个体失真准则下向量高斯源的联合有损压缩

陈帅傲、高俊远、石宇轩、吴永鹏、Giuseppe Caire、H. Vincent Poor 和张文军

arXiv:2602.06464v1 [cs.IT] 6 Feb 2026

摘要——**本文研究向量高斯源的联合压缩问题，其中对每个源分量分别施加个体失真约束。已知率失真函数（RDF）的下界为根据Hadamard不等式推导出的压缩率；当半正定条件（SDC）成立时，该下界即为精确值。然而，现有研究往往忽略了SDC不成立的情况。此外，即使SDC成立，对于相关性如何提升压缩效率，仍缺乏定量刻画。本文细化了SDC成立时的已有结果，并在SDC不成立时推导出新的理论结果，从而确立了存在相关性时实际信源压缩的理论极限。具体而言，我们考察了最优源重构的性质，并给出了其维数上界，表明当SDC不成立时，低维重构对于实现高效压缩至关重要。在可扩展的双类型相关（2TC）协方差框架下，我们证明满足SDC的概率会随源长度增加而呈指数衰减，凸显了在SDC不成立时探索理论极限的重要性。此外，我们确定了向量源为达到Hadamard压缩率应具备的分量间相关性，揭示了失真约束与相关性之间的权衡。更重要的是，通过推导出纳入相关性的显式率失真函数，我们定量刻画了充分利用源相关性所带来的压缩效率增益。**

索引词—**失真准则、Hadamard不等式、有损压缩、率失真函数、向量源。**

一、引言

人工智能（AI）、物联网（IoT）和边缘计算的迅猛发展，催生了海量数据集，其中包含重要性各异的分量，任务关键元素与非必要数据并存 [1]。高效压缩异构数据流，是满足下一代通信系统对严苛时延、传输和存储需求的关键手段 [2]。从信息论视角来看，有损压缩的基本权衡在于压缩率与重构对象的保真度之间 [3]，并由率失真函数（RDF）从数学上刻画 [4]。

失真准则的选择是确立率失真函数（RDF）的关键。常用的失真准则包括总和失真准则和个体失真准则，如下所示 [5], [6]。

- **总和失真准则：**该准则约束向量源与其重构在所有N分量上的总和失真，即 $\sum_{i=1}^{N} d_i \leq \sum_{i=1}^{N} e_i$，其中 d_i 为分量失真， e_i 为其相应的约束。通过对向量高斯源 [7] 应用反向注水原理，为各分量分配最优失真，从而得到率失真函数（RDF）。

- **个体失真准则：**这些准则的核心思想是对每个分量施加不同的失真约束 $d_i \leq e_i$。这些准则广泛应用于网络编码 [8], [9]，能够支持分量不同的保真度需求，并捕捉源相关性对压缩率的影响。因此，本文采用这些准则。

目前关于个体失真准则下率失真函数（RDF）的最佳已知结果依赖于 Hadamard 不等式 [10]，该不等式给出了 RDF 的下界，即$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N],\ \mathsf{e}) \geq \mathbb{R}^{l}_{\mathbf{x}}([N],\ \mathsf{e})$，其中较低的率为 [11]–[13]

$$\mathbb{R}^{l}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) = \frac{1}{2} \log \frac{\det(\mathsf{K})}{\det(\mathsf{E})}. \tag{1}$$

在公式（1）中，K 表示向量源的协方差矩阵，$\mathsf{E} = \mathrm{diag}(e_1, \cdots, e_N)$ 是一个矩阵，其中 e_i 表示第 i 个分量的失真约束。仅当半正定条件（SDC）

$$\mathsf{K} \succeq \mathsf{E} \tag{2}$$

满足时，较低的率才等于率失真函数（RDF）。现有研究通常忽略不满足 SDC 的情况，对此缺乏探索。此外，即使满足 SDC，对于相关性如何实现更高效压缩，也缺乏定量刻画。

本文研究了个体失真准则下向量高斯源的联合压缩。对于满足公式（2）中 SDC 的情况，我们完善了现有结果；对于不满足 SDC 的情况，则得出了新的理论结果。具体而言，我们在定理1中给出了任意协方差和失真约束下最优源重构的性质。随后，我们在定理2中建立了最优重构维数的上界，并发现当 SDC 不成立时，高效压缩必然需要低维重构。接下来，我们考察了可扩展双类型相关（2TC）协方差下的 SDC 及其对应的率失真函数。在定理3中，我们定量确立了充分利用源相关性来提高压缩效率的理论极限。

S. Chen、Y. Wu 和 W. Zhang 任职于中国上海 200240 的上海交通大学电子工程系（电子邮箱：{shuao.chen、yongpeng.wu、zhangwenjun}@sjtu.edu.cn）（通信作者：吴永鹏）。J. Gao 任职于中国香港特别行政区的香港理工大学电气与电子工程系（电子邮箱：junyuan.gao@polyu.edu.hk）。Y. Shi 任职于中国深圳 410083 的鹏城实验室网络智能部（电子邮箱：shiyx01@pcl.ac.cn）。G. Caire 任职于德国柏林 10587 的柏林工业大学通信与信息论组（电子邮箱：caire@tu- berlin.de）。H. V. Poor 任职于美国新泽西州普林斯顿 08544 的普林斯顿大学电气与计算机工程系（电子邮箱：poor@princeton.edu）。

此外，我们将 SDC 等价地转换为一组标量不等式，从而能够从失真约束和源相关性的角度对其进行分析。从失真约束的角度来看，我们在定理4中证明，满足 SDC 的概率会随源长度呈指数级衰减，这表明有必要针对不满足 SDC 的情况进一步开展分析。从源相关性的角度来看，我们在定理5中确定了向量源为达到公式（1）中的压缩率所需具备的定量分量间相关性。总之，我们确立了个体失真约束下新的理论极限，并给出了定量结果以及有关相关性如何实现更高效压缩的宝贵见解。

记号：大写和小写粗体字母分别表示随机矩阵和向量。我们用无衬线字母表示确定性矩阵和向量。r(a) 表示向量 a 中非零元素的个数。我们分别用 tr(A)、det(A)、r(A)、diag(A) 和 A^{T} 表示矩阵 A 的迹、行列式、秩、对角元素和转置。我们记 $[x]^+ = \max\{x, 0\}$。对于整数$k > 0$，我们记 $[k] = \{1, 2, \cdots, k\}$。对于实对称矩阵 A，令 $\mathsf{A}[\mathcal{I}]$ 表示由 $\mathcal{I} \subseteq [N]$索引的主子矩阵。我们用三元组 (n_+, n_-, n_0) 表示 A 的正、负和零特征值的个数（计入重数）。对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$，$f(x) = O(g(x))$ 表示 $\limsup_{x\to\infty} |f(x)/g(x)| < \infty$，而 $f(x) = \Theta(g(x))$ 表示 $\limsup_{x\to\infty} |f(x)/g(x)| = c$，其中 $0 < c < \infty$。

II. 系统模型

A. 问题设置

考虑一个定义在字母表 $\mathcal{X}^N$ 上的 N 维向量高斯源 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(0, \mathsf{K})$，其中源的每个分量 x_i 均针对 $i \in [N]$进行了方差归一化。协方差矩阵 K 的特征值分解（EVD）$\succ 0$ 表示为 $\mathsf{K} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^{\mathsf{T}}$，其中 $\Lambda = \mathsf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N)$，U 由相应的特征向量组成。[1] 对于向量高斯源$\mathbf{x}$的联合有损压缩，失真由二次失真矩阵量化

$$\mathsf{D} = \mathbb{E}\left[(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{x}})^{\mathsf{T}}\right], \tag{3}$$

其中 $\widehat{\mathbf{x}}$ 是$\mathbf{x}$的重构。对于每个分量 x_i，失真 d_i（即 D 的第 i 个对角元素）满足$d_i \le e_i$，且失真约束为 $e_i \in (0, 1]$。向量 $\mathsf{e} = [e_1, e_2, \cdots, e_N]^{\mathsf{T}}$ 表示单独失真约束的有序序列。

注 1. 虽然我们假设每个分量方差均已归一化，但这一假设具有足够的普适性。设 $\widetilde{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_{\widetilde{\mathbf{x}}})$ 是一个非退化的 N 维长源，其协方差为 $\Sigma_{\widetilde{\mathbf{x}}} = \mathsf{V}^{\frac{1}{2}}\mathsf{K}\mathsf{V}^{\frac{1}{2}}$，其中 $\mathsf{V} = \mathsf{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_N^2)$ 是由各个方差 $\sigma_i^2 = \mathbb{E}[\widetilde{x}_i^2]$ 构成的方差矩阵。对于任意 $d_i > 0$，$i \in [N]$，在 $\widetilde{x}_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ 上施加二次失真约束 $\mathbb{E}[(\widetilde{x}_i - \widehat{\widetilde{x}}_i)^2] \le \widetilde{d}_i$，等价于 $\mathbb{E}[(x_i - \widehat{x}_i)^2] \le e_i$，其中 $e_i = \widetilde{d}_i/\sigma_i^2$，$x_i = \sqrt{e_i}\,\widetilde{x}_i/\sqrt{\widetilde{d}_i}$，且 $\widehat{x}_i = \sqrt{e_i}\,\widehat{\widetilde{x}}_i/\sqrt{\widetilde{d}_i}$。因此，对于任意 $i \in [N]$，都有 $x_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$。 ◇

[1]任何具有零特征值的半正定矩阵都称为退化矩阵，它可以投影到正定矩阵子空间 [14]上。

B. 率失真函数的定义

设 $\{\mathbf{x}(t)\}_{t=1}^{\infty}$ 是一个独立同分布（i.i.d.）的向量高斯源，对于所有 $t \ge 1$，每个 $\mathbf{x}(t) \sim \mathcal{N}(0, \mathsf{K})$。我们将第 i 个源分量的 k 个 i.i.d. 实现记作 $\mathbf{x}_i^k \triangleq [x_i(1) \cdots, x_i(k)],$，并将所有 N 个源 $\mathcal{X}^{Nk}$ 的 k 个 i.i.d. 实现记作 $\mathbf{x}^k \triangleq [\mathbf{x}_1^k \cdots \mathbf{x}_N^k]^{\mathsf{T}} \in$ 分量对应的拼接源向量和重构向量分别定义为 $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}$ 和 $\widehat{\mathbf{x}}^k \triangleq [\widehat{\mathbf{x}}_1^k, \widehat{\mathbf{x}}_N^k]^{\mathsf{T}} \in \widehat{\mathcal{X}}^{Nk}$。一个 $(N, k, 2^{kR})$ 有损码由一个公共编码器 $\mathsf{f}: \mathcal{X}^{Nk} \mapsto \{1, 2, \cdots, \lfloor 2^{kR} \rfloor\}$ 和一个解码器 $\mathsf{g}: \{1, 2, \cdots, \lfloor 2^{kR} \rfloor\} \mapsto \widehat{\mathcal{X}}^{Nk}$ 组成。分块平均失真定义为 $d(\mathbf{x}_i^k, \widehat{\mathbf{x}}_i^k) \triangleq \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}(x_i(t) - \widehat{x}_i(t))^2$。接下来，我们定义个体失真准则下的率失真函数。

定义 1。如果存在一系列$(N, k, 2^{kR})$ 码，使得对于所有满足 $i \in [N]$ 的 $\varepsilon_i > 0$ 以及所有充分大的 k，则称(R,e) 是可达的，

$$\mathbb{E}\left[d(\mathbf{x}_i^k, \widehat{\mathbf{x}}_i^k)\right] \le e_i + \varepsilon_i, \tag{4}$$

则称其成立。在个体失真准则下，率失真函数定义为

$$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) \triangleq \inf\{R : (R, \mathsf{e}) \textit{ is achievable}\}. \tag{5}$$

对于总和失真准则，可以将式（4）中的失真保真度替换为总和失真，从而得到率失真函数。下面的引理给出了个体失真准则下率失真函数的优化表述。

引理 1（个体失真准则下率失真函数的表述，[11]）。式（5）中的率失真函数由以下问题的解给出

$$\min_{\mathsf{D}} \quad \frac{1}{2}\log\det(\mathsf{D}^{-1}\mathsf{K}), \tag{6a}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathsf{d} \le \mathsf{e}, \tag{6b}$$

$$0 \prec \mathsf{D} \preceq \mathsf{K}, \tag{6c}$$

其中，$\mathsf{d} = \mathsf{diag}(\mathsf{D})$ 是D的对角元素向量，而$\mathsf{e} = [e_1, \cdots, e_N]^{\mathsf{T}}$ 是归一化的失真约束向量。$\mathsf{d} \le \mathsf{e}$ 表示对所有 $i \in [N]$均有 $d_i \le e_i$。

式（6c）中的矩阵约束确保率失真函数可达。我们将向量记为 $\mathsf{d}^\star = \mathsf{diag}(\mathsf{D}^\star)$，其中 $\mathsf{D}^\star$是式（6）中最大行列式问题的最优解。

III. 任意协方差下的信源压缩

对于满足个体失真准则的向量高斯源压缩问题，信源 $\mathbf{x}$ 可通过反向测试信道建模为 $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{x}} + \mathbf{z}$ [11], [15]，其中重构 $\widehat{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(0, \mathsf{K}_{\widehat{\mathbf{x}}})$，噪声 $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(0, \mathsf{K}_{\mathbf{z}})$。由于 $\widehat{\mathbf{x}}$ 与 $\mathbf{z}$ 相互独立，它们的协方差矩阵满足 $\mathsf{K} = \mathsf{K}_{\widehat{\mathbf{x}}} + \mathsf{K}_{\mathbf{z}}$。当率失真函数达到时，我们将 $\widehat{\mathbf{x}} = \widehat{\mathbf{x}}^\star$ 和 $\mathbf{z} = \mathbf{z}^\star$记作，其正定协方差矩阵为 $\mathsf{K}_{\mathbf{z}^\star} = \mathsf{D}^\star$。因此，最优重构 $\widehat{\mathbf{x}}^\star$ 的协方差为 $\mathsf{K}_{\widehat{\mathbf{x}}^\star} = \mathsf{K} - \mathsf{D}^\star$。下列定理将 $\widehat{\mathbf{x}}^\star$ 的性质与式（2）中的 SDC 联系起来。

定理1。对于实现率失真函数 *RDF* 的最优重构 $\widehat{\mathbf{x}}^\star$ 的协方差矩阵 $\mathsf{K}_{\widehat{\mathbf{x}}^\star}$，有

$$\det(\mathsf{K}_{\widehat{\mathbf{x}}^\star}) \begin{cases} > 0, & \textit{if SDC is satisfied and inactive}, \\ = 0, & \textit{otherwise}. \end{cases} \tag{7}$$

证明：我们验证 Slater 条件，以确保引理 1 中凸问题的强对偶性。对于有界

且非平凡的 $\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N],\ \mathsf{e})$，式 (6b) 中的约束是仿射的，并且存在一个可行的 D，位于式 (6c) 的相对内部。因此，严格可行性成立，Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件既是全局最优性的必要条件，也是充分条件 [16]。对于凸最大行列式问题，省略常数 $\log(\det(\mathsf{K}))/2$ 的拉格朗日函数为 $\mathcal{L}(\mathsf{D};\mathsf{P},\ \mathsf{Q}) = -\frac{1}{2}\log\det(\mathsf{D}) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathsf{P}(\mathsf{K}-\mathsf{D})) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathsf{Q}(\mathsf{E}-\mathsf{D}))$，其中 $\mathsf{P},\ \mathsf{Q} \succeq 0$，且 Q 为对角矩阵。根据驻点条件，最优失真矩阵满足

$$\mathsf{D}^{\star} = (\mathsf{P}+\mathsf{Q})^{-1}. \tag{8}$$

由于 $\mathsf{D}^{\star}$ 是对称的且 Q 是对角矩阵，因此 P 是对称的。

情形 I： 如果 SDC 得到满足且处于非活跃状态，即 $\mathsf{K}-\mathsf{D}^{\star} \succ 0$，则互补松弛条件

$$\mathsf{P}(\mathsf{K}-\mathsf{D}^{\star}) = 0 \tag{9}$$

意味着 $\mathsf{P} = 0$。因此，由于 $\mathsf{Q} \succ 0$ 是对角矩阵，可知 $\mathsf{D}^{\star} = \mathsf{Q}^{-1} \succ 0$ 是对角矩阵；另一个互补松弛条件

$$\mathsf{Q}(\mathsf{e}-\mathsf{d}^{\star}) = 0 \tag{10}$$

得出 $\mathsf{d}^{\star} = \mathsf{e}$ 和 $\mathsf{D}^{\star} = \mathsf{E}$，从而完成第一部分。

情形 II： 在 $\mathsf{K}-\mathsf{E} \succeq 0$ 的边界上，也就是说，SDC 得到满足且处于活跃状态，$\mathsf{K}-\mathsf{D}^{\star}$ 是奇异的。在这种情况下，$\mathsf{D}^{\star} = \mathsf{E}$ 仍满足 KKT 条件。若 SDC 未得到满足，即 $\mathsf{K}-\mathsf{E} \not\succeq 0$，式 (9) 不再意味着 $\mathsf{P} = 0$。假设 $\mathsf{P} = 0$ 仍成立，则式 (8) 意味着 $\mathsf{D}^{\star}$ 是对角矩阵，而式 (10) 直接给出 $\mathsf{D}^{\star} = \mathsf{E}$。这将回到情形 I，与原始可行性约束矛盾。因此，我们有 $\mathsf{D}^{\star} \neq \mathsf{E}$ 和 $\mathsf{P} \neq 0$。由式 (9) 可得第二部分的等价条件 $\det(\mathsf{K}-\mathsf{D}^{\star}) = 0$。 ■

定理1中，我们证明了公式（1）中的率给出精确的率失真函数（即满足 SDC），当且仅当最优源重构是非退化的。反过来，字母表 $\widehat{\mathcal{X}}^N$ 上的任何非退化重构都无法达到 Hadamard 压缩率。换言之，重构具有 N 个独立分量的信源，只需少于 N 个独立分量。

定理1考察 $\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}$ 是否满秩。以下定理进一步给出 $\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}$ 的秩上界，该秩即最优重构中非平凡独立分量的数量。

定理2。 最优重构的维数，即其协方差矩阵的秩，具有如下上界：

$$\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) \le \min\{N - \mathsf{r}(\mathsf{e}-\mathsf{d}^{\star}), n_{+}(\mathsf{K}-\mathsf{E})\}. \tag{11}$$

证明：回顾 $\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}} \succeq 0$，最优重构中的 $\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 个独立分量 $\hat{\mathbf{x}}^{\star}$ 已足以达到所需的失真保真度。相对于原始信源 $\mathbf{x}$，存在一个降维高斯信源 $\bar{\mathbf{x}} \sim \mathcal{N}(0,\ \bar{\mathsf{K}})$，其长度为 $\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$，并对应一个向量失真约束 $\bar{\mathsf{e}}$。设其最优重构为 $\bar{\hat{\mathbf{x}}}^{\star} \sim \mathcal{N}(0,\ \bar{\mathsf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$，由于 $\mathsf{r}(\bar{\mathsf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) \le \mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$，该重构是非退化的。$\bar{\mathbf{x}}$ 的每个分量都满足针对 $1 \le i \le \mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 的最优测试信道 $\bar{x}_i = \bar{\hat{x}}_i^{\star} + \bar{z}_i^{\star}$。$\mathbf{x}$ 的非退化性意味着 $\mathsf{K}-\mathsf{D}^{\star} \succ 0$。根据定理1证明中情形 I 的论证，可得

$$\bar{\mathsf{D}}^{\star} = \bar{\mathsf{E}}, \tag{12}$$

因此我们得到 $\mathsf{K}-\mathsf{E} \succ 0$。另一方面，对于矩阵 $\mathsf{K}-\mathsf{E}$，由于维数为 $\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 的子矩阵是严格正定的，因此可得

$$\mathsf{r}(\bar{\mathsf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) \le n_{+}(\mathsf{K}-\mathsf{E}). \tag{13}$$

柯西交错定理指出，[17]对于具有特征值 $\boldsymbol{\lambda}_i(\mathsf{A})$（按非递减顺序排列）的对称矩阵 $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ 及其主子矩阵 $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$（$n < N$）（其特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_i(\mathsf{B})$），有 $\boldsymbol{\lambda}_i(\mathsf{A}) \le \boldsymbol{\lambda}_i(\mathsf{B}) \le \boldsymbol{\lambda}_{i+N-n}(\mathsf{A})$。由于 $\boldsymbol{\lambda}_1(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) > 0$，并令 $i = 1$，我们得出 $\boldsymbol{\lambda}_{1+N-n}(\mathsf{K}-\mathsf{E}) > 0$，其中 $n = \mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$。这表明 $\bar{\mathsf{K}}-\mathsf{E}$ 至少有 $\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 个正特征值。因此，公式 (13) 得证。由于 $\bar{\hat{\mathbf{x}}}^{\star}$ 必然存在，$\bar{\mathsf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}$ 为满秩矩阵，且公式 (12) 成立，因此压缩中 $\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 个分量的所有失真约束均为严格不等式，即，

$$\mathsf{r}(\bar{\mathsf{K}}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) \le N - \mathsf{r}(\mathsf{e}-\mathsf{d}^{\star}). \tag{14}$$

最后，通过穷尽选择 $\bar{\mathbf{x}}$ 自 $\mathbf{x}$，结合公式 (13) 和公式 (14) 中的关系即可得到公式 (11)。 ■

在定理2中，$\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 的第一个上界为 $N - \mathsf{r}(\mathsf{e}-\mathsf{d}^{\star})$，它表示最优重构中失真约束处于活跃状态的分量数。较宽松的失真约束（较大的 e）会减少最优重构中的独立分量数，而较严格的约束（较小的 e）则会增加独立分量数。更重要的是，在个体失真准则下，最优失真分配比在总和失真准则下更为复杂。对于总和失真情形，当率非零时，失真约束 $\sum_{i=1}^{N} d_i \le \sum_{i=1}^{N} e_i$ 可以替换为等式 [18, 推论 8.19]。相较之下，对于个体情形，通常并非公式 (6b) 中的所有约束 $d_i \le e_i$ 都可以是严格的。不过，根据我们的第一个上界，$\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}}) \ge 1$ 意味着 $\mathsf{r}(\mathsf{e}-\mathsf{d}^{\star}) \le N-1$，且至少有一个失真约束是严格的，即 $d_i = e_i,\ \exists i \in [N]$。

$\mathsf{r}(\mathsf{K}_{\hat{\mathbf{x}}^{\star}})$ 的第二个上界由 $n_{+}(\mathsf{K}-\mathsf{E})$ 给出，它表示在假设 $\mathsf{D} = \mathsf{E}$ 的情况下，重构 $\hat{\mathbf{x}}$ 中具有物理意义的独立分量数量。与 $\hat{\mathbf{x}}$ 相比，$\hat{\mathbf{x}}^{\star}$ 通过用平凡分量（即以概率 1 为零）替代物理上不可达的分量，避免了这些分量。具体而言，最优重构 $\hat{\mathbf{x}}^{\star}$ 至多包含 $n_{+}(\mathsf{K}-\mathsf{E})$ 个非平凡独立分量。因此，容易得出结论：当 SDC 不成立时，实现高效压缩的一种方法是寻找独立分量更少的重构。

IV. 基于 2TC 协方差的信源压缩

A. 用于协方差建模的2TC框架

为了量化向量高斯源联合压缩中的分量间相关性，我们考虑一种基于层次框架的协方差矩阵，该框架区分两种类型的相关性（分量）。我们将其称为 2TC 协方差矩阵，即，

$$(\mathsf{K})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ \rho_1, & \text{if } i = 1 \text{ or } j = 1 \text{ and } i \neq j, \\ \rho_0, & \text{if } i,j > 1 \text{ and } i \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

对于 $i,\ j \in [N]$，其中 $(\mathsf{K})_{ij}$ 表示 K 的第 $(i,\ j)$ 项。这里，中心相关性 ρ_1 表示第一个中心分量与其余 $N-1$ 外围分量之间的相关性，而外围相关性 ρ_0 表示其余 $N-1$ 分量之间的相关性。为避免繁琐的数学讨论，我们

假设所有相关性均为非负，但我们的结果可以推广到存在负相关性 [12]的情况。现在，我们给出一个与式（15）中的协方差矩阵 K 相关的引理，它在后续分析中起着至关重要的作用。

引理 2。定义矩阵 A ≜ K − Γ，其中 Γ =diag$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N)$，且 $0 < \gamma_i \leq 1$。将 A 的行列式记为 $\Delta(\rho_0, \rho_1, \Gamma)$，其表达式为

$$\Delta(\rho_0, \rho_1, \Gamma) = \left(\overline{\gamma}_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{\rho_0 \overline{\gamma}_1 - \rho_1^2}{\overline{\gamma}_i - \rho_0} \right) \prod_{i=2}^{N} (\overline{\gamma}_i - \rho_0), \quad (16)$$

其中 $\gamma_i = 1 - \gamma_i$ 对所有 $i \in [N]$均成立。

证明：首先注意到，矩阵 A 可分解为 A =B $+ \rho_0 \mathbf{1}\mathbf{1}^\mathsf{T}$，其中 B $= \begin{pmatrix} 1-\rho_0-\gamma_1 & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{v} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$，$\mathbf{v} = (\rho_1-\rho_0, \cdots, \rho_1-\rho_0)^\mathsf{T}$，C = diag$(1-\rho_0-\gamma_2, \cdots, 1-\rho_0-\gamma_N)$，且 1 为全 1 向量。矩阵 B 是一个箭头矩阵，其行列式为 det(B) $= \xi \prod_{i=2}^{N} (1 - \rho_0 - \gamma_i)$，$\xi = 1 - \rho_0 - \gamma_1 - \sum_{i=2}^{N} \frac{\rho_1 - \rho_0}{1-\rho_0-\gamma_i}^2$，其中 ( )。B 的逆矩阵可表示为 $\mathrm{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{\xi} \mathbf{u}\mathbf{u}^\mathsf{T}$，其中 $\mathbf{u} = (-1, \frac{\rho_1-\rho_0}{1-\rho_0-\gamma_2}, \cdots, \frac{\rho_1-\rho_0}{1-\rho_0-\gamma_N})^\mathsf{T}$。应用矩阵行列式引理 [19],，可得 $\Delta(\rho_0, \rho_1, \Gamma)$ =det(B) . $\left(1 + \rho_0 \sum_{i,j} (\quad^{-1})_{ij}\right)$ $^{-1}$ B , 。将 det(B) 和 B 代入 $\Delta(\rho_0, \rho_1, \Gamma)$ 并化简后，即得式 (16)。 ■

利用引理 2，式 (15) 中 K 的特征值由 $\lambda_1 = 1 - \rho_0$ $N-2$ $\lambda_{2\,3} = \frac{1}{2}$ $N-$给出，重数为 ,_以及 ,( ) 2 $N-2$ $N-1$ $\succ 0$ $\rho_0 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(}^2\rho_0^2 + 4(\,)\rho_1^2$。因此，当且仅当 $(N-2)\rho_0 + 1 - (N-1)\rho_1^2 > 0$成立时，K 成立。

注 2. 2TC 框架推广了先前的协方差模型 [20], [21], ，这些模型假设了各向同性相关$\rho_0 = \rho_1$。尽管完全一般的协方差矩阵会使分析复杂化，但式 (15) 中的 2TC 结构给出了相当简洁的结果与见解。重要的是，其层次结构支持递归分解以及对更简单模型的迭代扩展。从双类型相关情形以及 det($\mathrm{K}_2 - \Gamma$) 的已知公式出发，我们可以通过将 $N-1$ 外围分量拆分为一个新的中心分量和其余 $N-2$ 外围分量并递归地继续，从而到达三类型相关情形并推导出 det($\mathrm{K}_3 - \Gamma$)。最终，每个分量被分配到特定的相关层级，较高层级的分量与所有较低层级的分量共享均匀相关。◊

B. SDC 区域的刻画

以下定理给出了式（15）中 K 和任意失真约束下 SDC 的等价形式。该定理还给出了闭式率失真函数，其中明确纳入了源的相关性和失真约束。

定理3。 当K 为*2TC*协方差矩阵时，*SDC*K −E ≻ 0 成立，当且仅当

$$e_3 \leq 1 - \rho_0, \quad (17)$$

$$e_2 \leq 1 - \frac{\chi_3 \rho_0^2}{1 + \chi_3 \rho_0}, \quad (18)$$

$$e_1 \leq 1 - \frac{\chi_2 \rho_1^2}{1 + \chi_2 \rho_0} \quad (19)$$

成立，其中 $\chi_j = \sum_{i=j}^{N} \frac{1}{1-\rho_0-e_i}$，并且我们假设 $e_2 \geq \cdots \geq e_N$ 。相应的率失真函数为

$$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) = \sum_{i=2}^{N} \frac{1}{2} \log \frac{1-\rho_0}{e_i} + \frac{1}{2} \log \frac{1 + (N-1)\frac{\rho_0 - \rho_1^2}{1-\rho_0}}{e_1}. \quad (20)$$

当相关性为各向同性时，即 $\rho = \rho_0 = \rho_1$，有

$$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \log \frac{1-\rho}{e_i} + \frac{1}{2} \log \frac{1 + (N-1)\rho}{1-\rho}. \quad (21)$$

每个分量的平均率 $\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) = \mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e})\, N$ 为

$$\overline{\mathbb{R}}_{\mathbf{x}}([N], \mathsf{e}) = \frac{1}{2} \log \frac{1-\rho}{e_g} + \Theta\left(\frac{\log N}{N}\right), \quad (22)$$

其中几何平均失真 $e_g = \left(\prod_{i=1}^{N} e_i\right)^{1/N}$。

证明：西尔维斯特判据指出，K − E $\succeq 0$ 的等价条件是 K − E 的所有主子式均非负 [10]。定义两个指标集：$\mathcal{I}_{\setminus\{1\}} \subset [N]$ 表示不包含第一个元素的主子式，$\mathcal{I}_{\cup\{1\}} \subseteq [N]$ 表示包含第一个元素的主子式。我们分别分析这两种情况。

首先，考虑排除第一个分量的情况。根据引理 2，(K −E) $[\mathcal{I}_{\setminus\{1\}}]$ 的行列式为

$$\Delta(\rho_0, \mathsf{e}, \mathcal{I}_{\setminus\{1\}}) = \left(1 + \sum_{i \in \mathcal{I}_{\setminus\{1\}}} \frac{\rho_0}{1-\rho_0-e_i}\right) \prod_{i \in \mathcal{I}_{\setminus\{1\}}} (1-\rho_0-e_i). \quad (23)$$

如果 $e_2 + \rho_0 \leq 1$，则对于所有 $i \neq 1$，都有 $e_i + \rho_0 \leq 1$，并且对于任意 $\mathcal{I}_{\setminus\{1\}}$，(K −E)$[\mathcal{I}_{\setminus\{1\}}]$ 是半正定的。如果 $\exists j \in [N]$ 使得 $e_j + \rho_0 > 1$，则应满足以下条件

$$\frac{\rho_0}{\rho_0 + e_j - 1} \geq 1 + \sum_{i \in \mathcal{I}_{\setminus\{1,j\}}} \frac{\rho_0}{1-\rho_0-e_i} \quad (24)$$

为证明 j 的唯一性，假设存在另一个 $k \neq j$，使得 j 和 k 都满足公式（24）中的条件。对应于子集 $\{j,k\}$ 的 2×2 阶主子式为 det((K −E)[$\{j,k\}$]) =$(1-e_j)(1-e_k) - \rho_0^2$。由于 $e_j + \rho_0 > 1$ 和 $e_k + \rho_0 > 1$，我们有 det((K −E)[$\{j,k\}$]) < 0。这与 K–E 的半正定性相矛盾。因此，只有 $e_2 > 1-\rho_0$ 满足公式（24）中的条件，因为 j 是唯一的，且 $\{e_i\}_{i=2}^{N}$ 按非递增顺序排列。对于任意 $\mathcal{I}_{\setminus\{1,j\}} \subset [N]$, 该条件均成立，将其改写即可直接得到公式（17）和公式（18）。

接下来，考虑包含第一个分量的情形。矩阵 (K −E)$[\mathcal{I}_{\cup\{1\}}]$ 半正定，当且仅当

$$\left(1 - e_1 + \sum_{i \in \mathcal{I}_{\setminus\{1\}}} \frac{\rho_0 - \rho_1^2 - \rho_0 e_1}{1-\rho_0-e_i}\right)(1-\rho_0-e_2) \geq 0. \quad (25)$$

根据公式（17），上述条件成立。将集合 $\mathcal{I}_{\setminus\{1\}}$ 替换为 $[N]$ 并进行化简后，公式（25）可化简为公式（19）。

最后，利用公式（1）中的 Hadamard 率和引理 2 计算 det(K), 即可得到公式（20）中的率失真函数。 ■

不同于经典率失真权衡 [7],揭示了失真对率的影响，我们进一步刻画了失真约束和源相关性对压缩率的影响。具体而言，通过充分利用源相关性，公式（20）揭示了提升压缩效率的理论极限。分量之间更强的相关性 ρ_0 和 ρ_1 能够在保持相同失真要求的同时降低压缩率。

$$P(\mathcal{A}_0) = (N-1)\underbrace{\int_0^{1-\rho_0}\cdots\int_0^{1-\rho_0}}_{N-2 \text{ times}}\int_{\max\{e_3,\cdots,e_N\}}^{1-\rho_0-\frac{\rho_1^2-\rho_0}{1-(\rho_1^2-\rho_0)\chi_3}}\int_0^{1-\frac{\chi_2\rho_1^2}{1+\chi_2\rho_0}} \mathrm{d}e_1\,\mathrm{d}e_2\,\mathrm{d}e_3\cdots\mathrm{d}e_N, \tag{26}$$

此外，公式（17）–（19）捕捉了失真约束 $\{e_i\}_{i=1}^N$ 与相关性 ρ_0和 ρ_1 之间复杂的相互作用，并据此定义了 SDC 区域。可以从两个角度进行分析：失真约束和源相关性。

1）失真约束视角：对于给定的向量源 $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K})$，其中 K 见公式（15），我们量化事件 $\mathcal{A}_0 = \{\mathbf{E} \preceq \mathbf{K}\}$ 在均匀分布的失真约束 $e_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ 对所有 $i \in [N]$下发生的概率。**定理4**。 $P(\mathcal{A}_0)$ 可表示为公式 N中的 (26)重积分，其渐近性在 $N \to \infty$ <style id='27}下给出为

$$P(\mathcal{A}_0) = e^{N\log(1-\rho_0)+O(\log N)}. \tag{27}$$

证明：公式（26）中的 N重积分由定理3中的公式（17）—（19）得到，其中 $N-1$ 源于约束的约束排序 $\{e_i\}_{i=2}^N$。此外，通过比较公式（19）中 e_2 的上界与公式（18）可得

$$\left(1-\rho_0-\frac{\rho_1^2-\rho_0}{1-(\rho_1^2-\rho_0)\chi_3}\right)-\left(1-\frac{\chi_3\rho_0^2}{1+\chi_3\rho_0}\right) = \frac{-\rho_1^2}{(1-(\rho_1^2-\rho_0)\chi_3)(1+\chi_3\rho_0)} \le 0. \tag{28}$$

因此，公式（26）中 e_2 的上界得到改进，以防止积分发散。为分析该 N重积分的渐近行为，我们考察关于 e_1 和 e_2 的内层二重积分。我们观察到

$$\int_{\max\{e_3,\cdots,e_N\}}^{1-\rho_0-\frac{\rho_1^2-\rho_0}{1-(\rho_1^2-\rho_0)\chi_3}}\int_0^{1-\frac{\chi_2\rho_1^2}{1+\chi_2\rho_0}} \mathrm{d}e_1\,\mathrm{d}e_2 < 1. \tag{29}$$

这是因为该二重积分的积分域 $\mathcal{D}_2$ 是 $[0,1]^2$ 的子集。因此，我们得到 $P(\mathcal{A}_0)$ 的渐近上界，如式 (27) 所示。 ■

在定理4中，我们给出了式 (26) 中 $P(\mathcal{A}_0)$ 的精确 N 重积分形式。随后，我们分析了其关于 N 的渐近行为。根据式 (27)，当每个源分量都没有先验信息时，满足 SDC 的概率会以 $-\log(1-\rho_0)$ 的率随源长度呈指数衰减。这凸显了以往研究的局限性：它们仅关注 SDC 成立的情形。本研究关于 SDC 不成立时的理论结果和宝贵见解具有重要意义。

2）从信源相关性的角度看：给定失真约束后，我们确定向量源为达到公式（1）中的压缩率所应具有的定量分量间相关性。满足 SDC 的相关区域为$\mathcal{C}_0 = \{(\rho_0, \rho_1) \mid 0 \le \rho_0 \le \rho_0^m,\ 0 \le \rho_1 \le \rho_1^m\}$，其中 $\rho_1^m = \left(\frac{1}{\chi_2}+\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}(1-e_1)^{\frac{1}{2}}$由公式（19）得出，且当 $\rho_0 = \rho_0^m$时满足 $\rho_1^m = 0$。由于五次或更高次多项式通常没有解析解，因此显式求解公式（18）中的 ρ_0^m（一个 $(N-1)$ 次多项式）变得棘手。如果最大的外围失真约束 e_2 不唯一，公式（17）可直接推出 $\rho_0^m = 1-e_2$。否则，我们给出 ρ_0^m的界和近似。

定理5。对于失真约束向量 e，满足 *SDC* 的最大外围相关性 ρ_0^m的界为

$$1-e_2+\frac{c_l}{N} \le \rho_0^m \le 1-e_2+\frac{c_u}{N-1}, \tag{30}$$

其中 $c_l = 2(e_2-e_3)\left(\sqrt{\frac{1-e_3}{1-e_2}}+1\right)^{-1}$，且 $c_u = e_2-e_3$，其中 $e_3 = \frac{1}{N-2}\sum_{i=3}^N e_i$。对于较大的 N，量 ρ_0^m 满足

$$\rho_0^m = 1-e_2+\Theta\left(\frac{1}{N}\right). \tag{31}$$

证明：我们定义两个函数 $f(\rho_0) = \frac{\rho_0}{\rho_0+e_2-1}$和 $g(\rho_0) = 1+\sum_{i=3}^N \frac{\rho_0}{1-\rho_0-e_i}$。$f(\rho_0)$ 严格递减，而 $g(\rho_0)$ 在 $\rho_0 \in (1-e_i, 1-e_{i+1})$ 内分段递增，其中 $2 \le i \le N-1$。我们注意到，当 $\rho_0 \in (1-e_2, 1-e_3)$ 时， ρ_0^m是方程$f(\rho_0) = g(\rho_0)$ 的解。

为建立下界，我们在区间 (,) 内定义一个严格递增函数 $g_1(\rho_0) = 1+\frac{\rho_0}{1-\rho_0-e_3} \ge g(\rho_0)$ $0\ 1-(\ )_{(N-2)}(\ ),$ e_3 $e_i = e_3$ $i > 3$ 当且仅当对所有 都成立时取等号。由于 $f(\rho_0)$ 连续，存在一个关于 ρ_0^m 的下界 $\rho_0^l \in (1-e_2, 1-e_3)$，使得 $f(\rho_0^l) \ge f(\rho_0^m)$。由 $g_1(\rho_0) = f(\rho_0)$ 求解可得

$$\rho_0^l = (1-e_2)\frac{(N-2)+\sqrt{(N-2)^2+4(N-1)\frac{1-e_3}{1-e_2}}}{2(N-1)}. \tag{32}$$

进一步推导式 (32) 中的 ρ_0^l，可得式 (30) 中简洁的下界，且当且仅当 $N=2$ 时等号成立。

对于 ρ_0 的上界，我们首先利用詹森不等式推导 $g(\rho_0)$ 的一个下界，即对于 $\rho_0 \in (0, 1-e_3)$，有 $g_2(\rho_0) = 1+(N-2)(1-\rho_0-\frac{1}{N-2}\sum_{i=3}^N e_i)^{-1}\rho_0$。我们求解 $g_2(\rho_0) = f(\rho_0)$，以确定上界

$$\rho_0^u = (1-e_2)\frac{(N-3)+\sqrt{(N-3)^2+4(N-2)\frac{1-\bar{e}_3}{1-e_2}}}{2(N-2)}. \tag{33}$$

由于当 时 $\sqrt{\ N-3\ ^2+4\ N-2\ \frac{1-e_3}{1-e_2} \ge \bar{N}-1}$ $N \ge (\ )\ (\ )$ 成立，2 30 因此可得式 ( ) 中更简洁的上界。结合式 (30) 中的上下界，可得式 (31) 中 ρ_0^m 的渐近性。 ■

在定理5中，我们推导了 ρ_0^m 的上下界和渐近近似。通过结合已获得的ρ_1^m，我们补全了 $\mathcal{C}_0$ 相关区域，以刻画 SDC。由公式（31）可知，对于公式（15）中 K 的向量源，若它能在约束 $\{e_i\}_{i=1}^N$下以公式（1）中的 Hadamard 下界速率进行压缩，则最大外围相关性 ρ_0^m与$1-e_2$ 之间的差距会随源长度增大而反比缩小，其中 e_2 是最宽松的外围约束。这意味着存在一种权衡：相关性更强的源无法在过于宽松的失真约束下以 Hadamard 率进行压缩。

C. 仿真结果

在本小节中，我们将定理3、4和5中的解析结果与数值仿真进行比较。

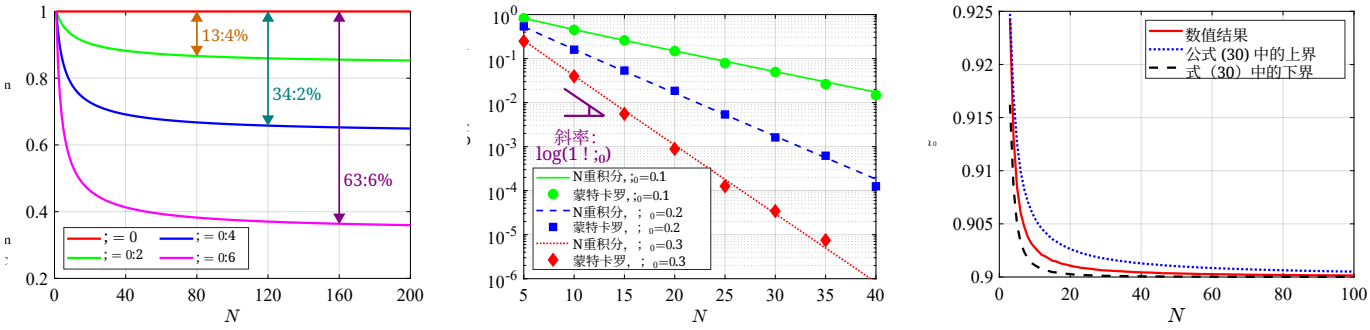


图1. 定理3中，在相同失真约束 $e = 0.25$ 下，式（21）和（22）的每分量压缩率与源长度的关系。图2. 定理4中，SDC 满足的概率与源长度的关系，适用于 $\rho_1 = 0.45$ 及所有失真约束 $e_i \sim \mathcal{U}[0,1]$。图3. 定理5中，在固定 $e_2 = 0.1$时， ρ_0^m与源长度的关系评估。

对于定理3，图1绘出了式(21)和式(22)中的每个分量的平均压缩率随分量数量变化的情况，其中所有 $i \in [N]$ 的失真约束固定为 $e = e_i = 0.25$。我们观察到，充分利用相关性能够提升压缩效率。与独立情形相比，相关性显著降低了每个分量的压缩成本。对于 $N = 80$ 和 $\rho = 0.2$, 压缩率降低了 13.5%；对于 $N = 120$ 和 $\rho = 0.4$，压缩率降低了 34.2%；对于 $N = 160$ 和 $\rho = 0.6$，压缩率降低了 63.6%。根据式(22)，随着 N 增大，$\mathbb{R}_{\mathbf{x}}([N], \mathbf{e})$ 收敛至 $\log \frac{1-\rho}{e}$。总之，充分利用数据中的相关性是降低存储和处理开销的关键策略。

对于定理4，图2展示了基于每个 N进行 10^6次蒙特卡罗试验所得的 $P(\mathcal{A}_0)$ 与 N的仿真结果。$\{e_i\}_{i=1}^N$ 是从 $[0,1]$ 中随机抽样得到的，且中心相关性 $\rho_1 = 0.45$ 固定。蒙特卡罗结果与式（26）和（27）中的 N重积分分析一致，表明 SDC 满足的概率会随着N以 $\log(1-\rho_0)$ 的速率衰减。这凸显了未来研究需要更多关注 SDC 不满足的情况。

对于定理5，在图3中，我们利用 10^4 次蒙特卡洛试验的结果，对ρ_0^m进行了仿真，其中 $\{e_i\}_{i=3}^N$为随机采样。我们固定 $e_2 = 0.1$，并观察到，随着 N 增加，ρ_0^m逐渐收敛至 $1 - e_2$；与此同时，式（30）中的解析界与数值计算得到的 ρ_0^m仍高度吻合。这验证了我们的简洁结果能够对解析上难以求解的（$N-1$）次方程的根给出相当准确的近似。

V. 结论

在本研究中，我们探讨了个体失真准则下向量高斯源的联合压缩；在满足 SDC 时，我们完善了现有结果，并在不满足 SDC 时得出了新的理论结果。我们的分析表明，SDC 不成立时，高效压缩需要采用低维重构。此外，我们揭示了满足 SDC 的概率会随源长度呈指数级衰减，这凸显了考察 SDC 不成立情形的必要性。此外，我们发现，在较宽松的失真约束下，要以 Hadamard 下界速率实现压缩，源应具有较弱的分量间相关性。更重要的是，根据显式纳入相关性的率失真函数，我们定量地刻画了利用源分量之间的相关性降低存储和处理成本所带来的收益。

参考文献

[1] E. Baccour、N. Mhaisen、A. A. Abdellatif、A. Erbad、A. Mohamed、M. Hamdi 和 M. Guizani，“面向物联网应用的普适人工智能：资源高效的分布式人工智能综述”，IEEE通信综述与教程，第24卷，第4期，第2366–2418页，2022年第四季度。[2] M. Chafii、L. Bariah、S. Muhaidat 和 M. Debbah，“6G面临的十二项科学挑战：重新思考通信理论的基础”，IEEE通信综述与教程，第25卷，904，2 2，868 2023 no. pp. – nd Quart.。[3] C. E. Shannon，“离散源保真度准则的编码定理”，Proc. IRE Nat. Conv. Rec.，第4部分，第4卷，第1–26页，1959年3月。[4] T. Berger，《率失真理论：数据压缩的数学基础》。新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：Prentice-Hall，1971年。[5] R. M. Gray，“通过条件率失真函数得到的平稳源信息率新下界”，IEEE Trans. Inf. Theory，第19卷，第4期，第480–489页，1973年7月。[6] Y. Oohama，“间接和直接高斯分布式源编码问题”，IEEE Trans. Inf. Theory，第60卷，第12期，第7506–7539页，2014年12月。[7] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，《信息论基础》，第2版。美国新泽西州霍博肯：Wiley，2006年。[8] T. Berger，“多终端源编码”，载于《通信的信息论方法》，G. Longo 编。纽约：Springer-Verlag，1978年，第172–231页。[9] A. El Gamal 和 T. M. Cover，“多描述的可达率”，IEEE Trans. Inf. Theory，第28卷，第6期，第851–857页，1982年11月。[10] R. A. Horn 和 C. R. Johnson，《矩阵分析》。英国剑桥：Cambridge Univ. Press，2012年。[11] J.-J. Xiao 和 Z.-Q. Luo，“个体失真准则下相关高斯源的压缩”，载于第43届Allerton通信、控制与计算年会论文集（Allerton），2005年9月，第438–447页。[12] A. Lapidoth 和 S. Tinguely，“通过高斯多址信道发送二元高斯源”，IEEE Trans. Inf. Theory，第56卷，第6期，第2714–2752页，2010年5月。[13] S. Tinguely，“通过无线网络传输相关源”，博士学位论文，苏黎世联邦理工学院，瑞士苏黎世，2008年。[14] T. W. Anderson，《多元统计分析导论》。美国纽约州纽约：Wiley，2003年。[15] J. Nayak、E. Tuncel、D. G¨und¨uz 和 E. Erkip，“个体失真准则下矢量源的渐进细化”，IEEE Trans. Inf. Theory，第56卷，第4期，第1769–1781页，2010年4月。[16] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，《凸优化》。英国剑桥：Cambridge University Press，2004年。[17] S.-G. Hwang，“厄米特矩阵特征值的柯西交错定理”，Amer. Math. Monthly，第111卷，第2期，第157–159页，2004年2月。[18] R. W. Yeung，《信息论与网络编码》。美国马萨诸塞州波士顿：Springer，2008年。[19] D. A. Harville，《统计学家的矩阵代数视角》。纽约：Springer-Verlag，1997年。[20] A. B. Wagner、S. Tavildar 和 P. Viswanath，“二次高斯双编码器源编码问题的率区域”，IEEE Trans. Inf. Theory，第54卷，第5期，第1938–1961页，2008年5月。[21] G. Xu、W. Liu 和 B. Chen，“Wyner公共信息的有损源编码解释”，IEEE Trans. Inf. Theory，第62卷，第2期，第754–768页，2016年2月。