有限下行训练下的 FDD CSI反馈：率失真视角

Shuao Chen、Junyuan Gao、Yuxuan Shi、Yongpeng Wu、Giuseppe Caire、H. Vincent Poor 和 Wenjun Zhang

arXiv:2602.06479v1 [cs.IT] 6 Feb 2026

摘要——**本文研究了在采用高斯导频的有限长度训练条件下，频分双工（FDD）多天线正交频分复用（OFDM）系统中信道状态信息（CSI）反馈的理论极限。用户设备采用最小均方误差（MMSE）信道估计，随后进行渐近最优的上行反馈。具体而言，我们推导了整个 CSI反馈系统的一般率失真函数（RDF）。随后，在训练符号数量超过天线维度的条件下，针对任意下行信噪比（SNR），给出了 RDF 的非渐近界和渐近标度。一个关键观察是，当训练足够充分时，整个系统的 RDF 将收敛于直接率失真函数，即用户设备能够完整获取下行链路信道状态信息时所对应的 RDF。更重要的是，我们证明，即使在固定的下行信噪比下，收敛速率也与训练长度成反比。仿真结果表明，我们的界是紧的；而在训练非常有限的情况下，整体 RDF 与直接 RDF 之间的偏差十分显著。**

关键词—**CSI反馈、高斯导频、最小均方误差、率失真理论、Wishart分布。**

I. 引言

第六代（6G）无线网络有望借助大规模天线阵列和准确的信道状态信息（CSI），提供超可靠、高容量的通信。CSI在波束成形、干扰管理和资源分配中发挥着关键作用 [1]。在频分双工（FDD）系统中，基站（BS）无法直接获取下行链路CSI。相反，用户设备（UE）会估计下行信道，并将其反馈给基站。随着基站天线数量增加，所需的下行训练开销显著增加，成为FDD大规模MIMO系统的一大瓶颈。已有研究 [1], [2] 探索了利用深度学习技术降低训练和反馈成本。尽管这些方法在仿真中展现出良好的性能，但CSI反馈的基本理论极限尚未得到充分确立。

CSI反馈问题本质上可以视为有损压缩问题。率失真理论提供了一个成熟的框架，用于量化压缩率与重建失真之间的权衡 [3]。近期一些研究运用率失真理论，求得了 CSI 反馈系统的基本极限 [4]–[6]。具体而言，文献 [4] 确定了有限训练条件下总体反馈失真随下行信噪比（SNR）变化的渐近行为。对于实际应用，已有研究提出了若干有效方案。[4] 表明，熵编码标量量化（ECSQ）表现良好； [6] 则利用接收训练信号中特征空间的适当表示，提出了截断 Karhunen-Lo`eve（TKL）反馈方案（详情见 [6,第 III-C 节] ）。然而，在理论层面，任意下行信噪比下、采用有限长度导频时的率失真权衡仍是一个悬而未决的问题。

本文针对采用有限长度下行训练、用户设备处进行最小均方误差（MMSE）估计且上行反馈渐近最优的 FDD CSI反馈系统，推导了通用且统一的整体率失真函数（RDF）。具体而言，我们表明，CSI反馈系统的整体闭式率失真函数可通过接收信号的特征空间表示明确表达。在高斯导频且下行信噪比任意的情况下，当训练符号数量超过天线数量，且导频被放置在所有子载波上时，我们给出了整体率失真函数的紧致非渐近界。此外，我们表明，随着训练长度增加，整体率失真函数渐近收敛于直接率失真函数；后者对应理想情形，即用户设备可完全访问真实的下行链路信道状态信息以进行反馈。更重要的是，我们证明二者之间的差距随训练长度增加而反比衰减。需要指出的是，率失真函数是一个理论界，只有通过对大量导频观测进行长时延联合编码才能达到。在实际应用中，必须在每个相干块结束后立即提供反馈，而最优的单次率失真权衡仍然未知。

除总体率失真函数外，我们关注用户设备在有限观测下MMSE估计器的性能。众所周知，在相同失真约束下，压缩最小均方误差估计相较于压缩原始 CSI会降低率失真函数 [7]。我们进一步表明，这一降低与经有噪下行信道传输的接收训练信号及其无噪对应信道上接收训练信号的微分熵之差有关。在有限训练下，我们还给出了最小均方误差失真的非渐近界与渐近标度，从而推广了 [4], [6]中的渐近结果。

S. Chen、Y. Wu 和 W. Zhang 就职于中国上海 200240 的上海交通大学电子工程系（电子邮箱： {shuao.chen, yongpeng.wu, zhangwenjun}@sjtu.edu.cn）（通讯作者：Yongpeng Wu）。J. Gao 就职于中国香港特别行政区香港理工大学电气与电子工程系（电子邮箱：junyuan.gao@polyu.edu.hk）。Y. Shi 就职于中国深圳 410083 的鹏城实验室网络智能部（电子邮箱：shiyx01@pcl.ac.cn）。G. Caire 就职于德国柏林 10587 的柏林工业大学通信与信息论组（电子邮箱：caire@tu-berlin.de）。H. V. Poor 就职于美国新泽西州普林斯顿 08544 的普林斯顿大学电气与计算机工程系（电子邮箱: poor@princeton.edu）。

记号： 大写粗体字母（例如 **H**）表示随机向量；无衬线大写字母（例如 A）表示确定性矩阵；黑板粗体字母（例如 X）表示随机矩阵；花体字母（例如 ）表示集合。令 tr(A)、r(A) 和 (A) 分别表示矩阵的迹、秩和特征值。厄米

矩阵的伪行列式为 $\det^+(\mathrm{A}) = \prod_{\lambda_i(\mathrm{A})>0} \lambda_i(\mathrm{A})$。我们使用 $\mathcal{CN}(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\mathcal{CW}_m(n,\ \Sigma)$ 分别表示圆对称复高斯分布和自由度为 n、协方差矩阵为 $\Sigma \in \mathcal{C}^{m\times m}$ 的复 Wishart 分布。$\mathrm{A}_{[:,i]}$ 是矩阵 A 的第 i 列，$\mathrm{A}_{[j,:]}$ 是矩阵 A 的第 j 行。符号 $\otimes$ 表示克罗内克积。

II. 系统模型

A. 下行链路信道训练

我们考虑一个频分双工多天线系统，其中配备 m_t 根发射天线的基站通过具有 n_c 个子载波的基于正交频分复用（OFDM）的下行链路为单天线用户设备提供服务。假设下行信道在至少n_t 个连续 OFDM 符号间隔内保持准静态。对于 $n_p \le n_c$ 个承载导频的子载波，用户设备接收到的训练符号由下式给出

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}^{\mathsf{H}}\mathbb{P} + \mathbf{W}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{W} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathrm{I}_{n_0})$ 为加性高斯白噪声（AWGN），并且 $n_0 = n_t n_p$。下行链路 CSI 向量 $\mathbf{H}$表示在全部 m_t 根天线与 n_c 个子载波上堆叠而成的信道系数。满足 $N = m_t n_c$ 的下行链路导频符号矩阵 $\mathrm{P} \in \mathcal{C}^{N\times n_0}$ 受每个时频资源元素的平均发射功率约束，即对所有 $i \in \{1,\dots,n_0\}$，$\mathrm{E}[\|\mathbb{P}_{[:,i]}\|^2] \le \mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}$。

为便于进行下行链路信道训练，按照 [4],[6], 的思路，令 $\mathcal{N}_p \subseteq \{1,\dots,n_c\}$ 表示选用于导频传输的 n_p 子载波集合。下行导频矩阵 P 取自高斯综，可表示为

$$\mathbb{P} = \left[\mathbf{e}_{\mathcal{N}_p(1)} \otimes \mathbb{P}_1,\ \mathbf{e}_{\mathcal{N}_p(2)} \otimes \mathbb{P}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_{\mathcal{N}_p(n_p)} \otimes \mathbb{P}_{n_p}\right], \tag{2}$$

其中，$\mathbf{e}_{\mathcal{N}_p(b)} \in \mathcal{R}^{n_c}$ 是一个独热向量，在对应于第 b 个导频子载波的位置 $\mathcal{N}_p(b)$ 处取值为 1，其余位置均为 0。每个导频块 $\mathrm{P}_b \in \mathcal{C}^{m_t\times n_t}$ 由从 $\mathcal{CN}(\mathbf{0}, p\mathrm{I}_{m_t})$中独立抽取的列组成，并满足功率约束$p = \mathrm{SNR}_{m_t}^{\mathrm{dl}}$。

在本文中，我们考虑一个具有空间域和频域相关性的下行信道$\mathbf{H} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathrm{C}_{\mathbf{H}})$，该信道在每个块内保持准静态，并且在不同块之间相互独立 [8], [9]。利用 $\mathrm{C}_{\mathbf{H}}$ 的特征值分解，$\mathrm{C}_{\mathbf{H}}$ 的厄米平方根表示为 $\mathrm{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}} = \mathrm{U}\Lambda^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathrm{U}^{\mathsf{H}}$。

备注 1（信道统计信息的可用性）。信道统计信息（例如均值和协方差）通常变化缓慢
随时间变化，相较于信道的相干时间而言。在实际系统中，这些统计量可以通过互易性，利用上行链路测量在基站处进行估计，也可以由用户设备根据下行链路导频 [4], [6], [10], [11] 进行估计。因此，在本文中，我们假设这些统计量是可用的。◊

给定公式（2）中的导频矩阵，用户设备处公式（1）中接收到的下行训练信号的协方差矩阵为

$$\mathrm{C}_{\mathbf{Y}|\mathbb{P}} = \mathbb{E}[\mathbf{Y}^{\mathsf{H}}\mathbf{Y}|\mathbb{P}] = \mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A} + \mathrm{I}_{n_0}, \tag{3}$$

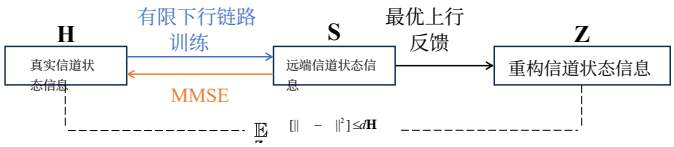


图 1. CSI 反馈的系统模型。

其中我们定义$\mathbb{A} \triangleq \mathbb{P}\mathrm{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}$。我们还引入了下行训练的无噪声版本，类似于公式（1）：$\overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}^{\mathsf{H}}\mathbb{P}$，其协方差矩阵为

$$\mathrm{C}_{\overline{\mathbf{Y}}|\mathbb{P}} = \mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A}. \tag{4}$$

回想一下，给定 P，$\mathbf{Y}$ 和$\overline{\mathbf{Y}}$ 都服从复高斯分布，其微分熵为 [3]

$$h(\mathbf{Y}|\mathbb{P}) = r_Y \log(\pi e) + \log\left(\det{}^+(\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A} + \mathrm{I}_{n_0})\right), \tag{5}$$

$$h(\overline{\mathbf{Y}}|\mathbb{P}) = r_{\overline{Y}} \log(\pi e) + \log\left(\det{}^+(\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A})\right). \tag{6}$$

其中 $r_Y = \mathrm{r}(\mathrm{C}_{\mathbf{Y}|\mathbb{P}})$ 和 $r_{\overline{Y}} = \mathrm{r}(\mathrm{C}_{\overline{\mathbf{Y}}|\mathbb{P}})$。可以看出，A 精确表示了接收信号协方差 [6,Sec. III-C] 的特征空间的一种规范形式。此外，在本文中，我们表明 A 在 CSI反馈总体性能的理论分析中发挥着核心作用。

B. 信道估计与反馈

用户设备接收到包含 n_t 导频符号的下行训练传输后，会进行信道估计。具体而言，给定高斯导频 P，基于观测 $\mathbf{Y}$ 得到的$\mathbf{H}$的最小均方误差估计为

$$\mathbf{S} = \mathbb{E}[\mathbf{H}|\mathbf{Y}] = \mathrm{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{H}}\mathrm{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P} + \mathrm{I}_{n_0}\right)^{-1}\mathbf{Y}^{\mathsf{H}}. \tag{7}$$

相应的估计协方差为

$$\mathrm{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}} = \mathrm{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P}\left(\mathbb{P}^{\mathsf{H}}\mathrm{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P} + \mathrm{I}_{n_0}\right)^{-1}\mathbb{P}^{\mathsf{H}}\mathrm{C}_{\mathbf{H}} \tag{8}$$

$$= \mathrm{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}\mathbb{A}\left(\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A} + \mathrm{I}\right)^{-1}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathrm{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}. \tag{9}$$

用户设备估计所产生的最小均方误差失真为

$$D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}} = \mathrm{tr}(\mathrm{C}_{\mathbf{H}} - \mathrm{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}). \tag{10}$$

整体 CSI反馈系统在图 1 中表示为马尔可夫链 $\mathbf{H} \to \mathbf{S} \to \mathbf{Z}$。给定导频矩阵 P，最小均方误差估计$\mathbf{S}$作为真实信道$\mathbf{H}$的中间表示。随后，用户设备对$\mathbf{S}$进行量化和编码，以便进行上行反馈，从而在基站处得到重构$\mathbf{Z}$。CSI获取过程造成的整体失真通过 $\mathrm{d}(\mathbf{H},\mathbf{Z}) = \mathrm{E}\left[\|\mathbf{H} - \mathbf{Z}\|^2\right]$ 衡量。由于存在中间观测$\mathbf{S}$，值得回顾的是，[4], [6],中提出的远程信源编码框架用于刻画通过下行训练和上行反馈获取 CSI 的信息论极限。通过$\mathbf{S}$ 观测$\mathbf{H}$ 时的间接率失真函数定义为 [12]

$$R_{\mathbf{H},\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d) \triangleq \inf_{P_{\mathbf{Z}|\mathbf{S}}:\mathbb{E}[\mathrm{d}(\mathbf{H},\mathbf{Z})]\le d} I(\mathbf{Z};\mathbf{S}|\mathbb{P}). \tag{11}$$

本文明确给出了整个 CSI反馈过程的率失真函数。随后分析率失真函数与下行链路训练传输次数 n_t 之间的关系。

III. Main Results

A. 率失真函数的推导

在整体反馈系统中，真实源是下行 CSI $\mathbf{H}$，施加于其上的相应失真约束为 d。然而，真实源 $\mathbf{H}$ 并不能完全

被用户设备获取。用户设备只能观测到给定导频矩阵 $\mathbf{P}$ 时的最小均方误差估计 $\mathbf{S}$，而压缩 $\mathbf{S}$ 时的有效允许失真变为 $d - D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$。因此，率失真函数不可避免地取决于导频矩阵 $\mathbf{P}$。为量化这种依赖关系，我们将率失真函数分解为两部分。第一部分与 $\mathbf{P}$ 无关。第二部分刻画了由高斯系综中抽取的导频进行有限下行训练所引起的率失真函数随机偏差。在第二部分中，我们明确区分两种偏差：一种是给定 $\mathbf{P}$ 压缩 $\mathbf{S}$ 而非 $\mathbf{H}$ 所导致的偏差，另一种是使用有效失真 $d - D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$ 而非 d 所导致的偏差。以下定理总结了这些观察结果。

定理 1。考虑一个下行信道向量 $\mathbf{H} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathsf{C}_{\mathbf{H}})$，其 m_t 根天线之间具有任意空间相关性，且 n_c 个子载波之间具有频率相关性。使用在子载波 $\mathcal{N}_p \subseteq \{1, \ldots, n_c\}$ 上经过 n_t 次训练传输的高斯系综导频矩阵 $\mathbb{P}$，用户设备获得最小均方误差估计$\mathbf{S}$，并对其编码后反馈，以重构 $\mathbf{Z}$。在失真约束$\mathbb{E}[\|\mathbf{H} - \mathbf{Z}\|^2] \le d$下，相应的率失真函数为

$$R_{\mathbf{H},\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d) = R_{\mathbf{H}}(d) + \Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}} + \Delta R_{\mathbb{P},d}, \tag{12}$$

其中

$$R_{\mathbf{H}}(d) = \frac{1}{2}\log\left(\mathsf{det}^{+}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})\right) - \frac{r_H}{2}\log\frac{d}{r_H}, \tag{13}$$

$$\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\big(h(\mathbf{S}|\mathbb{P}) - h(\mathbf{H})\big) + \frac{r_H}{2}\log\frac{r_S}{r_H}, \tag{14}$$

$$\Delta R_{\mathbb{P},d} = \frac{r_H - r_S}{2}\log\frac{d\pi e}{r_S} - \frac{r_S}{2}\log\Big(1 - \frac{D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}}{d}\Big), \tag{15}$$

and

$$h(\mathbf{H}) = r_H\log(\pi e) + \log\left(\mathsf{det}^{+}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})\right), \tag{16}$$

$$h(\mathbf{S}|\mathbb{P}) = r_S\log(\pi e) + \log\left(\mathsf{det}^{+}\left(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}(\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\right)\right), \tag{17}$$

$$D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}} = \mathsf{tr}\big(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}(\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\big). \tag{18}$$

这里令$\mathbb{A} = \mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathbb{P}$，$r_H = \mathsf{r}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})$，$r_S = \mathsf{r}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}})$，并假设失真约束 d 满足

$$\mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) - \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}) \le d \le \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) - \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}) + r_S\lambda_{\min}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}), \tag{19}$$

where $\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}} = \mathsf{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P}\big(\mathbb{P}^{\mathsf{H}}\mathsf{C}_{\mathbf{H}}\mathbb{P} + \mathsf{I}_{n_0}\big)^{-1}\mathbb{P}^{\mathsf{H}}\mathsf{C}_{\mathbf{H}}$.

Proof: See Appendicx A. ■

注记2（所施加失真约束的范围）。式 (19) 中 d 的取值范围规定了适用闭式率失真函数的最小失真。更一般地，若 d 满足

$$r'_S\,\lambda_i(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}) \le d - \big(\mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) - \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}})\big) \le r'_S\,\lambda_{i+1}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}), \tag{20}$$

其中 $\lambda_i(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}})$ 表示 $\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$ 的第 i 小的非零特征值，且 $r'_S = r_S - i$。因此，若将式 (12) 中的 r_S 替换为 r'_S，定理 1 仍然成立。实际中，由于 CSI反馈引入的失真通常较小 [4], [6], ，因此只需考虑最严格的失真范围。◊

在本定理中，我们推导了CSI反馈系统的整体率失真函数（RDF）：用户设备经过 n_t 次采用高斯导频的训练传输后，通过MMSE估计下行信道，随后对估计CSI进行编码以供反馈。具体而言，公式（12）中的整体RDF $R_{\mathbf{H},\,\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d)$分解为三个部分。第一项，即公式（13）中的 $R_{\mathbf{H}}(d)$，可解释为在失真 d 下直接对真实信源$\mathbf{H}$进行编码的率失真函数。第二项，即公式（14）中的$\Delta R_{\mathbb{P},\,\mathbf{S}}$，量化了在给定$\mathbf{P}$的条件下对MMSE估计$\mathbf{S}$ 而非真实信源$\mathbf{H}$进行编码时压缩代价的降低，这是因为MMSE估计减少了信源不确定性。第三项，即公式（15）中的$\Delta R_{\mathbb{P},\,d}$，量化了有效失真容限 $d - D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$较小时所导致的压缩代价增加。值得强调的是，$\Delta R_{\mathbb{P},\,\mathbf{S}}$ 和$\Delta R_{\mathbb{P},\,d}$ 都可能使远程RDF$R_{\mathbf{H},\,\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d)$偏离直接RDF $R_{\mathbf{H}}(d)$，这主要是因为训练传输次数有限时，高斯导频矩阵会引入较强的随机性。

下文中，为了更好地量化导频引入的随机性对整体反馈性能的影响，我们将在常见且温和的条件下，考察训练长度 n_t 如何影响期望反馈效率（即已建立的率失真函数）。

B. 压缩最小均方误差估计带来的率失真函数下降

我们假设 $\mathsf{C}_{\mathbf{H}}$ 为满秩。为便于分析，我们考虑导频占据所有子载波（$n_c = n_p$）的情形，并聚焦于 $n_t \ge m_t$ 这一范围，以确保式（1）中的估计定义良好。这种设置在实践中具有现实意义，因为它能提供足够的观测来进行准确的信道估计，并支持可靠的整体反馈性能。众所周知，在相同的失真约束下，压缩最小均方误差估计$\mathbf{S} = \mathbb{E}[\mathbf{H}|\mathbf{Y}]$ 所需的码率低于直接压缩$\mathbf{H}$。这是因为$\mathbf{S}$ 仅包含$\mathbf{H}$ 中与$\mathbf{Y}$相关的分量，而其余不相关部分则源于$\mathbf{W}$ 中的加性高斯白噪声$\mathbf{Y}$。这一观察可以正式表述如下。

命题 1. 当 $n_c = n_p$ 和 $n_t \ge m_t$时，在相同的失真约束下，给定一个从高斯系综中抽取的导频矩阵 $\mathbb{P}$，与压缩$\mathbf{S} = \mathbb{E}[\mathbf{H}|\mathbf{Y}]$ 得到的$\mathbf{H}$相比，压缩$\mathbf{H}$所带来的率失真函数降低为

$$\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\big(h(\mathbf{S}|\mathbb{P}) - h(\mathbf{H})\big) \tag{21}$$

$$= \frac{1}{2}\big(h(\overline{\mathbf{Y}}|\mathbb{P}) - h(\mathbf{Y}|\mathbb{P})\big), \tag{22}$$

其中，四个微分熵分别由公式（5）、（16）和（17）给出。 (6),

证明：鉴于 $\mathbf{P}$ 根据公式（2）生成，且$n_0 \ge N = m_t n_c$，它几乎必然是满秩的 N。因此，$\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$ 几乎必然具有秩 $r_S = N$，并且 $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}$ 也是满秩的，其中 $\mathbb{A} = \mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathbb{P}$。在这种情况下，公式（14）中的 $\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}$ 可通过参考公式（16）和（17）优雅地表示为

$$\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\log\frac{\det\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\right)}{\det\left(\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\right)}. \tag{23}$$

回顾公式（5）和（6），并注意到 $\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}$ 和$\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A}$具有相同的非零特征值，即可得出结果。 ■

可以看出，MMSE估计器为CSI反馈提供了一种理论上高效的方法。在相同的失真约束下，基于最小均方误差的压缩能够降低RDF；RDF量化了由于下行噪声的存在而导致接收信息中与真实信道状态信息无关的部分。

接下来，我们介绍$\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}$ 与下行训练长度n_t 在期望意义下的关系。

定理 2.当 $n_c = n_p$ 与 $n_t \geq m_t$时，在相同的失真约束下，对最小均方误差估计$\mathbf{S}$进行压缩所得到的期望率失真函数降幅$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}]$（其中导频矩阵$\mathbb{P}$ 取自公式(2)中的高斯系综）的界为

$$\Delta R_{\mathbf{S}}^{L} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] \leq \Delta R_{\mathbf{S}}^{U}, \tag{24}$$

其中$\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}$ 见公式(14)，且

$$\Delta R_{\mathbf{S}}^{L} = \frac{1}{2}\Big(\log \frac{\det(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})}{\det\big(\mathsf{I}+\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}\frac{n_t}{m_t}\mathsf{C}_{\mathbf{H}}\big)} + m_t n_c \log\frac{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}}{m_t} + n_c\sum_{j=0}^{m_t-1}\psi(n_t-j)\Big), \tag{25}$$

$$\Delta R_{\mathbf{S}}^{U} = \frac{m_t}{2\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}(n_t-m_t)}\cdot\Big(-\mathrm{tr}\big(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}^{-1}\big) + \frac{m_t^2 n_c n_t}{2\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}(n_t-m_t-1)(n_t-m_t+1)\lambda_{\min}^2(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})}\Big). \tag{26}$$

此外，在 n_t 较大的情况下，我们得到如下渐近标度

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] = \frac{C_{\mathbf{S}}}{n_t} + O\left(\frac{1}{n_t^2}\right), \tag{27}$$

其中 $C_{\mathbf{S}}^{L} \leq C_{\mathbf{S}} \leq C_{\mathbf{S}}^{U}$，且

$$C_{\mathbf{S}}^{L} = -\frac{m_t \mathrm{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}^{-1})}{2\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}} - \frac{m_t^2 n_c}{4}, \tag{28}$$

$$C_{\mathbf{S}}^{U} = -\frac{m_t \mathrm{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}^{-1})}{2\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}}. \tag{29}$$

证明： 参见附录 B。 ■

该定理表明，随着下行训练符号数量 n_t 增加，压缩最小均方误差估计所带来的率失真函数降低量以 $\frac{1}{n_t}$ 的速率趋近于零。此外，将这一结果与命题 1 结合可知，即使下行信噪比保持不变，随着训练长度增加，有噪下行信道也会逐渐趋近于其无噪对应信道。

C. 更严格的失真约束带来的率失真函数增量

本部分的关键观察是，用户设备执行 MMSE估计，从而有效地将允许的上行失真降低至 $d - D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$。这一降低会使相应的率失真函数增大。相关结果总结如下定理。

定理 3。当 $n_c = n_p$ 和 $n_t \geq m_t$ 时，若按照式 (19) 中的规定施加整体失真约束 d，则对于从式 (2) 中的高斯系综抽取的导频矩阵 $\mathbb{P}$，用户设备侧的期望最小均方误差有如下界：

$$D_{\mathrm{mmse}}^{L} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}] \leq D_{\mathrm{mmse}}^{U}, \tag{30}$$

其中， $D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$ 如式(18)所示，并且

$$D_{\mathrm{mmse}}^{L} = \mathrm{tr}\Big(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}\Big(\mathsf{I}+\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}\frac{n_t}{m_t}\mathsf{C}_{\mathbf{H}}\Big)^{-1}\Big), \tag{31}$$

$$D_{\mathrm{mmse}}^{U} = \frac{m_t^2 n_c}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}(n_t-m_t)}. \tag{32}$$

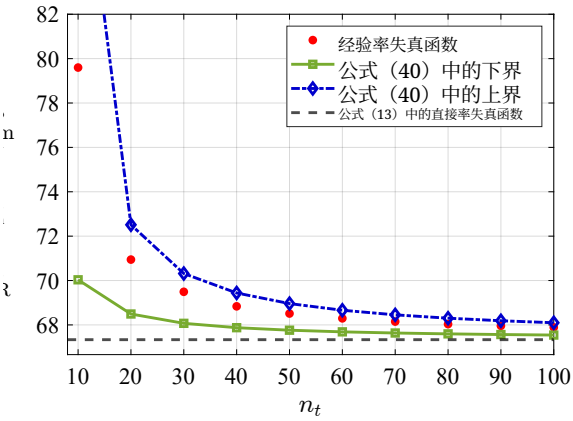


图 2。下行训练长度与 CSI 反馈系统整体率失真函数之间的关系。

期望最小均方误差呈现如下缩放关系

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}] = \frac{m_t^2 n_c}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}}\cdot\frac{1}{n_t} + O\left(\frac{1}{n_t^2}\right). \tag{33}$$

在较宽松的失真约束 $d - D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$ 下，相应的率失真函数增量期望满足如下界：

$$\Delta R_{d}^{L} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},d}] \leq \Delta R_{d}^{U}, \tag{34}$$

where $\Delta R_{\mathbb{P},d}$ *is in Eq.* (15)*, and*

$$\Delta R_{d}^{L} = -\frac{m_t n_c}{2}\log\Big(1-\frac{D_{\mathrm{mmse}}^{L}}{d}\Big), \tag{35}$$

$$\Delta R_{d}^{U} = \frac{m_t n_c}{2\epsilon d} D_{\mathrm{mmse}}^{U}, \tag{36}$$

对于给定的某个 $\epsilon \in (0,1)$。此外，在较大 n_t 的情况下，渐近标度为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},d}] = \frac{C_d}{n_t} + O\left(\frac{1}{n_t^2}\right), \tag{37}$$

其中 $C_d^{L} \leq C_d \leq C_d^{U}$，并且

$$C_d^{L} = \frac{m_t^3 n_c^2}{2d\,\mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}}, \tag{38}$$

$$C_d^{U} = \frac{C_d^{L}}{\epsilon}. \tag{39}$$

证明：见附录 C。 ■

由更严格的失真约束导致的额外RDF以及最小均方误差失真，均以 $\frac{1}{n_t}$ 的速率趋于零。此外，式（33）中最小均方误差失真的渐近分析表明， D_{mmse} 随下行信噪比增大而反比衰减。这一结果重现了 [4] 中的结论，同时将其推广到任意信噪比。

D. 有限训练对总体性能的影响

现在，我们可以从统计意义上刻画CSI反馈系统的总体RDF与下行训练符号数量之间的关系。

定理4。当 $n_c = n_p$ 且基站使用由高斯系综抽取的导频矩阵 $\mathbb{P}$ （见式(2)）训练下行信道，训练符号数为 n_t 且满足 $n_t \geq m_t$ 时，用户设备在对反馈进行编码之前对$\mathbf{H}$ 进行*MMSE*估计，则在失真约束$\mathbb{E}[\|\mathbf{H}-\mathbf{Z}\|^2] \leq d$ 下，整体期望率失真函数的界为

$$\Delta R_{\mathbf{S}}^{L} + \Delta R_{d}^{L} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R_{\mathbf{H},\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d)] - R_{\mathbf{H}}(d) \leq \Delta R_{\mathbf{S}}^{U} + \Delta R_{d}^{U}, \tag{40}$$

其中，项 $R_{\mathbf{H}}(d)$、$\Delta R_{\mathbf{S}}^{L}$、$\Delta R_{\mathbf{S}}^{U}$、$\Delta R_{d}^{L}$、$\Delta R_{d}^{U}$分别由式(13)、(25)、(26)、(35)和(36)给出。

此外，在 n_t 较大的情况下，渐近标度为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[R_{\mathbf{H},\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d)] = R_{\mathbf{H}}(d) + \frac{C_{\mathbf{S},d}}{n_t} + O\left(\frac{1}{n_t^2}\right), \tag{41}$$

其中

$$C_{\mathbf{S}}^{L} + C_{d}^{L} \le C_{\mathbf{S},d} \le C_{\mathbf{S}}^{U} + C_{d}^{U}, \tag{42}$$

各项分别见式(28)、(29)、(38)和(39)。

证明：证明可直接由定理 2 和定理 3 合并得出。 ∎

随着下行训练导频数量的增加，基于用户设备最小均方误差估计的整体率失真函数渐近收敛于直接率失真函数；后者对应用户设备能够完全获取下行链路信道状态信息的情况。两者之间的差距随训练符号数量增加而反比衰减。

在仿真中，我们考虑一个包含 $m_t = 4$ 根发射天线、$n_c = 8$ 个子载波、$n_p = 8$ 个导频块、信噪比为 $_{\mathrm{dl}} = 10$ dB 且失真约束为 $d = 3.5$ 的系统。为模拟真实的信道环境，信道协方差矩阵 $\mathsf{C}_{\mathbf{H}}$ 的特征值中约三分之一较小、三分之一较大，其余则处于中等水平。仿真结果如图 2 所示，表明所推导的上界和下界十分紧致，且二者均以 $\frac{1}{n_t}$ 的速度衰减并趋近于直接率失真函数。这证实，增加下行训练符号的数量可显著提升整体信道状态信息反馈性能。值得注意的是，即使训练长度达到天线数量的数倍，整体率失真函数与直接率失真函数之间仍存在明显偏差，这表明在实际系统中，恰当设计训练和反馈策略至关重要。

IV. 结论

本文研究了一种 CSI反馈系统，其中用户设备在编码并向基站反馈之前会进行 MMSE估计。我们给出了基站采用有限下行训练和高斯集成导频时整个系统的率失真函数（RDF）。具体而言，该率失真函数由三部分构成：用户设备能够访问下行链路信道状态信息时对应的直接率失真函数；MMSE降低信源不确定性所带来的率失真函数下降；以及反馈过程中MMSE导致失真约束更加严格所引起的率失真函数上升。一个关键发现是，随着下行训练符号数量增加，整体率失真函数按训练长度的倒数成比例衰减，最终趋近于直接CSI编码的率失真函数。这一结果具有实际意义，因为它表明，充足的下行训练能够使用户设备在后续反馈时有效地表现得如同可以完全访问下行链路信道状态信息。未来的工作将研究仅在少数导频子载波上进行训练时的系统性能，重点考察训练资源极其有限且基站天线数量非常庞大的场景。

附录 A 定理 1 的证明

在用户设备处，MMSE估计误差$\mathbf{E} = \mathbf{H} - \mathbf{S}$ 与$\mathbf{S}$相互独立，其中$\mathbf{E} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathsf{C}_{\mathbf{E}})$，且 $\mathsf{C}_{\mathbf{E}} = \mathsf{C}_{\mathbf{H}} - \mathsf{C}^{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$。达到率失真函数的最优测试信道建模为加性高斯白噪声信道$\mathbf{S} = \mathbf{Z} + \mathbf{N}$，其中$\mathbf{N} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathsf{C}_{\mathbf{N}})$与$\mathbf{Z}$相互独立。因此，失真变为 $\mathrm{E}[\|\mathbf{H} - \mathbf{Z}\|^2] = \mathrm{E}[\|\mathbf{E} + \mathbf{N}\|^2]$，互信息 $I(\mathbf{S};\mathbf{Z})$ 可相应地重写。对于高斯情形，式（11）中的率失真函数可通过求解以下问题得到

$$\min_{\mathsf{C}_{\mathbf{N}}} \quad \frac{1}{2}\log\det{}^{+}\left(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}\mathsf{C}_{\mathbf{N}}^{-1}\right), \tag{43}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) - \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}) + \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{N}}) \le d. \tag{44}$$

为严谨起见，使用伪行列式来处理公式（43）中 $\mathsf{C}^{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$ 可能存在的秩亏。这是一个迹约束的最大行列式问题 [13]。根据经典的反向注水原理 [3], , 在 $\mathsf{C}^{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$的所有非零特征值上分配相同的噪声功率；根据公式（19），最优噪声协方差为

$$\mathsf{C}_{\mathbf{N}}^{\star} = \frac{d - (\mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) - \mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}))}{r_S}\,\mathsf{I}, \tag{45}$$

其中，r_S 是$\mathbf{S}$的有效维数。将公式（45）中的 $\mathsf{C}_{\mathbf{N}}^{\star}$代入公式（43），率失真函数可表示为

$$R_{\mathbf{H},\mathbf{S}|\mathbb{P}}(d) = \tfrac{1}{2}\log\det{}^{+}\big(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}\big) - \tfrac{r_S}{2}\log\big(\tfrac{d-(\mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})-\mathsf{tr}(\mathsf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}}))}{r_S}\big). \tag{46}$$

将公式（13）中与 P 无关的项从公式（46）的率失真函数中分离出来。定义 $\mathsf{A} = \mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathsf{P}$，则公式（9）中的 $\mathsf{C}^{\mathbf{S}|\mathbb{P}} = \mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathsf{A}(\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{A} + \mathsf{I})^{-1}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}$ 可写为。回顾伍德伯里恒等式，

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}^{\mathsf{H}}\mathbb{A} + \mathsf{I})^{-1}\mathbb{A}^{\mathsf{H}} = (\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}} \tag{47}$$

$$= \mathsf{I} - (\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-1}, \tag{48}$$

利用公式（47），我们得到 $\Delta R_{\mathbb{P},\,\mathbf{S}}$（见公式（14））。另一方面，将 $\mathsf{C}^{\mathbf{S}|\mathbb{P}}$ 利用公式（48）重写后，可得 $\Delta R_{\mathbb{P},\,d}$（见公式（15）），以及 $D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}$（见公式（18））。

附录B 定理 2 的证明

我们有 $\mathrm{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] = \frac{1}{2}(\mathrm{E}[\log\det(\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}})] - \mathrm{E}[\log\det(\mathsf{I} + \mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}})])$。为了对该量建立界，我们首先推导 $\mathrm{E}[\log\det(\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}})]$, 的精确表达式，然后对 $\mathrm{E}[\log\det(\mathsf{I} + \mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}})]$进行界定。令 $\mathsf{A} = \mathsf{C}^{1/2}{}_{\mathbf{H}}\,\mathsf{P}$，则 $\det(\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}) = \det(\mathsf{C}_{\mathbf{H}})\det(\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathsf{H}})$。因此，只需关注 $\mathrm{E}[\log\det(\mathsf{P}\mathsf{P}^{\mathsf{H}})]$。导频矩阵 P 是分块对角矩阵，其块为 $\mathsf{P}_k \in \mathcal{C}^{m_t \times n_t}$；其中每个块 $\mathsf{P}_k\mathsf{P}_k^{\mathsf{H}}$服从复 Wishart 分布 $\mathcal{CW}_{m_t}(n_t, p\mathsf{I})$，当 $n_t \ge m_t$时成立。对于满足 $n \ge m$的 $\mathsf{X} \sim \mathcal{CW}_m(n, \Sigma)$，有 [14, 公式（2.12）]

$$\mathbb{E}[\log\det(\mathbb{X})] = \log\det(\Sigma) + \sum\nolimits_{j=0}^{m-1}\psi(n-j), \tag{49}$$

其中 $\psi(\cdot)$ 为双伽马函数。利用这一结果，我们有 $\mathrm{E}[\log\det(\mathsf{P}_k\mathsf{P}_k^{\mathsf{H}})] = m_t\log\, p + \sum_{j=0}^{m_t-1}\psi(n_t - j)$，其中 $p = $信噪比$_{m_t}{}^{\mathrm{dl}}$ 表示导频矩阵 P 的功率约束。因此，对所有块求和可得

$$\mathbb{E}[\log\det(\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})] = \log\det(\mathsf{C}_{\mathbf{H}}) + n_c\Big(m_t\log p + \sum\nolimits_{j=0}^{m_t-1}\psi(n_t - j)\Big). \tag{50}$$

应用詹森不等式，我们有

$$\mathbb{E}\big[\log\det(\mathsf{I} + \mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})\big] \le \log\det\big(\mathsf{I} + \mathbb{E}[\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}}]\big) \tag{51}$$

$$= \log\det\big(\mathsf{I} + \mathsf{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}\,\mathbb{E}[\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}}]\,\mathsf{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}\big) \tag{52}$$

$$= \log\det\big(\mathsf{I} + n_t p\,\mathsf{C}_{\mathbf{H}}\big), \tag{53}$$

其中，最后一个等式是因为导频矩阵 $\mathbf{P}$ 的每个块 $\mathbf{P}_k$ 均满足 $\mathbb{E}[\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k^{\mathsf{H}}] = n_t p\,\mathbf{I}_{m_t}$，因此 $\mathbb{E}[\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{H}}] = n_t p\,\mathbf{I}_N$，其中 $N = m_t n_c$。结合式 (50) 和式 (53)，即可得到式 (25) 中的下界。

对于上界，我们考虑 $\mathbb{E}\,\frac{1}{2}\big[\sum_{i=1}^{N}\big(\frac{\sigma_i}{1+\sigma_i}\big)\big]$ $\{\sigma_i\}$ $\mathbb{P}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] = \mathbb{E}\log$，其中 是 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ 的特征值。利用不等式 $\log\big(\frac{\sigma}{1+\sigma}\big) \le -\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma^2}$ for $\sigma > 0$，可得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{N}\big(-\frac{1}{\sigma_i} + \frac{1}{2\sigma_i^2}\big)\big]$，其矩阵形式为

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[-\mathsf{tr}\big((\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\big) + \frac{1}{2}\mathsf{tr}\big((\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathsf{H}})^{-2}\big)\big]. \quad (54)$$

代入 $\mathbb{A} = \mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{1/2}\mathbf{P}$，可得 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},\mathbf{S}}] \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[-\mathsf{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{H}})^{-1})\big] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[\mathsf{tr}((\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbf{C}^{-1}{}_{\mathbf{H}}(\mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbf{C}^{-1}{}_{\mathbf{H}})\big]$。为处理第二项，我们应用冯·诺依曼迹不等式 [15], ，得到

$$\mathbb{E}\big[\mathsf{tr}((\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}})^{-1}\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{-1})\big] \le \frac{\mathsf{tr}(\mathbb{E}[(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}})^{-2}])}{\lambda_{\min}^2(\mathbf{C}_{\mathbf{H}})}. \quad (55)$$

由 [14, 引理 2.10] 和 [16, 21.14] 可得

$$\mathbb{E}\big[(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}})^{-1}\big] = \frac{\mathbf{I}_N}{p(n_t - m_t)}, \quad (56)$$

$$\mathbb{E}\big[(\mathbb{P}\mathbb{P}^{\mathsf{H}})^{-2}\big] = \frac{n_t\,\mathbf{I}_N}{p^2(n_t - m_t - 1)(n_t - m_t)(n_t - m_t + 1)}, \quad (57)$$

对于 $n_t \ge m_t$。通过应用式 (54) 并代入 $p = \text{信噪比}_{m_t}{}^{\mathrm{dl}}$，可在式 (26) 中建立相应的上界。

接下来，我们分析这些界关于 n_t 的渐近行为。从下界出发，并利用渐近展开 [17, 6.3.18], 我们有

$$\sum_{j=0}^{m_t-1}\psi(n_t - j) = m_t\log n_t - \frac{m_t^2}{2n_t} + O\Big(\frac{1}{n_t^2}\Big). \quad (58)$$

此外，通过展开对数项并将其表示为 $\mathbf{C}_{\mathbf{H}}$ 的迹，我们得到

$$\log\det\big(\mathbf{I} + \mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}\tfrac{n_t}{m_t}\mathbf{C}_{\mathbf{H}}\big) = N\log p + \log\det(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}) + N\log n_t + \frac{\mathsf{tr}(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}^{-1})}{pn_t} + O\Big(\frac{1}{n_t^2}\Big). \quad (59)$$

由此得到式 (28) 中的 $C_{\mathbf{S}}^L$。另一方面，式中的 $C_{\mathbf{S}}^U$ 直接由式 (26) 的第一项得出。 (29)

附录 C 定理 3 的证明

我们关注的量为 $D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}} = \mathsf{tr}\big(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\big)$，且函数 $f(\mathbf{X}) = \mathsf{tr}\big(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{I} + \mathbf{X})^{-1}\big)$ 对 $\mathbf{X} \succeq \mathbf{0}$ 是凸函数。应用詹森不等式，并回顾从式 (51) 到式 (53) 的推导，可得式 (31) 中的下界。对于上界，我们首先注意到 $\mathsf{tr}\big(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\big) \le \mathsf{tr}\big(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{-1}\big)$。回顾式 (56)，即可得到式 (32) 中的上界。对于渐近分析，我们考虑下界 $\mathsf{tr}\big(\mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{C}_{\mathbf{H}})^{-1}\big) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{1+\alpha\lambda_i}$，其中 $\alpha = \mathrm{SNR}_{\mathrm{dl}}\frac{n_t}{m_t}$，而 $\{\lambda_i\}$ 是 $\mathbf{C}_{\mathbf{H}}$ 的特征值。当 n_t 较大时，有 $\frac{\lambda_i}{1+\alpha\lambda_i} = \frac{1}{\alpha} + O(\frac{1}{n_t^2})$。结合上界，可得式 (33) 中的渐近标度。

回顾一下，当 $n_c = n_p$ 和 $n_t \ge m_t$ 时，我们有 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},d}] = \frac{N}{2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[-\log\big(1 - \frac{D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}}{d}\big)\big]$。应用詹森不等式，并利用 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[D_{\mathrm{mmse}|\mathbb{P}}]$ 的下界，可在式 (35) 中得到 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},d}]$ 的一个下界。对于上界，我们首先引入记号 $\mathbf{X} = \mathbf{C}_{\mathbf{H}}(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{-1}$。应用 $-\log(1-a) \le \frac{a}{1-a}$，其中 $a \in (0,1)$，可将所关注的量上界为

$$-\frac{N}{2}\,\mathbb{E}\big[\log\big(1 - \tfrac{1}{d}\mathsf{tr}(\mathbb{X})\big)\big] \le \frac{N}{2}\,\mathbb{E}\big[\big(\tfrac{d}{\mathsf{tr}(\mathbb{X})} - 1\big)^{-1}\big]. \quad (60)$$

回顾一下，式（19）中的失真约束满足 $\mathsf{tr}(\mathbf{X}) \le d \le \mathsf{tr}(\mathbf{X}) + N\lambda_{\min}(\mathbf{C}_{\mathbf{S}|\mathbb{P}})$。为简化上界，我们施加以下条件

$$d \ge \frac{1}{1-\epsilon}\,\mathsf{tr}(\mathbb{X}), \quad (61)$$

对于某个 $\epsilon \in (0,1)$。现在我们可以继续进一步求界

$$\mathbb{E}\big[\big(\tfrac{d}{\mathsf{tr}(\mathbb{X})} - 1\big)^{-1}\big] \le \frac{1}{\epsilon d}\mathbb{E}\big[\mathsf{tr}(\mathbb{X})\big]. \quad (62)$$

将式（32）中 $\mathbb{E}[\mathsf{tr}(\mathbf{X})]$ 的上界代入，可得到式（36）所示的 $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\Delta R_{\mathbb{P},d}]$ 上界。当 n_t 较大时，可根据此前对 D_{mmse}^L 和 D_{mmse}^U 所做的渐近分析，轻易得到渐近系数。

参考文献

[1] J. Guo、C.-K. Wen、S. Jin 和 G. Y. Li，“大规模MIMO系统中基于深度学习的CSI反馈综述”，*IEEE Trans. Commun.*，第 70 卷，第 12 期，第 8017–8045 页，2022 年 12 月。[2] C.-K. Wen、W.-T. Shih 和 S. Jin，“面向大规模MIMO的CSI反馈深度学习”，*IEEE WirelessCommun. Lett.*，第 7 卷，第 5 期，第 748–751 页，2018 年 10 月。[3] T. M. Cover 和 J. A. Thomas，信息论要素，第 2 版。美国新泽西州霍博肯：Wiley，2006 年。[4] M. B. Khalilsarai、Y. Song、T. Yang 和 G. Caire，“FDD大规模MIMO信道训练：最优率失真界与‘一次性’方案的频谱效率”，*IEEE Trans. Wireless Commun.*，第 22 卷，第 9 期，第 6018–6032 页，2023 年 9 月。[5] H. Kim、G. De Veciana 和 H. Kim，“无线系统中利用旁信息进行CSI反馈的基本极限”，*IEEE J. Sel. Areas Commun.*，第 43 卷，第 7 期，第 2417–2430 页，2025 年 7 月。[6] Y. Song、T. Yang、M. B. Khalilsarai 和 G. Caire，“压缩反馈下的下行链路CSIT：联合与分离信源信道编码”，*IEEE Trans. Wireless Commun.*，第 24 卷，第 10 期，第 8429–8444 页，2025 年 10 月。[7] T. Berger，率失真理论：数据压缩的数学基础。美国新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：Prentice-Hall，1971 年。[8] W. Yang、G. Durisi、T. Koch 和 Y. Polyanskiy，“有限码长下的准静态多天线衰落信道”，*IEEE Trans. Inf. Theory*，第 60 卷，第 7 期，第 4232–4265 页，2014 年 7 月。[9] G. Durisi、T. Koch、J. ¨Ostman、Y. Polyanskiy 和 W. Yang，“多天线瑞利衰落信道上的短分组通信”，*IEEE Trans. Commun.*，第 64 卷，第 2 期，第 618–629 页，2016 年 2 月。[10] F. A. Dietrich 和 W. Utschick，“基于二阶统计量的导频辅助信道估计”，*IEEE Trans. Signal Process.*，第 53 卷，第 3 期，第 1178–1193 页，2005 年 3 月。[11] T. Yang、J. Maly、S. Dirksen 和 G. Caire，“空间非平稳大规模MIMO系统中采用抖动量化信号的即插即用信道估计”，*IEEE Trans. Commun.*，第 72 卷，第 1 期，第 387–402 页，2024 年 1 月。[12] V. Kostina 和 S. Verd´u，“非渐近有噪有损信源编码”，*IEEE Trans. Inf. Theory*，第 62 卷，第 11 期，第 6111–6123 页，2016 年 11 月。[13] S. Boyd 和 L. Vandenberghe，凸优化。英国剑桥：剑桥大学出版社，2004 年。[14] A. M. Tulino 和 S. Verd´u，“随机矩阵理论与无线通信”，*Found. Trends Commun. Inf. Theory*，第 1 卷，第 1 期，第 1–182 页，2004 年。[15] L. Mirsky，“John von Neumann 的迹不等式”，*Monatshefte f¨ur mathematik*，第 79 卷，第 4 期，第 303–306 页，1975 年 12 月。[16] G. A. Seber，统计学家矩阵手册。美国新泽西州霍博肯：Wiley，2008 年。[17] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，数学函数手册：含公式、图表和数学表。美国纽约州纽约：Dover，1964 年。