arXiv:2602.06432v1 [math.GT] 6 Feb 2026

扭结的弧移位变换与区域弧移位变换

Tumpa Mahato 和 Prabhakar Madeti

Abstract. 本文研究扭结的一种称为弧移位变换的解结操作。首先，我们找到了一个扭结族，对于任意给定的 $n \in \mathbb{N}$，其弧移位数为 n。随后，我们定义了一种新的扭结解结操作，称为区域弧移位变换，并找到了一个扭结族，对于任意给定的$n \in \mathbb{N}$，其区域弧移位数小于或等于 n。之后，我们探讨了区域弧移位数和禁交换数的界。

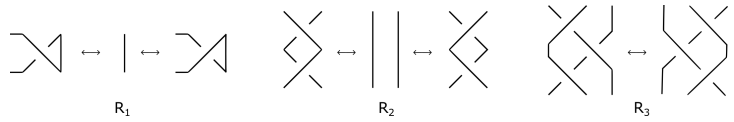
1. Introduction

Bourgoin 将扭结引入，作为虚结理论的推广。扭结可以通过包含经典交叉、虚交叉以及弧上的横杠的平面图来描述，并配合适当的 Reidemeister 型变换。该理论既包含经典结和虚结作为特殊情形，同时也呈现出在这两种情形中均未出现的新行为。特别是，交叉改变不足以将扭结化为平凡结，这促使人们研究其他解结操作及其相关的数值不变量。为解决这一问题，Negi 和 Prabhakar [9] 将弧移位变换从虚结推广到扭结，并将弧移位数定义为将扭结变换为平凡结所需的最少弧移位变换次数。

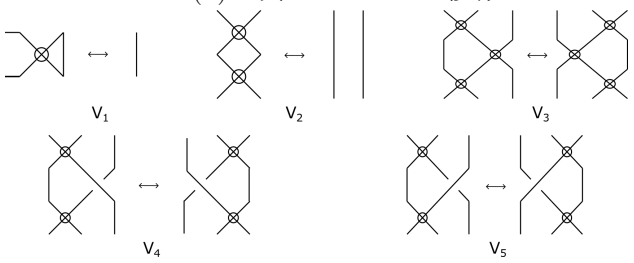
一个自然的问题是：对于任意给定的 $n \in \mathbb{N}$，是否存在弧移位数为n 的扭结? 本文通过构造一族扭结回答了这个问题，其中该族中的每个扭结的弧移位数均为 n $(\in \mathbb{N})$。此外，我们定义了一种新的图示变换，称为扭结的区域弧移位，并证明该变换是一种解结操作。随后，我们引入了两个新的数值不变量：禁交换数和区域弧移位数。找到任何解结数的严格界限十分重要，因为这有助于计算任意结的精确值。因此，我们利用禁交换数和区域弧移位数与其他已有不变量之间的关系，分别求得禁交换数的下界和区域弧移位数的上界。

本文组织如下。第 2 节回顾与扭结、弧移位变换相关的基本定义和结果。此外，本文还简要讨论多项式不变量 $Q(s,\ t)$ [7]，我们在第 2.3 小节中利用该不变量来区分扭结族中的扭结。第 3 节给出能够使任意正整数成为其弧移位数的扭结族。在第 4 节中，我们定义了一种称为区域弧移位的解结操作。第 5 节讨论扭结的两个数值不变量：区域弧移位数和禁交换数，并探究它们的界。

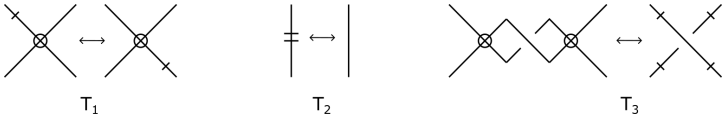
2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：57K10；次要分类号：57K12。
Key words and phrases. 扭结、解结操作、弧移位数、区域弧移位数、禁交换数。本研究得到印度国家研究基金会（ANRF）和印度政府的资助（资助编号：CRG/2023/004921/343）。



(A) 经典 Reidemeister 移动



(B) 虚 Reidemeister 移动



(C) 扭结移动

FIGURE 1. 扩展 Reidemeister 移动。

2. PRELIMINARIES

扭链图定义为带标记的一般位置平面曲线，其中标记标识边上的通常经典交叉、虚交叉和横杠。为定义扭链图之间的等价关系，在现有的广义 Reidemeister变换 T_1，T_2，T_3基础上，加入了新的 Reidemeister变换 R_1，R_2，R_3，V_1，V_2，V_3，V_4（图 1）。

注记 2.1。平凡扭结是没有横杠或带有一条横杠的经典平凡结。

高斯码和高斯图也通过记录两个经典交叉之间的弧上的横杠，推广到了扭结图（图 2）。

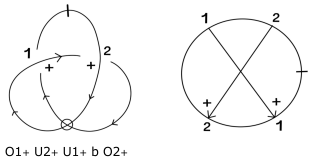
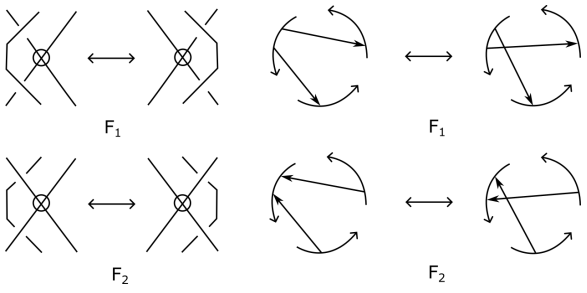


FIGURE 2. 扭结的高斯码和高斯图。

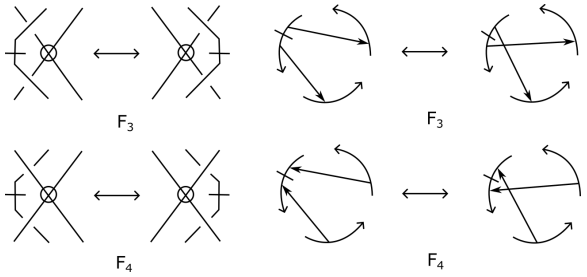
随后，针对扭结图引入了禁忌移动 F_3（或 F_4）和 T_4（图 3 和图 4），Xue 和 Deng [10] 证明了以下结论。

定理 2.2。 [10]任意扭结的高斯图都可以通过一系列类型为 R_1、R_2、R_3、T_2、T_3的移动以及禁忌移动 T_4、F_1（或 F_2）和 F_3（或 F_4），转变为一个平凡结（带有一条横杠）的高斯图。

2.1. **扭结的弧移位变换与弧移位数**。Gill、Prabhakar 和 Vesnin 在 [3] 中定义了一种针对虚结的解结操作，称为弧移位变换，后来 Negi 和 Prabhakar [9]将其推广到了扭结。在



(A) 禁忌变换 F_1 和 F_2。



(B) 禁忌变换 F_3 和 F_4。

FIGURE 3. 扭结的禁忌变换及其对应的高斯图。

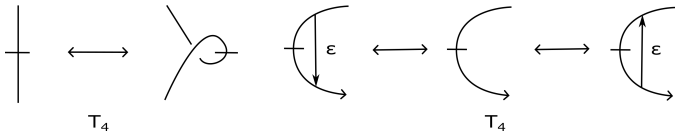


FIGURE 4. 禁忌移动 T_4。

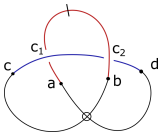


FIGURE 5. 弧（a， b）和弧（c， d）。

本节中，我们概述弧移位变换、弧移位数的定义及相关结果。

定义 2.1。扭结图中的一段弧，例如 (a， b)，定义为恰好穿过一对交叉点（经典交叉点/虚交叉点）(c_1， c_2) 的线段，其中 a 与 c_1 相连，且 b 与 c_2相连。这些交叉点之间可能出现横杠，也可能不出现。在图 5 中，弧 (a， b) 和 (c， d) 穿过交叉点 (c_1， c_2)。

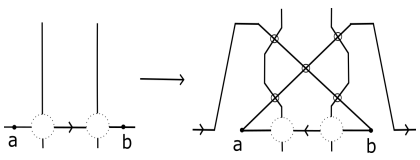


FIGURE 6. 对弧（a， b）进行弧移位变换。

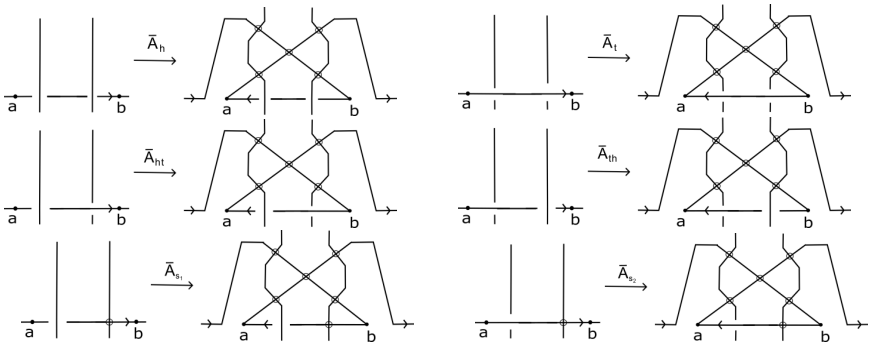


FIGURE 7. 所有 1 型弧移位变换。

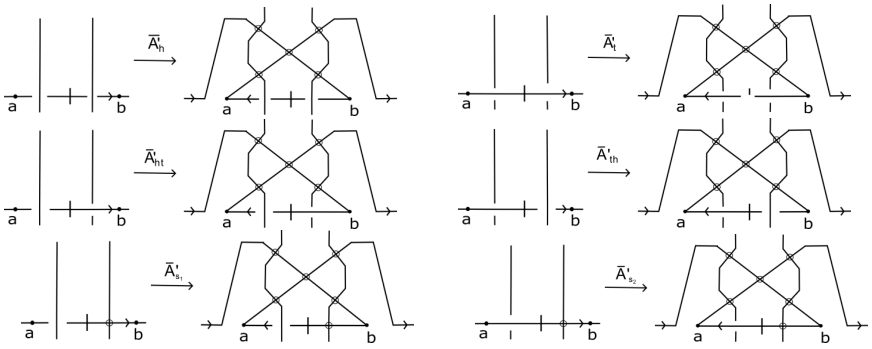


FIGURE 8. 所有 2 型弧移位变换。

定义 2.2。 在扭结图 D 中，设 $(a,\ b)$ 是一段穿过一对交叉点 $(c_1,\ c_2)$ 的弧。图 6 中的虚线圆圈 （ ） 表示这些交叉点可以是经典交叉点或虚交叉点。要对弧 $(a,\ b)$ 施加弧移位变换，我们在 a 和 b 附近的两个点处剪开该弧，并按照图 6 所示的方式，将一侧的游离端与另一侧的游离端相接。我们将施行此变换时产生的所有新交叉点标记为虚交叉点。

备注2.3. 1. 根据弧上是否存在横杠，弧移位变换分为两种，分别称为 1 型和 2 型。此外， c_1和 c_2 取虚拟或经典类型，会形成弧移位变换的各种局部构型。图 8 展示了所有 2 型变换。关于 1 型弧移位变换，请参见 [3]。2. 请注意，对一条弧应用弧移位变换后，交叉点 c_1 和 c_2 的顺序及符号都会改变。

定理 2.4. [9]每个扭结图 D 都可以通过弧移位变换和扩展 *Reidemeister* 移动转化为平凡扭结图。

定义 2.3. [9]对于任意给定的扭结 K，其弧移位数记为 $A(K)$，定义为集合 $\{A(D)$ 中的最小值；$|D$ 表示 $K\}$，其中 $A(D)$表示将图 D 转化为平凡扭结所需的最少弧移位变换次数。

定理 2.5。 [9] 弧移位数是扭结的不变量。

2.2. **扭结的奇书写数**。 对于扭结图 D 中的经典交叉 c， c 的指标记为 $ind(c)$，其定义为：沿图从 c 开始遍历一条完整路径并

返回 c [5] 时所经过的经典交叉数量。若 c 满足 $ind(c)$ 为奇数，则称其为奇交叉。令 $Odd(D)$ 表示 D 中所有奇交叉的集合。

定义 2.4. [9] 对于 D，奇绕数 $J(D)$等于 D 中所有奇交叉的符号之和，即:

$$J(D) = \sum_{c \in Odd(D)} sgn(c).$$

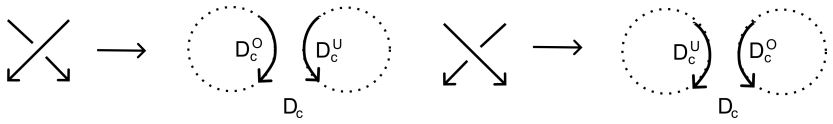
定理 2.6. [9] 奇书写数 $J(K)$ 是扭结 K的不变量。

引理 2.7. [9]奇书写数 $J(K)$ 构成了扭结 K的弧移位数 $A(K)$的下界。

$$\left|\frac{J(K)}{2}\right| \leq A(K).$$

2.3. **基于仿射指标的扭结多项式不变量**。本节简要介绍一个多项式不变量 $Q(s,t)$，它适用于扭结链[7]，其定义使用了扭结图中经典交叉点的仿射指标。我们用这个多项式来区分第 3 节中每个扭结族里的扭结。此外，通过考察每种禁忌变换 F_1(或F_2)、F_3(或 F_4)和 T_4作用下 $Q(s,t)$的变化，我们在第 5 节中得到禁忌数的下界。

对于扭结链图 D，令 $SelfX(D)$ 为 D 的经典自交叉集合，令 D_c 为在 D 的 c处对 $c \in SelfX(D)$进行平滑后得到的扭结链图。D 在 c 处的上计数分支 D_c^O 和下计数分支 D_c^U的定义如图 9 所示。



(A) 在正交叉处　　(B) 在负交叉处

FIGURE 9. D 在 c处的计数分支。

令 γ_1、γ_2、$\cdots$、γ_k为沿路径遍历图 $D_c^*(* \in O$、$U)$ 时出现的 $D_c^*(* \in O$、$U)$ 的经典交叉序列：从交叉点 c附近的一点出发，遍历图后返回该点。这里，若 D_c^*存在自交叉，则该交叉会在序列 γ_1、γ_2、$\cdots$、γ_k中出现两次。定义 γ_i处的平坦符号，记为$i(\gamma_i$、$D_c^*)$，如下所示。

$$i(\gamma_i, D_c^*) = \begin{cases} sgn(\gamma_i), & \text{if } \gamma_i \text{ is an under crossing,} \\ -sgn(\gamma_i), & \text{if } \gamma_i \text{ is an over crossing.} \end{cases}$$

于是，上、下仿射指标定义为

$$ind^*(c, D) = \sum_i i(\gamma_i, D_c^*) \qquad (* \in O, U)$$

对于 $* \in \{O, U\}$，定义

$$\bar{\rho}^*(c) = \begin{cases} 1, & \text{if } ind*(c) \text{ is odd} \\ 0, & \text{if } ind*(c) \text{ is even} \end{cases}$$

$$p^*(c) = \begin{cases} 1, & \text{if the number of bars on } D_c^* \text{ is odd} \\ 0, & \text{if the number of bars on } D_c^* \text{ is even} \end{cases}$$

定义2.5。 [7] 对于扭结链图 D，我们定义多项式 $Q_D(s,t)$：

$$Q_D(s,t) = \sum_{c \in Self(D)} sgn(c)(s^{\bar{\rho}^O(c)}t^{p^O(c)} - 1)(s^{\bar{\rho}^U(c)}t^{p^U(c)} - 1)$$

定理 2.8。 [7] 多项式 $Q_D(s,t)$ 是扭结链的不变量。

注 2.9。 [7] 当 D 是一个扭结图时， $\bar{\rho}^O(c) = \bar{\rho}^U(c)$。因此，对于每个 $c \in SelfX(D)$，我们可以计算 $\bar{\rho}^O(c)$ 和 $\bar{\rho}^U(c)$ 中的一个。

3. Twisted knots with arc shift number n

本节回答第 1 节中提到的问题：寻找弧移位数为 n 的扭结族，其中 $n \in \mathbb{N}$ 可任意给定。此外，我们使用多项式不变量 $Q(s,t)$ [7] 来区分这些扭结族中的扭结。

定理 3.1。 对于每个正整数 n，存在一个扭结 K_n，使得每个 K_n 的弧移位数都恰好等于 n。

证明。 为证明该定理，我们利用图 10 中的局部图解作为构件，构造扭结序列 K_1，K_2，$\cdots$，K_n。 i^{th} 块 B_i 包含经典交叉点 c_i，d_i 和 d'_i。对于所有 $2 \le i \le n$，每个 K_i 都由 K_{i-1} 添加一个块得到。现在，考虑图 11 所示的扭结图 K_n。我们证明 K_n 的弧移位数为 n。设 $G(K_n)$ 是 K_n 的高斯图（图 12 ）。

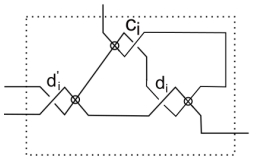


Figure 10. 构件 B_i。

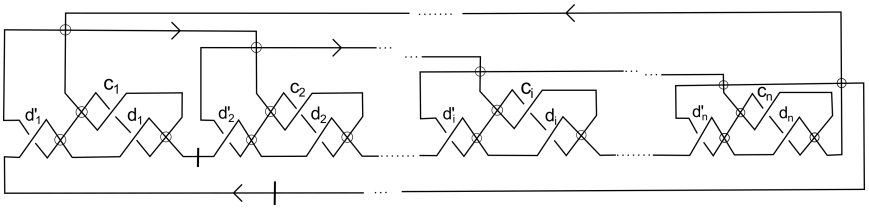


Figure 11. K_n.

现在，计算所有经典交叉的指标，我们得到，

$$ind(d_i) = (-2n + 4i - 3) \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, n,$$
$$ind(d'_i) = (-2n + 4i - 2) \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, n,$$
$$ind(c_i) = 1 \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, n.$$

因此， K_n 的奇交叉为 $d_1, \cdots, d_n, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 和 c_n。因此， K_n 的奇书写数为，

$$J(K_n) = \sum_{i=1}^{n} sgn(d_i) + \sum_{i=1}^{n} sgn(c_i) = 2n.$$

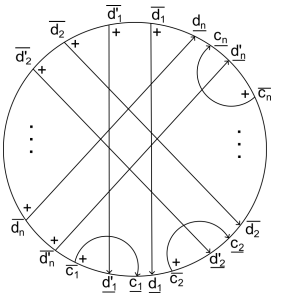


FIGURE 12. K_n的高斯图。

根据引理 2.7,

$$A(K_n) \geq n.$$

现在，我们通过沿着 K_n施加 n 次弧移位变换，并配合广义 Reidemeister 变换，从而得到平凡图，以此证明扭结图 K_n 的弧移位数为 n。

对红色弧（a，b）施加一次弧移位变换，并配合广义 Reidemeister 变换后，每个块 B_i 都会变成两条平行股线（图 13）。在 K_n 的每个块中都应用这一操作后，就能得到一个不带横杠的平凡图（图 14）。

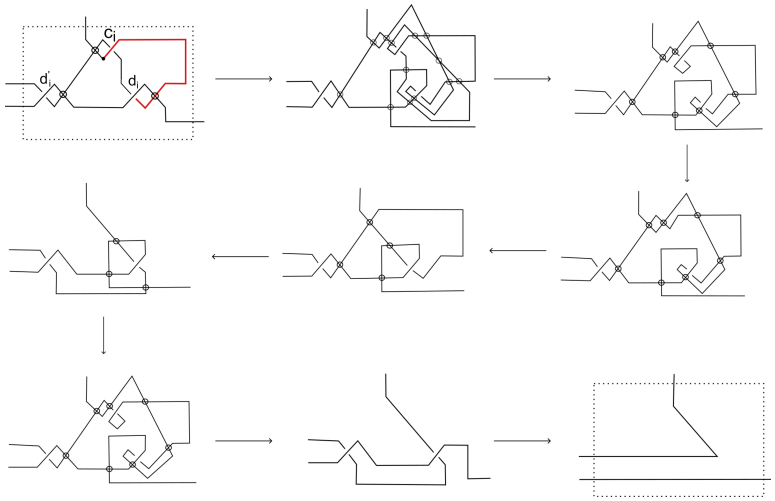


FIGURE 13. 在每个块中应用弧移位变换。

现在，为了证明该族中的每个结都彼此不同，我们计算 K_n $(1 \leq n \leq m)$ [7]的多项式不变量 $Q(s,\ t)$。根据注 2.9，我们需要$\bar{\rho}^O(c)$、 $p^O(c)$和 $p^U(c)$的值，这些值列于表 1 中。

因此，对于 $K_n(1 \leq n \leq m)$,

$$Q_{K_n}(s,t) = (st-1)^2 + (t-1)^2 + (2n-1)(s-1)^2.$$

因此，证明完毕。 □

备注 3.2。注意，在定理 3.1 中，我们构造了解结序列K_n、 K_{n-1}、 $\cdots$、 K_1、 K_0，其中 K_0是不带横杠的平凡扭结。还要注意，对于 $1 \leq i \leq n$，每个 K_i 的弧移位数均为 i。

在下述定理中，我们构造了两个不同的扭结解结序列，并求出这两个序列中每个结的弧移数。

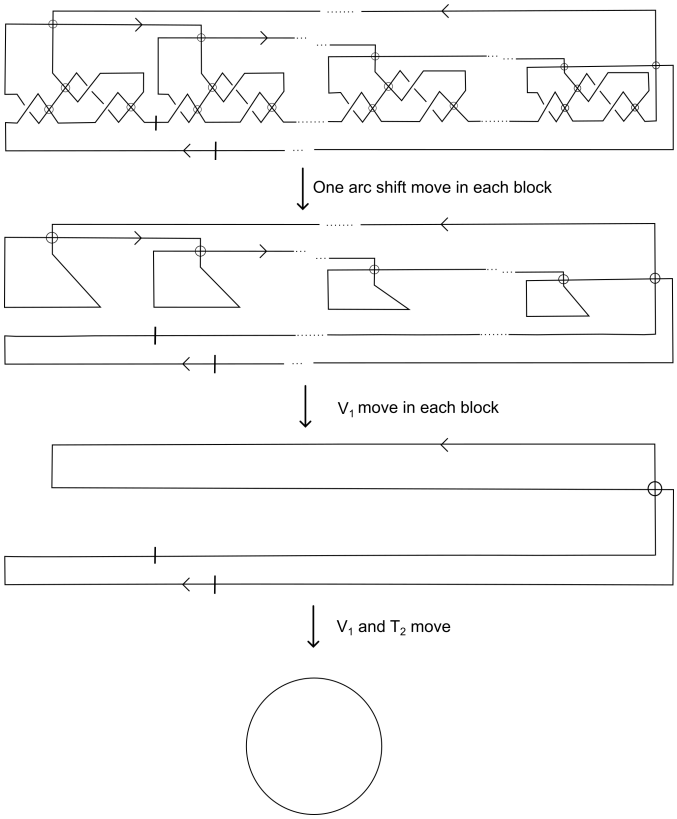


FIGURE 14. n 将 K_n 变换为不含横杠的平凡图的弧移变换。

交叉点	$ind^O(c)$	$\bar{\rho}^O(c)$	$p^O(c)$	$p^U(c)$
d_1	$-2n-2$	0	1	1
d_1'	$-2n-1$	1	1	1
$d_i,\ i=2,\ \cdots,\ n$	$-2n+4i-3$	1	0	0
$d_i', i=2,\cdots,n$	$-2n+4i-2$	0	0	0
$c_i, i=1,\cdots,n$	1	1	0	0

TABLE 1

定理3.3。 对于每个 $m \geq 1$，都存在两个不同的扭结解结序列

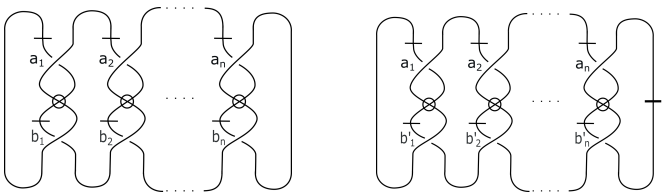
$$K_m, K_{m-1}, \cdots, K_1, K_0$$

and

$$K'_m, K'_{m-1}, \cdots, K'_1, K'_0$$

其中， K_0 和 K'_0 分别是不带横杠和带横杠的平凡扭曲纽结。此外，对于所有 $1 \leq n \leq m$，每个 K_n 和 K'_n 的弧移位数均为 n 。

证明。 对于 $1 \leq n \leq m$，我们取 K_n 和 K'_n 作为图15所示的扭结图。我们分别用 a_i, b_i 和 $a'_i, b'_i, i =$1$, \ldots, n$表示 K_n 和 K'_n 中的经典交叉点。注意， K_n和 K'_n 之间唯一的区别是图中最右弧上有一条横杠。



(A) K_n. (B) K'_n.

FIGURE 15

首先，我们将一个经典交叉点和一条横杠组成的局部图解（图16）变换为一个经典交叉点、一条横杠和两个虚交叉组成的图。现在，这一局部变换将 K_n和 K'_n 的图中的每个垂直块变换为一个虚交叉点（图17）。因此，很容易看出，通过施行 n 次弧移位变换以及广义 Reidemeister 变换，扭结 K_n 和 K'_n 分别变换为不带横杠和带横杠的平凡结（见图18、19）。因此，

$$A(K_n) \leq n \quad \text{and} \quad A(K'_n) \leq n.$$

现在， K_n 的所有经典交叉的指标如下。

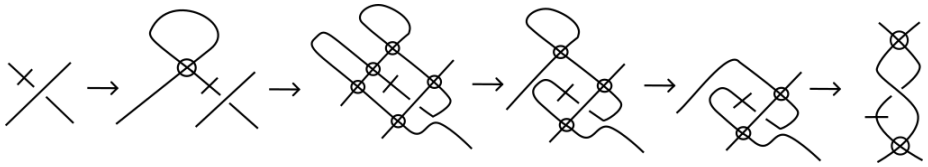


FIGURE 16

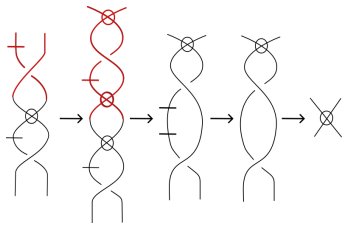


FIGURE 17. 每个垂直块都转化为一个虚交叉。

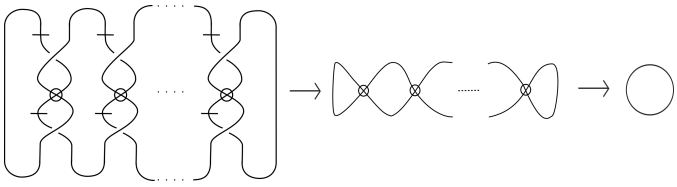


FIGURE 18. K_n 变换为一个不带横杠的平凡图。

$$ind(a_{2i}) = 1 = ind(b_{2i-1}) \text{ and}$$
$$ind(a_{2i-1}) = -1 = ind(b_{2i}).$$

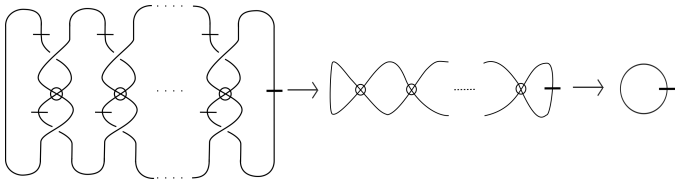


FIGURE 19. K'_n 变换为带有一条横杠的平凡图。

而 K'_n 的所有经典交叉的指标如下。

$$ind(a'_{2i}) = 1 = ind(b'_{2i-1}) \quad \text{for } i = 1, \ldots, n, \text{ and}$$
$$ind(a'_{2i-1}) = -1 = ind(b'_{2i}) \quad \text{for } i = 1, \ldots, n.$$

因此，K_n and K'_n 的奇书写数分别为 $J(K_n) = 2n = J(K'_n)$，根据引理 2.7，

$$A(K_n) \geq n \text{ and } A(K'_n) \geq n.$$

因此，

$$A(K'_n) = n = A(K'_n).$$

注意到，对于每个$n(1 \leq n \leq m)$，通过对图中第一个垂直块应用图17所示的局部变换，我们分别从 K_{n+1} 得到 K_n ，并从 K'_{n+1} 得到 K'_n 。因此，我们得到两个解结序列，其中每个序列中的扭结 K_n 和 K'_n 的弧移位数对于所有 $1 \leq n \leq m$均为 n 。

最后，我们通过计算 K_n 和 K'_n 的多项式不变量 $Q(s,t)$（对所有 $1 \leq n \leq m$）来证明这两个序列中的所有扭结彼此不同。 K_n 和 K'_n 所需的 $\bar{\rho}^O(c)$、 $p^O(c)$ 以及 $p^U(c)$ 的值分别列于表2和表3中。因此，

$$Q_{K_n}(s,t) = n(st-1)^2 + n(s-1)^2 \text{ for } 1 \leq n \leq m,$$

and

$$Q_{K'_n}(s,t) = 2n(st-1)(s-1) \text{ for } 1 \leq n \leq m.$$

由此得证。 □

交叉点 c	$ind^O(c)$	$\bar{\rho}^O(c)$	$p^O(c)$	$p^U(c)$
$a_{2i-1}, i = 1, \ldots, n$	-1	1	1	1
$a_{2i}, i = 1, \ldots, n$	1	1	1	1
$b_{2i-1}, i = 1, \ldots, n$	1	1	0	0
$b_{2i}, i = 1, \ldots, n$	-1	1	0	0

TABLE 2

交叉点 c	$ind^O(c)$	$\bar{\rho}^O(c)$	$p^O(c)$	$p^U(c)$
$a'_{2i-1}, i = 1, \ldots, n$	-1	1	1	0
$a'_{2i}, i = 1, \ldots, n$	1	1	0	1
$b'_{2i-1}, i = 1, \ldots, n$	1	1	0	1
$b'_{2i}, i = 1, \ldots, n$	-1	1	1	0

TABLE 3

4. Region Arc Shift Move for Twisted Knots

在本节中，我们将虚结图的区域弧移位概念 [2]推广到扭结图的情形。这里，将区域 定义为：由扭结图 D 在每个经典交叉点与虚交叉处各放置一个顶点而得到的 $\mathbb{R}^2$ 中的四价图 D_G 的一个连通分支。注意， D_G 的边上带有横杠。

定义 4.1. 扭结图 D 中区域 R 上的区域弧移位（R.A.S）是一种局部变换，通过对 R边界上的每条弧应用弧移位变换来实现。

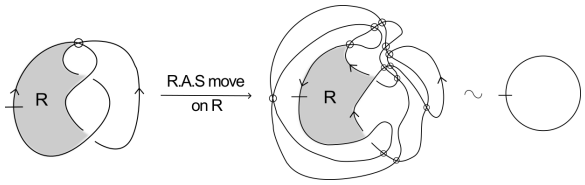


Figure 20. 在区域 R上应用区域弧移位。

在图20中，对区域 R应用了一次区域弧移位。对虚结图中的某个区域连续两次应用区域弧移位，会得到原图。Gill、Kaur 和 Prabhakar [2]证明了这一结论对虚结成立。类似的论证可证明以下命题。

命题 4.1. 设 D 为一扭结图， R 为 D的一个区域。在 R 上连续两次应用区域弧移位，所得图与 D等价。

证明。 参见文献 [2]中的命题 5.1。 □

由定理 2.2 可知，要证明区域弧移位是一种解平凡结操作，只需证明禁忌变换 F_1（或 F_2）、 F_3（或 F_4）和 T_4 均可通过区域弧移位操作实现。

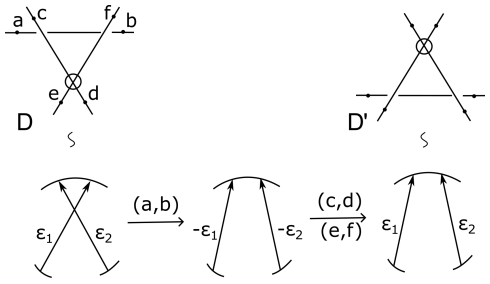


Figure 21. F_1 移动可通过一次区域弧移位实现。

命题 4.2. 设 D 是一个扭结图， D' 是对 D 应用禁忌移动 F_1（或 F_2）后得到的图。那么，存在 D 中的一个区域 R ，使得对区域 R 进行区域弧移位后，得到的图与 D' 等价。

证明。 F_1（或 F_2）移动涉及一幅不含横杠的局部图解。虚结情形的同一证明在此同样适用。参见 [2] 中的命题 5.2。参见图

 □

命题 4.3。设 D 是一幅扭结图，D' 是对 D 应用禁忌移动 F_3（或 F_4）后得到的图。那么，存在 D 中的一个区域 R，使得对区域 R 进行区域弧移位后，所得图与 D' 等价。

证明。禁忌移动 F_3 由一个包含三条边界弧的区域构成：其中一条弧有两个带横杠的经典交叉点，另外两条弧则各由一个经典交叉点和一个虚交叉组成。因此，我们需要应用一次 2 型弧移位移动 A'_t和两次 1 型弧移位变换 A'_{s_2}。从图 22 可以看出，在 D中的 R 上应用区域弧移位后，所得图的高斯图与 D'的高斯图等价。对于禁忌移动 F_4，也可以用同样的方法证明类似结果。□

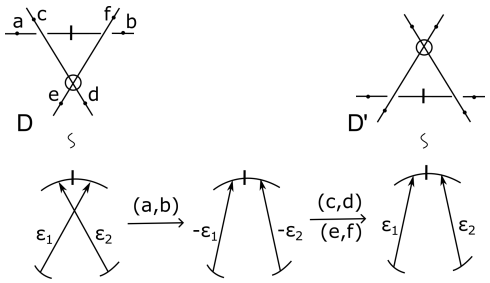


FIGURE 22. F_3 移动可通过一次区域弧移位实现。

命题 4.4。设 D 为一个扭结图，D' 为对 D 应用禁忌移动 T_4后得到的图。那么，D 中存在一个区域 R，使得在区域 R 上应用区域弧移位后，所得图与 D'等价。

证明。禁忌移动 T_4 涉及一个区域，该区域的边界弧只有一个经典交叉点。如图 23 所示，我们使用 $V1$ 变换引入一个虚交叉点，然后在点状区域上应用区域弧移位。这里，我们在边界弧上应用一次 1 型弧移位移动 A_{s_1} 和一次 2 型弧移位移动 A_{s_2}。从图中可以看出，在点状区域上应用区域弧移位后得到的图与 D' 的图等价。□

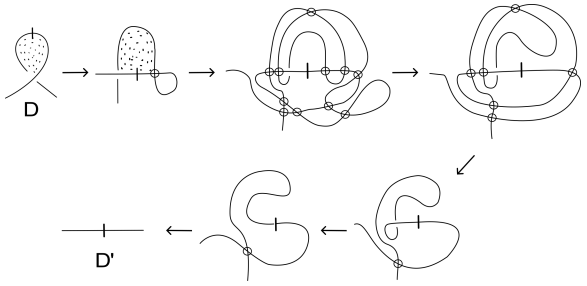


FIGURE 23. T_4 移动可通过一次 R.A.S. 变换实现。

由命题 4.2、4.3 和 4.4，我们可以得出以下结论。

定理 4.5. 区域弧移位是扭结的一种解结操作。

5. Forbidden number and region arc shift number of twisted knots

在定理 4.5 中，我们证明了区域弧移位是扭结图的一种解结操作。此外，根据定理 2.2，Xue 和 Deng 证明，禁忌变换集合 $\{F_1$（或 F_2）、F_3（或 F_2）、$T_4\}$ 可以将任意扭结图变为平凡图。受这两项结果的启发，我们定义了两个解结数，分别称为禁交换数，记作 $F(K)$，以及扭结的区域弧移位数，记作 $RA(K)$。此外，我们利用多项式 $Q(s,\ t)$ 求得了 $F(K)$ 的一个下界，并利用其与 $F(K)$ 的关系求得了 $RA(K)$ 的一个上界。

定义5.1。扭结 K 的禁交换数记为 $F(K)$，是将 K 的一个图转换为平凡扭曲图所需的最少禁忌变换次数 $\{F_1$（或 F_2）、F_3（或 F_4）和 $T_4\}$。

5.1. 禁忌变换与多项式 $Q(s,\ t)$。 在本节中，我们利用多项式不变量 $Q(s,\ t)$求出禁交换数的下界。首先，对于每一种移动 $\{F_1$（或 F_2）、F_3（或 F_4）和 $T_4\}$，我们研究施加一次禁忌移动后 $Q(s,\ t)$中各项的变化。

命题 5.1。设 K 和 K' 是两个扭结，它们可通过一次禁忌移动 F_1（或 F_2）相互转换。$b(K)$ 表示 K上的横杠数。则有如下结论。

- 如果$\#b(K)$ 为偶数，则

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=(-1)^{l_1}m_1(st-1)^2+(-1)^{l_2}m_2(t-1)^2+(-1)^{l_3}m_3(s-1)^2,$$

其中 $m_i\in\{0,1,2\}$、$l_i\in\{-1,1\}$ 及其系数满足以下互斥条件之一：

(i) $m_1=m_2=m_3=0$,
(ii) $m_1=m_2=m_3=1$ *and* $(l_1=l_2$ *or* $l_1=l_3$ *or* $l_2=l_3)$,
(iii) $m_i\in\{0,2\}; i=1,2,3$, *with* $m_1=m_2\neq m_3$.

- 若$\#b(K)$ 是奇数，则

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\pm m_4(st-1)(s-1)$$

对于 $m_4\in\{0,2\}$。

证明。我们对 F_1 移动证明这一点。对于 F_2移动的情形，论证类似。考虑分别对应于 K 和 K' 的高斯图 G和 G'（图 24）。我们将 F_1 移动前后的弦（和交叉点）分别记为 c_1,c_2 和 c_1',c_2'。

我们注意到，F_1 移动不会改变交叉点的符号。因此，$sgn(c_1)=\varepsilon_1=sgn(c_1')$ 和 $sgn(c_2)=\varepsilon_2=sgn(c_2')$。此外，

$$p^O(c_i)=p^O(c_i') \quad \text{and} \quad p^U(c_i)=p^U(c_i') \text{ for } i=1,2. \tag{1}$$

此外，由定义2.5并利用(1)，我们可以写出，

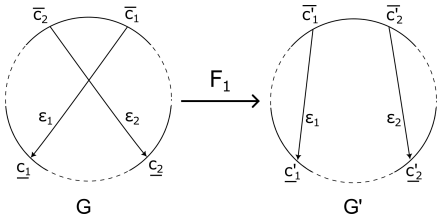


Figure 24

$$\begin{aligned}Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=&\varepsilon_1(s^{\bar{\rho}^O(c_1')}t^{p^O(c_1)}-1)(s^{\bar{\rho}^O(c_1')}t^{p^U(c_1)}-1)\\&+\varepsilon_2(s^{\bar{\rho}^O(c_2)}t^{p^O(c_2)}-1)(s^{\bar{\rho}^O(c_2')}t^{p^U(c_2)}-1)\\&-\varepsilon_1(s^{\bar{\rho}^O(c_1)}t^{p^O(c_1)}-1)(s^{\bar{\rho}^O(c_1)}t^{p^U(c_1)}-1)\\&-\varepsilon_2(s^{\bar{\rho}^O(c_2)}t^{p^O(c_2)}-1)(s^{\bar{\rho}^O(c_2)}t^{p^U(c_2)}-1).\end{aligned}$$

由图 24，我们观察到

$$\begin{aligned}ind(c_1')&=ind(c_1)+\varepsilon_2,\\ind(c_2')&=ind(c_1)-\varepsilon_1.\end{aligned}$$

因此，移动后，指标会从奇数（偶数）变为偶数（奇数）。我们根据 c_1,c_2 的指标是偶数还是奇数来讨论所有情形。情形 I：当 $ind(c_1)$ 和 $ind(c_2)$ 都是偶数时。因此， $ind(c_1')$ 和 $ind(c_2')$ 都是奇数，而 $\bar{\rho}^O$ 的对应取值如下。

$$\bar{\rho}^O(c_1)=0=\bar{\rho}^O(c_2)\text{ and }\bar{\rho}^O(c_1')=1=\bar{\rho}^O(c_2').$$

因此，

$$\begin{aligned}Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=&\varepsilon_1(st^{p^O(c_1)}-1)(st^{p^U(c_1)}-1)+\varepsilon_2(st^{p^O(c_2)}-1)(st^{p^U(c_2)}-1)\\&-\varepsilon_1(t^{p^O(c_1)}-1)(t^{p^U(c_1)}-1)-\varepsilon_2(t^{p^O(c_2)}-1)(t^{p^U(c_2)}-1).\end{aligned}$$

当 $\#b(K)$ 为偶数时，

$$p^O(c_i)=p^U(c_i)\,,i=1,2.$$

那么，对于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$、 $p^O(c_i)$ 和 $p^U(c_i)$ 的可能取值，我们有：
对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2$、 $\varepsilon\in\{1,-1\}$，

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}2\varepsilon((st-1)^2+(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=1,i=1,2,\\ \varepsilon((st-1)^2-(t-1)^2+(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=1,p^O(c_2)=0,\\ \varepsilon((st-1)^2-(t-1)^2+(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=0,p^O(c_2)=1,\\ 2\varepsilon(s-1)^2, & \text{for } p^O(c_i)=0,i=1,2.\end{cases}$$

对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2$、 $\varepsilon\in\{1,-1\}$，

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}0, & \text{for } p^O(c_i)=1,i=1,2\\ \varepsilon((st-1)^2-(t-1)^2-(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=1,p^O(c_2)=0,\\ \varepsilon(-(st-1)^2+(t-1)^2+(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=0,p^O(c_2)=1,\\ 0, & \text{for } p^O(c_i)=0,i=1,2.\end{cases}$$

现在，当 $\#b(K)$ 为奇数时，

$$p^O(c_i)\neq p^U(c_i)\,,i=1,2.$$

对于 ε_1、 ε_2、 $p^O(c_i)$ 和 $p^U(c_i)$ 的不同取值，我们得到：

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}2\varepsilon(st-1)(s-1), & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2,\varepsilon\in\{1,-1\},\\ 0, & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2,\varepsilon\in\{1,-1\}.\end{cases}$$

情形 II： $ind(c_1)$ 和 $ind(c_2)$ 中一个为奇数，另一个为偶数。不失一般性，假设 $ind(c_1)$ 为奇数， $ind(c_2)$ 为偶数。因此， $ind(c_1')$ 为偶数， $ind(c_2')$ 为奇数，相应的 $\bar{\rho}^O$ 取值如下。

$$\bar{\rho}^O(c_1)=1=\bar{\rho}^O(c_2')\text{ and }\bar{\rho}^O(c_1')=0=\bar{\rho}^O(c_2).$$

此外，

$$p^O(c_i)=p^O(c_i')\text{ and }p^U(c_i)=p^U(c_i')\text{ for }i=1,2.$$

因此,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\varepsilon_1(t^{p^O(c_1)}-1)(t^{p^U(c_1)}-1)+\varepsilon_2(st^{p^O(c_2)}-1)(st^{p^U(c_2)}-1)$$
$$-\varepsilon_1(st^{p^O(c_1)}-1)(st^{p^U(c_1)}-1)-\varepsilon_2(t^{p^O(c_2)}-1)(t^{p^U(c_2)}-1).$$

当 $\#b(K)$ 为偶数时,

$$p^O(c_i)=p^U(c_i)\ ,i=1,2.$$

那么，对于 ε_1、 ε_2、 $p^O(c_i)$ 和 $p^U(c_i)$ 的所有可能取值，我们有如下结论。对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2$、 $\varepsilon\in\{1,-1\}$,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}0, & \text{for } p^O(c_i)=1,i=1,2,\\ \varepsilon((st-1)^2+(t-1)^2-(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=1,p^O(c_2)=0,\\ \varepsilon(-(st-1)^2-(t-1)^2+(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=0,p^O(c_2)=1,\\ 0, & \text{for } p^O(c_i)=0,i=1,2.\end{cases}$$

对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2$、 $\varepsilon\in\{1,-1\}$,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}(-2\varepsilon)((st-1)^2-(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=1,i=1,2,\\ \varepsilon(-(st-1)^2+(t-1)^2-(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=1,p^O(c_2)=0,\\ \varepsilon(-(st-1)^2+(t-1)^2-(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=0,p^O(c_2)=1,\\ (-2\varepsilon)(s-1)^2, & \text{for } p^O(c_i)=0,i=1,2.\end{cases}$$

当 $\#b(K)$ 为奇数时,

$$p^O(c_i)\neq p^U(c_i)\ ,i=1,2.$$

那么，对于 $p^O(c_i)$、 $p^U(c_i)$、 ε_1 和 ε_2 的所有可能取值，我们得到,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}-2\varepsilon(st-1)(s-1), & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2,\varepsilon\in\{1,-1\},\\ 0, & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2,\varepsilon\in\{1,-1\}.\end{cases}$$

其余所有情形均可由上述讨论过的情形推出。 □

命题 5.2. 设 K 与 K' 为两个扭结，它们通过一次禁忌移动 F_3(或F_4)相互变换。且 $\#b(K)$ 表示 K上的横杠数目。则下列结论成立。

- 若$\#b(K)$ 为偶数，则

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=(-1)^{l_1}m_1(st-1)^2+(-1)^{l_2}m_2(t-1)^2+(-1)^{l_3}m_3(s-1)^2,$$

其中 $m_i\in\{0,1,2\}$、 $l_i\in\{-1,1\}$ 及系数满足下列互斥条件之一:

(i) $m_1=m_2=m_3=0$, (ii) $m_1=m_2=m_3=1$ 且（ $l_1=l_2$ 或 $l_1=l_3$）。(iii) 对所有 i, $m_i\in\{0,2\}$，其中 $m_1\neq m_2=m_3$ 且 $l_2\neq l_3$。

- 若$\#b(K)$ 为奇数，则

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\pm m_4(st-1)(s-1),$$

对 $m_4\in\{0,2\}$。

证明。 我们对 F_3 移动进行证明。在 F_4移动的情况下，类似的论证同样适用。考虑分别对应于 K 和 K' 的高斯图 G和 G' （图 25）。我们将 F_3 移动前后的弦（以及交叉点）分别记为 c_1,c_2 和 c_1',c_2'。

我们注意到， F_3 移动不会改变交叉点的符号。因此， $sgn(c_1)=\varepsilon_1=sgn(c_1')$以及 $sgn(c_2)=\varepsilon_2=sgn(c_2')$。

从图 25 中，我们观察到

$$ind(c_1')=ind(c_1)+\varepsilon_2,$$

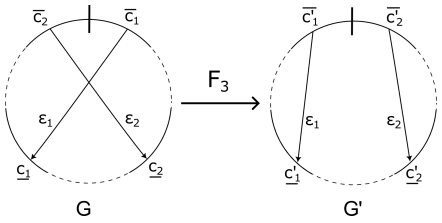


FIGURE 25

$$ind(c_2') = ind(c_1) - \varepsilon_1.$$

由于弦的两个端点 $\bar{c_1}$ 和 $\bar{c_2}$ 之间有一根横杠，

$$|p^*(c_i) - p^*(c_i')| = 1 \text{ for } i = 1, 2, \ * \in \{O, U\}.$$

因此，移动后，指标由奇数（偶数）变为偶数（奇数），p^*、$* \in \{O, U\}$ 的值在 0 和 1 之间互换。此外，我们根据 c_1、c_2 的指标是偶数还是奇数，讨论所有情形。

情形 I：当 ind（c_1）和 ind（c_2）都是偶数时。因此，ind（c_1'）和 ind（c_2'）都是奇数，$\bar{\rho}^O$ 对应的值如下。

$$\bar{\rho}^O(c_1) = 0 = \bar{\rho}^O(c_2) \text{ and } \bar{\rho}^O(c_1') = 1 = \bar{\rho}^O(c_2').$$

因此，

$$\begin{aligned} Q_{K'}(s,t) - Q_K(s,t) = {} & \varepsilon_1(st^{p^O(c_1')} - 1)(st^{p^U(c_1')} - 1) + \varepsilon_2(st^{p^O(c_2')} - 1)(st^{p^U(c_2')} - 1) \\ & - \varepsilon_1(t^{p^O(c_1)} - 1)(t^{p^U(c_1)} - 1) - \varepsilon_2(t^{p^O(c_2)} - 1)(t^{p^U(c_2)} - 1). \end{aligned}$$

当 $\#b$（K）为偶数时，

$$p^O(c_i) = p^U(c_i)\ , i = 1, 2.$$

那么，对于 ε_1、ε_2、p^O（c_i）和 p^U（c_i）的所有可能取值，我们得到以下值。

对于 $\varepsilon_1 = \varepsilon = \varepsilon_2$，其中 $\varepsilon \in \{1, -1\}$，

$$Q_{K'}(s,t) - Q_K(s,t) = \begin{cases} 2\varepsilon(st-1)^2, & \text{for } p^O(c_i) = 0, i = 1, 2, \\ \varepsilon((st-1)^2 + (s-1)^2 - (t-1)^2), & \text{for } p^O(c_1) = 0, p^O(c_2) = 1, \\ \varepsilon((st-1)^2 + (s-1)^2 - (t-1)^2), & \text{for } p^O(c_1) = 1, p^O(c_2) = 0, \\ 2\varepsilon((s-1)^2 - (t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i) = 1, i = 1, 2. \end{cases}$$

对于 $\varepsilon_1 = \varepsilon = -\varepsilon_2$，其中 $\varepsilon \in \{1, -1\}$

$$Q_{K'}(s,t) - Q_K(s,t) = \begin{cases} \varepsilon((st-1)^2 - (s-1)^2 + (t-1)^2), & \text{for } p^O(c_1) = 0, p^O(c_2) = 1, \\ \varepsilon(-(st-1)^2 + (s-1)^2 - (t-1)^2), & \text{for } p^O(c_1) = 1, p^O(c_2) = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

当 $\#b(K)$ 为奇数时，我们得到如下结果。对于 $p^O(c_i)$ $p^U(c_i)$ $\in \{0, 1\}$，

$$Q_{K'}(s,t) - Q_K(s,t) = \begin{cases} 2\varepsilon(st-1)(s-1), & \text{for } \varepsilon_1 = \varepsilon = \varepsilon_2, \varepsilon \in \{1, -1\}, \\ 0, & \text{for } \varepsilon_1 = \varepsilon = -\varepsilon_2, \varepsilon \in \{1, -1\}. \end{cases}$$

情形 II：$ind(c_1)$ 和 $ind(c_2)$ 中一个是奇数，另一个是偶数。不失一般性，假设 $ind(c_1)$ 是奇数，$ind(c_2)$是偶数。因此，$ind(c_1')$是偶数，$ind(c_2')$是奇数，$\bar{\rho}^O$ 的相应值如下。

$$\bar{\rho}^O(c_1) = 1 = \bar{\rho}^O(c_2') \text{ and } \bar{\rho}^O(c_1') = 0 = \bar{\rho}^O(c_2).$$

因此,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\varepsilon_1(t^{p^O(c_1')}-1)(t^{p^U(c_1')}-1)+\varepsilon_2(st^{p^O(c_2')}-1)(st^{p^U(c_2')}-1)$$
$$-\varepsilon_1(st^{p^O(c_1)}-1)(st^{p^U(c_1)}-1)-\varepsilon_2(t^{p^O(c_2)}-1)(t^{p^U(c_2)}-1).$$

当 $\#b(K)$ 为偶数时,

$$p^O(c_i)=p^U(c_i)\ ,i=1,2.$$

那么，对于 ε_1， ε_2、 $p^O(c_i)$ 和 $p^U(c_i)$ 的所有可能取值，我们有以下取值。

对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2$，其中 $\varepsilon\in\{1,-1\}$,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}\varepsilon(-(st-1)^2+(s-1)^2-(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=1, i=1,2,\\ \varepsilon((st-1)^2-(s-1)^2+(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=0, i=1,2,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

对于 $\varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2$，其中 $\varepsilon\in\{1,-1\}$,

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}\varepsilon(-(st-1)^2-(s-1)^2+(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=1, i=1,2,\\ -2\varepsilon(st-1)^2, & \text{for } p^O(c_1)=1, p^O(c_2)=0,\\ 2\varepsilon((t-1)^2-(s-1)^2), & \text{for } p^O(c_1)=0, p^O(c_2)=1,\\ \varepsilon(-(st-1)^2-(s-1)^2+(t-1)^2), & \text{for } p^O(c_i)=0, i=1,2.\end{cases}$$

现在，当 $\#b(K)$ 为奇数时，对于 ε_1， ε_2、 $p^O(c_i)$ 和 $p^U(c_i)$ 的可能取值，我们有以下取值。

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}-2\varepsilon(st-1)(s-1), & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=-\varepsilon_2, \varepsilon\in\{1,-1\},\\ 0, & \text{for } \varepsilon_1=\varepsilon=\varepsilon_2, \varepsilon\in\{1,-1\}.\end{cases}$$

其余所有 其余情形可由上文讨论的情形推出 。 □

命题 5.3。 设 K 和 K' 是两个扭结，它们可以通过一次禁忌移动 T_4相互变换。那么我们有

$$Q_{K'}(s,t)-Q_K(s,t)=\begin{cases}-\varepsilon(t-1)^2, & when\ \#b(K)\ is\ even,\\ 0, & when\ \#b(K)\ is\ odd,\end{cases}$$

当 $\varepsilon\in\{-1,1\}$时。

证明。 考虑与 K 和 K'对应的高斯图 G 和 G' 。注意， T_4 从 G中移除一条弦。我们用 c表示涉及移动 T_4 的 K 的交叉点和弦。假设 $sgn(c)=\varepsilon$。从图 26 中可以看出， $ind(c)$为零，即为偶数。因此， $\bar{\rho}(c)=0$ 且 $p^O(c)=1$。

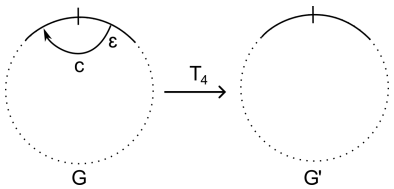


FIGURE 26

因此,

$$p^U(c)=\begin{cases}1, & \text{when } \#b(K) \text{ is even},\\ 0, & \text{when } \#b(K) \text{ is odd}.\end{cases}$$

因此，对于 $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$Q_{K'}(s,t) - Q_K(s,t) = \begin{cases} -\varepsilon(t-1)^2, & \text{when } \#b(K) \text{ is even,} \\ 0, & \text{when } \#b(K) \text{ is odd.} \end{cases}$$

□

由命题 5.1、5.2、5.3，我们得到以下结果。

定理 5.4. 设 K 为一个扭结图。那么

$$\tilde{F}(K) \geq \frac{J(K)}{4}, \textit{ when } b(K) \textit{ is even.}$$

and

$$\tilde{F}(K) \geq \frac{J(K)}{2}, \textit{ when } b(K) \textit{ is odd .}$$

˜证明。设 $F(K) = n$ 和 $K = K_n$， K_{n-1}、.....、 K_0 是在以 K_0 为平凡扭结，并对其应用 n 次禁忌变换的过程中得到的扭结序列；其中，每个 K_i 都是通过一次禁忌移动以及广义 Reidemeister 变换从 K_{i+1} 得到的。

情形 I：当 #$b(K)$ 为偶数时。

$Q(s,\ t)$ 的一般形式为

$$Q(s,t) = a_{n_1}(st-1)^2 + b_{n_2}(s-1)^2 + c_{n_3}(t-1)^2,$$

其中 $a_{n_1},\ b_{n_1},\ c_{n_1} \in \mathbb{Z}$。注意，

$$a_{n_1} + b_{n_2} = J(K),$$

其中 $J(K)$ 是奇书写数，根据 $Q(s,\ t)$ 的定义。

Now,

$$|Q_K(s,t) - Q_{K_n}(s,t)| \leq |Q_K(s,t) - Q_{K_1}(s,t)| + |Q_{K_1}(s,t) - Q_{K_2}(s,t)| + \cdots + |Q_{K_{n-1}}(s,t) - Q_{K_n}(s,t)|.$$

Using Proposition 5.1,5.2,5.3 and the fact that $Q_{K_0}(s,t) = 0$, we can write

$$|Q_K(s,t) - Q_{K_n}(s,t)| \leq 2n((st-1)^2 + (t-1)^2 + (s-1)^2),$$

$$\text{or, } |a_1(st-1)^2 + a_2(s-1)^2 + a_3(t-1)^2| \leq 2n((st-1)^2 + (t-1)^2 + (s-1)^2).$$

将 $s = 2$ 和 $t = 1$ 代入等式两边，得到：

$$|a_1 + a_2| \leq 4n,$$

这意味着

$$\tilde{F}(K) \geq \frac{|J(K)|}{4}.$$

情形 II：当 #$b(K)$ 为奇数时。

$Q(s,\ t)$ 的一般形式为

$$Q(s,t) = a_4(st-1)(s-1),$$

其中 $a_4 \in \mathbb{Z}$。注意，

$$a_4 = J(K),$$

其中 $J(K)$ 是奇书写数，根据 $Q(s,\ t)$ 的定义。利用命题 5.1、5.2、5.3 以及 $Q_{K_n}(s,\ t) = 0$ 这一事实，我们可以写出

$$|Q_K(s,t) - Q_{K_n}(s,t)| \leq 2n(st-1)(s-1),$$

$$\text{or, } |a_4(st-1)(s-1)| \leq 2n(st-1)(s-1), \text{or, } n \geq \frac{|a_4|}{2}.$$

因此，

$$\tilde{F}(K) \geq \frac{|J(K)|}{2}.$$

□

现在，我们如下定义区域弧移位数。

定义 5.2. 扭结区域弧移位数，记作 $RA(K)$，是将 K 的一个图变换为平凡扭曲图所需的最少区域弧移位操作数。

根据定义可知， $RA(K)$是扭结不变量。此外， $RA(K)$ =0意味着扭结 K 是平凡扭结。

例5.1。 图20中的扭结 K 满足 $RA(K) = 1$。

˜定理5.5。 设 $F(K)$ 是扭结 K的禁交换数。那么，$RA(K) \leq F(K)$。

˜证明。 设扭结的禁交换数为 $F(K) = n$。因此，存在扭结 K 的一个图 D，对其施加 n 次禁忌变换（F_1（或F_2）、 F_3（或 F_4）、 T_4）后，可得到一个平凡扭结图 D 。现在，根据命题 4.2、4.3、4.4，每个禁忌变换都可以通过一次区域弧移位操作实现。因此，施加 n 次区域弧移位操作可将 D 变换为平凡扭曲图。于是，

$$RA(K) \leq n = \tilde{F}(K)$$

□

例5.2。 在下面的例子（图27）中，扭结 K 具有 $RA(K) = 1$。在点状区域上应用区域弧移位移动后，得到一个带有一条横杠的平凡图˜。此外， $F(K) = 2$。这是一个严格不等式$RA(K) < F(K)$成立的例子。

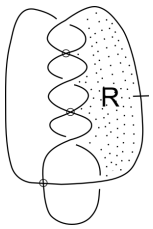


FIGURE 27

定理5.6。 对于每个正整数 $n \geq 1$，存在一个扭结 K_n，使得 K_n 的区域弧移位数小于或等于 n。

证明。 我们取 K_n 为图28所示的扭结图。我们将 K_n 中的经典交叉点记为 c_i 和 c_i'、$i = 1$.....、 n。

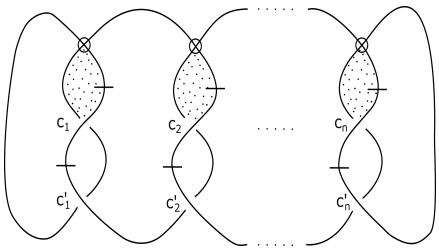


FIGURE 28. K_n.

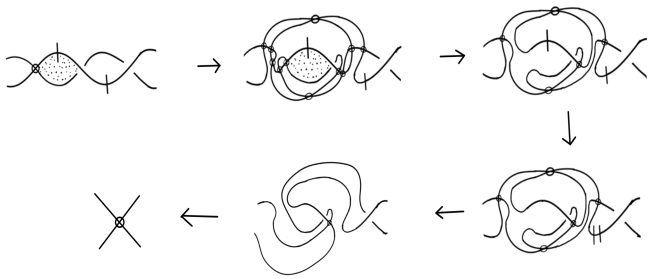


FIGURE 29. 局部图经过一次 R.A.S. 变换后变为一个虚交叉。

首先，我们说明，在点状区域应用一次 R.A.S. 变换后，图29中的局部图解会转化为一个虚交叉。因此，很容易观察到，通过应用n 次 R.A.S. 变换和广义 Reidemeister 变换，扭结 K_n 可以变换为一个平凡扭结（见图30）。因此，

$$A(K_n) \leq n.$$

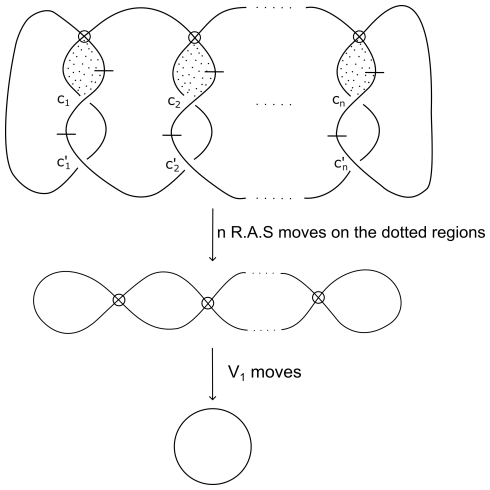


FIGURE 30. K_n 经过 n 次 R.A.S. 变换后变为一个平凡扭结。

现在，我们计算 K_n 的多项式不变量 $Q(s,t)$，以证明对于每个 $n \geq 1$， K_n 都彼此不同。表 4 给出了 K_n 所需的 $\bar{\rho}^O(c)$ 、 $p^O(c)$ 和 $p^U(c)$ 的取值。

因此，

$$Q_{K_n}(s,t) = n(st-1)^2 - n(s-1)^2 \text{ for } n \geq 1.$$

□

ACKNOWLEDGMENTS

作者感谢Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）、印度政府的经费支持（资助号: CRG/2023/004921/343）。

交叉点 c	$ind^O(c)$	$\tilde{p}^O($ $c)$	$p^O(c)$	$p^U(c)$
$c_{(2i-1)}$	-1	1	1	1
$c_{(2i)}$	1	1	1	1
$c'_{(2i-1)}$	-1	1	0	0
$c'_{(2i)}$	1	1	0	0

TABLE 4

REFERENCES

[1] M. O. Bourgoin，扭结链理论，*Algebraic & Geometric Topology* **8** 2008 3, , （），第–期。[2] A. Gill、K. Kaur和M. Prabhakar，虚结的弧移位数与区域弧移位数， *J. Korean Math. Soc.*，**56** (2019)，第4期，1063–1081。[3] A. Gill、K. Kaur和M. Prabhakar，某些虚结的弧移位数，载于 *Trends in Algebraic Topology and Related Topics Trends Mathematics* 2018 , （Birkhauser/Springer）。[4] L. H. Kauffman，虚结理论， *European J. Combin.*，**20** (1999)，第7期，663–690。[5] L. H. Kauffman，虚结的自链接不变量， *Fund. Math.*，**184** (2004)，135–158。[6] H. Murakami，经典结上的若干度量， *Math. Ann.*，**270** (1985)，35–45。[7] N. Kamada和S. Kamada，利用仿射指标的虚链与扭结链不变量，*Topology Appl.*，**371** (2025)，109356。[8] N. Kamada，由虚链不变量导出的扭结链不变量，*J. Knot Theory* , （），第。[9] K. Negi和M. Prabhakar，扭结的弧移位推广，*Ramifications* **26** 2017 9, 1743007
J. Knot Theory , （），第。[10] S. Xue和Q. Deng，用高斯图禁忌变换解开扭结，*Ramifications* **33** 2024 2, 2450004
J. Knot , （），第。*Theory Ramifications* **32** 2023 1, 2350008

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, ROPAR, PUNJAB 140001, INDIA*Email address*: staff.tumpa.mahato@iitrpr.ac.in

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY, ROPAR, PUNJAB 140001, INDIA*Email address*: prabhakar@iitrpr.ac.in