多重椭圆伽马函数的几何族与算术应用，II

同余子群在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中的作用

Pierre L. L. Morain[1]

arXiv:2602.06561v1 [math.NT] 6 Feb 2026

摘要：

这是本系列的第二篇论文，我们研究起源于数学物理的多重椭圆伽马函数的算术应用。在本系列的第一篇论文中，我们定义了这些函数的几何族，并证明这些几何族满足涉及一族相应伯努利有理函数的余边界关系。本文的主要目的是展示，我们的几何椭圆伽马函数的平滑版本为 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的同余子群给出了部分模符号，其中 $n \geq 2$这些部分模符号限制为来自数域中全正单位群的 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 环面上的（$n-2$）-余循环。为此，我们证明相应的平滑伯努利有理函数可化为分母一致有界的平滑化高阶戴德金和。

致谢：本文是作者正在进行的博士研究的一部分。作者谨向索邦大学的导师 Pierre Charollois 和 Antonin Guilloux 致谢，感谢他们一路以来的指导、有益的意见与支持。作者也感谢 Mateo Crabit Nicolau、Mart´ı Roset Juli`a 和 Peter Xu 的热烈讨论。

[1]索邦大学和巴黎西岱大学，法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究院、IMJ-PRG，法国巴黎 F-75005。´这项博士研究由法国帕莱索综合理工学院资助。

目录

1 引言　导言 **2**

2 模性质 **8**

2.1 G_{n-2} 和 B_n 函数的几何族.8 2.2 模性质的证明.10

3 经典平滑操作 **26**

3.1 几何设定.26 3.2 平滑伯努利有理函数取有理值.33 3.3 平滑伯努利有理函数具有有界分母 . . . 35

4 上同调解释 **38**

1 引言

在这一系列论文中，我们研究以复乘理论中使用的 θ 函数为模型构造的多变量亚纯函数，该函数定义在 $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ 上:

$$\theta(z,\tau)=\prod_{n\geq 0}\left(1-e^{-2i\pi z}e^{2i\pi(n+1)\tau}\right)\left(1-e^{2i\pi z}e^{2i\pi n\tau}\right)$$

其中 $\mathbb{H}$ 表示上半平面。该函数在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用下具有模性质。事实上，存在一个有理函数 $P_2\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\to\mathbb{Q}(z,\tau)$，使得对于所有 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$:

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\theta(z,\tau).e^{2i\pi P_{2,\gamma}(z,\tau)}. \tag{1}$$

有理函数 $P_{2,\ \gamma}$ 可用经典戴德金和表示，戴德金和定义为 $c>0$：

$$s(c,d)=\sum_{k=1}^{c-1}b_1\left(\frac{k}{c}\right)b_1\left(\frac{kd}{c}\right) \tag{2}$$

其中 $b_1\colon\ t\to t-\lfloor t\rfloor-1/2$ 是伯努利多项式$B_1(t)=t-1/2$ 的经典周期版本。有理函数 $P_{2,\ \gamma}$ 的显式公式为:

$$P_{2,\gamma}(z,\tau)=\begin{cases}0 & \text{if } c=0 \text{ and } a=1\\ z-\frac{1}{2} & \text{if } c=0 \text{ and } a=-1\\ \frac{z^2c^2+zc+1/6}{2c(c\tau+d)}-\frac{z}{2}+\frac{c\tau+d}{12c}-\mathrm{sign}(c)(s(|c|,d)+\frac{1}{4}) & \text{if } c\neq 0\end{cases}$$

其中当 $c\neq 0$ 时，符号(c) 为 $=c/|c|$ [[（结合 [[Rad32]，公式 (3.26)]，可由 [[Sie80]，命题 4] 推导得出）。经典做法是对 θ 函数进行平滑操作，以得到以下两种形式之一的模单位:

$$\frac{\theta(z,\tau)^{N^2}}{\theta(Nz,\tau)}\quad or\quad\frac{\theta(z,\tau)^{N}}{\theta(Nz,N\tau)}.$$

在第一种情形中，通过加入一个小的指数前因子，我们得到 Siegel 单位的基本成分:

$${}_N\theta(z,\tau)=e^{2i\pi\left(\frac{N^2-1}{12}\tau+\frac{N-N^2}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right)}\frac{\theta(z,\tau)^{N^2}}{\theta(Nz,\tau)}$$

当 $z \in \mathbb{Q}, \tau$ 为虚二次数，且 N 是在域 $\mathbb{Q}(\tau)$ 中惰性的有理素数时（见 [[Kat04], 命题 1.3]）。第二个表达式给出了 Robert 椭圆单位 [Rob73] 的平滑版本，其情形为 N 是在 $\mathbb{Q}(\tau)$ 中分裂的有理素数。在本系列中，我们关注第二种平滑，并且如果我们令：

$$\theta^{(N)}(z,\tau) = \frac{\theta(z,\tau)^N}{\theta(Nz,N\tau)}$$

则对任意 $N \mid c$，(1) 给出：

$$\theta^{(N)}\left(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \theta^{(N)}(z,\tau).e^{2i\pi P_{2,\gamma}^{(N)}(z,\tau)} \tag{3}$$

其中

$$P_{2,\gamma}^{(N)}(z,\tau) = \begin{cases} 0 & \text{if } c=0 \text{ and } d=1 \\ \frac{1-N}{2} & \text{if } c=0 \text{ and } d=-1 \\ \operatorname{sign}(c)\left(s\left(\frac{|c|}{N},d\right) - Ns(|c|,d) + \frac{1-N}{4}\right) & \text{if } c \neq 0. \end{cases}$$

关键在于，平滑模性缺陷 $P_{(N)\,2,\gamma}$仅依赖于矩阵 $\gamma \in \Gamma_0(N) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid N \mid c\}$，而不依赖于 z 与 τ。此外，它满足整性，因为 $P_{(N)\,2,\gamma}$ 的取值位于 $\frac{1}{12}\mathbb{Z}$ 中。映射 $(\gamma \to P_{(N)\,2,\gamma})$ 本质上是经典 Dedekind–Rademacher 函数的平滑版本。该函数在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上定义为：

$$\phi_{DR}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{cases} \frac{b}{d} & \text{if } c=0 \\ \frac{a+b}{c} - 12.\operatorname{sign}(c)s(|c|,d) & \text{if } c \neq 0 \end{cases}$$

并且它取值于 $\mathbb{Z}$ （见 [Rad32]）。函数 ϕ_{DR} 几乎是一个群同态，因为对任意 $\gamma, \gamma' \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$：

$$\phi_{DR}(\gamma'') = \phi_{DR}(\gamma) + \phi_{DR}(\gamma') - 3.\operatorname{sign}(cc'c'')$$

其中 $\gamma'' = \left(\begin{smallmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \gamma'\gamma$。定义在 $\Gamma_0(N)$ 上的 N 级函数 Ψ_N 由

$$\Psi_N\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \phi_{DR}\begin{pmatrix} a & bN \\ \frac{c}{N} & d \end{pmatrix} - \phi_{DR}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

（见 [Rad32], [Maz79]）随后定义了 $H^1(\Gamma_0(N)\ \mathbb{Z})$ 中的一个 1-上循环。Dedekind–Rademacher 函数及其 N 级变体，在 Darmon 和 Dasgupta 构造实二次域上的猜想的椭圆单位时发挥了关键作用 [DD06]，并且也与实二次域上的 Gross-Stark单位有关（见 [DPV24]）。在我们的语境中，应用（$\gamma \to P_2^{(N)}{}_{,\,\gamma}$）由 Dedekind–Rademacher 函数的另一种平滑版本给出：

$$P_{2,\gamma}^{(N)} = \frac{1}{12}\left(N\phi_{DR}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \phi_{DR}\begin{pmatrix} a & bN \\ \frac{c}{N} & d \end{pmatrix}\right) + \begin{cases} 0 & \text{if } c=0 \text{ and } d=1 \\ \frac{1-N}{2} & \text{if } c=0 \text{ and } d=-1 \\ \operatorname{sign}(c)\frac{1-N}{4} & \text{if } c \neq 0 \end{cases}$$

其模 $\mathbb{Z}$约化后，在 $\Gamma_0(N)$ 上定义了一个取值于 $\frac{1}{12}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ 的 1-上循环。—

贯穿本系列的目标是，将椭圆单位的构造推广到恰有一个复位的一般数域，方法是利用 θ 函数的高次类比，这些函数对于高次特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$，$n \geq 2$ 满足类似的变换性质。为此，我们将 Bergeron、Charollois 和 Garc´ıa 在复三次域之上构造的猜想的椭圆单位（即 $n = 3$）推广到恰有一个复位的高次数域。[BCG23] 中的猜想的椭圆单位由 Ruijsenaars 的椭圆伽马函数的特定取值给出 [Rui97]。Felder 和 Varchenko 对这一函数进行了深入研究（参见 [FV00]）；它是定义在 $\mathbb{C} \times \mathbb{H}^2$ 上的亚纯函数，其定义如下：

$$\Gamma(z,\tau,\sigma) = \prod_{m,n\geq 0}\left(\frac{1-\exp(2i\pi((m+1)\tau+(n+1)\sigma-z))}{1-\exp(2i\pi(m\tau+n\sigma+z))}\right).$$

它满足模变换性质，因此可以构造一个关于 $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$ 的 1-余循环。21 世纪初，Nishizawa [Nis01]引入了一整套多重椭圆伽马函数，以推广 theta 函数和椭圆伽马函数。它们是定义在 $\mathbb{C} \times \mathbb{H}^{r+1}$ 上的亚纯函数，定义如下：

$$G_r(z,\tau_0,\ldots,\tau_r) = \prod_{m_0,\ldots,m_r\geq 0}\left(1-e^{2i\pi(-z+\sum_{j=0}^r(m_j+1)\tau_j)}\right)\left(1-e^{2i\pi(z+\sum_{j=0}^r m_j\tau_j)}\right)^{(-1)^r}$$

对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，其中有如下恒等关系：$\theta = G_0$ 和 $\Gamma = G_1$。正如 Narukawa [Nar04], 所证明的，它们对于 $\mathrm{SL}_{r+2}(\mathbb{Z})$ 也满足类似的模变换性质，其模性缺陷涉及某些广义伯努利多项式。我们在 [Mor26a] 中构造的高阶椭圆单位，是通过在一个恰有一个复位的 n 次数域 $\mathbb{K}$ 的点处，对 G_{n-2} 函数进行特定取值得到的，从而按照希尔伯特第十二问题的思路，对 $\mathbb{K}$ 的阿贝尔扩张给出了一个猜想性的解析描述。

在本系列的第一篇文章 [Mor25] 中，我们引入了两个多重椭圆伽马函数的几何族及其对应的伯努利有理函数。这一构造推广了 Felder、Henriques、Rossi 和 Zhu [FHRZ08] 对整个多重椭圆伽马函数层级所进行的椭圆伽马函数几何族构造。这些几何族由定义在秩为 $n \geq 2$ 的格上的函数组成，它们具有关于特殊线性群 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 的模性质。更确切地说，若 L 是一个 $\mathbb{Q}$-向量空间 V 中秩为 n 的格，那么，与 $n-1$ 个线性无关的线性形式 $a_1, \ldots\ldots, a_{n-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ 相对应的多重椭圆伽马函数是一个函数 $G_{n-2,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{n-1}}$：$V/L \times \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$，定义为

$$G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x)^{(-1)^D} = \prod_{\delta\in(v+L)\cap C^-(\underline{a},x)/\mathbb{Z}\gamma}\left(1-e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right) \times \prod_{\delta\in(v+L)\cap C^+(\underline{a},x)/\mathbb{Z}\gamma}\left(1-e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{(-1)^n}$$

对于某些明确的锥 $C^{\pm}(a,x)$, _它们位于有理数域 V 中；一个明确的向量 $\gamma \in L$ 和一个明确的整数 $D \in \mathbb{Z}$（精确定义见第 2.1 节）。作为 $w, x \in \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ 的函数，它是亚纯的。相应的伯努利有理函数 $B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v) \in \mathbb{Q}[w](x)$ 定义为函数展开式中 t^0 的系数

$$\operatorname{sign}\det(a_1,\ldots,a_n) \times \sum_{\delta\in(v+L)\cap C} e^{wt+x(\delta)t}$$

其中，锥 C 由 $C = \{\delta \in V \mid \forall 1 \leq j \leq n, a_j(\delta) \geq 0\}$ 定义（精确定义见（19））。这些函数族在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 对格 L 的作用下是等变的，因为对于所有 $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$，它们满足：

$$G_{n-2,g\cdot a_1,\dots,g\cdot a_{n-1}}(g\cdot v)(w, g\cdot x) = G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w,x) \tag{4}$$

$$B_{n,g\cdot a_1,\dots,g\cdot a_n}(g\cdot v)(w, g\cdot x) = B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x). \tag{5}$$

更深层次地，它们满足部分余边界关系和余循环关系。首先，若 $a_1, \dots, a_n$ 线性无关，则：

$$\prod_{j=1}^{n} G_{n-2,a_1,\dots,\widehat{a_j},\dots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \exp(2i\pi B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x)) \tag{6}$$

（见 [[Mor25], 定理 1]），这是式 (1) 的高次类比。其次，对于 $n+1$ 线性形式 $a_0, \dots, a_n$ 的大多数配置，以下余循环关系成立：

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j B_{n,a_0,\dots,\widehat{a_j},\dots,a_n}(v)(w,x) = 0 \tag{7}$$

（见 [[Mor25], 推论 1]）。本文的主要目标是证明，在对 $G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}$ 函数进行某种经典平滑操作后，模性质 (6) 将成为一个余循环关系，从而推广式 (3)。为陈述主定理，我们现在引入一些与此平滑操作相关的记号。在本文余下部分中，我们固定一个秩为 $n \geq 2$ 的格 L，其基为 $\mathbb{Z}$-基 $B = [e_1, \dots, e_n]$，并固定一个整数 $N \geq 2$。由基 $\mathbb{Z}$-基 $B' = [Ne_1, e_2, \dots, e_n]$ 生成的格 L' 称为平滑格。我们用 Λ （分别用 Λ'）表示 L（分别为 L'）的对偶空间 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$（分别为 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L', \mathbb{Z})$），并定义

$$\Lambda_N = \{a \in \Lambda \mid a_{|L'} \text{ is primitive in } \Lambda'\}$$

其中我们回顾一下：若某个整数 d 满足 $a/d \in \Lambda$，则元素 $a \in \Lambda$ 称为本原元素。集合 Λ_N 自然带有下列 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 中同余子群的作用：

$$\Gamma_0(N,n) = \left\{ g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \;\middle|\; g \equiv \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix} \bmod N \right\}, \tag{8}$$

该作用由右乘 $g\cdot a = a \times g^{-1}$ 的逆元给出。当线性形式 a_1，……，a_n 属于 Λ_N 时，可以引入平滑函数：

$$G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w,x,L,L') = \frac{G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w,x,L')^N}{G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w,x,L)}, \tag{9}$$

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L') = NB_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L') - B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L). \tag{10}$$

由（4）和（5）立即可推得，这些函数在 $\Gamma_0(N,\ n)$ 的作用下是等变的，因为对所有 $g \in \Gamma_0(N,\ n)$ 都有：

$$G_{n-2,g\cdot a_1,\dots,g\cdot a_{n-1}}(g\cdot v)(w, g\cdot x, L, L') = G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w,x,L,L') \tag{11}$$

$$B_{n,g\cdot a_1,\ldots,g\cdot a_n}(g\cdot v)(w,g\cdot x,L,L')=B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L'). \tag{12}$$

由公式（6）也可立即得出，这些平滑函数满足余边界关系：

$$\prod_{j=1}^{n}G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L')^{(-1)^{j+1}}=\exp(2i\pi B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L')) \tag{13}$$

对于线性无关的 a_1、……、$a_n\in\Lambda_N$。

本文的目标是利用关系式 (13) 推导平滑函数 $G_{n-2,\ a_1,\ldots\ldots,\ a_{n-1}}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$ 的余循环关系，从而将函数

$$a_1,\ldots,a_{n-1}\to G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x,L,L')$$

转化为 $\Gamma_0(N,\ n)$ 的部分模符号。我们的主定理是在关于线性形式 a_1、……、a_n 相对于平滑格 L' 的位置的两个条件下表述的。首先，如果 a_1、……、a_n 在 $V^\vee$ 中满足以下条件之一，我们就称它们位置良好：要么 $\mathrm{rk}(a_1$、……、$a_n)\neq n-1$，要么 $\mathrm{rk}(a_1$、……、$a_n)=n-1$ 且 0 不是 $V^\vee$ 中 a_1、……、a_n 的重心（关于这一假设的更多细节，参见定义 4）。第二个条件涉及 $\mathrm{rk}(a_1$、……、$a_n)=n$ 时格 L' 的位置。当 a_1、……、a_n 线性无关时，存在唯一的本原元素 α_1、……、α_n 属于 L，使得

$$a_j(\alpha_j)>0\quad\text{and}\quad a_j(\alpha_k)=0,\forall\, k\neq j.$$

借用 [Das08] 的说法，当且仅当 $a_1,\ldots,a_n\in\Lambda_N$，且 $\mathrm{rk}(a_1,\ldots,a_n)<n$ 或 $\mathrm{rk}(a_1,\ldots,a_n)=n$，并且对于任意 $1\leq j\leq n$, α_j， L' 模下的 L/L' 是循环群的一个生成元（见定义 18）时，我们称指数 N 平滑格 L' 对线性形式 $a_1,\ldots,a_n$ 是良好的。我们的主要结果如下：

定理 1： 假设 $a_1,\ldots,a_n\in\Lambda$ 是非零线性形式，它们在 $V^\vee$ 中位置良好，并且假设平滑格 L' 对 $a_1,\ldots,a_n$ 是良好的，其中 $n,N\geq 2$。那么存在一个整数 $b=b(a_1,\ldots,a_n,v)\in\mathbb{Z}$，它取决于线性形式 $a_1,\ldots,a_n$ 以及 v 在 V/L' 中的类，但不取决于 w, $x\in\mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$，使得对所有 $(v,w,x)\in V/L'\times\mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$：

$$\prod_{j=1}^{n}G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L')^{(-1)^{j+1}}=\exp\left(\frac{2i\pi b}{\mathcal{D}(N,n)}\right) \tag{14}$$

其中 $\mathcal{D}(N,n)=\prod_{p|N}p^{\left\lfloor\frac{n}{p-1}\right\rfloor}$。

公式（14）是对一般情形下公式（3）的类比，我们可以如下将其还原。固定满足 $x(e_1)=\tau$ 且 $x(e_2)=1$ 的 $L=\mathbb{Z}e_1+\mathbb{Z}e_2$ 和 $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$。记 $a_1=[1,0]$ 为满足 $a_1(e_1)=1$ 且 $a_1(e_2)=0$ 的 L 上的线性形式；再记 $a_2=[d,-c]$ 为满足 $a_2(e_1)=d$ 且 $a_2(e_2)=-c$ 的线性形式。然后，作如下识别 $\theta=G_0$，便可用我们关于 $v_0=0$ 的记号写为：

$$\theta_{[1,0]}(v_0)(z,x)=\theta(z,\tau)\quad\text{and}\quad\theta_{[d,-c]}(v_0)(z,x)=\theta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

而整数 $b(a_1,\ a_2,\ v_0)=b([1,0],\ [d,-c],\ 0)$ 由下列公式给出：

$$P_{2,\gamma}^{(N)}=\frac{-b(a_1,a_2,v_0)}{\mathcal{D}(N,2)}$$

其中 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$。在算术应用中，当 τ 是实二次数或虚二次数时，通常有必要将 z 的可能取值限制在域 $\mathbb{Q}(\tau)$ 中，此时可采用范围 $w = 0, z = v_1\tau + v_2$，其中 $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}$（例如，参见 Sie80], 第二章 §6] 中关于实二次域上 L 函数在 $s = 1$ 处取值的确定）。

由定理 1，我们立即推出平滑的 $G_{n-2,a_1,\dots,a_{n-1}}(v)(w, x, L, L')$ 的 $\mathcal{D}(N, n)$ 次幂满足部分乘法余循环关系：

推论1： 在与定理 *1* 相同的假设下：

$$\left(\prod_{j=1}^{n} G_{n-2,a_1,\dots,\widehat{a_j},\dots,a_n}(v)(w, x, L, L')^{(-1)^{j+1}}\right)^{\mathcal{D}(N,n)} = 1.$$

注意，当维数 n 固定时，整数 $\mathcal{D}(N, n)$ 也一致有界于由下式定义的整数 $\mathcal{D}(n)$：

$$\mathcal{D}(n) = \prod_{p \le n+1} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}.$$

例如，当 $n = 2$ 时，我们得到 $\mathcal{D}(2) = 12$，因此对于所有 $N \ge 2$ 以及所有 $\gamma \in \Gamma_0(N)$，都有 $\mathcal{D}(2).P_{(N)\,2,\gamma} \in \mathbb{Z}$。一般界 $\mathcal{D}(n)$ 出现在对某些与平滑函数 $B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w, x, L, L')$ 相关的高维戴德金和的研究中（见第 3.3 节），并且是此类对象研究中的经典界（参见 [Zag73], 其中其他形式的高维戴德金和的分母对偶数 n 也一致有界于我们记号下的 $\mu_{n/2} = 2^{-n}\mathcal{D}(n)$）。

现在我们概述一下这篇论文，它分为两个主要部分。在第 2 节中，我们回顾 [Mor25] 的重要定义，并证明对于线性形式 $a_1, \dots, a_n$ 的几乎所有配置，关系 (6) 都成立，从而推广了 [[Mor25],定理 1]:

定理 2： 设 $a_1, \dots, a_n$ 是 Λ 中位置良好的非零线性形式。那么：

$$\prod_{j=1}^{n} G_{n-2,a_1,\dots,\widehat{a_j},\dots,a_n}(v)(w, x)^{(-1)^{j+1}} = \exp(2i\pi B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w, x)).$$

在 [Mor25] 中，我们已经证明了 $\mathbf{rk}(a_1, \dots, a_n) = n$ 的情形，而 $\mathbf{rk}(a_1, \dots, a_n) \le n - 2$ 的情形是平凡的。因此，在这篇论文中，我们只证明 $\mathbf{rk}(a_1, \dots, a_n) = n-1$ 且 0 不是 $a_1, \dots, a_n$ 的重心的情形（见命题 5）。定理 2 是朝定理 1 方向迈出的第一步。

接下来，在第 3 节中，我们对 $B_{n、\,a_1,\dots,a_n}$ 函数应用一种受 [CD14] 启发的标准平滑操作，并证明以下定理：

定理 3： 设 $a_1、\dots、a_n \in \Lambda$ 线性无关，并假设平滑格 L' 对 $a_1、\dots、a_n$ 是良好的。设 $\alpha_1、\dots、\alpha_n$ 是 $a_1、\dots、a_n$ 在 L 中的本原正对偶基。设 $\alpha_{1,\,j} = \langle \alpha_j、\ e_1 \rangle$、$s_j = a_j(\alpha_j)$ 以及 $v = \sum_{j=1}^{n} v_j\alpha_j/s_j$。对 L/M 固定任意一组代表元 $\mathcal{F}$，其中 $M = \oplus_{j=1}^{n}\mathbb{Z}\alpha_j$。则：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w, x, L, L') = \epsilon \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \sum_{d|N, d \ne 1} \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\zeta_d^{-\alpha_{1,j}\lfloor \frac{v_j+\delta_j}{s_j} \rfloor}}{\zeta_d^{\alpha_{1,j}} - 1}\right)\right) \tag{15}$$

其中 $\epsilon = \text{sign det}(a_1, \ldots, a_n)$，$\zeta_d = \exp(2i\pi/d)$ 以及 $\delta = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \alpha_j / s_j$ 对于任意 $\delta \in \mathcal{F}$.

该定理指出，对于固定的 $a_1, \ldots\ldots, a_n \in \Lambda$ 以及固定的 $v \in V/L'$，函数 $(w, x) \to B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w, x, L, L')$ 实际上是常数，前提是平滑格 L' 对 $a_1, \ldots\ldots, a_n$ 是良好的。此外，对于任意 $v \in V/L'$，有理数$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w, x, L, L')$ 可表示为分圆域中代数数的迹之和，其分母是已知的（例如参见 [Das08]或 [Zag73]）。通过对这些代数数进行详细分析，可得：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w, x, L, L') \in \mathcal{D}(N, n)^{-1}\mathbb{Z}.$$

随后，定理 1 将作为这一结果与定理 2 的推论得出。

本文结构如下：第 2 节回顾本系列第一篇论文中的主要定义，并通过仔细分析定义平滑后的 $G_{n-2,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_{n-1}}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$ 函数所涉及的锥，证明定理 2。第 3 节对伯努利有理函数进行平滑操作，并证明定理 3。随后，在第 3 节末尾，我们将定理 1 作为定理 2 与定理 3 的推论加以证明。最后，第 4 节给出主要结果的上同调解释。

2 模性质

本节回顾 [Mor25] 中给出的定义，并为本文其余部分确立一般的几何设定（见第 2.1 节），然后在第 2.2 节给出定理 2 的五步证明。

2.1 G_{n-2} 和 B_n 函数的几何族

本节确立几何设定，并回顾 [Mor25] 中给出的定义。设 V 是有限维数为 n 的 $\mathbb{Q}$-向量空间，L 是 V 中秩为 n 的格。固定$B = [e_1, \ldots, e_n]$ 一个 L 的 $\mathbb{Z}$-基。定义 $\Lambda = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$，并固定 Λ 的基 $B_\Lambda = [f_1, \ldots, f_n]$，使其满足 $f_j(e_k) = \delta_{jk}$，其中 δ_{jk} 是克罗内克符号。这确定了 L 和 Λ上的行列式形式，以及 $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ 分别通过左乘作用于 L 、通过逆右乘作用于 Λ，使得 $\forall (a, \alpha) \in \Lambda \times L, \forall\, g \in \text{SL}_n(\mathbb{Z}), (g \cdot a)(g \cdot \alpha) = a(\alpha)$。

现在我们来回顾附属于 Λ 中本原线性形式的几何 $G_{n-2、\ a_1\ldots\ldots a_{n-1}}$ 函数族的定义。假设 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 线性无关，并固定 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ 作为 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 在 L 中的正对偶族，其含义如 [[Mor25], 引理 6], 所述，即对所有 $1 \le j \le n-1$:

$$a_k(\alpha_j) = 0 \text{ for all } k \neq j \text{ and } a_j(\alpha_j) > 0.$$

于是我们可以定义集合

$$F(\underline{a}, \underline{\alpha}, v) = \{\delta \in v + L \mid 0 \le a_j(\delta) < a_j(\alpha_j), \forall\, 1 \le j \le n-1\}. \tag{16}$$

以及本原向量 $\gamma \in L$，使得对于某个整数$s > 0$，$\det(a_1, \ldots\ldots, a_{n-1}, \cdot) = s\gamma$。显然，集合 $F(a, \alpha, v)$ 在沿 γ 平移下保持不变，由 [[Mor25], 命题 7] 可知，函数

$$G_{n-2,\underline{a}}(v)(w, x) := \prod_{\delta \in F(\underline{a}, \underline{\alpha}, v)/\mathbb{Z}\gamma} G_{n-2}\left(\frac{w + x(\delta)}{x(\gamma)}, \frac{x(\alpha_1)}{x(\gamma)}, \ldots, \frac{x(\alpha_{n-1})}{x(\gamma)}\right) \tag{17}$$

在 $v \in V/L$ 以及 $(w,\ x)$ 属于 $\mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\ \mathbb{C})$ 的稠密开子集 $\simeq \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n$ 时定义良好，并且与 $\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_{n-1}$ 的选取无关。在 [[Mor25], 命题 7] 的证明中，我们给出了这些函数的一个替代定义，该定义将用于定理 2 的证明，现回顾如下。取 $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\ \mathbb{C})$，使得对所有 $1 \leq j \leq n-1,\ x(\alpha_j)/x(\gamma) \notin \mathbb{R}$。然后定义符号 $d_j = \mathrm{sign}(\Im(x(\alpha_j)/x(\gamma))) \in \{-1,+1\}$，并令 $D = \sum_{j=1}^{n-1}(d_j-1)/2$。最后，定义两个锥：

$$C^+(\underline{a},x) = \{\delta \in V \mid \forall\, 1 \leq j \leq n-1, a_j(\delta) \geq 0 \text{ if } d_j = 1, a_j(\delta) < 0 \text{ if } d_j = -1\},$$
$$C^-(\underline{a},x) = \{\delta \in V \mid \forall\, 1 \leq j \leq n-1, a_j(\delta) \geq 0 \text{ if } d_j = -1, a_j(\delta) < 0 \text{ if } d_j = 1\}.$$

这两个锥不依赖于 α_1、……、α_{n-1} 的选取，并且在沿 γ 平移时保持不变。由 [[Mor25], 命题 7] 的证明可得：

$$G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x)^{(-1)^D} = \prod_{\delta\in(v+L)\cap C^-(\underline{a},x)/\mathbb{Z}\gamma}\left(1-e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right) \times \prod_{\delta\in(v+L)\cap C^+(\underline{a},x)/\mathbb{Z}\gamma}\left(1-e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{(-1)^n}. \quad (18)$$

这一第二种表述将用于第 2.2 节中定理 2 的证明。最后，当线性形式 a_1、……、a_{n-1} 线性相关时，按照约定，对任意 v、w、$x \in V/L\times\mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\ \mathbb{C})$，定义 $G_{n-2,\ a_1,\ldots\ldots,\ a_{n-1}}(v)(w,\ x) = 1$。

现在我们回顾 $B_{n,\ a_1,\ldots\ldots,\ a_n}$ 函数的相关族的定义。如果 n 本原线性形式 a_1、……、$a_n \in \Lambda$ 线性相关，则令 $B_{n,\ a_1,\ldots\ldots,\ a_n}(v)(w,\ x) = 0$。否则，存在唯一的 $\alpha_1,\ \ldots\ldots,\ \alpha_n$ 本原向量族，取自 L，并对所有 $1 \leq j \leq n$ 满足：

$$a_k(\alpha_j) = 0 \text{ for all } k \neq j \text{ and } a_j(\alpha_j) > 0.$$

对所有 $1 \leq j \leq n\}$，设定 $P(a) = \{\delta \in V \mid \delta = \sum_{j=1}^n \delta_j\alpha_j, 0 \leq \delta_j < 1$。则函数 $B_{n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n}: V/L \to \mathbb{Q}[w](x)$ 定义如下：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x) = \mathrm{sign}\det(a_1,\ldots,a_n)\times\mathrm{coeff}[t^0]\left(\sum_{\delta\in(v+L)\cap P(\underline{a})}\frac{e^{wt}e^{x(\delta)t}}{\prod_{j=1}^n(1-e^{x(\alpha_j)t})}\right). \quad (19)$$

在 [[Mor 25], 命题 7] 中，我们证明了若 $a_1,\ldots,a_n$ 线性无关，则：

$$\prod_{j=1}^n G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \exp(2i\pi B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x))$$

此外，函数族 $G_{n-2,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}}$ 和 $B_{n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n}$ 在 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ 对 L 的作用下是等变的；对所有 $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$，有：

$$G_{n-2,g\cdot a_1,\ldots,g\cdot a_{n-1}}(g\cdot v)(w,g\cdot x) = G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x),$$
$$B_{n,g\cdot a_1,\ldots,g\cdot a_n}(g\cdot v)(w,g\cdot x) = B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x).$$

在给出定理 2 的证明之前，我们先回顾 [[Mor25], Definition 11] 中给出的标准非平凡关系的定义，该定义涉及线性形式 $a_1,\ldots,a_n$ 的位置条件，而定理 2 正是在此条件下表述的。事实上，若 $a_1,\ldots,a_m$ 是 V 上的非零线性形式，且 $\mathrm{rk}(a_1,\ldots,a_m) = m-1$，则 $a_1,\ldots,a_m$ 之间的标准非平凡关系是满足以下条件的唯一有理系数关系 $\sum_{j=1}^m \lambda_j a_j = 0$，其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$：

- 存在一个指数 $1 \leq l \leq n$，使得 $\lambda_j = 0$ 对于 $1 \leq j < l$ 和 $|\lambda_l| = 1$ 成立。
- $\#\{1 \leq j \leq n \mid \lambda_j < 0\} \leq \#\{1 \leq j \leq n \mid \lambda_j > 0\}$.
- 在满足前一个条件的等号情形下，$\lambda_l = -1$。

在这种情况下，我们按照 [Mor25], $k^{\pm}(a_1, \ldots, a_m) = \#\{1 \leq j \leq m \mid \pm\lambda_j > 0\}$ 中的方式定义。我们在引言中简要介绍的关于线性形式 $a_1, \ldots, a_n$ 的位置条件，可以用这个标准非平凡关系表述：

定义 4：设 $a_1, \ldots, a_n$ 是 V 上的 n 线性形式。我们称 $a_1, \ldots, a_n$ 在 $V^\vee$ 中位置良好，若 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) \neq n-1$，或者 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n-1$ 且 0 不是 $a_1, \ldots, a_n$ 的重心。等价地，若 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) \neq n-1$，或者 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n-1$ 且 $k^-(a_1, \ldots, a_n) > 0$，则称 $a_1, \ldots, a_n$ 在 $V^\vee$ 中位置良好。

注意到，这一条件与 [Mor25]中关于 $n+1$ 线性形式的“位置良好”条件非常相似，在该条件下，余循环关系 (7) 成立。第 2 节余下部分将证明定理 2 在 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n-1$ and $k^-(a_1, \ldots, a_n) > 0$ 的情形，并将用到我们已回顾过的 $a_1, \ldots, a_n$ 之间的标准非平凡关系。

2.2 模性质的证明

本节给出定理 2 的证明。我们再次强调，当 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n$ 时，该定理已由 [Mor25] 利用 Narukawa 定理证明（见[Nar04]）；而当 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) \leq n-2$ 时，结论显然成立。因此，我们只需证明以下内容。

命题 5： 令 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda$ 为 n 个非零本原线性形式，使得 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n-1$ 且 $k^-(a_1, \ldots, a_n) > 0$。那么，对所有 $v, w, x \in V/L \times \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C})$：

$$\prod_{j=1}^{n} G_{n-2, a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = 1. \tag{20}$$

注： 如果去掉 $k^-(a_1, \ldots, a_n) > 0$ 这一假设，结论一般不成立。为说明这一点，我们分析一个简单情形：$a_1 = -a_2$ 且 $\mathrm{rk}(a_2, \ldots, a_n) = n-1$，其中 $n \geq 3$。在这种情况下，式 (20) 的左侧化简为：

$$\prod_{j=1}^{n} G_{n-2, a_1, \ldots, \widehat{a_j}, \ldots, a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \frac{G_{n-2, -a_2, a_3, \ldots, a_n}(v)(w,x)}{G_{n-2, a_2, a_3, \ldots, a_n}(v)(w,x)}.$$

为简单起见，固定一个 $\mathbb{Z}$-基 $B = [e_1, \ldots, e_n]$（L 的），并固定 a_j 这一线性形式，使其满足 $a_j(e_k) = 0$（当 $k \neq j$ 时），$a_j(e_j) = 1$（对 $2 \leq j \leq n$）。若进一步假设 $F(a, \alpha, v) = \{v\}$，其中 $a = (a_2, \ldots, a_n)$ 以及 $\alpha = (e_2, \ldots, e_n)$（$F(a, \alpha, v)$ 的定义见 (16)），并且 $a_2(v) = 0$，则：

$$\frac{G_{n-2, -a_2, a_3, \ldots, a_n}(v)(w,x)}{G_{n-2, a_2, a_3, \ldots, a_n}(v)(w,x)} = \frac{G_{n-2}\left(\frac{w+x(v)}{x(-e_1)}, \frac{x(-e_2)}{x(-e_1)}, \frac{x(e_3)}{x(-e_1)}, \ldots, \frac{x(e_n)}{x(-e_1)}\right)}{G_{n-2}\left(\frac{w+x(v)}{x(e_1)}, \frac{x(e_2)}{x(e_1)}, \frac{x(e_3)}{x(e_1)}, \ldots, \frac{x(e_n)}{x(e_1)}\right)}.$$

利用 [[Nis01], 命题3.2]我们得到:

$$\frac{G_{n-2,-a_2,a_3,\ldots,a_n}(v)(w,x)}{G_{n-2,a_2,a_3,\ldots,a_n}(v)(w,x)} = G_{n-3}\left(\frac{w+x(v)}{x(e_1)}, \frac{x(e_3)}{x(e_1)}, \ldots, \frac{x(e_n)}{x(e_1)}\right)$$

且它不恒等于 1。在相同假设下，对于 $n=2$，我们得到更简单的形式

$$\theta_{-a}(v)(w,x)\theta_a(w,x)^{-1} = \exp\left(-2i\pi\left(\frac{w+x(v)}{x(e_1)} - \frac{1}{2}\right)\right)$$

它也不恒等于 1。
我们将命题 5 的证明分为五个主要步骤:

- 步骤 1: 我们首先在第 2.2.1 节证明，可以任意排列线性形式 a_1、.....、a_n。为简化记号，我们选择 a_1、.....、a_n 的一个排列，使 a_1、.....、a_n 之间的标准非平凡关系为 $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = 0$，其中

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & \text{for } 1 \le j < l \\ \lambda_j < 0 & \text{for } l \le j < m \\ \lambda_j > 0 & \text{for } m \le j \le n \end{cases}$$

  对于某个 $1 \le l < m \le n$。

- 步骤 2: 在第 2.2.2 节中，我们将利用公式（18）改写 (20) 右侧的每一项，并重新整理因子。更确切地说，我们为 $l \le j \le n$ 定义两个锥族 $(C_j^1)_j$ 和 $(C_j^2)_j$（见定义 7），并在引理 8 中证明:

$$\prod_{j=1}^n G^{(-1)^{j+1}}_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x) = \prod_{j=l}^n \prod_{\delta\in(v+L)\cap C_j^1/\mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j} \times \prod_{\delta\in(v+L)\cap C_j^2/\mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j(-1)^n} \quad (21)$$

  其中，γ是满足 $\det(a_1,\ldots,a_{n-1},\cdot) = s_n\gamma$的 L 中的本原向量，μ_j是 $\{-1,+1\}$中明确给出的符号，且 s_n为某个正整数。用 c_j^1和 c_j^2表示与这些锥对应的示性函数，我们可以定义两个函数 f^1, f^2: $V/\mathbb{Q}\gamma \to \mathbb{Z}$:

$$f^1 = \sum_{j=l}^n \mu_j c_j^1 \quad \text{and} \quad f^2 = \sum_{j=l}^n \mu_j c_j^2 \times (-1)^n.$$

  于是，公式 (21) 可以改写为:

$$\prod_{j=1}^n G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{\delta\in v+L/\mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^1(\delta)} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^2(\delta)}. \quad (22)$$

- 步骤 3：证明的其余部分旨在证明 $f^1 = f^2 = 0$。证明 $f^2 = 0$ 的过程与证明 $f^1 = 0$ 的过程完全相同，后者是我们现在要关注的内容。为此，我们对锥 C_j^1 进行技术性的组合分析。在第 2.2.3 节中，我们给出一个关于 $n = 4$ 的示例，并展示锥 C_j^1 上线性形式 a_k 的符号表如何包含证明 $f^1 = 0$ 所需的相关信息。我们将证明该符号表必须遵循某些规则（见引理 9）；例如，对于 $l \le j \ne k \le n$， C_j^1 上 a_k 的符号必须与 C_k^1 上 a_j 的符号相关。接着，我们从这一系列规则推导出：如果 $l \le j$， j'， $j'' \le n$ 是三个互不相同的指标，那么三重交集 $C_j^1 \cap C_{j'}^1 \cap C_{j''}^1$ 为空（见引理 11）。

- 步骤 4：在第 2.2.5 节中，我们证明任意向量 $\delta \in V$ 恰好属于锥 C_l^1，……，C_n^1 中的 0 个或 2 个。证明的第三步保证任意 $\delta \in V$属于这些锥中的 0 个、1 个或 2 个，因此我们只需证明（见引理 12），向量 $\delta \in V$ 不能恰好属于这些锥中的一个。这是证明中迄今为止技术性最强的部分，依赖于符号表的一个技术性质（见引理 9（iii））。

- 步骤 5：在第 2.2.4 节中，我们通过证明若对某个 $j \ne j'$ 有 $\delta \in C_j^1 \cap C_{j'}^1$，则 $f^1(\delta) = 0$，从而完成证明。这是通过证明在此情形下 $\mu_j = -\mu_{j'}$（见引理 17）来完成的。

2.2.1 置换不变性

本节将借助以下结果说明：对于线性形式 $a_1, \dots, a_n$，命题 5 成立，当且仅当对于 $a_1, \dots, a_n$ 的任意置换 $a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}$ 都成立，其中 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$。

引理 6： 设 $a_1, \dots, a_n \in \Lambda$ 为 n 非零线性形式。对于任意置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$：

$$\prod_{j=1}^{n} G^{(-1)^{j+1}}_{n-2, a_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{a_{\sigma(j)}}, \dots, a_{\sigma(n)}} = \left(\prod_{j=1}^{n} G^{(-1)^{j+1}}_{n-2, a_1, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_n} \right)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}$$

证明：

由于换位生成 $\mathfrak{S}_n$，只需对换位证明此结论。固定 $\sigma = (kl)$ 为交换 k, l 与 $k < l$ 的换位。我们要证明：

$$\prod_{j=1}^{n} G^{(-1)^{j+1}}_{n-2, a_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{a_{\sigma(j)}}, \dots, a_{\sigma(n)}} = \left(\prod_{j=1}^{n} G^{(-1)^{j+1}}_{n-2, a_1, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_n} \right)^{-1}$$

我们将反复用到以下事实：若 $b_1, \dots, b_{n-1}$ 是非零线性形式，则对于任意置换 $\rho \in \mathfrak{S}_{n-1}$：

$$G_{n-2, b_{\rho(1)}, \dots, b_{\rho(n-1)}} = G^{\operatorname{sgn}(\rho)}_{n-2, b_1, \dots, \widehat{b_j}, \dots, b_n} \tag{23}$$

这一点从定义（见 (17)）中可以清楚地看出。首先考虑一个指数 $1 \le j \le n$，使得$j \ne k$ 且 $j \ne l$。于是 σ化为集合 $\{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$上的换位 (kl)，并且由 (23) 可得：

$$G_{n-2, a_{\sigma(1)}, \dots, \widehat{a_{\sigma(j)}}, \dots, a_{\sigma(n)}} = G^{-1}_{n-2, a_1, \dots, \widehat{a_j}, \dots, a_n}.$$

现设 $j=k$。则

$$G_{n-2,a_{\sigma(1)},\ldots,\widehat{a_{\sigma(k)}},\ldots,a_{\sigma(n)}}=G_{n-2,a_1,\ldots,a_{k-1},a_{k+1},\ldots,a_{l-1},a_k,a_{l+1},\ldots,a_n}=G_{n-2,a_{\rho(1)},\ldots,\widehat{a_{\rho(l)}},\ldots,a_{\rho(n)}}$$

其中 ρ 是循环 $(k,\ l,\ l-1,\ \ldots\ldots,\ k+1)$，其符号为 $(-1)^{l+k+1}$。因此，公式 (23) 表明

$$G^{(-1)^{k+1}}_{n-2,a_{\sigma(1)},\ldots,\widehat{a_{\sigma(k)}},\ldots,a_{\sigma(n)}}=G^{(-1)^{l}}_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_l},\ldots,a_n}$$

并且如果 $j=l$ 满足以下条件，我们也可以类似地证明：

$$G^{(-1)^{l+1}}_{n-2,a_{\sigma(1)},\ldots,\widehat{a_{\sigma(l)}},\ldots,a_{\sigma(n)}}=G^{(-1)^{k}}_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_k},\ldots,a_n}$$

由此得到所需结果：

$$\prod_{j=1}^{n}G^{(-1)^{j+1}}_{n-2,a_{\sigma(1)},\ldots,\widehat{a_{\sigma(j)}},\ldots,a_{\sigma(n)}}=\left(\prod_{j=1}^{n}G^{(-1)^{j+1}}_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}\right)^{-1}.$$

□

特别地，为了证明命题 5，我们可以调换线性形式 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n$ 的顺序。因此，在第 2.2 节余下部分，我们假设 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n$ 是非零线性形式，满足 $\mathbf{rk}(a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n)=n-1$，并且 $a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n$ 之间的标准非平凡关系 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j=0$（见 [[Mor25], 定义 11]）满足：

$$\begin{cases}\lambda_j=0 & \text{for } 1\le j<l\\ \lambda_j<0 & \text{for } l\le j<m\\ \lambda_j>0 & \text{for } m\le j\le n\end{cases}\tag{24}$$

对于某个 $1\le l<m\le n$。我们以如下注结束本节：有两种更简单的情形，分别对应于 $l=n-1$ 和 $l=1$。如果 $l=n-1$，那么 (20) 的右侧为

$$G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x)^{(-1)^n}G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x)^{(-1)^{n+1}}=1.$$

在 $l=1$ 的情形下，通过引入一个线性形式a_{n+1}，使得 $\mathbf{rk}(a_1,\ldots,a_{n+1})=n$，并将 [[Mor25], 定理 1] 与 [[Mor25], 推论 2] 直接结合应用于族 $a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_{n+1}$（其中 $1\le j\le n$），即可得到公式 (20)。然而，这一策略无法推广至 $1<l<n-1$ 的情形，因此我们需要采用本文给出的证明。

2.2.2 锥 C_j^1 和 C_j^2 的定义

现在，我们明确描述 (20) 左侧的乘积，其中系数 λ_j 满足 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j a_j=0$ 并验证 (24)。注意，只要 $1\le j<l$，我们就有 $\mathbf{rk}(a_1、\ \ldots\ldots、\ \widehat{a_j}、\ \ldots\ldots、\ a_n)=n-2$，因此根据定义，$G_{n-2、\ a_1、\ \ldots\ldots、\ \widehat{a_j}、\ \ldots\ldots、\ a_n}=1$。在这种情况下，我们要证明的公式 (20) 可化为：

$$\prod_{j=l}^{n}G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}}=1$$

现在，我们使用函数 $G_{n-2、\ a_1,\ldots\ldots、\ \widehat{a_j},\ldots\ldots、\ a_n}$的另一种定义 (18)，来描述 (20) 左侧每个非平凡项。事实上，对于任意固定的 $l \le j \le n$，定义 $\gamma^{(j)}$ 为 L 中唯一的本原向量，使得 $\det(a_1、\ldots\ldots、\widehat{a_j}、\ldots\ldots、\ a_n、\ \cdot) = s^{(j)}\gamma^{(j)}$，其中 $s^{(j)}$是某个正整数。固定 $(\alpha_k^{(j)})_{k\neq j}$，使其成为 $a_1、\ldots\ldots、\widehat{a_j}、\ldots\ldots、\ a_n$在 L中的一个正对偶族，即满足以下条件的族：对于所有 $1 \le k \le n、\ k \neq j$:

$$a_k(\alpha_{k'}^{(j)}) = 0 \text{ for all } 1 \le k' \le n, k' \neq k, j \text{ and } a_k(\alpha_k^{(j)}) > 0.$$

接下来固定 $x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\ \mathbb{C})$，使得对所有 $l \le j \le n$ 以及所有 $1 \le k \le n、\ k \neq j$，都有 $x(\alpha_k^{(j)})/x(\gamma^{(j)}) \notin \mathbb{R}$。于是定义线性形式 $y^{(j)} :\ V \to \mathbb{R}$ by$y^{(j)}(v) = \Im(x(v)/x(\gamma^{(j)}))$。对于 $1 \le k \le n、\ k \neq j$，定义

$$d_k^{(j)} = \mathrm{sign}(y^{(j)}(\alpha_k^{(j)})) \in \{\pm 1\} \tag{25}$$

并令 $D_j = \sum_{k\neq j}(d_k^{(j)} - 1)/2$。最后，回顾第 2.1 节中的锥：

$$C_j^{\pm} = \{\delta \in V \mid \forall\, 1 \le k \le n, k \neq j, a_k(\delta) \ge 0 \text{ if } \pm d_k^{(j)} = 1, a_k(\delta) < 0 \text{ if } \pm d_k^{(j)} = -1\}. \tag{26}$$

由公式（18）可知，对于任意 $l \le j \le n$:

$$G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x) = \prod_{\delta\in(v+L)\cap C_j^-/\mathbb{Z}\gamma^{(j)}} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma^{(j)})}\right)}\right)^{(-1)^{D_j}} \times \prod_{\delta\in(v+L)\cap C_j^+/\mathbb{Z}\gamma^{(j)}} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma^{(j)})}\right)}\right)^{(-1)^{D_j+n}} \tag{27}$$

现在固定 $\gamma = \gamma^{(n)}$，从而对于任意 $l \le j \le n、\ \gamma^{(j)} = (-1)^{j+n}$符号$(\lambda_j)\gamma$，其中我们回顾 $\sum_{j=l}^n \lambda_j a_j = 0$ 是 $a_1,\ \ldots,\ a_n$ 之间的标准非平凡关系。为简便起见，我们定义符号

$$\varepsilon_j = (-1)^{j+n}\mathrm{sign}(\lambda_j) \in \{-1, +1\}. \tag{28}$$

根据 ε_j 的值，通过重新标记锥 C_j^+ 和 C_j^-，重新组织式 (27) 中的各项：

定义 7： 对于 $l \le j \le n$，定义：

$$(C_j^1, C_j^2) = \begin{cases} (C_j^+, C_j^-) & \text{if } \varepsilon_j = 1 \\ (C_j^-, C_j^+) & \text{if } \varepsilon_j = -1 \end{cases}$$

并将 $c_j^1、\ c_j^2 :\ V \to \{0,1\}$ 的示性函数记为。

请注意，我们明确有：

$$C_j^1 = \{\delta \in V \mid \forall 1 \le k \le n, k \neq j, a_k(\delta) \ge 0 \text{ if } \varepsilon_j d_k^{(j)} = 1, a_k(\delta) < 0 \text{ if } \varepsilon_j d_k^{(j)} = -1\}$$
$$C_j^2 = \{\delta \in V \mid \forall 1 \le k \le n, k \neq j, a_k(\delta) \ge 0 \text{ if } \varepsilon_j d_k^{(j)} = -1, a_k(\delta) < 0 \text{ if } \varepsilon_j d_k^{(j)} = 1\}.$$

现在，由于对于任意 $1 \le k \le n$， $a_k(\gamma) = 0$，显然，对于任意 $v \in V$ 和任意 $m \in \mathbb{Q}$， $c_j^1($ $v + m\gamma) = c_j^1(v)$ 且 $c_j^2(v+m\gamma) = c_j^2(v)$。因此，两个函数 c_j^1， c_j^2都化为商空间 $V/\mathbb{Q}\gamma$ 上的函数。最后，我们定义这些符号：

$$\mu_j = \begin{cases} (-1)^{j+1+D_j+n} & \text{if } \varepsilon_j = 1 \\ (-1)^{j+1+D_j} & \text{if } \varepsilon_j = -1 \end{cases} \tag{29}$$

现在我们可以给出公式 (20) 左侧的一个简洁形式，并将在证明的其余部分中使用它。

引理 8： 沿用上述记号：

$$\prod_{j=l}^{n} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{\delta \in (v+L)/\mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^1(\delta)} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^2(\delta)}$$

其中，函数 f^1、 f^2： $V/\mathbb{Q}\gamma \to \mathbb{Z}$ 定义如下：

$$f^1 = \sum_{j=l}^{n} \mu_j c_j^1 \quad and \quad f^2 = \sum_{j=l}^{n} \mu_j c_j^2 \times (-1)^n.$$

证明：

简记满足 $\varepsilon_j = \pm 1$ 的指标集合 $l \le j \le n$ 为 $J^{\pm}$。对于每个 $j \in J^+$，将公式 (27) 中的各项改写为：

$$\prod_{j \in J^+} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{j \in J^+} \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^- / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j (-1)^n} \times \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^+ / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j}.$$

另一方面，由于对所有 $j \in J^-$、 $\gamma^{(j)} = -\gamma$，关于 $j \in J^-$ 的乘积为：

$$\prod_{j \in J^-} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{j \in J^-} \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^- / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j} \times \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^+ / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j (-1)^n}.$$

将所有内容整合起来，并使用重新标记的锥 C_j^1 和 C_j^2，得到：

$$\prod_{j=l}^{n} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{j=l}^{n} \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^1 / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j} \times \prod_{\delta \in (v+L) \cap C_j^2 / \mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{\mu_j (-1)^n}$$

因此，函数 f^1和 f^2的定义恰好满足：

$$\prod_{j=l}^{n} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{\delta \in (v+L)/\mathbb{Z}\gamma} \left(1 - e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^1(\delta)} \left(1 - e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^2(\delta)}$$

这就是所要的结果。 □

2.2.3 三重交集的符号表与空性

命题 5 的其余证明部分在于证明 $f^1 = 0$和 $f^2 = 0$。这两个结论的证明方法类似，因此我们重点证明 $f^1 = 0$。

让我们通过四维情形中的一个简单示例，简要说明其一般思路。固定：

$$a_1 = [1, 0, 0, 0],\ a_2 = [0, 1, 0, 0],\ a_3 = [0, 0, -1, 0],\ a_4 = [0, 1, 1, 0].$$

这是定义在 $\mathbb{Z}^4$ 上的四个线性形式，使得 $\mathbf{rk}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$，且 $0 \cdot a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = 0$，从而 $l = 2$ 和 $m = 3$。向量 γ 由 $\gamma = [0, 0, 0, -1]^T$ 给出。我们还固定 $x = [2i, 3i, 5i, -1]$，使得 $x(\gamma) = 1$。我们希望显式描述锥 C_j^1（$2 \le j \le 4$），因此需要描述 $2 \le j \le 4$ 和 $1 \le k \le 4$, $k \ne j$ 时的符号 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$。我们可以如下计算一组选取的元素 $\alpha_k^{(j)}$：

k \ j	2	3	4
1	$\alpha_1^{(2)} = [1, 0, 0, 0]^T$	$\alpha_1^{(3)} = [1, 0, 0, 0]^T$	$\alpha_1^{(4)} = [1, 0, 0, 0]^T$
2		$\alpha_2^{(3)} = [0, 1, -1, 0]^T$	$\alpha_2^{(4)} = [0, 1, 0, 0]^T$
3	$\alpha_3^{(2)} = [0, 1, -1, 0]^T$		$\alpha_3^{(4)} = [0, 0, -1, 0]^T$
4	$\alpha_4^{(2)} = [0, 1, 0, 0]^T$	$\alpha_4^{(3)} = [0, 0, 1, 0]^T$	

表1：$\alpha_k^{(j)}$ 的表格示例

这给出了符号 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$ 的计算：

k \ j	2	3	4
1	+	+	+
2		−	+
3	−		−
4	+	+	

表 2：包含 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$ 的符号表示例

由此符号表可推得，$C_3^1 \cap C_4^1 = \emptyset$，因为关于 $\varepsilon_2 d_3^{(2)} = -\varepsilon_2 d_4^{(2)}$ 的条件是不相容的。若令 $H_j^+ = \{\delta \in V \mid a_j(\delta) \ge 0\}$ 和 $H_j^- = V - H_j^+$，则由此表可知：

$$C_2^1 \cap C_3^1 = C_2^1 \cap H_2^- = C_3^1 \cap H_3^-$$

and

$$C_2^1 \cap C_4^1 = C_2^1 \cap H_2^+ = C_4^1 \cap H_4^+$$

此外，关系 $a_2 = a_3 + a_4$ 意味着 $C_3^1 \cap H_3^+ = \emptyset$ 和 $C_4^1 \cap H_4^- = \emptyset$。因此，$C_2^1 = C_3^1 \sqcup C_4^1$，并且我们可以验证 $f^1 = -c_2^1 + c_3^1 + c_4^1 = 0$。这就是证明的一般思路，下面我们将证明一般情形。

如前一个示例所示，我们需要研究锥 C_j^1，因此还需要研究 $k \ne j$ 的符号 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$。我们首先证明一个至关重要的引理，讨论这些符号之间的关系

这些符号决定了符号表（见表 2）。这将有助于完成命题 5 证明的最后三个步骤。作为推论，我们将证明，任意三个 C_j^1 的交集都是空的。

符号 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$ 之间存在三种主要关系，其中前两种相当简单。第三种关系更具技术性。为陈述它，我们需要为$l \leq j \leq n$ 和 $1 \leq k \leq n, k \neq j$ 引入以下正实数：

$$u_k^{(j)} = \left| \Im \left(\frac{x(\alpha_k^{(j)})}{\lambda_k a_k(\alpha_k^{(j)}) x(\gamma)} \right) \right| \tag{30}$$

它们与 $\alpha_k^{(j)}$ 的选择无关。现在我们可以陈述这一关键的技术性引理：

引理 9： 符号 $\varepsilon_j d_k^{(j)}$ 满足以下关系：

(i) $\forall l \leq j, j' \leq n, \forall 1 \leq k < l, \varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$。换言之，符号表中的行 $1 \leq k < l$ 是恒定的，可以忽略。(ii) $\forall l \leq k, j \leq n, k \neq j, \varepsilon_j d_k^{(j)} = -$符号$(\lambda_j \lambda_k) \varepsilon_k d_j^{(k)}$。换言之，符号表完全由其上三角部分确定。(iii) $\forall l \leq j, k, k' \leq n, k \neq k' \neq j$，如果 $u_k^{(j)} \leq u_{k'}^{(j)}$，那么 $\varepsilon_k d_{k'}^{(k)} = \varepsilon_j d_{k'}^{(j)}$。这一技术要点表明，只需知道单列即可确定整个符号表；具体的符号关系由实轴上 $k \neq j$ 的相对位置给出。

证明：

(i) 为证明第一个关系，只需注意到，当 $1 \leq k < l$ 时，可以为任意 $l \leq j \leq n$ 选择 $\alpha_k^{(j)} = \alpha_k^{(n)}$，从而得到 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_n d_k^{(n)}$。所需的关系由此得证。

(ii) 为证明第二个关系，我们注意到，当 $k \neq j$、$a_j\left(\alpha_k^{(j)}\right) = -\lambda_k a_k\left(\alpha_k^{(j)}\right)/\lambda_j$，因此 $a_j\left(-\text{符号}\left(\lambda_j\lambda_k\right)\alpha_k^{(j)}\right) > 0$。由于对于所有 $k' \neq j$，k，$a_{k'}\left(\alpha_k^{(j)}\right) = 0$，我们可以将正对偶族中的 $\alpha_j^{(k)}$ 替换为 $a_1, \ldots, \widehat{a_k}, \ldots, a_n$，即 $-$符号$\left(\lambda_j\lambda_k\right)\alpha_k^{(j)}$。因此，按照定义，符号 $d_j^{(k)}$ 满足：

$$d_j^{(k)} \frac{x(-\text{sign}(\lambda_j\lambda_k)\alpha_k^{(j)})}{\varepsilon_k x(\gamma)} \in \mathbb{H}$$

我们将其与

$$d_k^{(j)} \frac{x(\alpha_k^{(j)})}{\varepsilon_j x(\gamma)} \in \mathbb{H}$$

这恰好给出了关系 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = -$符号$(\lambda_j\lambda_k)\varepsilon_k d_j^{(k)}$。

(iii) 最后这一点较为微妙，仅会在第 2.2.4 节中使用。对于任意三个互不相同的指标 $l \leq j$，k，$k' \leq n$，令：

$$v_{k,k'}^{(j)} = \lambda_k^2 a_k(\alpha_k^{(j)})\alpha_{k'}^{(j)} - \lambda_k\lambda_{k'} a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)})\alpha_k^{(j)}$$

显然，当 $i \neq j$， k， k'时， $a_i(v_{k\,k'}^{(j)}) = 0$，并且根据构造，同样有$a_j(v_{k\,k'}^{(j)}) = 0$。事实上，利用 $\sum_{i=l}^{n} \lambda_i a_i = 0$ 且 $\lambda_j \neq 0$ 这一事实，我们得到：

$$\begin{aligned}
\lambda_j a_j(v_{k,k'}^{(j)}) &= \lambda_k^2 \lambda_j a_k(\alpha_k^{(j)}) a_j(\alpha_{k'}^{(j)}) - \lambda_k \lambda_{k'} \lambda_j a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) a_j(\alpha_k^{(j)}) \\
\lambda_j a_j(v_{k,k'}^{(j)}) &= -\lambda_k^2 a_k(\alpha_k^{(j)}) \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i(\alpha_{k'}^{(j)}) + \lambda_k \lambda_{k'} a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) \sum_{i \neq j} \lambda_i a_i(\alpha_k^{(j)}) \\
\lambda_j a_j(v_{k,k'}^{(j)}) &= -\lambda_k^2 \lambda_{k'} a_k(\alpha_k^{(j)}) a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) + \lambda_k^2 \lambda_{k'} a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) a_k(\alpha_k^{(j)}) \\
\lambda_j a_j(v_{k,k'}^{(j)}) &= 0.
\end{aligned}$$

此外， $a_{k'}(v_{k\,k'}^{(j)}) = \lambda_k^2 a_k(\alpha_k^{(j)}) a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) > 0$。因此， $\alpha_{k'}^{(k)}$ 的一种可能选择是 $\alpha_{k'}^{(k)} = v_{k\,,\,k'}^{(j)}$ 以及 $x(v_{k\,k'}^{(j)}) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$。由此可知，符号 $d_{k'}^{(k)}$ 满足：

$$d_{k'}^{(k)} \frac{x(v_{k,k'}^{(j)})}{\varepsilon_k x(\gamma)} \in \mathbb{H}.$$

将 $v_{k\,,\,k'}^{(j)}$ 替换为其表达式，得到：

$$d_{k'}^{(k)} \left(\frac{\lambda_k^2 a_k(\alpha_k^{(j)}) x(\alpha_{k'}^{(j)})}{\varepsilon_k x(\gamma)} - \frac{\lambda_k \lambda_{k'} a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) x(\alpha_k^{(j)})}{\varepsilon_k x(\gamma)} \right) \in \mathbb{H}$$

现在，我们可以用与值 $u_k^{(j)}$ 和$u_{k'}^{(j)}$ 相关的元素来改写这个表达式：

$$\varepsilon_k \lambda_k^2 \lambda_{k'} d_{k'}^{(k)} a_k(\alpha_k^{(j)}) a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) \left(\frac{x(\alpha_{k'}^{(j)})}{\lambda_{k'} a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) x(\gamma)} - \frac{x(\alpha_k^{(j)})}{\lambda_k a_k(\alpha_k^{(j)}) x(\gamma)} \right) \in \mathbb{H}. \tag{31}$$

记 $U_k^{(j)}$ 为复数

$$U_k^{(j)} = \frac{x(\alpha_k^{(j)})}{\lambda_k a_k(\alpha_k^{(j)}) x(\gamma)}$$

因此，(31)可改写为：

$$\varepsilon_k \lambda_{k'} d_{k'}^{(k)} (U_{k'}^{(j)} - U_k^{(j)}) \in \mathbb{H}.$$

根据定义， $u_k^{(j)} = |\Im(U_k^{(j)})|$ 以及 $u_{k'}^{(j)} = |\Im(U_{(j)k'})|$，因此 $\varepsilon_k \lambda_{k'} d_{k'}^{(k)}$ 的符号取决于两个值 $u_k^{(j)}$， $u_{k'}^{(j)}$ 中哪一个较大。如果 $u_k^{(j)} \leq u_{k'}^{(j)}$，那么符号 $d_{k'}^{(k)}$ 满足：

$$d_{k'}^{(k)} \frac{x(\alpha_{k'}^{(j)})}{a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) \varepsilon_k x(\gamma)} \in \mathbb{H}$$

我们将其与满足以下条件的符号 $d_{k'}^{(j)}$ 进行比较：

$$d_{k'}^{(j)} \frac{x(\alpha_{k'}^{(j)})}{a_{k'}(\alpha_{k'}^{(j)}) \varepsilon_j x(\gamma)} \in \mathbb{H}.$$

这就得到了所需的等式 $\varepsilon_k d_{k'}^{(k)} = \varepsilon_j d_{k'}^{(j)}$。注意，如果 $u_k^{(j)} = u_{k'}^{(j)}$，那么复数 $U_k^{(j)}$和 $U_{(j)\ k'}$必须位于 $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ 中相反的半平面内，因此符号等式成立。□

现在我们可以证明一个推论：任意三个C_j^1锥的交集都是空的。事实上，利用下面的定义，我们将证明一个稍强的结论。

定义10： 设 $l \le j, j' \le n$ 是两个不同的指标。若与指标 j 和 j' 相关联的列在符号表中相容，我们就称这两个锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容。具体而言，当且仅当对所有$1 \le k \le n$ （或根据引理 *9*，*(i)*），若 $k \ne j, j'$，则 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$，$C_j^1$ 和 $C_{j'}^1$ 相容。

可以将这个定义理解为两个锥 C_j^1和$C_{j'}^1$ 具有非空交集的必要（但不充分）条件。现在我们可以证明以下引理：

引理 11：

(i) 对于任意两个不同的指标 $l \le j, j' \le n$，若 $C_j^1 \cap C_{j'}^1 \ne \emptyset$，则锥 C_j^1和$C_{j'}^1$ 相容。(ii) 对于任意三个不同的指标 $l \le j, j', j'' \le n$，若 $\varepsilon_j d_{j''}^{(j)} = \varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_{j''}$ 且 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_{j} = \varepsilon_{j''} d_j^{(j'')}$，则 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}$。(iii) 对于任意三个不同的指标 $l \le j, j', j'' \le n$，若一方面锥 C_j^1和$C_{j'}^1$ 相容，另一方面锥 $C_{j'}^1$和 $C_{j''}^1$相容，则锥 C_j^1和 $C_{j''}^1$不相容。

(iv) 对于任意三个互不相同的指标 $l \le j$、j'、$j'' \le n$、$C_j^1 \cap C_{j'}^1 \cap C_{j''}^1 = \emptyset$。

证明：

(i) 假设两个互不相同的指标 $l \le j$、$j' \le n$ 满足 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 不相容。这意味着存在一个与 j、j' 不同的指标 $l \le k \le n$，使得 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = -\varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$。不妨设 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = +1$。假设存在一个向量 $\delta \in C_j^1 \cap C_{j'}^1$。那么一方面，由于 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = +1$ 和 $\delta \in C_j^1$，有 $a_k(\delta) > 0$；另一方面，由于 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_k = -1$ 和 $\delta \in C_{j'}^1$，有 $a_k(\delta) \le 0$。这就产生了矛盾。

(ii) 考虑三个指标 $l \le j \ne j' \ne j'' \le n$。利用引理 9 和 (i)，我们得到以下三个关系：

$$\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\mathrm{sign}(\lambda_j \lambda_{j'}) \varepsilon_{j'} d_j^{(j')} \tag{32}$$

$$\varepsilon_j d_{j''}^{(j)} = -\mathrm{sign}(\lambda_j \lambda_{j''}) \varepsilon_{j''} d_j^{(j'')} \tag{33}$$

$$\varepsilon_{j'} d_{j''}^{(j')} = -\mathrm{sign}(\lambda_{j'} \lambda_{j''}) \varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}. \tag{34}$$

假设：

$$\varepsilon_j d_{j''}^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_{j''}^{(j')} \tag{35}$$

$$\varepsilon_{j'} d_j^{(j')} = \varepsilon_{j''} d_j^{(j'')} \tag{36}$$

We 希望证明 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}$。我们首先利用 (36) 将 (32) 改写为 :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} &= -\mathrm{sign}(\lambda_j \lambda_{j'}) \varepsilon_{j''} d_j^{(j'')} \\
\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} &= \mathrm{sign}(\lambda_j \lambda_{j'}) \mathrm{sign}(\lambda_j \lambda_{j''}) \varepsilon_j d_{j''}^{(j)} \\
\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} &= \mathrm{sign}(\lambda_j^2 \lambda_{j'} \lambda_{j''}) \varepsilon_{j'} d_{j''}^{(j')} \\
\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} &= -\mathrm{sign}(\lambda_j^2 \lambda_{j'}^2 \lambda_{j''}^2) \varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}
\end{aligned}$$

其中第二行用了 (33)，第一行用了 (35)，最后一行用了 (36)。因此 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}$。

(iii) 考虑三个指标 $l \le j \ne j' \ne j'' \le n$，并假设 C_j^1 与 $C_{j'}^1$ 相容，而 $C_{j'}^1$ 与 $C_{j''}^1$ 相容。那么特别地，$\varepsilon_j d_{j''}^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_{j''}^{(j')}$ 且 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_j = \varepsilon_{j''} d_j^{(j'')}$ 因此由 (ii) 可得 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\varepsilon_{j''} d_{j'}^{(j'')}$，这保证了 C_j^1 与 $C_{j''}^1$ 不相容。

(iv) 考虑三个指标 $l \le j \ne j' \ne j'' \le n$，并假设 $C_j^1 \cap C_{j'}^1 \cap C_{j''}^1 \ne \emptyset$。特别地，两个两两交集均非空，因此由 (i)，锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$) 相容，锥 $C_{j'}^1$ 和 $C_{j''}^1$ 也相容，锥 $C_{j''}^1$ 和 C_j^1) 同样相容。这与 (iii) 矛盾，因此我们必有一个空交集 $C_j^1 \cap C_{j'}^1 \cap C_{j''}^1 = \emptyset$。□

由引理 11 的 (iv) 可知，任意向量 $\delta \in V$ 至多属于两个锥 C_j^1。命题 5 证明中的第四步及下一步是证明向量 $\delta \in V$不可能恰好属于其中一个锥 C_j^1。

2.2.4 任意向量 $\delta \in V$ 要么不属于任何锥，要么恰好属于两个锥 C_j^1

本节中，我们证明向量 $\delta \in V$ 要么属于 0 个、要么属于 2 个 C_j^1。由引理 11 的 (iv) 我们已知，向量 δ 至多属于两个锥C_j^1，因此只需证明 δ不可能恰好属于一个锥 C_j^1。结果将以下述形式证明:

引理 12： 对所有 $l \le j \le n$:

$$C_j^1 \subset \bigcup_{k \ne j} C_k^1$$

其中并集遍历指标 $l \le k \le n$、 $k \ne j$。

这是证明中最具技术性的一部分，将用到第 2.2.3 节的大部分结果。由此结果可知，若 $\delta \in V$属于锥 C_j^1，则由于 $C_j^1 \subset \cup_{k \ne j} C_k^1$，存在一个指标 $k \ne j$，使得 $\delta \in C_k^1$。因此，δ不可能恰好属于锥 C_j^1中的一个。现在我们来概述引理 12 的证明。对所有 $l \le j \le n$，定义指标集合:

$$\mathcal{I}(j) = \{l \le j' \le n \mid j' \ne j \text{ and the cones } C_j^1, C_{j'}^1 \text{ are compatible}\}. \tag{37}$$

由引理 11 可知，我们只需证明对于所有 $l \le j \le n$:

$$C_j^1 \subset \bigcup_{j' \in \mathcal{I}(j)} C_{j'}^1. \tag{38}$$

为此，我们首先证明当 #$\mathcal{I}(j) \geq 2$ 时，(38) 成立。然后，我们证明对于任意$l \leq j \leq n$，#$\mathcal{I}(j) \geq 1$，最后证明当 #$\mathcal{I}(j) = 1$ 时，(38) 成立。假设$k^-(a_1, \ldots\ldots, a_n) > 0$只会在最后这一步中用到。

现在证明，对于任意 $l \leq j \leq n$，如果 #$\mathcal{I}(j) \geq 2$，那么 (38) 成立。为此，我们引入锥 C_j^1 的如下划分。仍按之前的记法，令 $H_j^+ = \{v \in V \mid a_j($ $v >$ $0\}$ $H_j^- = V - H_j^+$ $C_j^1 \cap H_j^+$ $C_j^1 \cap H_j^-$ C_j^1) 和 。那么这两个锥 和 构成的一个划分。我们声称，只要某个 C_j^1 与另一个 $C_{j'}^1$ 相交（其中 $j \neq j'$），该交集必定恰好是这些连通分支之一。更确切地说：

引理13：

(i) 假设锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 对某些互不相同的指标 $l \leq j$、$j' \leq n$ 相容。那么：

$$C_j^1 \cap C_{j'}^1 = C_j^1 \cap H_j^{\varepsilon_{j'} d_j^{(j')}} = C_{j'}^1 \cap H_{j'}^{\varepsilon_j d_{j'}^{(j)}}.$$

(ii) 因此，对于任意 $l \leq j \leq n$，如果 $\mathcal{I}(j)$ 至少包含两个不同的指标 $l \leq j'$、$j'' \leq n$、$j \neq j'$、j''，那么 $C_j^1 \subset C_{j'}^1 \cup C_{j''}^1$。

证明：

(i) 锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容，因此根据定义，对于所有不同于 j 和 j'的指数$1 \leq k \leq n$，都有 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$。回想一下，半空间 $H_k^{\pm}$ 是对 $1 \leq k \leq n$ 定义的，定义方式为 $H_k^+ = \{\delta \in V \mid a_k(\delta) > 0\}$ 和 $H_k^- = V - H_k^+$。为简便起见，对于 $1 \leq k \leq n, k \neq j$，若 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = 1$，则将半空间 H_k^+ 记作 H_k；若 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = -1$，则也将其记作 H_k^-。此外，若 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_j = 1$，则将半空间 H_j^+ 记作 H_j；若 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_j = -1$，则也将其记作 H_j^-。于是

$$C_j^1 = \bigcap_{k \neq j} H_k \qquad C_j^1 = \bigcap_{k \neq j'} H_k$$

从而

$$C_j^1 \cap C_{j'}^1 = \left(\bigcap_{k \neq j, j'} H_k \right) \cap H_j \cap H_{j'} = C_j^1 \cap H_j = C_{j'}^1 \cap H_{j'}$$

这就是所需的结果。

（ii）现在假设 $\mathcal{I}(j)$ 至少包含两个不同的指标 j', j''。根据定义，锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容，锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$也相容。由引理 11 的（iii）可知，锥 $C_{j'}^1$ 和 $C_{j''}^1$ 不相容；更具体地，由引理 11 的（ii）可知：

$$\varepsilon_{j'} d_j^{(j')} = -\varepsilon_{j''} d_j^{(j'')}$$

交换 j' 和 j'' 后，不失一般性，可以假设 $\varepsilon_{j'} d^{(j')}{}_j = +1$，从而 $\varepsilon_{j''} d^{(j'')}{}_j = -1$。然后，利用（i）可得：

$$C_j^1 \cap C_{j'}^1 = C_j^1 \cap H_j^+$$
$$C_j^1 \cap C_{j''}^1 = C_j^1 \cap H_j^-.$$

因此：

$$C_j^1 \cap (C_{j'}^1 \cup C_{j''}^1) = \left(C_j^1 \cap C_{j'}^1\right) \cup \left(C_j^1 \cap C_{j''}^1\right) = (C_j^1 \cap H_j^+) \cup (C_j^1 \cap H_j^-) = C_j^1$$

且 $C_j^1 \subset C_{j'}^1 \cup C_{j''}^1$。这就证明了在 $\#\mathcal{I}(j) \geq 2$ 的情况下，式 (38) 成立。 □

本节余下部分将证明在 $\mathcal{I}(j)$ 至多含有一个元素的情形下的 (38)。事实上，我们将首先利用引理 9（iii）证明集合 $\mathcal{I}(j)$ 不可能为空，然后处理 $\mathcal{I}(j)$ 恰好含有一个元素的情形。

引理 14： 固定一个指标 $l \leq j \leq n$。令 $l \leq j' \leq n$ 为满足 $j' \neq j$ 且对所有 $l \leq k \leq n, k \neq j, j', u_{j'}^{(j)} \leq u_k^{(j)}$ （正实数 $u_k^{(j)}$ 的定义见 *(30)*）成立的一个指标。那么锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容，且 $j' \in \mathcal{I}(j)$。特别地，$\mathcal{I}(j)$不可能为空。

证明：

根据 j' 的定义可知，对于所有不同于 j 和 j'的指标 $l \leq k \leq n$，均有 $u_{j'}^{(j)} \leq u_k^{(j)}$ 9, $l \leq k \leq n$ 。利用引理（iii）可知，对于所有此类不同于 j 和 j'的指标，均有 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$。因此， C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容，且 $j' \in \mathcal{I}(j)$。□

在引理 12 证明的最后一部分，我们需要处理 $\mathcal{I}(j)$ 只包含一个指数 j' 的情形。在这种情况下，我们希望证明两个连通分支 $C_j^1 \cap H_j^+$、$C_j^1 \cap H_j^-$ 中有一个为空。为此，我们首先给出一个充分条件：在 $k^-(a_1、\ldots\ldots、a_n) > 0$ 的条件下，这两个连通分支之一为空。

引理 15： 固定一个符号 $\nu \in \{-1, 1\}$ 和一个指数 $l \leq j \leq n$。假设对于所有与 j 不同的指数 $l \leq k \leq n$， $\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} > 0$。那么 $C_j^1 \cap H_j^\nu = \emptyset$。

证明：

这里我们使用假设 $k^-(a_1, \ldots, a_n) > 0$。回忆一下， $\sum_{k=l}^n \lambda_k a_k = 0$ 是 $a_1, \ldots, a_n$ 之间的标准非平凡关系，其系数 λ_k 满足 (24)。特别地， $\lambda_l < 0$ 和 $\lambda_n > 0$。假设 $C_j^1 \cap H_j^\nu \neq \emptyset$，并固定某个 $\delta \in C_j^1 \cap H_j^\nu$。根据 C_j^1 的定义，对于所有与 j 不同的指数 $1 \leq k \leq n$，向量 δ 满足：若 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = 1$，则 $a_k(\delta) > 0$；若 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = -1$，则 $a_k(\delta) \leq 0$。此外，根据 H_j^ν 的定义，该元素 δ 必须满足：若 $\nu = 1$，则 $a_j(\delta) > 0$；若 $\nu = -1$，则 $a_j(\delta) \leq 0$。特别地，无论哪种情况， $\nu\lambda_j^2 a_j(\delta) \geq 0$。因此，假设对于所有 $l \leq k \leq n$， $\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} > 0$，会推出对于所有 $l \leq k \leq n$，$\nu\lambda_j\lambda_k a_k(\delta) \geq 0$。利用关系 $\sum_{k=l}^n \lambda_k a_k = 0$，我们得到等式：

$$\sum_{k=l}^{n} \nu\lambda_j\lambda_k a_k(\delta) = 0$$

这意味着一组非负项之和消失。因此，对于每个 $l \leq k \leq n$，我们得到 $\nu\lambda_j\lambda_k a_k(\delta) = 0$，进而有 $a_k(\delta) = 0$。由 $a_j(\delta)$ 消失可得$\nu = -1$，而当 $k \neq j$ 时， $a_k(\delta)$ 消失则推出 $\varepsilon_j d_k^{(j)} = -1$，其中 $l \leq k \leq n, k \neq j$。因此，假设 $\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} > 0$对于 $l \leq k \leq n, k \neq j$ 成立，可得 $\lambda_j\lambda_k > 0$对于所有 $l \leq k \leq n$，且所有系数 $\lambda_l, \ldots, \lambda_n$的符号都必须相同，这与 $\lambda_l < 0$ 和 $\lambda_n > 0$ 的事实矛盾。因此，我们必须得出结论：$C_j^1 \cap H_j^\nu = \emptyset$，如前所述。□

利用引理 15，我们最终将证明，如果 $\mathcal{I}(j)$ 只包含一个指数 j'，那么$C_j^1 \subset C_{j'}^1$。这将完成引理 12 的证明。

引理 16： 假设指数 $l \leq j \leq n$ 满足 $\mathcal{I}(j)$ 恰好包含一个指数 j'。那么：

(i) 对于所有 $l \le k \le n$、 $k \neq j$，符号 符号$(\lambda_k)d_k^{(j)}$ 等于 符号$(\lambda_{j'})$ $d_{j'}^{(j)}$ 。(ii) 因此， $C_j^1 \subset C_{j'}^1$。

证明：

(i) 固定一个双射 σ： $\{1,\dots,n-l\} \to \{l \le k \le n \mid k \neq j\}$，使得只要 $1 \le k < k' \le n-l$，就有 $u_\sigma^{(j)}{}_{(k)} \le u_\sigma^{(j)}{}_{(k')}$。特别地，由引理 14 可得 $j' = \sigma(1)$。接下来，我们对 $2 \le \kappa \le n-l$ 使用归纳法，证明 $\text{sign}(\lambda_{\sigma(\kappa)})d_{\sigma\ \kappa}^{(j)}() = \text{sign}(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)}$。

第一种情况：$\kappa = 2$。令 $k = \sigma(\kappa)$。根据 σ 的定义可知，对于 $3 \le \kappa' \le n-l$，有 $u_k^{(j)} \le u_\sigma^{(j)}{}_{(\kappa')}$。由引理 9（iii）可得，对于任意 $3 \le \kappa' \le n-l$，有 $\varepsilon_j d_\sigma^{(j)}{}_{(\kappa')} = \varepsilon_k d_{\sigma_j}^{(k)}{}_{(\kappa')}$。因此，$k \notin \mathcal{I}(j)$ 当且仅当 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -\varepsilon_k d_{j'}^{(k)}$，其中再次有 $j' = \sigma(1)$。利用引理 9（ii），得到：

$$\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_{j'}\lambda_k)\varepsilon_{j'} d_k^{(j')} = \text{sign}(\lambda_{j'}\lambda_k)\varepsilon_j d_k^{(j)}.$$

其中最后一个等式成立，是因为根据假设，锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容。因此，$\text{sign}(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_k)d_k^{(j)}$，情形 $\kappa = 2$ 得证。

归纳法：假设结论对 $k = \sigma(2)\dots,\sigma(\kappa-1)$成立。令 $k = \sigma(\kappa)$。对于任意 $\kappa < \kappa' \le n-l$，根据定义和引理 9（iii），我们得到 $\varepsilon_j d_{\sigma_j}^{(j)}{}_{(k')} = \varepsilon_k d_{\sigma_j}^{(k)}{}_{(k')}$。因此， $k \notin \mathcal{I}_j$ 等价于存在某个 $k'' = \sigma(\kappa'')$，满足 $\kappa'' < \kappa$，使得 $\varepsilon_j d_{k''}^{(j)} = -\varepsilon_k d_{k''}^{(k)}$。再次利用引理 9（ii），我们将其改写为：

$$\varepsilon_j d_{k''}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_k\lambda_{k''})\varepsilon_{k''} d_k^{(k'')} = \text{sign}(\lambda_k\lambda_{k''})\varepsilon_j d_k^{(j)}$$

根据引理 9（iii），最后一个等式因 $u_{k''}^{(j)} \le u_k^{(j)}$ 而成立。因此，我们得到 $\text{sign}(\lambda_{k''})$ $d_{k''}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_k)d_k^{(j)}$。由归纳假设 $\text{sign}(\lambda_{k''})d_{k''}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)}$，可得 $\text{sign}(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)} = \text{sign}(\lambda_k)d_k^{(j)}$。至此，归纳证明完成。

(ii) 令 $\nu =$符号$(\lambda_j\lambda_{j'})\varepsilon_j d_{j'}^{(j)}$。对于所有不同于 j 的指数 $l \le k \le n$，由 (i) 可知符号$(\lambda_k)d_k^{(j)} =$符号$(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)}$，因此我们得到：

$$\begin{aligned}
\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} &= |\lambda_j|\text{sign}(\lambda_{j'})d_{j'}^{(j)}\lambda_k\varepsilon_j^2 d_k^{(j)} \\
\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} &= |\lambda_j|\text{sign}(\lambda_k)\lambda_k(d_k^{(j)})^2 \\
\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} &= |\lambda_j\lambda_k| > 0.
\end{aligned}$$

由引理 15 可得 $C_j^1 \cap H_j^\nu = \emptyset$，又因为 $C_j^1 = (C_j^1 \cap H_j^{-\nu}) \cup (C_j^1 \cap H_j^\nu)$，所以我们得出 $C_j^1 = C_j^1 \cap H_j^{-\nu}$。由引理 9 的 (ii) 可得 $\nu = -\varepsilon_{j'} d_j^{(j')}$，因此根据引理13，$C_j^1 = C_j^1 \cap H_j^{-\nu} = C_j^1 \cap C_{j'}^1$。由此得到结论 $C_j^1 \subset C_{j'}^1$。□

现在让我们汇总这些结果，以证明引理 12。

引理 12 的证明：

考虑 $l \le j \le n$。根据引理 14，$\#\mathcal{I}(j) \ge 1$。若 $\#\mathcal{I}(j) = 1$，则根据引理 16 的 (ii)， $\mathcal{I}(j)$ 恰好包含一个元素 $j' \neq j$ and $C_j^1 \subset C_{j'}^1$。若 $\#\mathcal{I}(j) \ge 2$，则根据引理13 的 (ii)， $\mathcal{I}(j)$ 至少包含两个不同的元素 j'， $j'' \neq j$ and $C_j^1 \subset C_{j'}^1 \cup C_{j''}^1$。因此无论哪种情况，$C_j^1 \subset \cup_{k \neq j} C_k^1$，证明完毕。□

2.2.5 f^1 的消失及命题 5 的证明

本节将证明 f^1 消失。根据前几节的结果，我们已经知道，任意向量 $\delta \in V$ 属于锥 C_j^1 中的 0 个或 2 个。若 δ 不属于任何一个 C_j^1，根据定义，显然有 $f^1(\delta) = 0$。因此，只需证明当 δ 属于任意两个锥 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 的交集时，$j \neq j'$，
$f^1\ \delta\ = 0$ ( ) 。

引理 17: 设对于某些互异的指标 $l \leq j, j' \leq n$，有 $\delta \in C_j^1 \cap C_{j'}^1$。则 $f^1(\delta) = 0$.

证明:

由引理 11 的 (iv) 可知，对于任意 $j'' \neq j, j'$, $\delta \notin C_{j''}^1$，结论成立。因此，根据 f^1 的定义（见引理 8）：

$$f^1(\delta) = (-1)^{j+1+D_j+n\frac{1+\varepsilon_j}{2}} + (-1)^{j'+1+D_{j'}+n\frac{1+\varepsilon_{j'}}{2}}.$$

令 $g(j,j') = (j-j') + (D_j - D_{j'}) + n\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j'}}{2}$。$f^1(\delta) = 0$ 这一陈述等价于 $g(j,j') \equiv 1$ 模 2，因为

$$f^1(\delta) = (-1)^{j+1+D_j+n\frac{1-\varepsilon_j}{2}}(1 + (-1)^{g(j,j')}).$$

接下来证明 $g(j,j') \equiv 1$ 模 2。将 D_j 明确写为:

$$D_j = \sum_{k \neq j} \frac{d_k^{(j)} - 1}{2}.$$

由于 $C_j^1 \cap C_{j'}^1 \neq \emptyset$，由引理 11 的 (i) 可知，对于所有不同于 j 和 j'的指数 $1 \leq k \leq n$ ， $\varepsilon_j d_k^{(j)} = \varepsilon_{j'} d_k^{(j')}$ 。因此:

$$\begin{aligned}
D_j - D_{j'} &= \sum_{k \neq j} \frac{d_k^{(j)} - 1}{2} - \sum_{k \neq j'} \frac{d_k^{(j')} - 1}{2} \\
D_j - D_{j'} &= \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} + \sum_{k \neq j, j'} \frac{d_k^{(j)} - d_k^{(j')}}{2} \\
D_j - D_{j'} &= \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} + \frac{(1 - \varepsilon_j \varepsilon_{j'})}{2} \sum_{k \neq j, j'} d_k^{(j)}.
\end{aligned}$$

对 $k \neq j, j'$ 求和，其中包含 $n-2$ 项，它们要么是 $+1$ ，要么是 -1 ，因此我们已经得到

$$D_j - D_{j'} \equiv \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} + (n-2)\frac{1 - \varepsilon_j \varepsilon_{j'}}{2} \equiv \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} + (n-2)\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j'}}{2} \bmod 2$$

因此

$$\begin{aligned}
g(j,j') &\equiv (j-j') + \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} + (2n-2)\frac{\varepsilon_j - \varepsilon_{j'}}{2} \bmod 2 \\
g(j,j') &\equiv (j-j') + \frac{d_{j'}^{(j)} - d_j^{(j')}}{2} \bmod 2.
\end{aligned}$$

回想一下，引理 9 的 (ii) 给出了等式 $\varepsilon_j d_{j'}^{(j)} = -$符号$(\lambda_j\lambda_{j'})\varepsilon_{j'} d_j^{(j')}$，并且根据定义 $\varepsilon_j =(-1)^{j+n}$符号$(\lambda_j)$。因此，$(-1)^j d_{j'}^{(j)} = -(-1)^{j'} d^{(j')}{}_j$ 并且：

$$g(j,j') \equiv (j-j') + d_{j'}^{(j)} \frac{1+(-1)^{j+j'}}{2} \bmod 2.$$

根据 $j-j'$ 的奇偶性，只需分两种情况讨论。首先，假设 $j-j'$ 为偶数。那么 $1+(-1)^{j+j'} = 2$，且 $g(j,\ j') \equiv d_{j'}^{(j)} \equiv 1$ 模 2。现在，假设$j-j'$为奇数。那么 $1+(-1)^{j+j'} = 0$，且 $g(j,\ j') \equiv j-j' \equiv 1$ 模 2。在这两种情况下，$g(j,\ j') \equiv 1$ 模 2，因此 $f^1(\delta) = 0$。证明至此完成。□

最后，我们可以综合第 2.2.1 至 2.2.5 节的所有结果，给出命题 5 的证明，并由此推出定理 2。

命题 5 的证明：

设 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda$ 是 V 上满足 $\mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_n) = n-1$ 的本原整线性形式，并且 0 不是 $a_1, \ldots, a_n$ 的重心。这意味着存在一个关系 $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = 0$，其中$\lambda_j$ 中至少有一个正系数和一个负系数。利用第 2.2.1 和 2.2.2 节的结果，我们可以假设 $a_1, \ldots, a_n$ 之间的标准非平凡关系的系数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 满足关系式 (24)，并且

$$\prod_{j=l}^n G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = \prod_{\delta\in(v+L)/\mathbb{Z}\gamma} \left(1-e^{2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^1(\delta)} \left(1-e^{-2i\pi\left(\frac{w+x(\delta)}{x(\gamma)}\right)}\right)^{f^2(\delta)}.$$

现在，假设 $f^1 \neq 0$。那么存在某个 $\delta \in V$，使得 $f^1(\delta) \neq 0$。因此，根据 f^1 的定义，存在某个指数 $l \leq j \leq n$，使得 $\delta \in C_j^1$。根据引理 12，锥 C_j^1 是 $\cup_{k\neq j} C_k^1$ 的子集，因此存在一个不同于 j 的指数 $l \leq j' \leq n$，使得 $\delta \in C_{j'}^1$。接着，由于 $\delta \in C_j^1 \cap C_{j'}^1$，利用引理 17 可得 $f^1(\delta) = 0$，这与假设矛盾。因此 $f^1 = 0$，类似地 $f^2 = 0$，由此得到所需结论：

$$\prod_{j=1}^n G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x)^{(-1)^{j+1}} = 1.$$

□

注： 请注意，要证明类似的情形 $f^2 = 0$，可以重复利用第 2.2.1 至 2.2.5 节中完成的大部分工作。事实上，显然，支配锥 C_j^1 的符号表同样支配锥 C_j^2，并且两个锥 C_j^2 和 $C_{j'}^2$ 相容，当且仅当 C_j^1 和 $C_{j'}^1$ 相容。因此，显然，引理 11 的 (iv) 可针对锥 C_j^2 作相应调整，如下：

$$\textit{For any three distinct indices } l \leq j,j',j'' \leq n, C_j^2 \cap C_{j'}^2 \cap C_{j''}^2 = \emptyset.$$

接下来，只需稍作调整，即可给出引理13 的一个版本，(i) 适用于锥 C_j^2。事实上，如果 C_j^2 和 $C_{j'}^2$ 相容，则：

$$C_j^2 \cap C_{j'}^2 = C_j^2 \cap H_j^{-\varepsilon_{j'} d_j^{(j')}} = C_{j'}^2 \cap H_{j'}^{-\varepsilon_j d_{j'}^{(j)}}.$$

还需对引理 15 作另一处调整，因为条件 $\nu\lambda_j\lambda_k\varepsilon_j d_k^{(j)} > 0$ 对所有不同于 j 的指数$l \le k \le n$ 都成立，意味着 $C_j^1 \cap H_j^{-\nu} = \emptyset$。随后，对于所有 $l \le j \le n$，即可直接对引理 12 作相应调整：

$$C_j^2 \subset \bigcup_{k \neq j} C_k^2.$$

最后，类似于引理 17 证明中的计算表明$f^2 = 0$。

3 一种经典的平滑操作

本节研究以下两类函数的平滑版本：$G_{n-2,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1}}$ 以及$B_{n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n}$，它们定义如下：

$$G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x,L,L') = \frac{G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x,L')^N}{G_{n-2,a_1,\ldots,a_{n-1}}(v)(w,x,L)}.$$

and

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') = NB_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') - B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L)$$

对于在线性形式 L 和 L' 上均为本原的线性形式 a_1、...、a_n，其中 $L/L' \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。本节证明定理 3，并说明如何推导定理 1。下面概述本节内容。第 3.1 节给出后续证明所需的几何设定，并在线性形式 a_1、...、a_n 线性无关且平滑格 L' 对 a_1、...、a_n 良好的情况下，给出平滑后的 B_{n}、$_{a_1}$、...、$_{a_n}(v)(w,x,L,L')$ 的显式公式。随后，在第 3.2 节中，我们证明函数 B_{n}、$_{a_1}$、...、$_{a_n}(v)(w,x,L,L')$ 实际上是一个有理数值函数，它仅取决于线性形式 a_1、...、a_n 以及 v 在 V/L' 中的类，而不取决于 $w,x \in \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$。最后，在第 3.3 节中，我们依照 [CD14] 运用傅里叶分析，证明有理数 B_{n}、$_{a_1}$、...、$_{a_n}(v)(w,x,L,L')$ 可以用分圆单位的迹表示，由此可以得到其分母关于维数 n 和平滑指标 N 的界。本节末尾，我们将说明如何根据这一结果推导定理 1。

3.1 几何设定

本节考虑如下情形：V是维数为 n 的$\mathbb{Q}$向量空间，L是V中的秩为 n 的格，且具有 $\mathbb{Z}$基 $B = [e_1, \ldots, e_n]$。固定一个整数 $N \ge 2$ 和平滑格 $L' = N\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n$。记 $\Lambda = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{Z})$ 和 $\Lambda' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L',\mathbb{Z})$ 分别为与 L和 L'相联系的对偶空间。定义 $C = [f_1, \ldots, f_n]$为 Λ的 $\mathbb{Z}$基，它与 B对偶，满足 $\forall 1 \le j,k \le n, f_j(e_k) = \delta_{jk}$。类似地，与 B'对偶的 Λ' $\mathbb{Z}$基C'由 $C' = [f_1/N, f_2, \ldots, f_n]$给出。可以将 $\Lambda \subset \Lambda'$视为对偶空间 $V^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,\mathbb{Q})$中的秩为 n 的格。现在定义 $\Lambda_N \subset V^\vee$ 为由线性形式 $a \in V^\vee$ 组成的集合，这些线性形式在 L 和 L'上的限制均为本原整线性形式。具体而言：

$$\Lambda_N = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mu_k f_k \mid \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{Z},\ \gcd(\mu_1 N, \mu_2, \ldots, \mu_n) = 1 \right\}.$$

集合 Λ_N 带有同余子群 $\Gamma_0(N,\ n) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$的作用（见式 (8)），其定义为 $g\cdot(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n) = (\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n)\times g^{-1}$。本节余下部分中，我们固定 Λ_N中的非零线性形式 $a_1,\ \ldots,\ a_n$，它们线性无关。这唯一确定了一族本原向量 $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n \in L$，使得对所有 $1 \le j \le n$:

$$a_j(\alpha_k) = 0, \forall\, 1 \le k \ne j \le n \quad \text{and} \quad a_j(\alpha_j) = s_j > 0$$

这是按照 [[Mor25], 引理意义下，$a_1, \ldots, a_n$ 在 L 中的本原正对偶基。这个定义源自有理多面锥理论中的锥:

$$C := \{\delta \in V \mid \forall 1 \le j \le n, a_j(\delta) \ge 0\}$$

可以用生成元表示为:

$$C = \mathbb{Q}_{\ge 0}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Q}_{\ge 0}\alpha_n.$$

现在回顾一下良好平滑格的定义。

定义 18： 设 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda$ 是线性无关的本原线性形式，并取 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $a_1, \ldots, a_n$ 在 L 中的本原正对偶基。若指数为 N 的 L' 中的平滑格 L 对 $a_1, \ldots, a_n$ 是良好的，则称其为良好平滑格，当且仅当 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda_N$，且 $a_1, \ldots, a_n$ 在 L' 中的本原正对偶基 $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ 恰为 $N\alpha_1, \ldots, N\alpha_n$。

注意，一般而言，如果 k_j 是 α_j 在循环群 L/L' 中模 L' 的阶，那么显然 $\alpha'_j = k_j\alpha_j$，因此，条件 α_j 模 L' 生成 L/L' 等价于 $\alpha'_j = N\alpha_j$。在 $a_1, \ldots, a_n$ 线性相关的情形下，如果 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda_N$，则称平滑格 L' 对 $a_1, \ldots, a_n$ 是良好的。定义（18）受到 [Das08] 中良好平滑理想定义的启发。请注意，在我们的情形中，我们不假设 N 是素数。现在给出这一表述的一个等价形式，即对基 $B = [e_1, \ldots, e_n]$ 中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的坐标所施加的条件，这将在定理 3 的证明中发挥作用。

引理 19： 设 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda$ 线性无关。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 L 中 $a_1, \ldots, a_n$ 的本原正对偶族。对于所有 $1 \le j \le n$，记

$$\alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} e_k$$

其中 $\alpha_{k,\ j} \in \mathbb{Z}$。$L/L'$ 中 α_j 模 L' 的阶恰为 $n_j = N/$最大公约数$(N, \alpha_{1,\ j})$。特别地，当且仅当对所有 $1 \le j \le n$，都有最大公约数$(N, \alpha_{1,\ j}) = 1$ 时，平滑格 L' 对 $a_1, \ldots, a_n$ 是良好的。

证明：

设 $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ 是 L' 中与 $a'_1, \ldots, a'_n$ 对应的本原正对偶族。那么 $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ 也是 L 中与 $a_1, \ldots, a_n$ 对应的正对偶族。由引理 [[Mor25], 引理 6] 可知，存在正整数 $m_1, \ldots, m_n$，使得对所有 $1 \le j \le n$，$\alpha'_j = m_j\alpha_j$，其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是 L 中与 $a_1, \ldots, a_n$ 对应的本原正对偶族。对所有 $1 \le j \le n$，记:

$$\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} e_k$$

其中 $\alpha_{k,j} \in \mathbb{Z}$，且 $\gcd(\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{n,j}) = 1$。根据整数 $n_j = N/\gcd(N, \alpha_{1,j}) = N/l_j$ 的定义，向量

$$n_j \alpha_j = \frac{\alpha_{1,j}}{l_j}(Ne_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{N\alpha_{k,j}}{l_j} e_k$$

属于 L'，且 $\gcd(\alpha_{1,\,j}/l_j,\ N\alpha_{2,\,j}/l_j,\ \ldots\ldots,\ N\alpha_{n,\,j}/l_j) = 1$。特别地，$n_j\alpha_j$是 L' 中的本原向量，而 $\alpha'_j = (m_j/n_j)(n_j\alpha_j)$也是 L'中的本原向量。因此$m_j = n_j$ 和 $\alpha'_j = n_j\alpha_j$。□

在第 3 节余下部分中，我们假设平滑格 L' 确实适用于线性形式 a_1，……，a_n，并着重讨论 a_1，……，a_n 线性无关的情形。本节的目标是用周期伯努利多项式给出有理函数$B_{n,\,a_1,\,\ldots\ldots,\,a_n}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$的显式表达式。事实上，先回顾一下利用生成级数定义经典伯努利多项式：

$$\frac{e^{Xz}}{e^z - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k(X) \frac{z^{k-1}}{k!}. \tag{39}$$

我们可以引入伯努利多项式的周期版本 $b_k(x) = B_k(x - \lfloor x \rfloor)$，其中 $x \in \mathbb{R}$。本节将证明以下结论：

命题 20： 假设 $a_1, \ldots, a_n \in \Lambda_N$ 线性无关，且平滑格 L' 对 $a_1, \ldots, a_n$ 是良好的。令 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $a_1, \ldots, a_n$ 的正对偶基。固定集合 $\mathcal{F}$，作为 L/M 的代表元，其中 $M = \oplus_{j=1}^{n} \mathbb{Z}\alpha_j$。那么，对于所有 $1 \leq j \leq n$ 以及所有满足以下条件的 $\delta = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \alpha_j / s_j \in \mathcal{F}$，都存在显式整数 $r_j(\delta) \in \mathbb{Z}$：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w, x, L, L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = n - m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} Y(k_1, \ldots, k_n, v, \delta) \prod_{j=1}^{n} \frac{x(\alpha_j)^{k_j - 1}}{k_j!}$$

其中 $\epsilon =$ 符号 $\det(a_1, \ldots, a_n)$，$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \alpha_j / s_j$，

$$Y(k_1, \ldots, k_n, v, \delta) = N \sum_{q \in Q} \prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{v_j + \delta_j + (r_j(\delta) + q_j)s_j}{Ns_j}\right) N^{k_j - 1} - \prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{v_j + \delta_j}{s_j}\right) \tag{40}$$

and

$$Q = \left\{ (q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \mid \sum_{j=1}^{n} q_j \alpha_{1,j} \equiv 0 \bmod N \right\}. \tag{41}$$

为了证明命题 20，我们将首先分别用周期伯努利多项式显式描述 $B_{n,\,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,\ x,\ L)$ 和 $B_{n,\,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,\ x,\ L')$。接着，我们将说明如何用固定的代表元集合 $\mathcal{F}$（它是 L/M 的代表元集合）以及由 (41) 给出的集合 Q 来表示 L'/M' 的任意代表元集合 $\mathcal{F}'$。先从用周期伯努利多项式进行显式描述开始：

引理21： 固定 $\mathcal{F}$（分别为 $\mathcal{F}'$）作为 L/M（分别为 L'/M'）的一组代表元。则：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w, x, L) = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1 + \cdots + k_n = n - m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j + \delta_j}{s_j}) x(\alpha_j)^{k_j - 1}}{k_j!}$$

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta' \in \mathcal{F}'} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j+\delta'_j}{Ns_j}) N^{k_j-1} x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

其中 $\epsilon = \operatorname{sign}\det(a_1, \ldots, a_n)$，$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \alpha_j / s_j$，求和遍历整数 $k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0$。

证明：

回顾一下，根据定义（见公式 (19)）：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L) = \epsilon \times \operatorname{coeff}[t^0] \left(\sum_{\delta \in (v+L) \cap P(\underline{a})} \frac{e^{wt} e^{x(\delta)t}}{\prod_{j=1}^{n} (1 - e^{x(\alpha_j)t})} \right)$$

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \times \operatorname{coeff}[t^0] \left(\sum_{\delta' \in (v+L') \cap N.P(\underline{a})} \frac{e^{wt} e^{x(\delta')t}}{\prod_{j=1}^{n} (1 - e^{x(N\alpha_j)t})} \right)$$

其中 $\epsilon = \operatorname{sign}\det(a_1, \ldots, a_n)$。为简便起见，定义 $F = \{\delta \in L \mid , v + \delta \in P(a)\}$和 $F' = \{\delta' \in L' \mid , v + \delta' \in N.P(a)\}$。显然，集合 F（分别为 F'）是满足 $v + F \subset P(a)$（分别为 $v + F' \subset N.P(a)$）的 L/M（分别为 L'/M'）的唯一代表元集合。将这些集合明确写为：

$$F = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j \alpha_j}{s_j} \in L \mid \forall\, 1 \leq j \leq n, 0 \leq v_j + \delta_j < s_j, \delta_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$F' = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta'_j . N\alpha_j}{Ns_j} \in L' \mid \forall\, 1 \leq j \leq n, 0 \leq v_j + \delta'_j < Ns_j, \delta'_j \in \mathbb{Z} \right\}$$

因此，利用经典伯努利多项式的定义（见 (39)），可得：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L) = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta \in F} \prod_{j=1}^{n} \frac{B_{k_j}(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}) x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta' \in F'} \prod_{j=1}^{n} \frac{B_{k_j}(\frac{v_j+\delta'_j}{Ns_j}) N^{k_j-1} x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

由于对于所有 $\delta \in F$（分别为 $\delta' \in F'$）以及所有 $1 \leq j \leq n$, $0 \leq (v_j + \delta_j)/s_j < 1$（分别为 $0 \leq (v_j + \delta_j)/(Ns_j) < 1$），我们可以利用周期伯努利多项式改写此式，然后将集合 F和 F'替换为 L/M和 L'/M' 分别对应的任意代表元集合 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$。由此得到：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L) = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}) x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta' \in \mathcal{F}'} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j+\delta'_j}{Ns_j}) N^{k_j-1} x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}.$$

事实上，如果 $\delta = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \alpha_j / s_j \in L$ 在 L/M 中表示同一个类，那么存在整数 $m_1, \ldots, m_n$ 使得 $\delta = \delta + \sum_{j=1}^{n} m_j \alpha_j$。因此：

$$b_{k_j}\left(\frac{v_j + \tilde{\delta}_j}{s_j}\right) = b_{k_j}\left(\frac{v_j + \delta_j}{s_j} + m_j\right) = b_{k_j}\left(\frac{v_j + \delta_j}{s_j}\right)$$

而且，上述显式描述不依赖于 L/M和 L'/M'的代表元选择。证明至此完成。 □

现在我们明确给出商集 L/M 与 L'/M'之间的联系。固定 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$，分别作为 L/M和 L'/M'的代表元集合。注意，识别$\mathcal{F} \simeq L/M$和 $\mathcal{F}' \simeq L'/M'$分别在 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$上诱导出群结构，其定义如下：

$$\delta_1 * \delta_2 \equiv \delta_1 + \delta_2 \bmod M, \quad \delta_1' * \delta_2' \equiv \delta_1' + \delta_2' \bmod M'$$

$\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 的单位元分别对应于 L/M和 L'/M'中平凡类M和 M'的代表元。现在，对于一个良好的平滑格 L'，我们来建立 $\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}'$之间的关系。

引理22： 设平滑格 L' 对于线性形式 $a_1, \ldots, a_n$是良好的。考虑映射

$$f := \begin{cases} \mathcal{F}' & \to \mathcal{F} \\ \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j' \alpha_j}{s_j} & \to \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \alpha_j}{s_j} \bmod M \end{cases}$$

其中， δ_j由欧几里得除法给出，即 $\delta_j' = q_j s_j + \delta_j$ ，其中 $0 \le v_j + \delta_j < s_j$和 $\delta_j \in \mathbb{Z}$。这里约定， $f(\delta')$ 是格 $\mathcal{F}$ 中类$\sum_{j=1}^n \delta_j \alpha_j / s_j$模 M的代表元。映射 f是一个到1的满射群同态，其核同构于群：

$$Q = \left\{ (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^n \mid \sum_{j=1}^n q_j \alpha_{1,j} \equiv 0 \bmod N \right\}.$$

证明：

我们先证明映射 f 是满射。考虑 $\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j \alpha_j}{s_j} \in \mathcal{F}$，并将其用坐标表示：

$$\delta = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{1,j} e_1 + \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{k,j} e_k$$

假设 $\delta \in L$ 等价于对所有 $1 \le k \le n$ 都有 $\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{k,j} \in \mathbb{Z}$ 。现在我们希望找到整数 $r_1, \ldots, r_n \in \{0, \ldots, N-1\}^n$，使得

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{1,j} + \sum_{j=1}^n r_j \alpha_{1,j} \in N\mathbb{Z}.$$

由引理 19 可知，整数 $\alpha_{1,1}$ 与 N 互素，因此存在整数 $\beta \in \mathbb{Z}$，使得 $\beta\alpha_{1,1} \equiv 1$ 模 N。固定 r_1 为整数$-\beta \sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{1,j}$除以 N所得的欧几里得除法余数，满足 $0 \le r_1 < N$。固定 $r_2 = \cdots = r_n = 0$。于是：

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{1,j} + \sum_{j=1}^n r_j \alpha_{1,j} \equiv \left(\sum_{j=1}^n \frac{\delta_j}{s_j} \alpha_{1,j} \right) (1 - \beta\alpha_{1,1}) \equiv 0 \bmod N$$

这表明 $\delta = \delta + \sum_{j=1}^n r_j \alpha_j \in L'$。令 δ' 为 $\mathcal{F}'$ 中等价类$[\delta]$的代表元，也就是 $\delta' = \delta + \sum_{j=1}^n (r_j + m_j N)\alpha_j$，其中 m_1是一些整数， $\ldots$， m_n。那么显然$f(\delta') = \delta$。因此 f是满射。此外，原像 $f^{-1}(\delta)$ 可明确写为：

$$f^{-1}(\delta) = \left\{ \left[\delta + \sum_{j=1}^n r_j \alpha_j + \sum_{j=1}^n q_j \alpha_j \right] \bmod M' \mid (q_1, \ldots, q_n) \in Q \right\}.$$

事实上，若 $f(\delta') = \delta$，则对所有 $1 \le j \le n$，都有 $\delta'_j = (r_j + q_j)s_j + \delta_j$，其中 $q_j \in \mathbb{Z}$。条件 $\delta'_j \in L'$等价于 $\sum_{j=1}^{n}(\delta_j + s_j(r_j + q_j))\alpha_{1,\,j} \in N\mathbb{Z}$根据 r_j的定义，这又等价于$\sum_{j=1}^{n} q_j\alpha_{1,\,j} \in N\mathbb{Z}$也就是说 $(q_1, \ldots, q_n) \in Q$。特别地，$\ker f \simeq Q$。

现在证明 f是一个群同态。考虑 $\delta'_1, \delta'_2 \in \mathcal{F}'$，定义 $\delta'_3 = \delta'_1 * \delta'_2$并针对 $k = 1$、2、3 写出：

$$\delta'_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta'_{k,j}\alpha_j}{s_j}$$

群运算的定义给出：

$$\delta'_{3,j} = (\delta'_{1,j} + \delta'_{2,j}) + Ns_jm'_j \text{ for some } m'_j \in \mathbb{Z} \tag{42}$$

对 $k = 1$、2、3 以及 $1 \le j \le n$，定义满足下列条件的唯一整数 $\delta_{k,\,j}$：

$$0 \le \delta_{k,j} < a_j(\alpha_j), \quad \delta'_{k,j} = q_{k,j}s_j + \delta_{k,j}, q_{k,j} \in \mathbb{Z}$$

因此 $f(\delta'_k) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{k,\,j}\alpha_j}{s_j}$对于 $k = 1$、2、3。$\mathcal{F}$上的群运算定义给出：

$$f(\delta'_1) * f(\delta'_2) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{1,j} + \delta_{2,j}\alpha_j}{s_j} \bmod M$$

而 $f(\delta'_3) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_{3,\,j}\alpha_j}{s_j}$模 M。我们将证明，对于$1 \le j \le n$，$\delta_{1,\,j} + \delta_{2,\,j} - \delta_{3,\,j} \in s_j\mathbb{Z}$。事实上，根据 $\delta_{k,\,j}$ 的定义，我们得到：

$$\delta_{1,j} + \delta_{2,j} = \delta'_{1,j} - q_{1,j}s_j + \delta'_{2,j} - q_{2,j}s_j$$

利用 (42) 可得：

$$\delta_{1,j} + \delta_{2,j} = \delta'_{3,j} + Ns_jm'_j - q_{1,j}s_j - q_{2,j}s_j = \delta_{3,j} + s_j(q_{3,j} + Nm'_j - q_{1,j} - q_{2,j}) \equiv \delta_{3,j} \bmod s_j\mathbb{Z}$$

这表明 $\delta_1 + \delta_2 \equiv \delta_3$ 模 M，因此：

$$f(\delta'_1 * \delta'_2) = f(\delta'_3) = f(\delta'_1) * f(\delta'_2).$$

因此 f 是一个群同态。接下来，我们证明 f 是一个到 1 的 N^{n-1} 映射。这由下列交换图的蛇引理得出：

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \ker f & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M' & \to & L' & \to & \mathcal{F}' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M & \to & L & \to & \mathcal{F} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n & & \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} & & 0 & &
\end{array}$$

蛇引理给出一个连接群同态 $\ker f \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n$，使得以下序列正合：

$$0 \to 0 \to \ker f \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to 0$$

因此，# ker $f = N^{n-1}$和 f是一个映射到 1 的 N^{n-1}。 □

由这个引理可立即得到以下推论 :

推论 23： 对于 L/M 的任意代表元集合 $\mathcal{F}$，以及对于 Q的任意代表元集合$\mathcal{Q}$，集合

$$\mathcal{F}' := \{\delta + \sum_{j=1}^{n}(r_j(\delta) + q_j)\alpha_j \mid (q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{Q}\}$$

是 L'/M' 的一个代表元集合，其中 $r_j(\delta)$ 是在引理*22*的证明中定义的。

现在，我们可以在分别为 L/M 和 L'/M' 选取这组特定代表元集合的情况下证明命题 20。

命题 20 的证明：

令 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{Q}$ 分别为 L/M 和 Q 的两个代表元集合，并令$\mathcal{F}'$为推论 23 给出的 L'/M' 的代表元集合。由引理21可得：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta' \in \mathcal{F}'} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j+\delta'_j}{Ns_j}) N^{k_j-1} x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

其中 $\epsilon =$ signdet(a_1, …, a_n)。利用推论 23，我们可以将其改写为关于 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{Q}$ 的双重求和：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \prod_{j=1}^{n} \frac{b_{k_j}(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}) N^{k_j-1} x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

注意，该表达式与 Q的代表元集合 $\mathcal{Q}$的选取无关。因此，根据平滑函数 $B_{n,\ a_1,\ \ldots a_n}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$ 的定义（见 (10)），并再次利用引理21：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon \sum_{m=0}^{n} \frac{w^m}{m!} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m} \sum_{\delta \in \mathcal{F}} Y(k_1,\ldots,k_n,v,\delta) \prod_{j=1}^{n} \frac{x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

其中，对所有满足 $\sum_{j=1}^{n} k_j \leq n$ 的 $k_1 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0$，以及对所有 $\delta \in \mathcal{F}$：

$$Y(k_1,\ldots,k_n,v,\delta) = N \sum_{q \in Q} \prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right) N^{k_j-1} - \prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{\delta_j}{s_j}\right).$$

□

3.2 S平滑伯努利有理函数取有理值

本节的目标是证明关于平滑后的 $B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')$ 函数的以下有理性结论。

命题 24： 假设 $a_1,\dots,a_n \in \Lambda_N$ 线性无关，且平滑格 L' 对 $a_1,\dots,a_n$ 是良好的。令 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 为 $a_1,\dots,a_n$ 的正对偶基。像之前一样，令 $\epsilon = \operatorname{sign}\det(a_1,\dots,a_n)$，并固定 L/M 的一组代表元 $\mathcal{F}$。那么：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon \sum_{\delta\in\mathcal{F}} \left(N \sum_{q\in Q} \prod_{j=1}^{n} b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right) - \prod_{j=1}^{n} b_1\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)\right)$$

其中整数 $r_j(\delta)$ 由引理22的证明给出，而 Q 在命题 20 中定义。特别地，$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')$ 是一个有理数，它只取决于线性形式 $a_1,\dots,a_n$ 以及 v 在 V/L' 中的类，而不取决于 w，$x \in \mathbb{C}\times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$。

该命题实质上将平滑函数 $B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')$ 表示为平滑高阶戴德金和。为了证明这一结论，我们将证明每一项 $Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta)$ 均为零，除非 $k_1=k_2=\cdots=k_n=1$。这正是以下关键引理的断言：

引理25： 设 $k_1,\dots,k_n$ 是非负整数，满足 $\sum_{j=1}^{n} k_j \le n$。设 $(k_1,\dots,k_n)\neq(1,\dots,1)$。那么，对于任意 $\delta\in\mathcal{F}$，$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta)=0$。

证明：

固定非负整数 $k_1,\dots,k_n$，使得 $\sum_{j=1}^{n} k_j \le n$。条件 $(k_1,\dots,k_n)\neq(1,\dots,1)$ 等价于存在一个指数 $1\le j\le n$，使得$k_j=0$。定义 $J=\{1\le j\le n \mid k_j\neq 0\}$ 和 $J^c=\{1,\dots,n\}-J\neq\emptyset$。定义映射：

$$g_J := \begin{cases} Q & \to \prod_{j\in J}\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = Q(J) \\ (q_1,\dots,q_n) & \to (q_j)_{j\in J} \end{cases}$$

这个映射显然是一个群同态，我们将证明它是满射。事实上，由假设，J^c非空，因此我们可以固定一个指数 $j'\in J^c$。平滑格 L'对线性形式 a_1，……，a_n是良好的这一条件蕴含α_{1}、$_{j'}$与 N互素。因此，对任意元素$(q_j)_{j\in J}\in Q(J)$，存在整数 $q_{j'}\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$使得$\sum_{j\in J} q_j\alpha_{1}$、$_{j}+q_{j'}\alpha_{1}$、$_{j'}\equiv 0 \bmod N$。对所有 $j''\in J^c-\{j'\}$令 $q_{j''}=0$，可得$(q_1,\dots,q_n)\in Q$以及 $g_J(q_1,\dots,q_n)=(q_j)_{j\in J}$。因此，$g_J$是满射。我们将使用函数 g_J来交换 $Y(k_1,\dots,k_n,\delta)$的表达式中的求和与求积。首先，让我们用集合 J改写 $Y(k_1,\dots,k_n,\delta)$：

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = N^{1-n}\sum_{q\in Q}\prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j} - \prod_{j=1}^{n} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = N^{1-n}\sum_{q\in Q}\prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j} - \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

这里我们用到了这样一个事实：如果 $j\notin J$，那么 $b_{k_j}=b_0$ 就是恒等于 1 的常函数。从这个表达式可以清楚地看出，该项

$$\prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j}$$

只取决于 q 的 $g(q) \in Q_J$ 的像，因此：

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = N^{1-n}\#\ker(g_J)\sum_{q_J\in Q(J)}\prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j} - \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

现在我们可以利用 $\#\ker(g_j) = N^{n-1-\#J}$，再利用 $Q_J = \prod_{j\in J}\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$，在 $Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta)$ 的表达式中交换求和与求积的顺序，从而得到：

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = \sum_{q_J\in Q(J)}\prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j-1} - \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = \prod_{j\in J}\sum_{q_j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)N^{k_j-1} - \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

由众所周知的分布关系可知：

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} b_m\left(\frac{x+k}{N}\right)N^{m-1} = b_m(x) \tag{43}$$

将其应用于 $x = (v_j+\delta_j+r_j(\delta)s_j)/s_j$，可得：

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j+r_j(\delta)s_j}{s_j}\right) - \prod_{j\in J} b_{k_j}\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right).$$

Si由于 b_{k_j} 函数具有 1-周期性，且 $r_j\in\mathbb{Z}$，我们得到所需的结论

$$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = 0.$$

□

现在我们可以从引理25推导出命题 24。

命题 24 的证明：

由命题 20 可得：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon\sum_{m=0}^{n}\frac{w^m}{m!}\sum_{k_1+\cdots+k_n=n-m}\sum_{\delta\in\mathcal{F}} Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta)\prod_{j=1}^{n}\frac{x(\alpha_j)^{k_j-1}}{k_j!}$$

其中 ϵ =符号 $\det(a_1,\dots,a_n)$。由于对所有 $(k_1,\dots,k_n) \neq (1,\dots,1)$ 以及所有 $\delta\in\mathcal{F}$,$Y(k_1,\dots,k_n,v,\delta) = 0$，该和式简化为：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon\sum_{\delta\in\mathcal{F}} Y(1,\dots,1,v,\delta)$$

将 $Y(1,\dots,1,v,\delta)$ 替换为其定义，即得所需的表达式：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon\sum_{\delta\in\mathcal{F}}\left(N\sum_{q\in Q}\prod_{j=1}^{n} b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right) - \prod_{j=1}^{n} b_1\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)\right).$$

显然，$B_{n,\,a_1,\,\dots\dots,\,a_n}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$ 是一个有理数，仅取决于线性形式 $a_1,\dots\dots,\ a_n$ 以及 v 在 V/L' 中的类，而与 $w,\ x\in\mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\ \mathbb{C})$ 无关。

□

3.3 平滑伯努利有理函数具有有界分母

本节将通过用分圆单位的迹来表示平滑函数$B_{n,\ a_1,\ \ldots\ldots,\ a_n}(v)(w,\ x,\ L,\ L')$，从而证明其分母关于维数 n 和平滑指标 N 存在一致上界，以此完成定理 3 的证明。为此，我们将对有限群 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 使用傅里叶变换，借鉴 [CD14] 的思路，改写命题 24 中得到的表达式。记 $\zeta = \zeta_N = \exp(2i\pi/N)$ 为一个本原 N 次单位根。引入辅助函数χ：$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^n \to \{0, N\}$，定义如下：

$$\chi(q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta^{q_j \alpha_{1,j} k} = \begin{cases} 0 \text{ if } q \notin Q \\ N \text{ if } q \in Q \end{cases}$$

其中 $\alpha_{1,\ j} = \langle \alpha_j,\ e_1 \rangle$。根据命题 24 并利用辅助函数 χ，我们可以写为：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') = \epsilon \sum_{\delta \in \mathcal{F}} \left(Z(\delta) - \prod_{j=1}^{n} b_1 \left(\frac{v_j + \delta_j}{s_j} \right) \right) \tag{44}$$

其中

$$Z(\delta) := \sum_{q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \chi(q) \prod_{j=1}^{n} b_1 \left(\frac{v_j + \delta_j + (r_j(\delta) + q_j) s_j}{N s_j} \right).$$

根据 χ 的定义，我们可以将辅助函数 $Z(\delta)$ 改写为：

$$Z(\delta) = \sum_{q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{n} \zeta^{q_j \alpha_{1,j} k} b_1 \left(\frac{v_j + \delta_j + (r_j(\delta) + q_j) s_j}{N s_j} \right)$$

并且注意到，对 $q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^n$ 求和可以与对 $1 \le j \le n$ 求积互换，因此：

$$Z(\delta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \prod_{j=1}^{n} \sum_{q_j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta^{q_j \alpha_{1,j} k} b_1 \left(\frac{v_j + \delta_j + (r_j(\delta) + q_j) s_j}{N s_j} \right). \tag{45}$$

定理 3 的证明基本上可由以下引理推出，该引理是对 [[CD14], 引理 2.13] 的重新表述。

引理 26： 设 $N \ge 2$ 是一个整数。若 $x \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{F}_N - \{0\}$：

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta^{yq} b_1 \left(\frac{x+q}{N} \right) = \frac{\zeta^{-y\lfloor x \rfloor}}{\zeta^y - 1}$$

其中 $\zeta = \exp(2i\pi/N)$。

该引理使我们能够将表达式 $Z(\delta)$ 写成分圆单位的迹的形式，现在我们可以证明定理 3。

定理 3 的证明：

我们首先处理这一项

$$\sum_{q_j \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \zeta^{q_j \alpha_{1,j} k} b_1 \left(\frac{v_j + \delta_j + (r_j(\delta) + q_j) s_j}{N s_j} \right)$$

在表达式 (45) 中，针对 $k=0$ 和 $1\le j\le n$ 使用分布关系 (43)。由此得到：

$$\sum_{q_j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)=N^0 b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+r_j(\delta)s_j}{s_j}\right)=b_1\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$$

因为 $r_j(\delta)\in\mathbb{Z}$ 且 b_1 是 1-周期的。因此，$k=0$ 的项与表达式 (44) 中的项 $\prod_{j=1}^n b_1\left(\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\right)$ 相消，并且：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')=\epsilon\sum_{\delta\in\mathcal{F}}\sum_{k=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{n}\sum_{q_j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\zeta^{q_j\alpha_{1,j}k}b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right) \tag{46}$$

现在将引理 26 应用于表达式 (46) 中的每一项，得到：

$$\sum_{q_j\in\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}\zeta^{q_j\alpha_{1,j}k}b_1\left(\frac{v_j+\delta_j+(r_j(\delta)+q_j)s_j}{Ns_j}\right)=\left(\frac{\zeta^{-\alpha_{1,j}k\lfloor\frac{v_j+\delta_j+r_j(\delta)s_j}{s_j}\rfloor}}{\zeta^{\alpha_{1,j}k}-1}\right).$$

由于 $r_j(\delta)\in\mathbb{Z}$，我们得到 $\lfloor\frac{v_j+\delta_j+r_j(\delta)s_j}{s_j}\rfloor=\lfloor\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\rfloor$，因此：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')=\epsilon\sum_{\delta\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\zeta^{-\alpha_{1,j}k\lfloor\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\rfloor}}{\zeta^{\alpha_{1,j}k}-1}\right)\right)$$

利用众所周知的双射，这可以写成分圆单位的迹之和：

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}-\{0\}=\sqcup_{d|N,d\neq1}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^\times$$

由此得到：

$$B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')=\epsilon\sum_{\delta\in\mathcal{F}}\sum_{d|N,d\neq1}\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\zeta_d^{-\alpha_{1,j}\lfloor\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\rfloor}}{\zeta_d^{\alpha_{1,j}}-1}\right)\right)$$

其中，对所有 $d|N$，$\zeta_d=\exp(2i\pi/d)$，$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}$ 是从 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 到 $\mathbb{Q}$ 的迹。这就是所需的关系，也由此完成定理 3 的证明。□

我们通过应用定理 3，给本节作结：以 n 和 N 表示的所有 $B_{n,a_1,\dots,a_n}(v)(w,x,L,L')$ 函数的分母都具有一致上界，从而证明定理 1。此类结果如今已属经典，其中一些可见于 [Zag73], [Das08] 和 [CD14]。

定理 1 的证明：

我们首先指出，当 $a_1,\dots,a_n\in\Lambda_N$ 线性相关且在 $V^\vee$ 中位置良好时，函数 $B_{n,a_1,\dots,a_n}$ 恒等于 0，因此在这种情况下，我们可以将 $b(a_1,\dots,a_n,v)=0$ 恒等地设为该值。现在假设 $a_1,\dots,a_n\in\Lambda_N$ 线性无关，且平滑格 L' 对 $a_1,\dots,a_n$ 位置良好。我们来研究定理 3 中出现的每一项 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u_d)$，其中

$$u_d=\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\zeta_d^{-\alpha_{1,j}\lfloor\frac{v_j+\delta_j}{s_j}\rfloor}}{\zeta_d^{\alpha_{1,j}}-1}\right)$$

对于 $d|N, d \neq 1$。一方面，如果 d 可被两个不同素数整除，由于 α_1,$_j$ 与 d 互素，众所周知，ζ^{α_1},$_d{}^j - 1$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 中的单位，这意味着 u_d 是 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 的整数环 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)}$ 中的单位，并且 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u_d) \in \mathbb{Z}$。另一方面，当 $d = p^\nu$ 是素数 p 的幂时，代数整数 ζ^{α_1},$_d{}^j - 1$ 是 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 中 p 上方唯一的素理想 $\mathfrak{P}_d$ 的生成元。该分圆扩张在 p 处全分歧，因此 $\mathfrak{P}_d^{\varphi(d)} = (p)$，其中 $\varphi(d) = p^{\nu-1}(p-1)$ 是在 $d = p^\nu$ 处取值的欧拉函数。因此 u_d 是理想 $\mathfrak{P}_d^{-n}$ 的生成元。我们引入 $\mathbb{Q}(\zeta_d)$ 的不同理想 $\mathfrak{D}$，定义如下：

$$\mathfrak{D}^{-1} = \{x \in \mathbb{Q}(\zeta_d) \mid \forall y \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)}, \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(xy) \in \mathbb{Z}\}.$$

特别地，任意元素 u in $\mathfrak{D}^{-1}$ 都满足 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u \times 1) \in \mathbb{Z}$。由 [[Neu99], 引理 10.1] 可知，在这一特定情形下，$\mathfrak{P}_d^m$恰好整除$\mathfrak{D}$，其中 $m = p^{\nu-1}(p\nu - \nu - 1)$。如果我们找到一个整数 k 使得 $p^k u_d \in \mathfrak{D}^{-1}$，那么便有 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(p^k u_d) \in \mathbb{Z}$，因此 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u_d) \in p^{-k}\mathbb{Z}$。为了确定这样的最小整数 k，我们注意到：

$$(p^k u_d) = \mathfrak{P}^{k\varphi(p^\nu)-n}$$

因此，$p^k u_d \in \mathfrak{D}^{-1}$ 当且仅当 $k\varphi(p^\nu) - n \geq -p^{\nu-1}(p\nu - \nu - 1)$，由此得到条件：

$$k \geq \frac{n}{\varphi(p^\nu)} - 1 + \frac{1}{p-1}.$$

因此：

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_d)/\mathbb{Q}}(u_d) \in p^{-\lceil \frac{n}{\varphi(d)} - 1 + \frac{1}{p-1} \rceil}\mathbb{Z}$$

其中 $\lceil x \rceil$ 是满足 $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$ 和 $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$的上取整函数。于是我们可以得出

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') \in \sum_{p|N} \sum_{\nu=1}^{v_p(N)} p^{-\left\lceil \frac{n}{(p-1)p^{\nu-1}} - 1 + \frac{1}{p-1} \right\rceil}\mathbb{Z}$$

其中，$v_p(N)$ 是 N 的 p-进赋值。对于 N 的所有素因子 p，$\nu = 1$ 对应的项占主导，因此我们得到更简单的关系：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') \in \sum_{p|N} p^{-\left\lceil \frac{n+1}{p-1} - 1 \right\rceil}\mathbb{Z}.$$

不难验证，对于任意 $n \geq 2, p \geq 2$，$\left\lceil \frac{n+1}{p-1} - 1 \right\rceil = \lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor$，因此我们可以令 $\mathcal{D}(N,n) = \prod_{p|N} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}$，从而统一地限制所有值 $B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L')$ 的分母：

$$B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L') \in \mathcal{D}(N,n)^{-1}\mathbb{Z}.$$

最后，定义 $b(a_1,\ldots,a_n,v)$ 为整数 $B_{n,a_1,\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L').\mathcal{D}(N,n)$。由命题 24 可知，$b(a_1,\ldots,a_n,v)$ 不依赖于 $w, x \in \mathbb{C}\times\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C})$ 的选择。结合定理 2 可知，当 $a_1,\ldots,a_n$ 在 $V^\vee$ 中位置良好，且平滑格 L' 对 $a_1,\ldots,a_n$ 是良好的：

$$\left(\prod_{j=1}^{n} G_{n-2,a_1,\ldots,\widehat{a_j},\ldots,a_n}(v)(w,x,L,L')^{(-1)^{j+1}}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi b(a_1,\ldots,a_n,v)}{\mathcal{D}(N,n)}\right)$$

这就是所期望的结果。 □

4 上同调解释

在最后一节中，我们对本论文所给出的结果作出上同调解释。我们首先回顾 [Mor25] 中引入的若干函数，它们作为公式(6)与(7)的推论而满足余循环性质与余边界性质。然后，我们引入这些函数的平滑版本，并说明平滑操作如何影响其性质。最后，我们将这些函数限制到与数域中的单位群相关联的环面上，从而得到 $\Gamma_0(N,n)$的子群的真正上循环。

在本系列的第一篇文章中，我们定义了两组函数 $\psi_{n,\ a}$ 和 $\phi_{n,\ a}$，它们与本原线性形式 $a \in \Lambda$ 相关，该形式定义如下：

$$\psi_{n,a} := \begin{cases} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})^{n-2} & \to \mathcal{F}(V/L \times \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C}),\mathbb{C}) \\ (g_1,\dots,g_{n-2}) & \to \big((v,w,x) \to G_{n-2,a,g_1\cdot a,\dots,(g_1\dots g_{n-2})\cdot a}(v)(w,x)\big) \end{cases}$$

$$\phi_{n,a} := \begin{cases} \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})^{n-1} & \to \mathcal{F}(V/L,\mathbb{Q}[w](x)) \\ (g_1,\dots,g_{n-1}) & \to B_{n,a,g_1\cdot a,(g_1g_2)\cdot a,\dots,(g_1\dots g_{n-1})\cdot a}(v)(w,x) \end{cases}.$$

随后，我们将模性质 (6) 重新表述为：当线性形式a，$g_1\cdot a$，……，$(g_1\dots g_{n-1})\cdot a$ 线性无关时，$\psi_{n,\ a}$ 的乘法余边界由 $\exp(2i\pi\phi_{n,\ a})$ 给出，如下：

$$\partial^\times \psi_{n,a}(g_1,\dots,g_{n-1}) = \exp(2i\pi\phi_{n,a}(g_1,\dots,g_{n-1})). \tag{47}$$

定理 2 意味着，对于任意在 $V^\vee$ 中位置良好的 a_1，……，a_n，余边界关系 (47) 都成立；也就是说，当 $\mathrm{rk}(a_1,\dots,a_n) \neq n-1$ 时，或当 $\mathrm{rk}(a_1,\dots,a_n) = n-1$ 且 0 不是 $V^\vee$ 中 a_1，……，a_n 的重心时，关系均成立。另一方面，余循环关系 (7) 给出了以下部分余循环关系：

$$\partial\phi_{n,a}(g_1,\dots,g_n) = 0 \tag{48}$$

对于任意满足 $a, g_1\cdot a,\dots,(g_1\dots g_n)\cdot a$ 按照 [Mor25] 的意义不处于坏位置的 $g_1,\dots,g_n \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$。

利用本文引入的平滑操作，我们可以为本原线性形式 $a \in \Lambda_N$ 定义这些函数的平滑版本：

$$\psi^{(N)}_{n,a} := \begin{cases} \Gamma_0(N,n)^{n-2} & \to \mathcal{F}(V/L' \times \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C}),\mathbb{C}) \\ (g_1,\dots,g_{n-2}) & \to \big((v,w,x) \to G_{n-2,a,g_1\cdot a,\dots,(g_1\dots g_{n-2})\cdot a}(v)(w,x,L,L')\big) \end{cases}$$

$$\phi^{(N)}_{n,a} := \begin{cases} \Gamma_0(N,n)^{n-1} & \to \mathcal{F}(V/L',\mathbb{Q}[w](x)) \\ (g_1,\dots,g_{n-1}) & \to B_{n,a,g_1\cdot a,(g_1g_2)\cdot a,\dots,(g_1\dots g_{n-1})\cdot a}(v)(w,x,L,L') \end{cases}.$$

现在让我们用这些平滑函数重新表述本文的主要结果。由 (47) 可知，它们满足余边界关系

$$\partial^\times \psi^{(N)}_{n,a}(g_1,\dots,g_{n-1}) = \exp(2i\pi\phi^{(N)}_{n,a}(g_1,\dots,g_{n-1})) \tag{49}$$

每当 a、$g_1\cdot a$、……、$(g_1\dots g_{n-1})\cdot a$ 在 $V^\vee$ 中位置良好时。余循环关系 (48) 也直接给出了余循环关系

$$\partial\phi^{(N)}_{n,a}(g_1,\dots,g_n) = 0 \tag{50}$$

对于任意 g_1、.....、 $g_n \in \Gamma_0(N,n)$，只要 $a, g_1 \cdot a$、.....、$(g_1 \dots g_n) \cdot a$ 按照 [Mor25] 的意义，在 $V^\vee$ 中不处于坏位置。此外，定理 3 蕴含，每当平滑格 L' 对线性形式 a, $g_1 \cdot a$、.....、$(g_1 \dots g_{n-1}) \cdot a$ 是良好的，函数 $\phi_{n\,a}^{(N)}, (g_1,\dots..., g_{n-1})$ 的值便不依赖于 w, $x \in \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L,\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$，因此函数 $\phi_{n\,a}^{(N)}, (g_1,\dots..., g_{n-1})$ 可视为 $\mathcal{F}(V/L', \mathcal{D}(N, n)^{-1}\mathbb{Z})$ 的一个元素，本质上是一个平滑化的高阶戴德金和。至于函数 $\psi_{n\,a}^{(N)},$，由推论 1可知，对于任意 g_1、.....、 $g_{n-1} \in \Gamma_0(N,n)$:

$$\partial^{\times} \left(\psi_{n,a}^{(N)}\right)^{\mathcal{D}(N,n)} = 1$$

只要线性形式 a、 $g_1 \cdot a$、.....、$(g_1 \dots g_{n-1}) \cdot a$ 满足定理 1 的假设。

现在考虑 U Γ_0 的特定子群 N、 n，它们满足以下性质：$\forall m \geq 2$、 $\forall g_1$、.....、 $g_m \in U$、$\forall \mu_1$、.....、 $\mu_m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j (g_j \cdot a) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0, \dots, \mu_m = 0 \tag{51}$$

（见 [[Mor25], 条件（26）]）。特别地，正如 [Mor25] 中所述，数域中的某些单位群满足此条件。事实上，若 $\mathbb{K}$是一个次数为n 且至少有一个实位 $\sigma_{\mathbb{R}}$的数域，我们可以考虑单位群 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}^{\times}$ 的子群 $\mathcal{U}$，满足 $\forall \varepsilon \in \mathcal{U}$、$\sigma_{\mathbb{R}}(\varepsilon) > 0$。我们可以考虑格 L 和 L'，它们对应于 $\mathbb{K}$ 的分式理想，并且满足 $L' \subset L$ 和 $L/L' \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$。特别地，这些分式理想在 $\mathcal{U}$ 的元素作用下保持不变，因此我们可以将每个元素 $\varepsilon \in \mathcal{U}$ 与矩阵 M_ε 对应起来，该矩阵表示 ε 在 L'的一个基 $B' = [Ne_1, e_2, \dots, e_n]$ 下的乘法，并且 $B = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ 是 L的一个 $\mathbb{Z}$-基。于是，群 $U = \{M_\varepsilon \mid \varepsilon \in \mathcal{U}\} \simeq \mathcal{U}$是 $\Gamma_0(N,n)$ 的一个阿贝尔子群，满足（51）。根据 [[Mor25], §3.3]，映射 $\phi_{n\,a}^{(N)}$ 是群 $U \simeq \mathcal{U}$上的一个（$n-1$）-余循环，其值属于 $\mathcal{F}(V/L', \mathbb{Q}[w](x))$；定理 3 蕴含，当平滑格对 $a, g_1 \cdot a$、.....、$(g_1$、.....、 $g_{n-1})$ $\cdot a$ 良好时， $\phi_{n\,a}^{(N)}$、 $(g_1$、 ..... 、 $g_{n-1}) \in \mathcal{F}(V/L', \mathcal{D}(N,n)^{-1}\mathbb{Z})$。在假设（ 51 ）下，对于所有 g_1、.....、 $g_{n-1} \in U$，分裂关系（49）同样成立:

$$\partial^{\times} \psi_{n,a}^{(N)}(g_1, \dots, g_{n-1}) = \exp(2i\pi \phi_{n,a}^{(N)}(g_1, \dots, g_{n-1}))$$

as (5)lg 保证线性形式 $a, g_1 \cdot a, \dots, (g_1 \dots g_{n-1}) \cdot a$ 在 V 中位置良好 $^{\vee}$.

寻找关于线性形式 $a \in \Lambda_N$ 以及单位群 $\mathcal{U}$ 的某些条件将会很有意思，使得对于固定的平滑格 $L' \subset L$，格 L' 对任意族 $g_1 \cdot a$，.....， $g_n \cdot a$都是好的，其中 g_1，.....，$g_n \in \mathcal{U}$（即该平滑格对 a 和 $\mathcal{U}$“一致地好”）。事实上，若平滑格 L' 对a 和 $\mathcal{U}$ 一致地好，则平滑函数 $\phi_n^{(N)}$、$_a$ 到 $U \simeq \mathcal{U}$ 的限制将给出 $H^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(V/L', \mathcal{D}(N,n)^{-1}\mathbb{Z}))$中的一个余循环。此外，$(\psi_{n\,a}^{(N)},)^{\mathcal{D}(N,n)}$到$U \simeq \mathcal{U}$的限制将产生 $H^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(V/L' \times \mathbb{C} \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$ $(L,\mathbb{C})$ $\mathbb{C}))$中的一个乘法余循环。我们在本系列的第三篇论文中讨论寻找一个条件、以确保平滑格 L' 对 a 和 $\mathcal{U}$ 一致地好的问题；在那里，我们考虑 $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ 中模某个整理想 $\mathfrak{f}$同余于1的全正单位群，其中$\mathbb{K}$ 是次数为 n 、恰有一个复位的数域。 [Mor26a] 中猜想的高阶椭圆单位，由这些全正单位群上的$(n-2)$-上循环 $\psi_{n\,a}^{(N)}$在某些$(n-2)$-循环上的求值给出。

参考文献

[BCG23] Nicolas Bergeron、Pierre Charollois与Luis E. Garc´ıa。复三次域的椭圆单位。https://arxiv.org/abs/2311.04110，2023。[CD14] Pierre Charollois与Samit Dasgupta。GL$_n$上的整艾森斯坦上闭链。I：Sczech上闭链与全实域的 p进 L函数。Camb. J. Math.，2(1)：49–90，2014。[CDG15] Pierre Charollois、Samit Dasgupta与Matthew Greenberg。GL$_n$上的整艾森斯坦上闭链。II：新谷方法。Comment. Math. Helv.，90(2)：435–477，2015。[Das08] Samit Dasgupta。全实域的新谷zeta函数与Gross-Stark单位。Duke Math. J.，143(2)：225–279，2008。[DD06] Henri Darmon与Samit Dasgupta。实二次域的椭圆单位。Ann. Math. (2)，163(1)：301–346，2006。[DPV24] Henri Darmon、Alice Pozzi与Jan Vonk。Dedekind-Rademacher余循环在实乘法点处的值。J. Eur. Math. Soc. (JEMS)，26(10)：3987–4032，2024。[FHRZ08] Giovanni Felder、Andr´e Henriques、Carlo A. Rossi与朱晨畅。椭圆伽马函数的杰尔布。Duke Math. J.，141(1)：1–74，2008。[FV00] Giovanni Felder与Alexander Varchenko。椭圆伽马函数与SL(3, $\mathbb{Z}$) $\ltimes$ $\mathbb{Z}^3$。Adv. Math.，156(1)：44–76，2000。[Kat04] 加藤和也。 p进Hodge理论与模形式zeta函数的值。载于Cohomologies p-adiques et applications arithm´etiques（III），第117–290页。巴黎：Soci´et´e Math´ematique de France，2004。[Maz79] B. Mazur。L函数特殊值的算术。Invent. Math.，55：207–240，1979。[Mor24] Pierre L. L. Morain。恰有一个复位的域上的椭圆单位。预印本，arXiv:2406.06094 [math.NT](2024)，2024。[Mor25] Pierre L. L. Morain。多重椭圆伽马函数的几何族与算术应用，I。预印本，arXiv:2510.16515 [math.NT], 2025。[Mor26a] Pierre L. L. Morain。多重椭圆伽马函数的几何族与算术应用，III [进行中], 2026。[Mor26b] Pierre L. L. Morain。多重椭圆伽马函数的几何族与算术应用 [博士论文撰写中，Sorbonne Universit´e],预计2026年。[Nar04] Atsushi Narukawa。多重椭圆伽马函数的模性质与积分表示。Adv. Math.，189(2)：247–267，2004。[Neu99] J. Neukirch。《代数数论》，Grundlehren der math- ematischen Wissenschaften第322卷。施普林格，柏林、海德堡，第一版，1999。

[Nis01] Michitomo Nishizawa. 多重伽马函数的椭圆类比。*J. Phys. A, Math. Gen.*, 34(36):7411–7421, 2001.[Rad32] Hans Rademacher. 模函数理论。*J. Reine Angew. Math.*, 167:312–336, 1932.[Rob73] Gilles Robert. 虚二次域阿贝尔扩张的椭圆单位与类数公式。*Bull. Soc. Math.Fr., Suppl., M´ém.*, 36:77, 1973.[Rui97] S. N. M. Ruijsenaars. 一阶解析差分方程与可积量子系统。*J. Math. Phys.*, 38(2):1069–1146, 1997.[Scz93] Robert Sczech. GL_n 的艾森斯坦群上循环与 L-函数值。*Invent. Math.*, 113(3):581–616, 1993.[Sie80] Carl Ludwig Siegel. 高级解析数论，塔塔基础研究所数学研究丛书第9卷。孟买：塔塔基础研究所，1980年。[Zag73] Don Zagier. 高维戴德金和。*Math. Ann.*, 202:149–172, 1973。