2]）；
(3) 对于每个 $\eta > 0$， h_η 和 g 满足 下极限$_{t\to\infty} \frac{h_\eta^{\mathcal{G}}(t)+g(t)\text{对数}}{t} = 0$; *(4)* 极限$_{\eta\to 0} P([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}], \varphi, \eta, \varepsilon) < P(\varphi)$。
则$(X、 F、 \varphi)$ 具有唯一平衡态。

定理 2.9。 *(*[36, 定理 C]*)* 设$(X、 F)$ 是紧致度量空间上的连续流，且 φ：$X \to \mathbb{R}$ 是连续势函数。假设 $P^{\perp}_{\exp}(\varphi) < P(\varphi)$，并且 $X \times \mathbb{R}^+$ 具有一个分解$(\mathcal{P}、 \mathcal{G}、 \mathcal{S})$，满足定理 *2.8* 中的条件 *(1)*、*(3)* 和 *(4)*，以及

$$\varphi \text{ is } g\text{-distorted over } \mathcal{G} \text{ at scale } \varepsilon.$$

则$(X、 F、 \varphi)$ 具有唯一平衡态。

两个定理都是 [36,定理 D] 的直接应用。

定理 2.10。 *(*[36, 定理 D]*)* 设$(X、 F)$ 是紧致度量空间上的连续流，且 φ：$X \to \mathbb{R}$ 是连续势函数。假设存在某个 $\varepsilon > 0$，使得

$$P(\varphi, \eta) = P(\varphi) \text{ for all } \eta \in (0, \varepsilon/2)$$

并且对于每个 $t > 0$、任意满足 $Diam_t(\mathcal{A}_t) < \varepsilon$的有限划分 $\mathcal{A}_t$，以及任意在尺度 ε下几乎熵扩张的$\mu \in \mathcal{M}_F^e(X)$，我们有

$$h_\mu(f_t, \mathcal{A}_t) = h_\mu(f_t).$$

进一步假设存在某个 $\mathcal{D} \subset X \times \mathbb{R}^+$，它具有一个分解$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$，并满足以下条件:
(1) 对每个 $\eta > 0$， $\mathcal{G}$ 在尺度 η下满足弱受控规范性，其间隙函数为 $h_\eta^{\mathcal{G}}$; *(2)* φ 在尺度 ε下于 $\mathcal{G}$ 上是 g-扭曲的; *(3)* 对每个 $\eta > 0$， h_η 和 g满足 $\liminf_{t\to\infty} \frac{h_\eta^{\mathcal{G}}(t)+g(t)\log t}{t} = 0$; *(4)* $\lim_{\eta\to 0} P(\mathcal{D}^c \cup [\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}], \varphi, \eta, \varepsilon) < P(\varphi)$。

(X, F, φ) 具有唯一平衡态。

注 2.11。 如 [36, 注 2.6]，中所述， $\mathcal{G}$ 上的弱受控规范性可以无碍地转移到 $\mathcal{G}^1$ 上。具体而言，当$\mathcal{G}$ 在尺度 η 下满足弱受控规范性，且间隙函数为 $h_\eta^{\mathcal{G}}$时， $\mathcal{G}^1$ 也在尺度 η' 下满足弱受控规范性，其间隙函数为 $h_\eta^{\mathcal{G}}$，其中

$$\eta' := \max\{d(f_s(x), f_s(y)) : d(x, y) \le \eta, s \in [0, 1]\}.$$

特别地， $\mathcal{G}$ 在所有尺度上满足弱受控规范性，等价于 $\mathcal{G}^1$满足弱受控规范性。在这种情况下，由于本文始终在 $\mathcal{G}^1$ 上运用弱受控规范性，我们将把 $\mathcal{G}^1$ 在尺度 η上的间隙函数$h_\eta^{\mathcal{G}^1}$ 简称为 h_η。显然，对于 φ 在 $\mathcal{G}$ 和 $\mathcal{G}^1$上的 *Bowen* 性质，也有类似的等价关系。对此感兴趣的读者可参阅 [36, 注 2。6] ，这里不再赘述，因为这种情形确实更简单。

2.2. **实用的引理**。

引理 *2.12*（双无限规范性）。设 $\mathcal{G}^1$ 在尺度 η 上满足弱受控规范性，其间隙函数为 h_η。那么，对于来自 $\mathcal{G}^1$ 和 $\eta > 0$的轨道段双无限序列 $\{(x_i, t_i)\}_{i=-\infty}^{\infty}$，存在$y \in X$以及一个序列 $\{h_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$，使得 $h_i \in [0, max\{h_\eta(t_i)\ h_\eta(t_{i+1})\}]$，并且满足以下条件：记 $m_0 = 0$、 $m_i := \sum_{j=0}^{i-1}(t_j + h_j)$，以及 $m_{-i} := -\sum_{j=-i}^{-1}(t_j + h_j)$，对所有 $i \in \mathbb{Z}$，必有 $d_{t_i}(x_i, f_{m_i}(y)) \le \eta$。

证明。根据弱控制规范性的定义 2.4 和 X 的紧致性，通过标准的对角线论证，可立即得出该引理。□

以下引理旨在为 $h_{\exp}^{\perp} < h$ 情形下的熵映射提供足够的上半连续性。

引理 2.13。设 $\varepsilon > 0$ 和 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{M}_F(X)$ 中的元素序列，使得

- 每个 μ_n 在尺度 ε 下几乎扩张，且
- $\mu_n \to \mu$ 在弱*拓扑中收敛于 $n \to \infty$。

那么 $\limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(F) \le h_\mu(F)$。

证明。给定任意一个分划 ζ，使得 X 满足 $\mathrm{diam}(\zeta) \le \varepsilon$，其中度量为 d_1，根据 [13, 命题 3.4],，我们有 $h_{\mu_n}(F, \zeta) = h_{\mu_n}(F)$，对所有 n均成立。给定任意$\gamma > 0$，以及任意一个分划 ξ，使得 $\mathrm{diam}(\xi) \le \varepsilon$，其中度量为 d_1，令 $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$\frac{1}{N} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{N-1} f_1^{-j}\xi) < h_\mu(f_1, \xi) + \frac{\gamma}{2}.$$

按照定理 [34, 8.2], 证明中的论证，我们可以构造相应的分划 $\xi' = \xi'(\xi, N)$，使得 $\mathrm{diam}(\xi') \le \varepsilon$ 且$\mu(\partial\xi') = 0$ 满足

$$\limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(F) = \limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(f_1, \xi') < \frac{1}{N} H_\mu(\bigvee_{j=0}^{N-1} f_1^{-j}\xi) + \frac{\gamma}{2} < h_\mu(f_1, \xi) + \gamma,$$

令 $\gamma \to 0$，即可完成该引理的证明。 □

作为直接推论，我们有

推论 2.14。设 $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个满足下列条件的势函数序列

$$P_{\exp}^{\perp}(\varphi_n, \varepsilon) < P(\varphi_n) \text{ for some } \varepsilon > 0.$$

如果 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 分别是对应于 φ_n 的平衡态序列，并且当 $n \to \infty$ 时在弱*拓扑下收敛于某个 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$，那么

$$\limsup_{n\to\infty} h_{\mu_n}(F) \le h_\mu(F).$$

与此同时，我们有

推论 2.15. 如果 $h^{\perp}_{\exp} < h$，对于任意 $H \in (h^{\perp}_{\exp},\ h)$，集合

$$U_h := \{\mu \in \overline{\mathcal{M}^e_F(X)} : h_\mu(F) \in [0, H)\}$$

是 $\mathcal{M}^e_F$（X） 的一个开子集。

证明。 令 $\varepsilon > 0$ 满足 $h^{\perp}_{\exp}(\varepsilon) < H$。只需证明 $\mathcal{M}^e_F(X)\backslash U_h$ 在 $\mathcal{M}^e_F(X)$ 中是闭集。为此，对于 $\mathcal{M}^e_F(X) \backslash U_h$ 中的任意序列 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，若 $\mu_n \to \mu$ 当 $n \to \infty$ 在弱*拓扑下收敛，注意到 $h_{\mu_n}(F) \geq H > h^{\perp}_{\exp}(\varepsilon)$，可知每个 μ_n 在尺度 ε 下几乎扩张。由引理 2.13 可得 $h_\mu(F) \geq H$。显然， $\mu \in \mathcal{M}^e_F(X)$。因此，我们知道 $\mu \in \mathcal{M}^e_F(X) \setminus U_h$，从而得出 U_h 是 $\mathcal{M}^e_F(X)$ 的开集。□

2.3.**平衡态的极限行为**。 对于势函数为 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$的动力系统$(X, F)$，若 $\alpha\varphi$ 存在一个平衡态$\mu_{\alpha\varphi}$，则称$(\mu_{\alpha_n\varphi})_{n\in\mathbb{N}}$在 $\alpha_n \uparrow \infty$ 下的任一弱-*极限为(X, F, φ)的基态 。这种极限行为的名称背后蕴含着丰富的物理直觉。事实上，由于α 通常被解释为温度的倒数，因此使α 趋于无穷的过程可以视为对零温极限的逼近。

以下结果讨论了在我们的情形下基态的熵如何变化。

命题2.16。 设(X, F) 是紧致度量空间上的连续流。设 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$、$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个趋于无穷的序列，且$(\mu_{\alpha_n\varphi})_{n\in\mathbb{N}}$ 是分别对应于$(\alpha_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一列平衡态，并且当 $n \to \infty$时，该序列在弱-*拓扑下收敛到某个 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$。此外，每个$\mu_{\alpha_n\varphi}$ 在某个给定尺度 $\varepsilon > 0$上都是几乎扩张的。那么

(1) $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$; *(2)* $h_\mu(F) = \sup\{h_\nu(F) : \nu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$; *(3)* $\lim_{n\to\infty} h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F) = h_\mu(F)$。

证明。 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，由于 $\mu_{\alpha_n\varphi}$ 是 $\alpha_n\varphi$ 的平衡态，对于任意$\nu \in \mathcal{M}_F(X)$，我们有

$$h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F) + \alpha_n \int \varphi d\mu_{\alpha_n\varphi} \geq h_\nu(F) + \alpha_n \int \varphi d\nu.$$

两边除以 α_n 并令 $n \to \infty$，由于 $\alpha_n \to \infty$ 和 $\mu_{\alpha_n\varphi}$ 收敛到 μ，我们有 $\int \varphi d\mu \geq \int \varphi d\nu$，由 ν 的任意性可得结论 (1)。

为证明 (2)，反设存在某个 $\nu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$，使得 $h_\nu(F) > h_\mu(F)$。由引理 2.13 可知，对于所有充分大的 n， $h_\nu(F) > h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F)$。由于 ν是 φ-极大化的，我们还有$\int \varphi d\nu \geq \int \varphi d\mu_{\alpha_n\varphi}$。 因此，我们有

$$h_\nu(F) + \alpha_n \int \varphi d\nu > h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F) + \alpha_n \int \varphi d\mu_{\alpha_n\varphi}$$

对于所有充分大的 n，这与假设 $\mu_{\alpha_n\varphi}$ 是 $\alpha_n\varphi$的平衡态相矛盾。

最后，为了证明 (3)，注意到根据引理 2.13，我们只需证明

$$\liminf_{n\to\infty} h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F) \geq h_\mu(F). \tag{2.2}$$

注意到，对于所有 n，$h_\mu(F) + \alpha_n \int \varphi d\mu \leq h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F) + \alpha_n \int \varphi d\mu_{\alpha_n\varphi}$，结合 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$ 可得，对于所有 n，$h_\mu(F) \leq h_{\mu_{\alpha_n\varphi}}(F)$。这立即推出 (2.2)。□

引理 2.17。设 $F=(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是紧致度量空间 X 上的连续流，且 $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ 是一个具有唯一平衡态 μ_φ 的势函数。假设 $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $C(X,\mathbb{R})$ 中的一个序列，其中每个都具有唯一平衡态 μ_{φ_n}，使得

- 存在某个 $\varepsilon > 0$，使得每个 μ_{φ_n} 在尺度 ε 上几乎扩张，• $\lim_{n\to\infty} ||\varphi_n - \varphi||_{C^0} = 0$。

那么 $(\mu_{\varphi_n})_n$ 在弱-*拓扑下收敛到μ_φ，当 $n \to \infty$ 时。

证明。令 μ' 为$(\mu_{\varphi_n})_n$的任意一个弱-*极限点。只需证明 μ' 必为 φ的平衡态。为此，令$(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 为$(\mu_{\varphi_n})_n$ 的子序列，它在弱-*拓扑下收敛到 μ'，当 $k \to \infty$ 时。由引理 2.13 可得

$$h_{\mu'}(F) \geq \limsup_{k\to\infty} h_{\mu_{n_k}}(F).$$

同时，我们有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \Big| \int \varphi_{n_k} d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu' \Big| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\Big| \int \varphi_{n_k} d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu_{n_k} \Big| + \Big| \int \varphi d\mu_{n_k} - \int \varphi d\mu' \Big| \Big) = 0.
\end{aligned}$$

因此，我们有

$$h_{\mu'}(F) + \int \varphi d\mu' \geq \limsup_{k\to\infty} (h_{\mu_{n_k}}(F) + \int \varphi_{n_k} d\mu_{n_k}) = \limsup_{k\to\infty} P(\varphi_{n_k}) = P(\varphi),$$

其中，最后一个等式由一般事实 $|P(\psi_1) - P(\psi_2)| \leq ||\psi_1 - \psi_2||_{C^0}$推出。根据我们关于 φ 具有唯一平衡态的假设，可得 $\mu' = \mu_\varphi$。□

2.4. 泛函分析。对于紧致度量空间 X上的连续流 F，式 (1.1) 中定义的最大值泛函 Λ_F 在 $C(X,\mathbb{R})$上是凸且连续的。下面我们回顾一个关于凸泛函的切泛函的逼近定理。

对于范数为 $\|\cdot\|$的巴拿赫空间 V，其对应空间 V^*（即 V 上所有实值有界泛函构成的空间）可通过将每个元素 $\mu \in V^*$ 与一个数相关联而自然地赋予范数

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(f)| : f \in V, \|f\| = 1\}.$$

注意，对于 $\mu,\nu\in V^*$，我们称：

- μ是凸的，如果对于所有 $f,g\in V$， $\mu(tf+(1-t)g)\leq t\mu(f)+(1-t)\mu(g)$；
- μ被 ν有界，如果 $\mu(f)\leq\nu(f)\ \forall f\in V$；• μ 在 ν 处与 $f\in V$相切，如果对于所有 $g\in V$， $\mu(g)\leq\nu(f+g)-\nu(f)$。

定理 2.18。*(*[31, 定理 3。1] [21, 定理 V.1。1]*)* 设 V 是一个巴拿赫空间，且 $\Lambda\in V^*$ 连续且凸。对于任意被 Λ有界的 $\mu_0\in V^*$，以及 $f_0\in V$和 $\varepsilon>0$，存在 $\mu\in V^*$ 和 $f\in V$，使得 μ 在 f 处与 Λ 相切，并且

$$\|\mu-\mu_0\|\leq\varepsilon\,,and\,\|f-f_0\|\leq\frac{1}{\varepsilon}(\Lambda(f_0)-\mu_0(f_0)+s),$$

其中 $s=\sup\{\mu_0(g)-\Lambda(g):\ g\in V\}\leq 0$。

在同胚情形下，以下引理是众所周知的；参见 [6,引理 2.3]。流的情形也采用相同的思路。为方便读者，我们在附录中给出证明。

引理 2.19。设 $F=(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是紧致度量空间 X 上的连续流，并设 $\varphi\in C(X,\mathbb{R})$。那么 $\mu\in C(X,\mathbb{R})^*$ 在 φ 处与 Λ_F 相切，当且仅当 $\mu\in\mathcal{M}_F(X)$ 且是 φ-极大的。

遍历分解定理指出，对于每个 $\mu\in\mathcal{M}_F(X)$，都有 $\mu=\int_{\mathcal{M}_F^e(X)}\nu db_\mu(\nu)$，其中 b_μ是 $\mathcal{M}_F^e(X)$ 上的博雷尔概率测度。下一个引理断言重心映射 $\mu\mapsto b_\mu$ 是等距的。

引理 2.20。*(*[21, 推论 IV.4。2]*)* 设 F 是紧致度量空间 X上的连续流。对于任意 $\mu,\nu\in\mathcal{M}_F(X)$，有

$$\|b_\mu-b_\nu\|=\|\mu-\nu\|.$$

不难将 [31, 引理 3.3]推广到流的情形。我们仅引用下面的引理，并省略证明。

引理 2.21。*(*[31, 引理 3。3]*)* 设 F 是紧致度量空间 X上的连续流，μ 是不变概率测度，b_μ 如上定义。我们有

•若存在常数 $C\geq 0$ 使得 $h(\nu)\leq C$ 对所有 $v\in supp(b_\mu)$均成立，则 $h(\mu)\leq C$；• 若 $\mu\in\mathcal{M}_{max}(\varphi)$，则 $supp(b_\mu)$ 包含于 $\mathcal{M}_{max}(\varphi)$。

2.5. 流的一些一般性结果。我们还需要两个一般性结果 [15, 定理 1.1] 和 [27, 定理 1.1]的流版本。证明见附录。

命题 2.22。（参见 [15, 定理 1。1]）设 (X,F) 是紧致度量空间上的连续流，且 E 是稠密且连续嵌入于 $C(X,\mathbb{R})$中的拓扑向量空间。记

$$U(E):=\{\varphi\in E:\,there\ is\ a\ unique\ \varphi\text{-}maximizing\ measure\}.$$

那么 $U(E)$ 是 E 中可数个开稠密集的交。若进一步 E 是贝尔空间，则 $U(E)$ 在 E 中稠密。

命题 2.23。 （参见 [27, 定理 1。1]）设 (X, F) 是在紧致度量空间上的连续流。假设 $\mathcal{U}$ 是$\mathcal{M}_F^e(X)$的一个开稠密子集。那么该集合

$$U := \{\varphi \in C(X, \mathbb{R}) : \overline{\mathcal{M}_F^e(X)} \cap \mathcal{M}_{\max}(\varphi) \subset \mathcal{U}\}$$

在 C（$X, \mathbb{R}$） 中开且稠密。

反之，若 $U \subset C$（$X, \mathbb{R}$） 开且稠密，则集合

$$\mathcal{U} := \mathcal{M}_F^e(X) \cap \bigcup_{\varphi \in U} \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$$

在 $\mathcal{M}_F^e$（X） 中开且稠密。

3. 定理 A、C 和 D 的证明

本节致力于证明定理 A、C 和 D。我们首先在 §3.1 中介绍一些一般性的初始设置，这些设置为定理 A 和 D 的证明所共有，其主要策略与[31, 命题 24]相似。然后，我们分别在 §3.2 和 §3.3 中证明定理 A 和 D。最后在 §3.4 中，我们应用 §2.4 中的泛函工具以及定理 D，证明定理 C。

3.1. 一般设定。 假设我们处于定理 A 的设定中。已知 (X, F) 满足类型为 (E1) 或 (E2) 的非一致扩张性，此处暂不指定具体类型；若两种类型的论证存在差异，我们将在相应之处加以说明。

对于任意常数 $H_0^\perp \in (H^\perp, h)$、 $\delta_0 > 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mu \in \mathcal{M}_F^e(X)$ 满足 $h_\mu(F) > H_0^\perp$，并令 $U \subset \mathcal{M}_F(X)$ 为

$$U := \left\{\nu \in \mathcal{M}_F(X) : \left| \int g_i d\mu - \int g_i d\nu \right| < 3\delta_0 \text{ for all } i \in \{1, \cdots, n\}\right\} \tag{3.1}$$

其中 $(g_i)_{i=1}^\infty$ 构成 $C(X, \mathbb{R})$ 的一组基。令 $g_{\max} := \max_{1 \le i \le n} \|g_i\|_{C^0}$，并令$\eta_g$ 为满足下式的常数

$$\sup\{|g_i(x) - g_i(y)| : x, y \in X, d(x, y) < \eta_g, 1 \le i \le n\} < \delta_0/8.$$

对于 μ-几乎处处的 $x \in X$，由无不动点流的 Brin-Katok 局部熵公式[25]和伯克霍夫遍历定理可得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{t \to \infty} -\frac{1}{t} \log \mu(B_t(x, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{t \to \infty} -\frac{1}{t} \log \mu(B_t(x, \varepsilon)) = h_\mu(F)$$

and

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t g_i(f_s(x)) ds = \int g_i d\mu, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

令 $h_0 := h_\mu(F) - H_0^\perp$，并固定一个正的常数

$$\eta_0 \in (0, \min\{h_0/24, \delta_0 h_0/48 g_{\max}\}). \tag{3.2}$$

对于 μ-几乎处处的 x，令 $\varepsilon(x) > 0$ 满足

$$h_\mu(F) + \frac{\eta_0}{2} > \limsup_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log\mu(\overline{B_t(x,\varepsilon)}) > \liminf_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log\mu(B_t(x,\varepsilon)) > h_\mu(F) - \frac{\eta_0}{2}$$

对所有 $0 < \varepsilon < \varepsilon(x)$。记 $X(\varepsilon) := \{x \in X : \varepsilon(x) > \varepsilon\}$ 对所有 $\varepsilon > 0$，取足够小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\mu(X(\varepsilon_0)) > 1/2. \tag{3.3}$$

那么对于每个 $x \in X(\varepsilon_0)$，令 $N(x) \in \mathbb{N}$ 为满足下列条件的最小整数

$$-h_\mu(F) - \eta_0 < \frac{1}{t}\log\mu(B_t(x,\varepsilon_0/4)) \le \frac{1}{t}\log\mu(\overline{B_t(x,\varepsilon_0)}) < -h_\mu(F) + \eta_0$$

and

$$\max_{1\le i\le n}\left\{\left|\frac{1}{t}\int_0^t g_i(f_s(x))ds - \int g_i d\mu\right|\right\} < \delta_0 \tag{3.4}$$

对所有 $t \ge N(x)$。对于每个 $N \in \mathbb{N}$，令 $X_N := \{x \in X(\varepsilon_0) : N(x) \le N\}$。由 (3.3) 和伯克霍夫遍历定理可知，存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $\mu(X_N) > 1/2$。在本文余下部分，我们固定这样的 N。

对于任意 $\varepsilon > 0$，令 $\Lambda_t(X_N,\varepsilon)$ 为 X_N 的极大 (t,ε)-分离集的基数。令 $t > N$。给定 X_N 的任意极大 $(t,\varepsilon_0/2)$-分离集 $E_{t,\varepsilon_0/2}$，显然，$\{B_t(x,\varepsilon_0/4) : x \in E_{t,\varepsilon_0/2}\}$ 中的元素两两不交，$\bigcup_{x\in E_{t,\varepsilon_0/2}} B_t(x,\varepsilon_0/4) \subset X$，且 $\mu(B_t(x,\varepsilon_0/4)) \ge e^{-t(h_\mu(F)+\eta_0)}$。

因此，我们有

$$\#E_{t,\varepsilon_0/2} \le e^{t(h_\mu(F)+\eta_0)}. \tag{3.5}$$

同时，对任意极大（t,ε_0）-分离集 E_{t,ε_0} 对 X_N，我们有 $X_N \subset \bigcup_{x\in E_{t,\varepsilon_0}} \overline{B_t(x,\varepsilon_0)}$ 与 $\mu(\overline{B_t(x,\varepsilon_0)}) \le e^{-t(h_\mu(F)-\eta_0)}$，这意味着

$$\#E_{t,\varepsilon_0} \ge \mu(X_N)e^{t(h_\mu(F)-\eta_0)}. \tag{3.6}$$

设 $X_{N,k} := X_N \times \{k\}$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$。对任意 $a,b \in \mathbb{N}$ 满足 $0 \le a+b \le k$，设

$$X_{N,k}(a,b) := \{x \in X_N : \lfloor p(x,k)\rfloor = a, \lfloor s(x,k)\rfloor = b\}$$

and

$$X_{N,k}(a,\cdot) := \bigcup_{b=0}^{k-a} X_{N,k}(a,b), \quad X_{N,k}(\cdot,b) := \bigcup_{a=0}^{k-b} X_{N,k}(a,b).$$

我们记作 $\Lambda^{a}_{\cdot,k}{}^{b} := \Lambda_k(X_{N,k}(a,b),\varepsilon_0)$。类似地，我们分别通过 $X_{N,k}(a,\cdot)$ 和 $X_{N,k}(\cdot,b)$ 定义 $\Lambda^{a}_{\cdot,k}$ 和 $\Lambda^{\cdot}_{\cdot,k}{}^{b}$。下一个结果表明，前缀或后缀占比较大的轨道段对于熵而言并非本质。

引理 3.1. 存在 $C(h_0) > 0$ 以及一个整数 $N_1 \geq N$，使得对于所有 $k \geq N_1$，都有

$$\max\Big\{\sum_{a\geq 6\eta_0 k/h_0} \Lambda_k^{a,\cdot}, \sum_{b\geq 6\eta_0 k/h_0} \Lambda_k^{\cdot,b}\Big\} \leq C(h_0)e^{k(h_\mu(F)-3\eta_0)}.$$

证明。我们首先处理 $\sum_{a\geq 6\eta_0 k/h_0} \Lambda_k^{a,\cdot}$。对于每个整数 $a \in [6\eta_0 k/h_0, k]$，令 $E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot)$ 为 $X_{N,k}(a,\cdot)$ 的极大 (k,ε_0)-分离集，并且

$$E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2} \subset X \text{ a maximally } (a,\varepsilon_0/2)\text{-separated set for } X_N \cap [\mathcal{P}]_a. \tag{3.7}$$

对于每个 $x \in E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot)$，存在 $x^{\mathcal{P}} \in E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}$ 使得 $x \in B_a(x^{\mathcal{P}},\varepsilon_0/2)$。给定 $x^{\mathcal{P}} \in E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}$，我们将这类 $x \in E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot)$ 的集合记为 $E_{k,\varepsilon_0,a}(x^{\mathcal{P}})$。显然，$E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot) = \bigcup_{x^{\mathcal{P}}\in E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}} E_{k,\varepsilon_0,a}(x^{\mathcal{P}})$，并且

$$\bigcup_{x\in E_{k,\varepsilon_0,a}(x^{\mathcal{P}})} B_k(x,\varepsilon_0/2) \subset B_a(x^{\mathcal{P}},\varepsilon_0). \tag{3.8}$$

由于 $x^{\mathcal{P}} \in X_N$，当 $k > Nh_0/6\eta_0$ 时，我们有 $a > N$，因此 $\mu(B_a(x^{\mathcal{P}},\varepsilon_0)) \leq e^{-a(h_\mu(F)-\eta_0)}$。另一方面，由 $E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot) \subset X_N$，所以对每个 $x \in E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot)$，我们也有 $\mu(B_k(x,\varepsilon_0/2)) > e^{-k(h_\mu(F)+\eta_0)}$。由于 $\{B_k(x,\varepsilon_0/2)$ 中的元素：$x \in E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot)\}$ 两两不相交，由 (3.8) 可知，对每个 $x^{\mathcal{P}} \in E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}$，

$$\#E_{k,\varepsilon_0,a}(x^{\mathcal{P}}) \leq e^{-a(h_\mu(F)-\eta_0)+k(h_\mu(F)+\eta_0)} < e^{(k-a)h_\mu(F)+2k\eta_0}. \tag{3.9}$$

令 $N_{\eta_0} > N$ 为一个整数，使得对所有 $t > N_{\eta_0}$，$\Lambda_t([\mathcal{P}]\cup[\mathcal{S}],\varepsilon_0/2) < e^{t(H^\perp+\eta_0)}$。记 $N_1 := \lceil h_0 N_\eta/6\eta_0\rceil$，对于 $k > N_1$，显然对所有 $a \geq 6\eta_0 k/h_0$，我们也有 $\#E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2} \leq e^{a(H^\perp+\eta_0)}$。结合 (3.9)，得到

$$\#E_{k,\varepsilon_0}(a,\cdot) \leq \#E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}\Big(\max_{x^{\mathcal{P}}\in E^{\mathcal{P}}_{a,\varepsilon_0/2}} \{\#E_{k,\varepsilon_0,a}(x^{\mathcal{P}})\}\Big) < e^{-ah_0+kh_\mu(F)+3k\eta_0}.$$

将 $a \in [6\eta_0 k/h_0, k]$ 相加并应用 $\eta_0 < h_0/7$，我们得到

$$\sum_{a\geq 6\eta_0 k/h_0} \Lambda_k^{a,\cdot} < (1-e^{h_0})^{-1} e^{k(h_\mu(F)-3\eta_0)}. \tag{3.10}$$

现在我们转向 $\sum_{b\geq 6\eta_0 k/h_0} \Lambda_k^{\cdot,b}$。与上文一样，对于每个整数 $b \in [6\eta_0 k/h_0, k]$，令 $E_{k,\varepsilon_0}(\cdot,b)$ 为 $X_{N,k}(\cdot,b)$ 的一个极大 (k,ε_0)-分离集，并

$$E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2} \subset X \text{ a maximally } (b,\varepsilon_0/2)\text{-separated set for } [\mathcal{S}]_b. \tag{3.11}$$

对于任意 $b \in [6\eta_0 k/h_0, k-N]$，对每个 $x \in E_{k,\varepsilon_0}(\cdot,b)$，都存在 $x^{\mathcal{S}} \in E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}$，使得 $f_{k-b}(x) \in B_b(x^{\mathcal{S}},\varepsilon_0/2)$。同样，对于每个 $x^{\mathcal{S}} \in E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}$，将这类 x 的集合记为 $E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}})$。显然，$E_{k,\varepsilon_0}(\cdot,b) =$

$\bigcup_{x^{\mathcal{S}}\in E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}} E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}})$，且 $E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}})$ 对每个 $x^{\mathcal{S}}$ 都是 $(k-b,\ \varepsilon_0)$-分离的。因此，由 (3.5) 以及在 b 上的选择可得

$$\#E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}}) \le e^{(k-b)(h_\mu(F)+\eta_0)},\quad \forall b\in[6\eta_0 k/h_0, k-N]. \tag{3.12}$$

同时，对于任意 $b>k-N$，当 $k-b<N$ 时，存在一个常数 $C_N>0$，使得

$$\#E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}}) < C_N,\quad \forall b\in[k-N,k]. \tag{3.13}$$

由于对于所有满足 $k>N_1$ 的 $b\ge 6\eta_0 k/h_0$，$\#E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}\le e^{b(H^\perp+\eta_0)}$，由 (3.12) 可得

(3.14)

$$\#E_{k,\varepsilon_0}(\cdot,b)\le \#E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}\max_{x^{\mathcal{S}}\in E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}}\{\#E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}})\}\le e^{-b(h_\mu(F)-H^\perp)+kh_\mu(F)}$$

对于所有 $b\in[6\eta_0 k/h_0, k-N]$，并且由 (3.13)

$$\#E_{k,\varepsilon_0}(\cdot,b)\le \#E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}\max_{x^{\mathcal{S}}\in E^{\mathcal{S}}_{b,\varepsilon_0/2}}\{\#E^b_{k,\varepsilon_0}(x^{\mathcal{S}})\}< C_N e^{kH^\perp+k\eta_0} \tag{3.15}$$

对于所有 $b\in(k-N,\ k]$。将 (3.14) 对 $b\in[6\eta_0 k/h_0, k-N]$ 求和，并将 (3.15) 对 $b\in(k-N,\ k]$ 求和，由 $\eta_0<h_0/7$ 可得

$$\sum_{b\ge 6\eta_0 k/h_0}\Lambda^{\cdot,b}_k < (1-e^{h_0})^{-1}e^{k(h_\mu(F)-6\eta_0)}+NC_N e^{k(h_\mu(F)-6\eta_0)}. \tag{3.16}$$

结合 (3.10) 和 (3.16)，即可得出该引理。 □

将 $E_k^{\le 6\eta_0 k/h_0},\varepsilon_0$ 写作以下集合的一个极大 (k,ε_0)-分离集：

$$\{x\in X_N:\max\{\lfloor p(x,k)\rfloor,\lfloor s(x,k)\rfloor\}\le 6\eta_0 k/h_0\}.$$

由 (3.6) 和引理 3.1 可立即推出，必要时增大 N_1，则对每个 $k>N_1$，都有

$$\#E^{\le 6\eta_0 k/h_0}_{k,\varepsilon_0}>\frac{\mu(X_N)}{2}e^{k(h_\mu(F)-\eta_0)},$$

这意味着存在整数 $a_k,b_k\in[0,6\eta_0 k/h_0]$，使得

$$\Lambda_k(X_{N,k}(a_k,b_k),\varepsilon_0)>\frac{\mu(X_N)}{2(6\eta_0 k/h_0+1)^2}e^{k(h_\mu(F)-\eta_0)}. \tag{3.17}$$

令 $\widetilde{X}^{\mathcal{G}}_{N,k}(a,b):=\{(f_a(x),\ k-a-b):x\in X_{N,k}(a,b)\}$. 注意到 $\widetilde{X}^{\mathcal{G}}_{N,k}(a,b)\subset\mathcal{G}^1$。有时我们将 $\widetilde{X}^{\mathcal{G}}_{N,k}(a_k,b_k)$ 简写为 $\widetilde{X}^{\mathcal{G}}_{N,k}$，对所有 $k>N_1$ 均如此。注意，$\widetilde{X}^{\mathcal{G}}_{N,k}$ 中的元素长度均为 $c_k:=k-a_k-b_k$；根据对 a_k,b_k 和 $\eta_0<h_0/24$ 的选择（见 (3.2)），这满足 $c_k>k/2$，因此非空。此外，结合 $H^\perp<h_\mu(F)$、对 η_0的选择以及 (3.17)，可得

引理 3.2。 存在一个整数 $N_2 > N_1$，使得对所有 $k > N_2$，我们都有

$$\Lambda_{c_k}(\widetilde{X^{\mathcal{G}}_{N,k}(a_k,b_k)},\varepsilon_0) > \frac{1}{2}e^{c_k(h_\mu(F)-2\eta_0)}.$$

证明。 回顾 (3.7) 和 (3.11) 中 $E^{\mathcal{P}}_{a_k,\varepsilon_0/2}, E^{\mathcal{S}}_{b_k,\varepsilon_0/2}$ 的定义。由 (2.1)，存在 $C_{\eta_0} = C_{\eta_0}([\mathcal{P}]\cup[\mathcal{S}],\varepsilon_0/2)$，使得

$$\#E^{\mathcal{P}}_{a_k,\varepsilon_0/2} < C_{\eta_0}e^{a_k(H^\perp+\eta_0)}, \quad \#E^{\mathcal{S}}_{b_k,\varepsilon_0/2} < C_{\eta_0}e^{b_k(H^\perp+\eta_0)}, \quad \forall k \geq N_1.$$

注意到 (3.17) 使我们可以选取一个 (k,ε_0)-分离集 $E_{k,\varepsilon_0} \subset X_{N,k}(a_k,b_k)$，使得 $\#E_{k,\varepsilon_0} > \frac{\mu(X_N)}{2}(6\eta_0 k/h_0+1)^2 e^{k(h_\mu(F)-\eta_0)}$。~~对于每个~~ $,\varepsilon_0$，存在唯一的 $(x',x'') \in E^{\mathcal{P}}_{a_k,\varepsilon_0/2}\times E^{\mathcal{S}}_{b_k,\varepsilon_0/2}$，使得

$$\max\{d_{a_k}(x',x), d_{b_k}(x'',f_{k-b_k}(x))\} < \varepsilon_0/2.$$

对于每一对 $(x',x'') \in E^{\mathcal{P}}_{a_k,\varepsilon_0/2}\times E^{\mathcal{S}}_{b_k,\varepsilon_0/2}$，令

$$E_{k,\varepsilon_0}(x',x'') := \{x \in E_{k,\varepsilon_0} : x'(x) = x', x''(x) = x''\}.$$

根据定义可立即得出，对于每个 (x',x'')，$f^{a_k}E_{k,\varepsilon_0}(x',x'')$ 是 (c_k,ε_0)-分离的。因此，根据我们在 (3.2) 中对 η_0 的选择，由抽屉原理和 (3.17) 可得

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{c_k}(\widetilde{X^{\mathcal{G}}_{N,k}(a_k,b_k)},\varepsilon_0) \geq (\#E^{\mathcal{P}}_{a_k,\varepsilon_0/2}\#E^{\mathcal{S}}_{a_k,\varepsilon_0/2})^{-1}\#E_{k,\varepsilon_0}\\
>&(2C^2_{\eta_0}(6\eta_0 k/h_0+1)^2)^{-1}\mu(X_N)e^{k(h_\mu(F)-\eta_0)-(a_k+b_k)(H^\perp+\eta_0)}\\
=&((2C^2_{\eta_0}(6\eta_0 k/h_0+1)^2)^{-1}e^{(a_k+b_k)(h_0-2\eta_0)})\mu(X_N)e^{c_k(h_\mu(F)-\eta_0)}\\
>&\mu(X_N)e^{c_k(h_\mu(F)-2\eta_0)} > \frac{1}{2}e^{c_k(h_\mu(F)-2\eta_0)}.
\end{aligned}$$

只要 k 大于某个常数，倒数第二个不等式就成立；最后一个不等式则由我们对 N 的选择得出。至此，引理的证明完成。□

注 3.3. 到目前为止，只要 $h_\mu(F) > h([\mathcal{P}]\cup[\mathcal{S}])$，所有结论都成立。对于类型为 (E2) 的 (X,F)，要求 $h_\mu(F) > h^\perp_{\exp}$ 的必要性将在 §3.2 中显现。

最后，我们对从$X^{\mathcal{G}}_{N,k}$出发的每个 g_i 沿轨道~~片段上的平均值作一条观察。根据我们对 η_0的选择，对于任意的 $k > N_2$, $i \in \{1,\dots,n\}$ 和~~ $x \in X^{\mathcal{G}}_{N,k}(a_k,b_k)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{k}\int_0^k g_i(f_{s-a_k}(x))ds - \frac{1}{c_k}\int_0^{c_k} g_i(f_s(x))ds\Big|\\
\leq&\Big|\frac{k-c_k}{k}\frac{\int_0^{c_k} g_i(f_s(x))ds}{c_k}\Big| + \Big|\frac{1}{k}\Big(\int_{-a_k}^0 + \int_{c_k}^k\Big)g_i(f_s(x))ds\Big|\\
\leq&\frac{2(a_k+b_k)g_{\max}}{k} \leq \frac{24\eta_0 g_{\max}}{h_0} < \frac{\delta_0}{2},
\end{aligned} \tag{3.18}$$

其中，最后一个不等式仍由我们根据(3.2)对 η_0 的选择得出。结合(3.4)和(3.18)，立即可得

$$\max_{1\le i\le n}\Big\{\Big|\frac{1}{c_k}\int_0^{c_k} g_i(f_s(x))ds-\int g_i d\mu\Big|\Big\}<3\delta_0/2. \tag{3.19}$$

3.2. 定理 A 的证明。定理 A 的证明策略与 [31, 定理 A(a)] 类似，旨在说明对每个 $H\in[H^\perp,h)$，以下测度集合

$$O_n:=\Big\{\mu\in\overline{\mathcal{M}_F^e(X)}:h_\mu(F)<H+\frac{1}{n}\Big\}$$

对每个 n 都是开且稠密的，由命题 2.23 可得所需结果。对于每个 n，当 (X,F) 为 (E1) 型时，这类 O_n 是开集是众所周知的，因为在熵扩张情形下，熵映射 $\mu\mapsto h_\mu(F)$ 是上半连续的；而当 (X,F) 为 (E2) 型时，这一结论则是推论 2.15 的推论。因此，定理 A 证明的主要部分在于证明这类 O_n 的稠密性。事实上，这一稠密性结果可直接由以下结果推出，其证明将在本节余下部分给出。回顾 (3.1) 中关于 U 的定义。

命题 3.4。对于任意 $H_0^\perp\in(H^\perp,h)$，存在某个 $\nu\in U$ 使得$h_\nu(F)\le H_0^\perp$。

证明。固定陈述中任意一个 $H_0^\perp$。除了从 (3.3) 中选取 ε_0 外，我们还假设

$$\begin{aligned}&(X,F)\text{ 在尺度 }\varepsilon_0\text{ 下是熵扩张的，当它属于类型 (E1) 时，}\\&\text{and } h^\perp_{\exp}(\varepsilon_0)<H_0^\perp \text{ when it is of type (E2).}\end{aligned} \tag{3.20}$$

回忆注 2.11 中的记号：h_η 表示 $\mathcal{G}^1$ 在尺度 η 下的间隙函数。固定 $\eta<\min\{\varepsilon_0/8,\eta_g\}$，并取一个满足 $c_k>\log k$, $h_\eta(k)/\log k<\delta_0/32g_{\max}$ 的充分大的整数 $k>N_2$，以及证明末尾出现的一个附加条件（只要 k 足够大，该条件就会满足）。特别地，我们有

$$h_\eta(c_k)/c_k<h_\eta(k)/\log k<\delta_0/32g_{\max}. \tag{3.21}$$

取 $(x_0,c_k)\in X^{\mathcal{G}}_{N,k}$，其存在性由引理 3.2 保证。[4] 由于 $(x_0,c_k)\in\mathcal{G}^1$，将引理 2.12 应用于尺度 η 下由相同轨道段 (x_0,c_k) 构成的双无限序列，可得到 $y_0\in X$ 和一个过渡时间序列 $(h_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，使得 $d_{c_k}(x_0,f_{m_i}(y_0))\le\eta$，其中

$$m_0=0,\quad m_i:=ic_k+\sum_{j=0}^{i-1}h_j,\quad m_{-i}:=-ic_k-\sum_{j=-i}^{-1}h_j,\quad\forall i\in\mathbb{N}. \tag{3.22}$$

令 $Y_0:=\overline{\{f_t(y_0):\,t\in\mathbb{R}\}}$。

[4]我们不需要 §3.2 中的引理 3.2 所给出的下界，因为我们只需要一段具有足够大的 k的轨道段。该引理的全部作用将在 §3.3中展现。

我们首先证明，支撑在 Y_0 上的每个遍历测度都属于 U。为此，任取 $y \in Y_0$ 和 $s > 0$，根据我们对 Y_0 的定义，必定存在某个$t = t(s,\ y) \in \mathbb{R}$，使得 $d_s(y,\ f_t(y_0)) < \eta < \eta_g$。令 $i_1 = i_1(t) \in \mathbb{Z}$ 满足 $t \in [m_{i_1-1}, m_{i_1})$，并令 $i_2 = i_2(t) \in \mathbb{Z}$ 满足 $t + s \in [m_{i_2}, m_{i_2+1})$。记 $G_i^{c_k}(x) := \int_0^{c_k} g_i(f_u(x))du$，对所有 $x \in X$ 和 $i \in \{1,\ .....n\}$，只要 $i_2 - i_1 > 16\delta_0/g_{\max}$，由 (3.19) 和 (3.21) 可得 (3.23)

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_t^{t+s} g_i(f_u(y_0))du - s\int g_i d\mu\Big| \\
=&\Big|\Big(\int_t^{m_{i_1}} + \sum_{l=i_1}^{i_2-1}\big(\int_{m_l}^{m_l+c_k} + \int_{m_l+c_k}^{m_l+c_k+h_l}\big) + \int_{m_{i_2}}^{t+s}\Big) g_i(f_u(y_0))du - s\int g_i d\mu\Big| \\
\le&\Big|\sum_{l=i_1}^{i_2-1}\int_{m_l}^{m_l+c_k} g_i(f_u(y_0))du - (i_2-i_1)c_k\int g_i d\mu\Big| \\
&+ (2(i_2-i_1)h_\eta(c_k) + 4c_k + 4h_\eta(c_k))g_{\max} \\
\le&\Big|(i_2-i_1)G_i^{c_k}(x_0) - (i_2-i_1)c_k\int g_i d\mu\Big| + (i_2-i_1)\mathrm{Var}_{c_k}(g_i,\eta) \\
&+ 2((i_2-i_1)h_\eta(c_k) + 2c_k + 2h_\eta(c_k))g_{\max} \\
<&3(i_2-i_1)c_k\delta_0/2 + (i_2-i_1)c_k\delta_0/8 + 4g_{\max}(i_2-i_1)c_k(h_\eta(c_k)/c_k + 1/(i_2-i_1)) \\
<&(i_2-i_1)c_k(3\delta_0/2 + \delta_0/8 + \delta_0/8 + \delta_0/4) \le 2\delta_0 s.
\end{aligned}
$$

注意，只要 $s > (3 + 16\delta_0/g_{\max})(h_\eta(c_k) + c_k)$，就必有$i_2 - i_1 > 16\delta_0/g_{\max}$。因此，对所有这样的 s，我们有 (3.24)

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_0^s g_i(f_u(y))du - s\int g_i d\mu\Big| \\
\le&\Big|\int_0^s g_i(f_u(y))du - \int_t^{t+s} g_i(f_u(y_0))du\Big| + \Big|\int_t^{t+s} g_i(f_u(y_0))du - s\int g_i d\mu\Big| \\
<&\delta_0 s/8 + 2\delta_0 s < 3\delta_0 s,
\end{aligned}
$$

这意味着，由对 $y \in Y_0$ 的任意选取以及伯克霍夫遍历定理，每一个支撑在 Y_0 上的遍历测度都属于 U。这一事实借助变分原理，将命题 3.4 的证明归结为如下断言：

断言： $h(Y_0) \le H_0^\perp$.

我们用反证法证明上述断言。假设$h(Y_0) > H_0^\perp$。根据我们对 ε_0 的附加假设 (3.20)，分别由 [13,命题 3.7] 与 [36, 命题 2.7] 可得

$$
h(Y_0, \varepsilon_0/2) = h(Y_0) > H_0^\perp. \tag{3.25}
$$

设 $I := \{m_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$，其中 m_i 如 (3.22) 中所述。对每个 $t \in \mathbb{R}$，令 $t_0 = t_0(t) \in [0, c_k + h_\eta(c_k)]$ 为使 $t + t_0 \in I$ 成立的最小非负数，然后对每个满足 $t + t_0 = m_n$ 的 $i \in \mathbb{N}$，令 $s_i := \sum_{l=0}^{i} h_{n+l}$，且 $s_{-1} := 0$。

因此，每个 $t \in \mathbb{R}$ 都与 $\{t_0, \{s_i\}_{i\in\mathbb{N}}\}$ 相关联。由 X 的紧致性与流的连续性，存在某个常数 $\beta \in (0,1)$，使得

$$\max_{x\in X, t\in[-\beta,\beta]} d(x, f_t(x)) \ll \varepsilon_0/8. \tag{3.26}$$

如有必要，缩小 β 后，我们总可以假设

$$h_{\eta,\beta} := h_\eta(c_k)/\beta \in \mathbb{N} \tag{3.27}$$

Let

$$I_m := [m\beta, (m+1)\beta) \quad \text{for each } m \in \mathbb{N}. \tag{3.28}$$

固定一个 $T > 2(c_k + h_\eta(c_k))$。对于任意 $t \in \mathbb{R}$，令 $k_T = k_T(t) \in \mathbb{N}$ 满足

$$s_{k_T-1} + k_T c_k \le T - t_0 < s_{k_T} + (k_T+1)c_k. \tag{3.29}$$

令 $\mathbb{N}_{k,T} := [\lfloor \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} \rfloor - 1, \lceil \frac{T}{c_k} \rceil] \cap \mathbb{N}$，显然

$$k_T \in \mathbb{N}_{k,T}, \text{ and } \#\mathbb{N}_{k,T} \le \frac{T}{c_k} - \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} + 4. \tag{3.30}$$

对于任意 $m \in \mathbb{N}_{k,T}$，令 $K_m := \{t \in \mathbb{R} : k_T(t) = m\}$。对于每个 $t \in K_m$，令 $I_m(t) := \{i_0, j_0, \ldots, j_m\} \in \mathbb{N}^{m+2}$，其中

- i_0 满足 $t_0 \in I_{i_0}$；
- $\{j_i\}_{i=0}^m$ 满足对于所有 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$，有 $t_0 + s_i \in I_{j_i}$。

我们还记作 $j_{-1} := i_0$。将所有可能的 $\{I_m(t) : t \in K_m\}$ 的集合记为 R_m。由于 $j_l - j_{l-1} \in [0, h_{\eta,\beta}]$，记作 $c_{k,\beta} := \lceil c_k/\beta \rceil$，我们有

$$\#R_m \le (c_{k,\beta} + h_{\eta,\beta})(h_{\eta,\beta})^{m+1}. \tag{3.31}$$

给定任意这样的 $\vec{r}_m := \{i_0, j_0, \ldots, j_m\} \in R_m$，令

$$T_m = T_m(\vec{r}_m) := \{t \in K_m : I_m(t) = \vec{r}_m\},$$
$$Y_m = Y_m(\vec{r}_m) := \{f_t(y_0) : t \in T_m(\vec{r}_m)\}.$$

我们先计算任意给定的 $\vec{r}_m$所对应的 $\Lambda_T(Y_m, \varepsilon_0/2)$。注意，对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$，都有 $s_i - s_{i-1} \in [(j_i - j_{i-1} - 1)\beta, (j_i - j_{i-1} + 1)\beta]$。令

- 令 $J_0^{i_0}$ 为 X 的一个极大 $(i_0\beta, \varepsilon_0/8)$-分离集，
- J_i 为对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ 均为 X 的 $((j_i - j_{i-1} + 1)\beta, \varepsilon_0/8)$-分离集。

记 $y_t := f_t(y_0)$，我们定义映射 $\pi : Y_m \to J_0^{i_0} \times \prod_{i=0}^m J_i$，其定义为 $\pi(y_t) = (z_{i_0}, z_0, \ldots, z_m)$，其中

- $d_{i_0\beta}(z_{i_0}, y_t) \le \varepsilon_0/8$,
- $d_{(j_i - j_{i-1}+1)\beta}(z_i, y_{t_0+t+(i+1)c_k+s_{i-1}}) \le \varepsilon_0/8$ for all $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

我们希望研究 π 的行为。设 $t_1, t_2 \in T_m$ 满足 $\pi(y_{t_1}) = \pi(y_{t_2})$。我们将对每个 $t \in [0, T]$ 求值 $d(y_{t+t_1}, y_{t+t_2})$。

(1) 如果 $t \le i_0\beta$，则有

$$d(y_{t+t_1}, y_{t+t_2}) \le d(y_{t+t_1}, f_t(z_{i_0})) + d(y_{t+t_2}, f_t(z_{i_0})) \le \varepsilon_0/4. \tag{3.32}$$

(2) 如果 $t \in [t_0(t_1) + ic_k + s_{i-1}(t_1)\ t_0(t_1) + (i+1)c_k + s_{i-1}(t_1)]$ 对于某些$i \in \{0, \ldots\ldots, m-1\}$，记 $r_i := t - (t_0(t_1) + ic_k + s_{i-1}(t_1))$，则有$r_i \in [0, c_k]$ 因此

$$d(y_{t_1+t}, f_{r_i}(x_0)) \le \eta < \varepsilon_0/8. \tag{3.33}$$

同时，由于 $|t_0(t_2) + s_{i-1}(t_2) - (t_0(t_1) + s_{i-1}(t_1))| \le \beta$，我们知道

$$r_i + t_0(t_2) + s_{i-1}(t_2) + ic_k \in [t - \beta, t + \beta],$$

由 (3.26) 可知

$$d(y_{t_2+t}, y_{t_2+r_i+t_0(t_2)+s_{i-1}(t_2)+ic_k}) < \varepsilon_0/8. \tag{3.34}$$

此外，我们还从 $r_i \in [0, c_k]$ 注意到

$$d(y_{t_2+r_i+t_0(t_2)+s_{i-1}(t_2)+ic_k}, f_{r_i}(x_0)) \le \eta < \varepsilon_0/8,$$

结合 (3.34) 可知

$$d(y_{t_2+t}, f_{r_i}(x_0)) < \varepsilon_0/4. \tag{3.35}$$

因此，由 (3.33) 和 (3.35) 可得

$$d(y_{t_2+t}, y_{t_1+t}) < \varepsilon_0/2. \tag{3.36}$$

(3) 若对某些$i \in \{0, \ldots, m-1\}$有 $t \in [t_0(t_1) + (i+1)c_k + s_{i-1}(t_1)\ t_0(t_1) + (i+1)c_k + s_i(t_1)]$，记 $r_i' := t - (t_0(t_1) + (i+1)c_k + s_{i-1})$，则可知 $r_i' \in [0, (j_i - j_{i-1} + 1)\beta]$，从而

$$d(y_{t_1+t}, f_{r_i'}(z_i)) \le \eta < \varepsilon_0/8.$$

由于 $|t_0(t_2) + s_{i-1}(t_2) - (t_0(t_1) + s_{i-1}(t_1))| \le \beta$，可知

$$r_i' + t_0(t_2) + s_{i-1}(t_2) + (i+1)c_k \in [t - \beta, t + \beta].$$

结合 $d(y_{t_2+r_i'+t_0(t_2)+s_{i-1}(t_2)+(i+1)c_k}, f_{r_i'}(z_i)) \le \eta < \varepsilon_0/8$，一个与导出(3.36)的论证相平行的论证表明

$$d(y_{t_2+t}, y_{t_1+t}) < \varepsilon_0/2. \tag{3.37}$$

由 (3.32)、(3.36) 和 (3.37) 可知，对于在 π 下具有相同像的 $y_{t_1}, y_{t_2} \in Y_m$，必有 $d_T(y_{t_1}, y_{t_2}) < \varepsilon_0/2$。特别地，这意味着对于每个 $\vec{r}_m \in R_m$，都有

$$\Lambda_T(Y_m, \varepsilon_0/2) \le \#J_0^{i_0} \prod_{i=0}^{m} \#J_i.$$

我们还由 (2.1) 知道，$\forall \zeta > 0$，存在某个常数 $C_\zeta = C_\zeta(X \times \mathbb{R}^+, \varepsilon_0/8)$，使得

$$\Lambda_s(X, \varepsilon_0/8) < C_\zeta e^{s(h+\zeta)} \quad \text{for all } s \ge 0. \tag{3.38}$$

由于对于所有 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$，有 $i_0\beta \le c_k + h_\eta(c_k)$ 和 $(j_i - j_{i-1} + 1)\beta \le h_\eta(c_k) + \beta$，将 $\zeta = h$ 代入 (3.38)，可得 $\#J_0^{i_0} < C_h e^{2h(c_k + h_{\eta(c_k)})}$ 以及 $\#J_i < C_h e^{2h(h_{\eta(c_k)} + \beta)}$ 对所有 i均成立。因此，我们有

$$\Lambda_T(Y_m, \varepsilon_0/2) < C_h^{m+2} e^{2h(c_k + (m+2)(h_\eta(c_k) + \beta))}. \tag{3.39}$$

记 $U_T := \lceil \frac{T}{c_k} \rceil$，回顾 (3.30) 可知 $m \le U_T$。注意，Y_0 是 y_0的轨道的闭包，而该轨道又被分划为可能的 Y_m。由 (3.30)、(3.31) 和 (3.39) 可得

$$\Lambda_T(Y_0, \varepsilon_0/2) \le \#\mathbb{N}_{k,T} \max_{m\in\mathbb{N}_{k,T}} \#R_m \max_{\vec{r}_m\in R_m} \{\#\Lambda_T(Y_m(\vec{r}_m), \varepsilon_0/2)\}$$
$$< \Big(\frac{T}{c_k} - \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} + 4\Big)(c_{k,\beta} + h_{\eta,\beta})(h_{\eta,\beta})^{U_T+1} C_h^{U_T+2} e^{2h(c_k+(U_T+2)(h_\eta(c_k)+\beta))}.$$

对上述等式两边取对数，除以 T，并令 $T \to \infty$，我们得到

$$h(Y_0, \varepsilon_0/2) < \frac{2(\log(C_h h_\eta(c_k)/\beta) + h(h_\eta(c_k) + \beta)))}{c_k} < H_0^\perp,$$

只要 k 充分大。这与 (3.25) 矛盾，因此关于 $h(Y_0)$ 的假设 $> H_0^\perp$。于是，我们完成了该断言以及该命题的证明。□

3.3. 定理 D 的证明。 设 (X, F, μ) 如定理 D 的陈述中所述，U 具有 (3.1) 的形式，且 $H_0 \in (H^\perp, h_\mu(F))$。记 $h_0' := h_\mu(F) - H_0$，并令

$$\eta_0 \in (0, \min\{h_0'/100, \delta_0 h_0/48 g_{\max}\}).$$

固定一个常数 $H_0^\perp \in (H^\perp, H_0)$。如同 (3.20)，除 (3.3) 之外，我们还要求 ε_0 满足 $h_{\exp}^\perp(\varepsilon_0) < H_0^\perp$。总之，记 $h_{1/2} := (H_0 + h_\mu(F))/2$，我们有

$$h_{\exp}^\perp(\varepsilon_0) < H_0^\perp < H_0 < h_{1/2} - 2\eta_0. \tag{3.40}$$

回忆引理 3.2，对于每个充分大的 k，我们能够找到 $c_k \in (k/2, k]$，$\widetilde{X_{N,k}^{\mathcal{G}}} \subset [\mathcal{G}]_{c_k}$，以及一个 (c_k, ε_0)-分离集 $\widetilde{E_{c_k}}$，使得 $X_{N,k}^{\mathcal{G}}$

$$\#\widetilde{E_{c_k}} > \frac{1}{2} e^{c_k(h_\mu(F) - 2\eta_0)}. \tag{3.41}$$

注意 $\widetilde{E_{c_k}} \times \{c_k\} \subset \mathcal{G}^1$。与命题 3.4 的证明类似，关键在于$\widetilde{\ }$从 E_{c_k} 中选取一个元素数量适当的子集，对其应用规范性，并构造一个满足以下条件的紧致不变子集 Y_1：

- $h(Y_1) < h$；特别地，$Y_1 \subsetneq X$。这对于定义 φ至关重要，也有助于确立 $\alpha\varphi$ 对每个$\alpha \ge 0$的压力间隙条件，从而得到所有这类势函数的平衡态的唯一性。
- $h(Y_1) > H_0$。这对于从熵的角度描述上述平衡态的极限行为十分重要。

现在开始构造 Y_1。取 $\eta \in (0, \min\{\varepsilon_0/8, \eta_g\})$ 和k 足够大，使得

(1) $k > \frac{8\log 2}{h_0'}$,

(2) $\frac{h_\eta(k)}{k} < \frac{\eta_0}{4h_{1/2}}$ and $\frac{\log(h_\eta(k)/\beta+1)}{k} < \frac{\eta_0}{4}$, where β is as in (3.26).

(3) $\log(2C_h h_\eta(k)/\beta) < \frac{k\eta_0}{4}$ and $h_\eta(k)+\beta < \frac{k\eta_0}{8h}$, where C_h is the constant in (3.38) with $\zeta = h$.

特别地，由条件 (1)、(2) 和 (3) 分别可得

$$\frac{1}{2}e^{c_k(h_\mu(F)-2\eta_0)} > e^{c_k h_{1/2}}, \tag{3.42}$$

$$\frac{c_k h_{1/2}}{c_k + h_\eta(c_k)} > h_{1/2} - \frac{\eta_0}{2} \quad \text{and} \quad \frac{\log(h_{\eta,\beta}+1)}{c_k} < \frac{\eta_0}{2}$$

and

$$\frac{1}{c_k}\Big(\log(2C_h h_{\eta,\beta}) + 2h(h_\eta(c_k)+\beta)\Big) < \eta_0, \tag{3.43}$$

其中 $h_{\eta,\beta}$ 如 (3.27) 中所述。

设 $E_{c_k} \subset E_{c_k}$ 满足

$$\#E_{c_k} \in [e^{c_k h_{1/2}}, e^{c_k(h_{1/2}+\eta_0)}],$$

这由 (3.41) 与 (3.42) 可知是合理的。对 E_{c_k} 中的任意序列 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，由于 $\widetilde{E_{c_k}} \times \{c_k\} \subset \mathcal{G}^1$, ，我们可以在尺度 η 上应用引理 2.12，得到$y = y((x_i,c_k)_{i\in\mathbb{Z}}) \in X$ 以及一列过渡时间 $(h_j)^{j\in\mathbb{Z}} := (h_j((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}))^{j\in\mathbb{Z}}$，使得 $d_{c_k}(x_i, f_{m_i}(y)) \le \eta$，其中关于

$$(m_j)_{j\in\mathbb{Z}} := (m_j((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}))_{j\in\mathbb{Z}}$$

如 (3.22) 中所述。设

$$Y := \Big\{y((x_i,c_k)_{i\in\mathbb{Z}}) : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} E_{c_k}\Big\}, \quad \text{and} \quad Y_1 := \overline{\{f_t(Y) : t\in\mathbb{R}\}}. \tag{3.44}$$

引理 3.5. 每一个支撑在 Y_1 上的遍历测度都属于 U。

证明。该证明与 Y_0 在命题 3.4 中对应陈述的证明类似。对于任意 $y_1 \in Y_1$ 和 $s > 0$，由 Y_1 的定义可知，必存在某个 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} E_{c_k}$ 和 $t = t(y_1, s) \in \mathbb{R}$，使得 $d_s(y_1, f_t(y)) < \eta \le \eta_g$，其中 $y = y((x_i,c_k)_i)$。令 $j_1 = j_1(t)$、$j_2 = j_2(t+s)$为整数，使得 $t \in [m_{j_1-1}, m_{j_1})$ 和 $t+s \in [m_{j_2}, m_{j_2+1})$ 分别成立。只要 $s > (3+16\delta_0/g_{\max})(h_\eta(c_k)+c_k)$，就必有$j_2 - j_1 > 16\delta_0/g_{\max}$。然后，重复使用 (3.23)（唯一的区别是将 $(j_2-j_1)G_i^{c_k}(x_0)$ 替换为 $\sum_{j=j_1}^{j_2-1} G_i^{c_k}(x_j)$），即可得到

$$\Big|\int_t^{t+s} g_i(f_u(y))du - s\int g_i d\mu\Big| \le 2\delta_0 s.$$

与 (3.24) 中一样，对于所有这样的 s，我们有

$$\Big|\int_0^{s} g_i(f_u(y_1))du - s\int g_i d\mu\Big| < 3\delta_0 s.$$

这一事实与我们对 $y_1 \in Y_1$ 的任意选择相结合，根据伯克霍夫遍历定理，完成了引理的证明。□

如下结果为我们提供了所需的 Y_1 熵估计，正如在 §3.3 开头所提到的。

命题 3.6. Y_1 的拓扑熵满足

$$h(Y_1) \in (h_{1/2} - \eta_0, h_{1/2} + 2\eta_0).$$

证明. 对于任意 $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \prod_{i\in\mathbb{Z}} E_{c_k}$，令

$$I = I((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) := \{m_j((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) : j \in \mathbb{Z}\}.$$

记 $Z := (\prod_{i\in\mathbb{Z}} E_{c_k}) \times \mathbb{R}$。给定任意 $((x_i)_i, t) \in Z$，按照命题 3.4 中的定义，令 $(t_0, (s_j)_{j\in\mathbb{N}})$ 为

- $t_0 = t_0((x_i)_i, t) \in [0, h_\eta(c_k) + c_k)$ be the smallest non-negative number to make $t + t_0 \in I$; let $n \in \mathbb{Z}$ be such that $t + t_0 = m_n$;
- $s_j = s_j((x_i)_i, t) := \sum_{l=0}^{j} h_{n+l}$.

固定一个常数 $T > 2(c_k + h_\eta(c_k))$。对于每个 $((x_i)_i, t) \in Z$，令 $k_T = k_T((x_i)_i, t)$ 如 (3.29) 中所定义。记 $L_T := \lfloor \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} \rfloor - 1$，并回想 $U_T = \lceil \frac{T}{c_k} \rceil$，一我们再次得到

$$k_T \in \mathbb{N}_{k,T} = [L_T, U_T].$$

同时，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，令 $K_m := \{((x_i)_i, t) : k_T((x_i)_i, t) = m\}$。回想我们在 (3.26) 中对 β 的选择，以及 (3.28) 中关于 $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 的定义。对于每个 $m \in \mathbb{N}_{k,T}$ 和 $((x_i)_i, t) \in K_m$，像之前一样令 $\{i_0, j_0, \ldots, j_m\} \in \mathbb{N}^{m+2}$ 为

- i_0 使得 $t_0 \in I_{i_0}$; • $\{j_i\}_{i=0}^{m}$ 使得 $t_0 + s_i \in I_{j_i}$ 对所有 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$成立。

令 $I_m((x_i)_i, t) := \{i_0, j_0, \ldots, j_m\}$。对于每个 $m \in \mathbb{N}_{k,T}$，将所有可能的 $\{I_m((x_i)_i, t) : ((x_i)_i, t) \in K_m\}$ 的集合记为 $R_{Z,m}$。如同（3.31）中一样，我们有

$$\#R_{Z,m} \le (c_{k,\beta} + h_{\eta,\beta})(h_{\eta,\beta})^{m+1}. \tag{3.45}$$

我们首先转向证明 $h(Y_1)$ 的下界。在这种情况下，我们将注意力集中于满足 $t = 0$ 的集合 $((x_i)_i, t) \in Z$。固定任意的 $\hat{x} \in E_{c_k}$。令

$$E_{\hat{x}}^T := \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : x_i = \hat{x} \text{ for all } i \le -1 \text{ and all } i \ge L_T - 1\},$$
$$Y^T := \{y((x_i)_i) : (x_i)_i \in E_{\hat{x}}^T\},$$
$$Y_m^T := \{y((x_i)_i) \in Y^T : ((x_i)_i, 0) \in K_m\}.$$

同时，对于任意 $m \in \mathbb{N}_{k,T}$ 和 $\vec{r}_m \in R_{Z,m}^0$，写作 $R_{Z,m}^0 := \{\{i_0, j_0, \ldots, j_m\} \in R_{Z,m}, i_0 = 0\}$，记 $Y^T(\vec{r}_m) := \{y = y((x_i)_i) \in Y_m^T : I_m((x_i)_i, 0) = \vec{r}_m\}$。我们将证明，在给定固定的 m 和 $\vec{r}_m$ 的条件下，$Y^T(\vec{r}_m)$ 是 $(T, \varepsilon_0/2)$-分离的。

为说明这一点，设 $(x_i)_i, (x_i')_i \in E_{\hat{x}}^T$ 满足 $y := y((x_i)_i)$ $y' := y((x_i')_i)$ 均属于 $Y^T(\vec{r}_m)$。令 $n \in \mathbb{N}$ 为满足 $x_n \ne x_n'$ 的最小整数。

记 $m_n := m_n((x_i)_i)$、 $m'_n := m_n((x'_i)_i)$，则 $|m_n - m'_n| < \beta$，并且我们有

$$\begin{aligned}
&d_T(y, y') \geq d_{c_k}(f_{m_n}(y), f_{m_n}(y')) \\
\geq &d_{c_k}(f_{m_n}(y), f_{m'_n}(y')) - d_{c_k}(f_{m'_n}(y'), f_{m_n}(y')) \\
\geq &d_{c_k}(x_n, x'_n) - d_{c_k}(f_{m_n}(y), x_n) - d_{c_k}(f_{m'_n}(y'), x'_n) - d_{c_k}(f_{m'_n}(y'), f_{m_n}(y')) \\
\geq &\varepsilon_0 - 2\eta - \varepsilon_0/8 > \varepsilon_0/2.
\end{aligned}$$

因此，我们知道 $Y^T(\vec{r}_m)$ 是 $(T, \varepsilon_0/2)$-分离的。同时，注意到 $i_0 = 0$，在 $(m, \vec{r}_m) \in \mathbb{N}_{k,T} \times R^0_{Z,m}$ 上至多有 $(\frac{T}{c_k} - \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} + 4)(h_{\eta,\beta} + 1)^{U_T+1}$ 种选择。由于 $\#E^T_{\hat{x}} = (\#E_{c_k})^{L_T-1} \geq e^{c_k(L_T-1)^{h_{1/2}}}$，存在一些 m 和 $\vec{r}_m$，使得

$$\#Y^T(\vec{r}_m) \geq \Big((\frac{T}{c_k} - \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} + 4)(h_{\eta,\beta} + 1)^{U_T+1}\Big)^{-1} e^{c_k(L_T-1)h_{1/2}},$$

这意味着

$$\Lambda_T(Y_1, \varepsilon_0/2) \geq \Big((\frac{T}{c_k} - \frac{T}{c_k + h_\eta(c_k)} + 4)(h_{\eta,\beta} + 1)^{U_T+1}\Big)^{-1} e^{c_k(L_T-1)h_{1/2}}.$$

对上述等式两边取对数，除以 T 并令 $T \to \infty$，得到

$$h(Y_1) \geq \frac{c_k h_{1/2}}{c_k + h_\eta(c_k)} - \frac{\log(h_{\eta,\beta} + 1)}{c_k} > h_{1/2} - \eta_0.$$

由此得到 $h(Y_1)$ 的所需下界。

现在我们来讨论上界。其思路与命题 3.4 的证明中关于 $h(Y_0)$ 的思路类似。给定任意一个 $(m, \vec{r}_m) \in \mathbb{N}_{k,T} \times R_{Z,m}$，用 $Z(\vec{r}_m)$ 表示由所有满足 $\{i_0, j_0, ...j_m\}$ 等于 $\vec{r}_m$ 的 $((x_i)_i, t) \in Z$ 构成的集合。另外，回顾 $J^{i_0}_0$ 和 $(J_i)^m_{i=0}$ 的定义如下:

- $J^{i_0}_0$ is a maximally $(i_0\beta, \varepsilon_0/8)$-separated set of X,
- J_i is $((j_i - j_{i-1} + 1)\beta, \varepsilon_0/8)$-separated of X for all $i \in \{0, 1, ..., m\}$.

令 $y = y_t((x_i, c_k)_i) := f_t(y(x_i, c_k)_i)$。我们定义映射 $\pi\colon Z(\vec{r}_m) \to J^{i_0}_0 \times \prod^m_{i=0}(E_{c_k} \times J_i)$，使得

$$\pi((x_i), t) := (z_{i_0}, (x_n, z_0), (x_{n+1}, z_1), ..., (x_{n+m}, z_m))$$

满足

- $d_{i_0\beta}(z_{i_0}, y_t) < \varepsilon_0/8$,
- $d_{(j_i - j_{i-1}+1)\beta}(z_i, y_{t_0+t+(i+1)c_k+s_{i-1}}) < \varepsilon_0/8$ for all $i \in \{0, 1, ..., m\}$.

重复导出 (3.32)、(3.36) 和 (3.37) 的推导过程，可得如下结论：给定任意 $(m, \vec{r}_m) \in \mathbb{N}_{k,T} \times R_{Z,m}$，若 $((x_i)_i, t)$，$((x'_i)_i, t') \in Z(\vec{r}_m)$ 满足 $\pi((x_i)_i, t) = \pi((x'_i)_i, t')$，则必有

$$d_T(f_t(y((x_i, c_k)_i)), f_{t'}(y((x'_i, c_k)_i))) < \varepsilon_0/2,$$

这意味着

$$\Lambda_T(Z(\vec{r}_m),\varepsilon_0/2)\le \#J_0^{i_0}\prod_{i=0}^{m}(\#E_{c_k}\#J_i).$$

再次令 (3.38) 中的 ζ 等于 h。按照 (3.39) 的推导，并利用 $\#E_{c_k}\le e^{c_k(h_{1/2}+\eta_0)}$，我们得到

$$\Lambda_T(Z(\vec{r}_m)\ \varepsilon_0/2)\ <C_h^{m+2}e^{2h(c_k+(m+2)(h_\eta(c_k)+\beta))}e^{(m+1)c_k(h_{1/2}+\eta_0)}. \tag{3.46}$$

由于 $Z=\bigcup_{(m,\ \vec{r}_m)\in\mathbb{N}_{k,\ T}\times R_{Z,\ m}} Z(\vec{r}_m)$，由 (3.30)、(3.45) 和 (3.46) 可知 that

$$\begin{aligned}\Lambda_T(Z,\varepsilon_0/2)\le&\sum_{(m,\vec{r}_m)\in\mathbb{N}_{k,T}\times R_{Z,m}}\Lambda_T(Z(\vec{r}_m),\varepsilon_0/2)\\ <&(\frac{T}{c_k}-\frac{T}{c_k+h_\eta(c_k)}+4)(h_{\eta,\beta}+c_{k,\beta})(h_{\eta,\beta}+1)^{U_T+1}C_h^{U_T+2}\\ &\cdot e^{2h(c_k+(U_T+2)(h_\eta(c_k)+\beta))}e^{(U_T+1)c_k(h_{1/2}+\eta_0)}.\end{aligned}$$

对上述等式两边取对数，除以 T 并令 $T\to\infty$，我们得到

$$\begin{aligned}h(Y_1,\varepsilon_0/2)\le&\frac{1}{c_k}\Big(\log(2C_hh_{\eta,\beta})+2h(h_\eta(c_k)+\beta)\Big)+h_{1/2}+\eta_0\\ <&\ h_{1/2}+2\eta_0,\end{aligned}$$

其中最后一个不等式由 (3.43) 得出。同时，由 (3.40) 可知 $h(Y_1)$ $>h_{1/2}-\eta_0>h^\perp_{\exp}(\varepsilon_0)$；再由 [13, 命题 3.7] 可得 $h(Y_1,\ \varepsilon_0/2)=h(Y_1)$。因此，这就给出了 $h(Y_1)$ 的所需上界。□

现在我们按如下方式证明定理 D。

- 分析压力函数 $P(\alpha):=P(\alpha\varphi)$ 对每个$\alpha\ge 0$的行为，其中 $\varphi(x)=-d(x,\ Y_1)$ 对每个 $x\in X$ 都成立，即到 Y_1 的负距离函数。通过研究 $\{\alpha\varphi\}_{\alpha\ge0}$的热力学形式来进行此类分析。•应用泛函分析中的逼近定理，使上述不可数多个平衡态成为某个函数的极大化测度。

对任意 $x\in X$，令 $\varphi(x)=-d(x,\ Y_1)$。由于 $h(Y_1)<h$，我们有 $Y_1\subsetneq X$，因此 φ 不会始终为 0。接下来，我们通过检查定理 2.9 中的条件是否满足，来考察 $(\alpha\varphi)_{\alpha\ge0}$ 的热力学形式。

- 回顾（3.40），$\varepsilon_0>0$ 满足条件：$h^\perp_{\exp}(\varepsilon_0)<h_{1/2}-\eta_0<h(Y_1)$。于是，对每个 $\alpha\ge0$，我们有

$$P^\perp_{\exp}(\alpha\varphi,\varepsilon_0)\le h^\perp_{\exp}(\varepsilon_0)<h(Y_1)\le P(\alpha\varphi),$$

其中，最后一个不等式由变分原理得出。因此，我们有

$$P^{\perp}_{\exp}(\alpha\varphi) \leq P^{\perp}_{\exp}(\alpha\varphi, \varepsilon_0) < P(\alpha\varphi) \quad \text{for all } \alpha \geq 0. \tag{3.47}$$

• $P([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}], \alpha\varphi) \leq h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]) \leq H^{\perp} < h(Y_1) \leq P(\alpha\varphi)$。• 显然，$\varphi$ 是利普希茨的。因此，根据定理 C 中的附加假设，φ 沿着 $\mathcal{G}$满足 Bowen 性质。

因此，对于势函数族 $(\alpha\varphi)_{\alpha\geq 0}$，定理 2.9 中的条件均得到满足。这表明，对于每个 $\alpha\varphi$，平衡态存在且唯一，从而得出定理 D(1)。将该测度记为 $\mu_{\alpha\varphi}$。

我们注意到，定理 D(2) 是 (3.47) 和引理2.17 的直接推论。为证明 (3)，只需注意到，对于所有 $\alpha > 0$，$\mathcal{M}_{\max}(\varphi) = \mathcal{M}_{\max}(\alpha\varphi) = \mathcal{M}_F(Y_1)$。由于 $h(Y_1) > h_{1/2} - \eta_0 > H_0$，结合命题2.16 和变分原理，并沿用一个直接的反证论证，即可得出 (3)。

最后，为了证明定理 D(4)，我们将分析压力函数 $P(\alpha) := P(\alpha\varphi)$ 的凸性。由于对于每个 $\alpha \geq 0$，$\mu_{\alpha\varphi}$ 都是 $\alpha\varphi$ 的唯一平衡态，我们有（参见 [33]）

$$P'(\alpha) = \int \varphi d\mu_{\alpha\varphi}. \tag{3.48}$$

(1) 如果对于所有 $\alpha \geq 0$，$\alpha \mapsto P(\alpha)$ 都是严格凸的，那么由 (3.48) 可知，当 $\alpha \to \infty$ 时，$\int \varphi d\mu_{\alpha\varphi}$ 严格递增；在这种情况下，这就得到了所需的 $\alpha \mapsto \mu_{\alpha\varphi}$ 的单射性。通过选取某个足够大的适当 α_1，(4) 的其余部分可由 (3) 立即推出。

(2) 如果 $\alpha \mapsto P(\alpha)$ 满足如下性质：对任意 $\hat{}\alpha > 0$，存在 $\hat{}\alpha(1)$，$\hat{}\alpha(2)$，使得 $\hat{}\alpha < \hat{}\alpha(1) < \hat{}\alpha(2) < \infty$，并且对于所有 $\alpha \in (\hat{}\alpha(1), \hat{}\alpha(2))$，$P$ 都是严格凸的。那么，我们可以构造一个区间序列 $((\hat{}\alpha_n(1), \hat{}\alpha_n(2)))_{n\in\mathbb{N}}$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\hat{}\alpha_{n+1}(1) > \hat{}\alpha_n(2)$，且对于所有 $\alpha \in (\hat{}\alpha_n(1), \hat{}\alpha_n(2))$，$P$ 都是严格凸的。与第一种情况一样，我们知道，对于所有 $\alpha \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\hat{}\alpha_n(1), \hat{}\alpha_n(2))$，$\alpha \mapsto \mu_{\alpha\varphi}$ 是单射的。

然后，通过应用引理2.17并再次进行反证，对于所有充分大的 n，我们有 $\mu_{\alpha\varphi} \in U$ 对所有 $\alpha \in (\hat{}\alpha_n(1), \hat{}\alpha_n(2))$。令 $\alpha_1 := \hat{}\alpha_n(1)$、$\alpha_2 := \hat{}\alpha_n(2)$，并取足够大的 n，即可得出（4）。

(3) 如果 $\alpha \mapsto P(\alpha)$ 不属于上述两种情况中的任何一种，那么由于 C^1 smooth- ness of $P(\alpha)$，必然存在某个最小的 $\alpha_0 \geq 0$，使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$，$P(\alpha)$ 都是线性的。在这种情况下，由 (3.48) 和变分原理可知，对于所有满足 $\alpha \geq \alpha_0$ 的 $\alpha\varphi$，$\mu_{\alpha_0\varphi}$ 都是唯一平衡态。特别地，由命题2.16可知，$\mu_{\alpha_0\varphi}$ 是 (Y_1, F) 的最大熵测度。如果 $\alpha_0 = 0$，

那么 $\mu_{\alpha_0\varphi}$ 就会是 (X,F) 的最大熵测度，这与 $h(Y_1) < h$ 矛盾。因此，必有 $\alpha_0 > 0$。于是，由我们对 α_0 的选择可知，必然存在某个 $\delta \in (0,\alpha_0)$，使得对所有 $\alpha \in (\alpha_0-\delta,\alpha_0)$，压强 $P(\alpha)$ 都是严格凸的，这意味着对所有这样的 α，$\alpha \mapsto \mu_{\alpha\varphi}$ 都具有单射性。同时，命题2.16与引理2.17结合可推出

$$\lim_{\alpha\uparrow\alpha_0} \mu_{\alpha\varphi} = \mu_{\alpha_0\varphi} \quad \text{and}$$

通过使 α_1 从下方充分接近 α_0，即可得出 (4)，且 $\alpha_2 := \alpha_0$。

汇总上述三种可能情况，即可得出 (4)，从而完成定理 D 的证明。

3.4. 定理 C 的证明。我们将运用 §2.4 中引入的泛函工具，以及定理 D，来证明定理 C。

对于任意 $\varphi \in C(X,\mathbb{R}) \setminus \mathcal{R}_H$，存在 $\tilde{\mu} \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$，使得 $h_{\tilde{\mu}}(F) > H$。此外，根据引理 2.21，$\tilde{\mu}$ 可以假设为遍历的。对于 $\varepsilon > 0$，考虑 $\tilde{\mu}$ 的以下开邻域

$$\mathcal{U} := \left\{\nu \in \mathcal{M}_F(X) : \int \varphi d\nu > \int \varphi d\tilde{\mu} - \varepsilon^2\right\}.$$

应用定理 D，可得一个 Lipschitz 连续函数 $\psi_0 \in C(X,\mathbb{R})$、一族对应势函数 $\alpha\psi_0$ 的平衡态 $\mu_{\alpha\psi_0}$，以及一对常数 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$，使得映射 $\alpha \mapsto \mu_{\alpha\psi_0}$ 是从 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 到 $\mathcal{U}$ 的单射且连续，并且对于所有此类 α，$h_{\mu_{\alpha\psi_0}}(F) > H$。

利用下标集 $[\alpha_1,\alpha_2]$，我们可以通过指定在 $\mathcal{M}_F^e(X)$ 上构造测度 $\hat{}\mu$

$$\hat{m}(\cdot) = m(\{t \in [\alpha_1,\alpha_2] : \mu_{\alpha\psi_0} \in \cdot\})$$

其中 m 表示 $[\alpha_1,\alpha_2]$ 上的归一化勒贝格测度。由于映射 $\alpha \mapsto \mu_{\alpha\psi_0}$ 的单射性与连续性，该测度是良定义且非原子的。令 $\mu_0 = \int_{\mathcal{M}_F^e(X)} \nu d\hat{}m(\nu)$。遍历分解定理断言，对每个不变测度 $\lambda \in \mathcal{M}_F(X)$，存在 $\mathcal{M}_F^e(X)$ 上唯一的概率测度 b_λ，使得 $\lambda = \int_{\mathcal{M}_F^e(X)} \nu db_\lambda(\nu)$。由唯一性，$b_{\mu_0} = \hat{}m$ 且 μ_0 属于 $\mathcal{U}$。作为 $C(X,\mathbb{R})^*$ 的元素，μ_0以凸极大泛函 Λ_F 为上界（见 (1.1)）。由定理 2.18，存在 $\psi \in C(X,\mathbb{R})$ 与 $\mu \in C(X,\mathbb{R})^*$，使得 μ 在 ψ 处与 Λ_F 相切，并且

$$\|\mu - \mu_0\| \le \varepsilon \quad \text{and} \quad \|\psi - \varphi\|_{C^0} \le \frac{1}{\varepsilon}(\Lambda_F(\varphi) - \mu_0(\varphi)) \le \varepsilon.$$

根据引理 2.19，μ 最大化了 ψ。只需证明 b_μ的支撑 supp(b_μ) 包含不可数多个遍历测度。

注意，作为 $\mathcal{M}_F(X)$ 的子空间，$\mathcal{M}_F^e(X)$ 是可度量化的，并且 b_{μ_0} 是外正则的。对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\mathcal{M}_F^e(X)$ 的一个开子集 U

使得 $\mathrm{supp}(b_\mu) \subset U$ 且 $b_{\mu_0}(U \setminus \mathrm{supp}(b_\mu)) < \varepsilon$。由于 $\nu \mapsto b_\nu$ 是等距的，$\|b_\mu - b_{\mu_0}\| = \|\mu - \mu_0\| \le \varepsilon$。我们有

$$b_{\mu_0}(\mathrm{supp}(b_\mu)) \ge b_{\mu_0}(U) - \varepsilon \ge b_\mu(U) - 2\varepsilon = 1 - 2\varepsilon.$$

由于 b_{μ_0} 是非原子的，因此 $\mathrm{supp}(b_\mu)$ 包含不可数多个 y 元素。

4. 示例与应用

4.1. 测地流。设 M 是一个光滑闭 n维流形，配备光滑黎曼度量 g。记 $\bar{\pi}: SM \to M$为 M上的单位切丛。对于每个 $v \in SM$，存在唯一的测地线，记为 $\gamma_v: \mathbb{R} \to M$，满足初始条件 $\dot{\gamma}_v(0) = v$。于是，SM 上的测地流$(g^t)_{t\in\mathbb{R}}$ 定义如下：

$$g^t : SM \to SM, \quad v \mapsto \dot{\gamma}_v(t), \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

沿测地线 $\gamma: \mathbb{R} \to M$ 的雅可比场是一个向量场 $J(t)$，它满足以下雅可比方程

$$J'' + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0,$$

其中 R 是黎曼曲率张量，$'$ 表示沿 γ的协变导数。沿测地线 γ 的雅可比场 $J(t)$ 称为平行的，如果对所有 $t \in \mathbb{R}$，$J'(t) = 0$。

定义 4.1. 对每个 $v \in SM$，v的秩记作 $\mathrm{rank}(v)$，定义为沿测地线 γ_v的平行雅可比场所构成的向量空间的维数。于是，M 的秩定义为

$$\mathrm{rank}(M) := \min\{\mathrm{rank}(v) : v \in SM\}.$$

对于测地线 γ，我们定义 $\mathrm{rank}(\gamma) := \mathrm{rank}(\dot{\gamma}(t))$，其中某个 $t \in \mathbb{R}$ 满足此式（因而所有 $t \in \mathbb{R}$也满足）。

我们始终假设 (M, g) 是一个处处具有非正（截面）曲率的闭秩一黎曼流形。于是，SM 分解为在测地流下不变的两个子集：正则集 $\mathrm{Reg} := \{v \in SM : \mathrm{rank}(v) = 1\}$，以及奇异集 $\mathrm{Sing} := SM \setminus \mathrm{Reg}$。每个支撑在 Reg 上的遍历测度都是双曲测度，因而表现出非一致双曲性（参见 [10, 推论 3.7]）。关于非正曲率下测地流的遍历理论，更多详情请见 [1, 第 12] 章和 [10, 第 2.4] 节。

特别地，我们有两个 g^t-不变子丛 E^s和 E^u，它们分别可积为 g^t-不变叶状结构 W^s_g和 W^u_g。对于 $v \in SM$，我们将经过 v的测地流的 $W^{s/u}_g(v)$ 称为稳定/不稳定流形。投影 $H^{s/u}(v) = \bar{\pi}W^{s/u}_g(v)$ 称为与 v相关的稳定/不稳定测地球面。记 $\mathcal{U}^{s/u}_v: T_{\bar{\pi}v}H^{s/u} \to T_{\bar{\pi}v}H^{s/u}$ 为与稳定/不稳定测地球面 $H^{s/u}$对应的对称线性算子。令 $\lambda^u(v)$ 为 $\mathcal{U}^u_v$的最小特征值，并令 $\lambda^s(v) :=$

$-\lambda^u(-v)$。于是我们定义 $\lambda(v) := \min\{\lambda^u(v)\ \lambda^s(v)\}$. 显然， $\lambda : SM \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。

令 $\eta > 0$。按照 [10], ，我们定义

$$\mathcal{G}(\eta) := \{(v,t) : \int_0^\tau \lambda(g^s v)ds \geq \eta\tau, \int_0^\tau \lambda(g^{-s}g^t v)ds \geq \eta\tau, \forall \tau \in [0,t]\},$$

$$\mathcal{B}(\eta) := \{(v,t) : \int_0^t \lambda(g^s v)ds < \eta t\}.$$

定义 *4.2*。（[10, 第 1221] 页）给定（v， t），取 $p = p$（v， t）为满足（v， p） $\in \mathcal{B}$（η）的最大时间，并取 $s = s$（v， t）为 $[0, t-p]$ 中满足（$g^{t-s}v$， s） $\in \mathcal{B}$（η）的最大时间。于是可得（$g^p v$， l） $\in \mathcal{G}$（η），其中 $l = t-p-s$。因此，配备函数（p， l， s）的三元组（$\mathcal{B}$（η） $\mathcal{G}$（η） $\mathcal{B}$（η））确定了 $SM \times \mathbb{R}^+$ 的一个分解。

利用上述（$\mathcal{P}$， $\mathcal{G}$， $\mathcal{S}$）-分解以及 Climenhaga–Thompson 判据定理 2.7，Burns、Climenhaga、Fisher 和 Thompson [10] 证明了满足某些间隙性质的 Hölder 连续势的平衡态的唯一性。

定理 4.3。（参见 [10, 定理 A]）设 g^t 为闭秩一流形 M 上的测地流，且 φ： $SM \to \mathbb{R}$ 为 *Hölder* 连续。若 P（奇异集 φ） $< P$（φ），则 φ 具有唯一平衡态 μ。该平衡态是双曲的、全支撑的，并且是加权正则闭测地线的弱* 极限。

我们现在可以证明测地流的极大测度的一般性结果。

定理 *E* 的证明。让我们验证非正曲率秩一流形上的测地流满足定理 A 的条件。

- 根据 [26, 定理 6.1] 和 [10, 定理 B],，我们有 h_{top}（奇异集） $< h_{\text{top}}$（G） $=:$ h。• 根据 [10, 命题 5.4]， $h^\perp_{\text{exp}} \leq h_{\text{top}}$（奇异集），因此 $h^\perp_{\text{exp}} < h$。• 根据 [10, 命题 5.2], ，当 $\eta > 0$ 充分小时， h（$[\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]$） $=h$（$[\mathcal{B}(\eta)]$） $< h$。

因此定理 A 适用，定理 E(1) 得证。

为证明定理 A(2)–(5)，我们需要证明每个 Lipschitz 函数ψ 沿着 $\mathcal{G}$都满足 Bowen 性质。但这只是 [10, 推论 7.5]的直接结论。注意，我们的势函数 $\psi := \alpha\varphi$ 是距离函数 φ 的一个 α-倍（$\alpha > 0$），其定义如下

$$\varphi(v) := -d(v, Y_1), \quad \forall v \in SM,$$

其中 Y_1 是 SM 的紧致流不变子集，其熵满足 $h(Y_1) \in (h(\text{Sing}),\ h)$（见 (3.44) 和命题 3.6）。因此，定理 C 和 D 适用。接下来只需证明 E(2) 中的遍历测度均为全支撑。这由定理 4.3 得出，也就是说，上述 ψ 的唯一平衡态是全支撑的。定理 E 的证明至此完成。□

4.2. 标架流。设 (M, g) 是一个闭、定向的 C^∞ 维和 n 维黎曼流形。M 上的标架丛 定义为

$$FM := \{(x, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}) : x \in M, v_i \in S_xM, \\ \{v_0, \cdots, v_{n-1}\} \text{ is a positively oriented orthonormal frame at } x\}.$$

标架流 F^t： $FM \to FM$定义为

$$F^t(x, v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}) := (\gamma_{v_0}(t), g^t(v_0), P^t_\gamma(v_1), \cdots, P^t_\gamma(v_{n-1}))$$

其中， P^t_γ 是沿测地线 γ_{v_0} 的平行移动。存在一个自然的纤维丛 $\pi : FM \to SM$，它将一个标架映射到其第一个向量，随后每个纤维都可与 $SO(n-1)$ 等同。显然， $\pi \circ F^t = g^t \circ \pi$和 F^t沿纤维等距作用。

自 20 世纪 70 年代以来，Brin、Gromov [7, 8, 9] 等人对负曲率闭流形上标架流的遍历性进行了广泛研究。在这种情况下，标架流 F^t 是一个部分双曲流，其平衡态的唯一性由 Spatzier 和 Visscher 研究，参见 [32,定理 1]。

我们研究非正曲率闭秩一流形上的标架流，可以将其视为部分双曲性与非一致双曲性混合的系统。若存在一个常数 $C > 1$，使得对每个 $x \in M$ 和 $\{v_i\}_{i=1}^4 \subset S_xM$，都有以下关系，则称 M 为丛化

$$K(v_1, v_2) \in [C^{-1}K(v_3, v_4), CK(v_3, v_4)]$$

每当截面曲率 K 有定义时。

定义*4.4.* 给定 $(x, t) \in FM \times \mathbb{R}^+$,, 则 $(\pi(x)\ t) \in SM \times \mathbb{R}^+$ 具有一个 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$-分解，如定义 *4.2* 所述。我们将 (x, t) 的 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$-分解定义为 $(\pi(x)\ t)$ 的 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$-分解的唯一提升。

$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$利用上述适用于标架流的 $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{S})$-分解和定理 2.10，我们得到

定理4.5. *(*[36, 定理 E]*)* 设 M 是一个具有丛化非正曲率的闭定向秩一n-流形。假设标架流 F^t： $FM \to FM$ 是拓扑传递的，并且 $\tilde{\varphi}$： $FM \to \mathbb{R}$ 是连续势函数，在丛 $FM \to SM$ 的纤维上为常数，其投影 φ： $SM \to \mathbb{R}$ 是 ***Hölder*** 连续的。此外，假设P（g^t，奇异集 φ） $< P$（g^t，φ）。那么，对于（F^t，$\tilde{\varphi}$），存在唯一的平衡测度。

以下是标架流轨道片段压强的 Bowen不等式 [4, 定理 17] 的一个版本。它本质上源于该流沿纤维方向为等距流，因此纤维方向对压强没有贡献。

引理 4.6. *(*[36, 引理 4.28]*)* 对于 $\tilde{\mathcal{C}} \subset FM \times \mathbb{R}^+$,, 记 $\mathcal{C} := \{(\pi x, t) : (x, t) \in \tilde{\mathcal{C}}\} \subset SM \times \mathbb{R}^+$。那么，对于任意连续势函数 $\tilde{\varphi}$： $FM \to \mathbb{R}$

在丛 $\pi\colon\ FM \to SM$ 的纤维上为常数的函数，我们有

$$P(F^t, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\varphi}) = P(g^t, \mathcal{C}, \varphi).$$

最后，我们完成定理 G 的证明。

定理 *G* 的证明。 为证明定理 G(1)，我们来验证标架流满足定理 A 的条件。注意，标架流是熵扩张的（参见 [36, 定理 F 的证明]）。由引理 4.6 可得

$$H^{\perp} := h([\tilde{\mathcal{P}}] \cup [\tilde{\mathcal{S}}]) = h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]) < h_{\mathrm{top}}(G) = h_{\mathrm{top}}(F) =: h.$$

因此，定理 A 适用，定理 G(1) 得证。

对于定理 G(2)-(5)，由于 $h^{\perp}_{\exp} < h$ 不成立，我们无法直接应用定理 C 和 D。事实上，容易观察到，对于任意 $\varepsilon,\ s > 0$ 和 $x \in X$，都有 $\Gamma_{\varepsilon}(x) \not\subseteq f_{[-s,s]}(x)$，导致对所有 $\varepsilon > 0$，$\mathrm{NE}(\varepsilon) = X$。因此，$h^{\perp}_{\exp} = h$。尽管如此，我们可以仿照它们的证明来得到定理 G(2)-(5)。令 $Y_1 \subset SM$ 为在情形 $(SM,\ (g^t)_{t\in\mathbb{R}})$ 下构造的集合，如 (3.44) 所示；该集合已在定理 E 的证明中出现。和之前一样，令 $\varphi\colon\ SM \mapsto \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\varphi(v) := -d(v, Y_1), \quad \forall v \in SM.$$

接着，我们定义函数 $\tilde{\varphi}\colon\ FM \to \mathbb{R}$ 为

$$\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(\pi(x)), \quad \forall x \in FM.$$

现在我们有以下性质：

- $\mathcal{G}$ 满足弱规范性，根据 [36,定理4.27]。
- $\widetilde{\varphi}$ 在 $\mathcal{G}$上满足 Bowen 性质，因为 φ 在 $\mathcal{G}$上满足这一性质，且 $\widetilde{\varphi}$ 在每个纤维上都是一个常数。
- 对于每个 $\alpha > 0$，我们有 $P([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}], \alpha\widetilde{\varphi}) \le h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]) = h([\mathcal{P}] \cup [\mathcal{S}]) < h(Y_1) = h(Y_1) \le P(\alpha\widetilde{\varphi})$，其中 $Y_1 := \pi^{-1}(Y_1)$。

于是根据定理4.5，对于每个$\alpha \ge 0$，都存在唯一的平衡态$\mu_{\alpha\widetilde{\varphi}}$。这使我们能够仿照定理 D 的证明，得到所有期望的结论，但定理 G (2) 中的测度具有全支撑这一点除外。

尚需证明这些测度是全支撑的。由于此类测度均形如带有 $\alpha > 0$ 的 $\mu_{\alpha\widetilde{\varphi}}$，故只需证明所有此类平衡态均为全支撑的。证明的主体在于表明，此类测度沿来自 $\mathcal{G}$ 的长轨道片段在足够小的尺度上均满足下 Gibbs 性质，即存在某个常数 $\varepsilon_0 > 0$，使得对所有 $\alpha > 0$，存在常数 $T_{\alpha} > 0$，使得下列结论对所有满足 $t > T_{\alpha}$ 的 $(x, t) \in \mathcal{G}$ 成立：对任意 $\varepsilon' \in (0, \varepsilon_0)$，存在 $C_{\alpha,\varepsilon'} > 0$，使得

$$\mu_{\alpha\widetilde{\varphi}}(B_t(x, \varepsilon')) > C_{\alpha,\varepsilon'} e^{-tP(\alpha\widetilde{\varphi}) + \int_0^t \alpha\widetilde{\varphi}(F^s(x))ds}. \tag{4.1}$$

为证明 (4.1)，我们首先从 [36,(4.26)] 注意到

$$P(F^t, \alpha\widetilde{\varphi}, \varepsilon') = P(F^t, \alpha\widetilde{\varphi}) \text{ for all } \alpha > 0, \varepsilon' \in (0, \varepsilon_0) \tag{4.2}$$

其中 $\varepsilon_0 := \mathrm{inj}(M)/6$。然后，我们可以直接应用 (4.2)，以及上述三个条件（分别关于弱规范性、Bowen 性质和压力间隙条件），在 $(F^t, \alpha\widetilde{\varphi}, \tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{S}})$ 上展开导向 [13, 引理 4.16] 的论证。具体而言，对每个 $\alpha \geq 0$，我们得到 $\alpha\widetilde{\varphi}$ 的一个平衡态 ν_α，满足 (4.1) 中所提示的不等式。由于我们已经知道平衡态的唯一性，这样的 ν_α 必定等于 $\mu_{\alpha\widetilde{\varphi}}$。[5]一旦有了 (4.1)，我们就可以重复 [10, 引理 6.2 和命题 6.3] 中的论证，并得出结论：对所有$\alpha > 0$，所有 $\mu_{\alpha\widetilde{\varphi}}$ 都必须是全支撑的。细节从略，留给感兴趣的读者。□

5. 附录：关于流的若干技术性结果的证明

我们证明引理 2.19、命题 2.22 和命题 2.23，方法是将 [6, 引理 2.3], [15, 定理 1.1] 以及 [27, 定理 1.1] 的证明从同胚情形改编到流的情形。

引理 *2.19* 的证明。“若”方向由事实 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$显然成立，并观察到 $\Lambda_F(\varphi) = \mu(\varphi)$以及

$$\mu(\psi) = \mu(\varphi + \psi) - \mu(\varphi) \leq \Lambda_F(\varphi + \psi) - \Lambda_F(\varphi).$$

因此我们只需证明“仅当”方向。根据与Λ_F相切的定义，对任意 $\psi \in C(X, \mathbb{R})$，我们有

$$\mu(\psi) \leq \Lambda_F(\varphi + \psi) - \Lambda_F(\varphi). \tag{5.1}$$

在 (5.1) 中将 ψ 替换为 $-\psi$，我们有

$$\mu(\psi) \geq \Lambda_F(\varphi) - \Lambda_F(\varphi - \psi). \tag{5.2}$$

将 $\psi := 1$ 代入 (5.1) 和 (5.2)，立即可得 $\mu(1) = 1$。与此同时，将 $\psi = \varphi$ 代入这两个方程可得

$$\mu(\varphi) = \Lambda_F(\varphi).$$

因此，只需证明 μ 是流不变的。对于任意 $t \neq 0$ 和 $\psi_1 \in C(X, \mathbb{R})$，令 $\psi := \psi_1 - \psi_1 \circ f_t$，我们知道 $\Lambda_T(\varphi + \psi) = \Lambda_T(\varphi - \psi) = \Lambda_T(\varphi)$。因此，在这种情况下结合 (5.1) 和 (5.2) 可得

$$\mu(\psi_1 - \psi_1 \circ f_t) = \mu(\psi) = 0,$$

由 t, ψ_1 的任意性，即得 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$。□

命题 *2.22* 的证明。对于紧致度量空间 X, $C(X, \mathbb{R})$, E ($C(X, \mathbb{R})$ 中的稠密连续嵌入)可分。因此，我们可以假设 E 中存在一个在 $C(X, \mathbb{R})$ 中稠密的可数子集，并将其记为 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$。不变测度 μ 由其对

[5]在他们最初的工作中， [13], 为了证明引理 4.16，Climenhaga 和 Thompson 所需的唯一扩张性条件是命题 3.7；该命题帮助他们确定了所有论证所依据的尺度。我们的 (4.2) 与该命题类似，并发挥着相同的作用。事实上，膨胀性障碍条件的全部作用要到 [13, §4.6] 才会显现，届时他们开始着手证明平衡态的唯一性。

族 $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的积分值通过黎斯表示定理唯一确定。因此， φ-极大化测度 $\mathcal{M}_{\max}(\varphi)$ 是单点集，当且仅当对每个$i \geq 1$，闭区间 $M_i(\varphi) = \{\int g_i d\mu : \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)\}$ 都是单点集。定义

$$E_{ij} = \{\varphi \in E : \|M_i(\varphi)\| \geq j^{-1}\}$$

其中$\|M_i(\varphi)\|$ 表示区间 $M_i(\varphi)$的长度。因此，我们有$U(E)^c = \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{\infty} E_{ij}$，从而 $U(E) = \cap_{i=1}^{\infty} \cap_{j=1}^{\infty} E_{ij}^c$。只需证明$E_{i,j}$ 是闭集且内部为空。

要证明 E_{ij} 是闭集，设 φ_α 是 E_{ij} 中的一个收敛网，且 φ 是它的极限。对于某个 $\mu_\alpha^-, \mu_\alpha^+ \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi_\alpha)$，我们可以写成 $M_i(\varphi_\alpha) = [\int g_i d\mu_\alpha^-, \int g_i d\mu_\alpha^+]$。由 $\mathcal{M}_F(X)$ 的紧致性，不失一般性，假设 $\mu_\alpha^- \to \mu^-, \mu_\alpha^+ \to \mu^+$ 在弱*拓扑下成立。由于

$$\int \varphi_\alpha d\mu_\alpha^- = \int (\varphi_\alpha - \varphi) d\mu_\alpha^- + \int \varphi d\mu_\alpha^- \to \int \varphi d\mu^-,$$

并且对于任意 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$，由于 $\mu_\alpha^- \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi_\alpha)$，可得 $\int \varphi_\alpha d\mu \to \int \varphi d\mu$ $\int \varphi d\mu^- \geq \int \varphi d\mu$ ，是 φ-极大的。同理， μ^+ 是 φ-极大的。此外， $\int g_i d\mu_\alpha^+ - \int g_i d\mu_\alpha^- \to \int g_i d\mu^+ - \int g_i d\mu^- \geq j^{-1}$ 给出 $\varphi \in E_{ij}$。

为证明 E_{ij} 的内部为空，我们沿用 [22] 中相同的扰动论证。对于任意 $\varphi \in E_{ij}$ 和 $\varepsilon > 0$，集合

$$M_i(\varphi + \varepsilon g_i) = \left\{ \int g_i d\mu : \mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi + \varepsilon g_i) \right\}$$

是某个 μ_ε^- 和 μ_ε^+ 对应的闭区间 $[\int g_i d\mu_\varepsilon^-, \int g_i d\mu_\varepsilon^+]$ 。同样，我们可

y

假设 $\{\mu_\varepsilon^\pm\}_{\varepsilon>0}$ 是一个以 $\mu^\pm$ 为极限的收敛网，否则我们可以任取一个收敛子网。由于

$$\int \varphi + \varepsilon g_i d\mu_\varepsilon^- \geq \int \varphi + \varepsilon g_i d\mu$$

对于任意的 $\mu \in \mathcal{M}_F(X)$，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\int \varphi d\mu^- \geq \int \varphi d\mu$ 是 φ-极大化的结论随之成立。对于任意的 $\nu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$，由 $\int \varphi + \varepsilon g_i d\mu_\varepsilon^- \geq \int \varphi + \varepsilon g_i d\nu$ 可得 $\int g_i d\mu_\varepsilon^- \geq \int g_i d\nu$ 和 $\int g_i d\mu^- \geq \int g_i d\nu$，取极限即可。因此 $\int g_i d\mu^- = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)} \int g_i d\mu$。类似地，我们可以证明 $\int g_i d\mu^+ = \max_{\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)} \int g_i d\mu$。因此，集合 $M_i(\varphi + \varepsilon g_i)$ 在豪斯多夫度量下收敛到单点集$\{\int g_i d\mu^+\}$，且对于充分小的 ε， $\varphi + \varepsilon g_i \notin E_{ij}$。□

我们需要两个引理来证明命题 2.23。下面的引理表明，一个几乎极大化的 φ 测度可以被实现为某个与 φ接近的 g 的极大化测度。下述引理的证明改编自同胚情形下的证明，因而略去。

引理 5.1。（参见 [27, 引理 2。2]）设 $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ 以及 $\varepsilon > 0$。若 $\mu \in \mathcal{M}_F^e(X)$ 满足 $\Lambda_F(\varphi) - \int \varphi d\mu < \varepsilon$，则存在 $g \in C(X, \mathbb{R})$ 使得 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(g)$ 且 $\|\varphi - g\|_{C^0} < \varepsilon$。

此外，根据 O. Jenkinson [22]，任意遍历测度都是某个连续函数的唯一最大化测度。

引理 5.2。*(参见 [22, 定理 1])* 设 $\mu \in \mathcal{M}_F^e(X)$。那么存在$\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ 使得 $\mathcal{M}_{\max}(\varphi) = \{\mu\}$。

命题 *2.23* 的证明。给定一个收敛序列 $\varphi_n \to \varphi$，它属于 $C(X,\mathbb{R})$，令 $\mu_n \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi_n)$ 为相应的极大化测度序列。不失一般性，假设 $\{\mu_n\}$ 在弱-* 拓扑下收敛到 μ。对任意不变测度 ν，以下不等式成立，并由此可知 μ 使 φ 达到最大值:

$$\int \varphi d\nu - \|\varphi - \varphi_n\|_{C^0} \leq \int \varphi_n d\nu \leq \int \varphi_n d\mu_n \leq \int \varphi d\mu_n + \|\varphi - \varphi_n\|_{C^0}.$$

显然，$U^c = \{\varphi \in C(X,\mathbb{R}) : \mathcal{M}_F^e(X) \cap \overline{\mathcal{M}_{\max}(\varphi)} \cap \mathcal{U}^c \neq \emptyset\}$。任取收敛序列 $\varphi_n \in U^c \to \varphi$ 和 $\mu_n \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi_n) \cap \mathcal{U}^c \to \mu$。由于 $\mathcal{U}^c$ 是闭的，我们有 $\mu \in \mathcal{U}^c$ 和 $\varphi \in U^c$。因此 U 是开集。

接下来我们证明

$$\mathcal{U} := \mathcal{M}_F^e(X) \cap \bigcup_{\varphi \in U} \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$$

当 U 是开集时，U 也是开集。任取 $\mu \in \mathcal{U}$。令 $\varphi \in U$，使得 $\mu \in \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$，并令 $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}_F^e(X)$ 为 μ 的一个足够小的开邻域，使得对于任意 $\nu \in \mathcal{V}$，均有 $\Lambda_F(\varphi) - \int \varphi d\nu < \varepsilon$。根据引理 5.1，存在由 ν 使其达到最大值的 g，且对于任意 $\nu \in \mathcal{V}$，都有 $\|\varphi - g\|_{C^0} < \varepsilon$。如有需要，取更小的 ε，由 U 的开性可得 $g \in U$ 和 $\nu \in \mathcal{U}$。因此 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$，从而 $\mathcal{U}$ 是开集。

为证明当 $\mathcal{U}$ 稠密时 U 稠密，只需证明 U 与每一个非空开子集 $V \subset C(X,\mathbb{R})$ 相交。我们已经证明 $\mathcal{V} := \mathcal{M}_F^e(X) \cap \bigcup_{\varphi \in V} \mathcal{M}_{\max}(\varphi)$是 $\mathcal{M}_F^e(X)$中的非空开子集。由 $\mathcal{U}$的稠密性，存在 $\mu \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$。此外，存在由 μ最大化的 $g \in V$。同时，引理 5.2表明我们可以找到由 μ唯一最大化的 $h \in C(X,\mathbb{R})$。由齐次性，对任意 $\varepsilon > 0$有 $\mathcal{M}_{\max}(\varepsilon h) = \mathcal{M}_{\max}(h) = \{\mu\}$。这意味着$\mathcal{M}_{\max}(g + \varepsilon h) = \{\mu\}$，并且对足够小的 ε成立。因此，$g + \varepsilon h \in U \cap V$。这证明了 U的稠密性。

反之，设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{M}_F^e(X)$中的一个开子集，且 μ 是 $\mathcal{V}$中的一个遍历元素。由引理 5.2，存在由 μ唯一最大化的 $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$。我们已经证明 $V = \{\varphi \in C(X,\mathbb{R}) : \mathcal{M}_F^e(X) \cap \mathcal{M}_{\max}(\varphi) \subset \mathcal{V}\}$在 $C(X,\mathbb{R})$中是开的。显然 $\varphi \in V$，因此 V非空且为开集。由于 U 稠密，从而 $U \cap V \neq \emptyset$，进而 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$。因此，$\mathcal{U}$ 稠密。□

致谢。本研究获中国国家重点研发计划项目（编号：2021YFA1003204）、国家自然科学基金项目（编号：12401239、12201536、12071474）以及上海市科学技术委员会项目（编号：24ZR1437200）资助。

参考文献

[1] L. Barreira 和 Y. B. Pesin，《非一致双曲性：具有非零李雅普诺夫指数的系统动力学》，《数学及其应用百科全书》第 115 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007。[2] T. Bousch，Le poisson n'a pas d'arêtes，亨利·庞加莱概率与统计研究所年刊，2000，36，489 508-。[3] T. Bousch，La condition de Walters，高等师范学院科学年刊，2001，34，287-311。[4] R. Bowen，群自同态与齐性空间的熵，美国数学会汇刊 153（1971），401-414。[5] R. Bowen，具有唯一平衡态的某些系统，《数学系统理论》，1974，8(3)：193-202。[6] J. Brèmont，典型连续函数的熵与极大化测度。数学报告，2008，346(3-4)，第 199-201 页。[7] M. Brin，某类动力系统的拓扑传递性及负曲率流形上的标架流，《泛函分析及其应用》，9 16，1975 8：-。[8] M. Brin，标架流的遍历理论，载于：《遍历理论与动力系统 II》，1979-80 年马里兰州专题年会论文集，《数学进展》21，Birkhäuser，波士顿，1982，第 163–183 页。[9] M. Brin 和 M. Gromov，关于标架流的遍历性，《数学发明》，60：1-7，1980。[10] K. Burns、V. Climenhaga、T. Fisher 和 D. J. Thompson，非正曲率下测地流的唯一平衡态，《几何与泛函分析》28（2018），1209-1259。[11] V. Climenhaga、T. L. Fisher 和 D. J. Thompson，Bonatti-Viana 微分同胚的唯一平衡态，《非线性》31（2018），第 6 期，2532-2570。[12] V. Climenhaga、T. L. Fisher 和 D. J. Thompson，Mañé 微分同胚的平衡态，《遍历理论与动力系统》，39，2019，9，2433-2455。[13] V. Climenhaga 和 D. J. Thompson，具有非一致结构的流与同胚的唯一平衡态，《数学进展》，（2016），303，745-799。[14] V. Climenhaga 和 D. J. Thompson，超越 Bowen 的规范性质，《热力学形式主义》，《数学讲义》2290，（2021）3-82。[15] G. Contreras，基态一般是一个周期轨道，《数学发明》205（2016），第 2 期，383-412。[16] R. Gao、W. Shen，扩张圆映射上优化测度的低复杂度，《数学物理通讯》，2024，405：第 246 号。[17] R. Gao、W. Shen、R. Zhang，扩张圆映射上周期优化的典型性，arXiv:2501.10949，2025。[18] W. Huang、Z. Lian、X. Ma、L. Xu、Y. Zhang，一类典型映射的遍历优化理论，《欧洲数学会杂志》（2025），在线发表。[19] B. R. Hunt 和 E. Ott，混沌系统的最优周期轨道，《物理评论快报》，1996，76(13)，2254-2257。[20] B. R. Hunt 和 E. Ott，混沌系统的最优周期轨道出现于较低周期，《物理评论 E》，1996，54(1)，328–337。[21] R. B. Israel。《格气体理论中的凸性》（普林斯顿物理学丛书）。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1979。[22] O. Jenkinson，每个遍历测度都是唯一极大化测度，《离散与连续动力系统》16，第 2 期（2006）：383-392。[23] O. Jenkinson，遍历优化，《离散与连续动力系统》，2006，15(1)，197–224。[24] O. Jenkinson，动力系统中的遍历优化，《遍历理论与动力系统》，2019，39，2593–2618。

[25] Y. Zhao, E 无不动点流的熵函数，《离散与连续动力系统》39，第11期，6231–6239（2019）。[26] G. Knieper，秩一流形上测地流的最大熵测度的唯一性，数学年刊 148，（1998），291-314。[27] I. D. Morris，典型连续函数的遍历优化，《离散与连续动力系统》27（2010），383-388。[28] R. Pavlov，扩张系统中受控规范性与平衡态唯一性，《非线性》，32，2019，7，2441-2466。[29] M. Pacifico、F. Yang 和 J. Yang，经典洛伦兹吸引子及高维截面双曲吸引子的平衡态，杜克数学杂志 174（2025），第10期，1901-2010。[30] M. Shinoda，稠密连续函数集上的不可数多个极大化测度，《非线性》31（2018），2192–2200。[31] M. Shinoda、H. Takahasi 和 K. Yamamoto，非马尔可夫移位上连续函数的遍历优化，遍历理论与动力系统，46（2026），第1期，263-290。[32] R. Spatzier 和 D. Visscher，*Anosov* 系统的某些等距扩张的平衡测度，《遍历理论与动力系统》38（2018），第3期，1154-1167。[33] P. Walters，紧致度量空间上连续变换的压强的可微性，伦敦数学会杂志（2）46（1992），第3期，471-481。[34] P. Walters，遍历理论导论，《数学研究生教材》，79，Springer Science & Business Media，2000。[35] T. Wang，卡托克映射的唯一平衡态、大偏差与李雅普诺夫谱，《遍历理论与动力系统》**41** （2021），第7期，2182–2219。[36] T. Wang 和 W. Wu，具有受控规范性和熵扩张性的非一致系统的热力学形式，《数学物理通讯》407（2026），第2期，论文编号32。

湘潭大学数学与计算科学学院，湘潭，湖南 411105，中国电子邮件地址</*style*】：上海交通大学数学科学学院，东川路 *800* 号，上海 *200240*，中国电子邮件地址：a356789xe@sjtu.edu.cn厦门大学数学科学学院，厦门，361005，中国电子邮件地址：wuweisheng@xmu.edu.cn