arXiv:2602.06576v1 [cs.LO] 6 Feb 2026

线性可实现性与蕴含代数

Alexandre Lucquin
lucquin
@lipn.univ-paris13.fr 巴黎北维勒塔讷兹大学，法国

Luc Pellissier
luc.pellissier@u-pec.fr 巴黎东克雷泰伊大学 克雷泰伊，法国

Thomas Seiller
thomas.seiller@cnrs.fr 法国国家科学研究中心 巴黎，法国

摘要

由 Kleene 提出的可实现性，可以理解为对布劳威尔－海廷－柯尔莫戈洛夫（BHK）证明解释的一种具体化，它提供了一个框架，可根据数学陈述和证明的构造性或计算性内容对其进行解释。随着时间推移，这一概念通过多种扩展不断发展，例如克赖塞尔的修正可实现性或 Krivine 的经典可实现性。与这些发展并行，Girard 关于线性逻辑的研究提出了另一种视角，通常也被视为 BHK 解释的另一种具体实现。由此产生的构造涵盖交互几何、 ludics 和交互图等模型，最近被统一称为线性可实现性模型，以强调其与直觉主义和经典可实现性的直观联系。

本研究首次确立了线性可实现性模型与 Kleene 和 Krivine 的可实现性构造之间的形式联系。我们借鉴 Miquel 的框架：正如线性逻辑可被视为直觉主义逻辑与经典逻辑的一种分解，我们提出蕴含代数的线性分解，并证明线性可实现性模型提供了此类分解的具体实例。

1 引言

Kleene 于 1945 [26] 引入的可实现性，旨在分析构造性证明并从中获得补充见解。可实现性也可以理解为对证明的布劳威尔-海廷-柯尔莫哥洛夫（BHK）解释的具体化，它提供了一种框架，依据数学陈述和证明的构造性或计算内容来解释它们。随着时间推移，这一概念通过多种扩展不断发展，例如克赖塞尔的修正可实现性 [27], ，这些扩展都属于直觉主义逻辑的范畴。鉴于可实现性的构造性基础，这种限制是自然的。Kleene 的数可实现性 以递归函数为基础，而近期研究则开始将 λ演算视为底层计算模型，尤其是为了建立计算原理与逻辑原理之间的联系，例如屏障归纳和可数选择公理 [2]。

可实现性拓扑斯 [45] 在可实现性理论与拓扑斯理论的总体框架之间架起了一座桥梁，将计算现象封装在范畴结构之中。它们源自部分组合代数（PCA），后者可被视为提供了一种无类型计算的概念。随后，可以通过 tripos 到 topos 构造或通过组装来构造一个托扑斯。tripos 是一种编码逻辑信息的结构；在可实现性的情形下，它捕捉了部分组合代数（PCA）中固有的逻辑原则。由此得到的可实现性拓扑斯是集合范畴的一种泛化，具有一种反映其中所编码的可计算性的内部逻辑。这些拓扑斯是更广泛的拓扑斯类别中的重要实例，将具体的计算解释与拓扑斯理论的抽象框架联系起来，并展示逻辑、计算与范畴论如何在基础层面相互作用。

近年来，Krivine 借助经典可实现性提出了一项开创性进展 [28, 29, 32]。通过考察扩展了 call-cc 算子的 λ 演算——该算子概括了经典原理的计算本质 [22],——Krivine 发展出可延伸至经典逻辑的实现性构造。此外，这一方法实现了策梅洛-弗兰克尔集合论的公理（不包括选择公理），并导向集合论新模型的构造 [30]。

尽管传统实现性构造与 Krivine 的经典可实现性之间的联系早已被预见 [44], ，但正是 Miquel 的工作正式统一了这些框架。Miquel 以一种能够系统地为直觉主义逻辑和经典逻辑导出模型的方式，对实现性构造进行了公理化，从而沟通了这两个领域。该框架，即蕴含代数，也能够恰当地解释可实现性的范畴方面：每个蕴含代数都自然地产生一个 tripos [23]。

与这些发展的同时，Girard 关于线性逻辑的研究提出了另一种视角，常被视为 BHK解释 的另一种具体实现。Girard 的构造——涵盖交互几何 [13, 14, 16, 19], 逻辑游戏 [17], 和交互图 [35, 37–40, 42]等模型——最近由 Seiller [41]统一归入线性可实现性 模型这一术语之下。这一命名凸显了 Girard 与 Krivine 的技术之间显著的相似性，暗示线性可实现性模型与 Kleene 或 Krivine 的方法之间可能存在联系。然而，由于两者的构造存在关键但细微的不匹配，这些联系至今仍难以捉摸。

贡献。 本文首次确立了 Girard 的线性可实现性模型与 Kleene 和 Krivine 的实现性构造之间的形式联系。我们借助 Miquel 的框架：正如线性逻辑可视为直觉主义逻辑与经典逻辑的分解，我们提出对蕴含代数进行线性分解。我们证明，文献中的线性可实现性模型自然地适用于这一框架。随后，我们探讨其与 Miquel 的蕴含代数及托扑斯构造之间的关系。

通过确立线性可实现性模型能够产生蕴涵代数，本文为后续研究开辟了诸多方向。首先，探索这些模型与现有构造之间的关系至关重要。值得注意的是，我们预计线性可实现性模型将带来经典可实现性的新实例，从而有望丰富其在集合论中的应用。其次，我们认为，研究结果指向对所得 tripos 的一种分解，

这与线性逻辑对蕴涵的分解相一致。进而，这或许能为提出一种线性 *tripos*铺平道路。尽管该领域已有一些进展 [43]，这一概念仍未能得到明确界定。

2 背景

2.1 蕴含代数

蕴含代数是由 Miquel[33] 引入的一种代数结构，它推广了强迫法和可实现性（直觉主义和经典两种形式），并使我们能够将相应的模型论构造分解。

该结构具有这样的性质： λ-演算的运算可以提升到其中，使其元素既可视为真值，也可视为（广义）实现子。

定义 1。 蕴含结构 $(\mathscr{A}, 4, \to)$ 是一个完备格 [1] $(\mathscr{A}, 4)$，并配备了一个二元运算 $(a, b) \mapsto (a \to b)$，称为蕴涵，且满足以下条件：对所有 $a, a', b, b' \in \mathscr{A}$：

(1) if $a' \preccurlyeq a$ and $b \preccurlyeq b'$ then $(a \to b) \preccurlyeq (a' \to b')$
(2) $a \to \bigwedge_{b \in B} b = \bigwedge_{b \in B} (a \to b)$

一个初步的直觉是， $\mathscr{A}$ 表示一个语义类型系统，其中 4 是子类型关系，而 $\to$ 表示箭头类型的构造。我们还希望认为存在某种可实现性概念，使得 $\mathscr{A}$ 是由真值构成的集合；也就是说，存在一个实现子集合 P，它具有某些闭包性质，并且 $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{P}(P)$。基于这一直觉，我们可以为每个实现子 t 关联其主类型 $[t]$，即由 t 实现的最小真值。然后，我们可以将任意实现子用作真值，此时关系 $t \in a$ 变为 $[t] \preccurlyeq a$。

蕴涵结构的一个重要特征是，我们可以将应用和 λ抽象提升到真值层面，从而能够把真值当作实现子来使用。有了这一性质，我们可以将 $\mathscr{A}$ 中的元素视为广义实现子，其中每个元素都实现自身，且其主类型就是它本身。在这种第三种视角下，关系 $a \preccurlyeq b$ 可以理解为 a 是 b 的子类型、 a 实现 b，或者 a 比 b 更强（也就是说， a 实现了 b 所实现的每一种类型），具体取决于我们将 a 和 b 视为两个真值、一个实现子与一个真值，还是两个实现子。采用这种方法，每个真值都可实现，至少可以由其自身实现。因此，我们需要为蕴涵结构配备一个真值判定准则，Miquel 将其称为分离子。

定义 2. 设 $(A, \leq, \to)$ 是一个蕴涵结构。分离子 是一个子集 $\mathrm{S} \subseteq A$，满足：

(1) S 是向上封闭的：若 $a \in \mathrm{S}$ 且 $a \leq b$，则 $b \in \mathrm{S}$。(2) S 对肯定前件封闭：若 $a \in \mathrm{S}$ 且 $a \to b \in \mathrm{S}$，则 $b \in \mathrm{S}$。

从逻辑的角度看，分离子扮演着演绎闭合理论的角色；而最小的分离子，称为蕴涵结构的核 ，对应于重言式集合。对我们而言，一个非常重要的要点是，演绎规则由该核中所有闭合 λ-项的存在来表示，因此限制核的内容就相当于省略逻辑规则。我们将利用这一机制，使分离子能够避开结构规则，从而体现线性性。

就目前而言，这一框架与蕴含代数并不相容，因此我们将引入线性蕴涵代数，这是其一种放宽版本，允许省略控制规则。这种新结构涵盖了线性可实现性模型（只需满足一些较弱的假设，例如恒等元的存在）。我们将证明，线性蕴涵代数刻画了直觉主义乘法线性逻辑，并进而将其扩展到线性逻辑的更大子片段。

2.2 应用结构

为了将蕴含代数方法与线性可实现性联系起来，我们引入一种蕴含代数的替代定义，重点关注应用 而非蕴涵。这有助于展示它与文献中线性可实现性模型的联系，因为后者的定义侧重于应用。

定义3。 应用结构 $(\mathscr{A}, 4, \cdot)$ 是一个完备格 $(\mathscr{A}, 4)$，配备二元运算 $(a, b) \mapsto (a \cdot b)$，称为应用，并满足以下公理（对所有 $a, a', b, b' \in \mathscr{A}$）：

(1) if $a \preccurlyeq a'$ and $b \preccurlyeq b'$, then $a \cdot b \preccurlyeq a' \cdot b'$;
(2) $\bigvee_{a \in A} (a \cdot b) = (\bigvee_{a \in A} a) \cdot b$.

由此，我们定义

$$a \rightsquigarrow b := \bigvee \{c \in \mathscr{A} \mid c \cdot a \preccurlyeq b\}$$

命题4。 设 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \cdot)$ 是一个应用结构。对所有 $a, a', b, b' \in \mathscr{A}$：

(1) 若 $a' \preccurlyeq a$ 且 $b \preccurlyeq b'$，则 $a \rightsquigarrow b \preccurlyeq a' \rightsquigarrow b'$;
(2) $a \preccurlyeq (b \rightsquigarrow a \cdot b)$; (3) $(a \rightsquigarrow b) \cdot a \preccurlyeq b$;
(4) $a \rightsquigarrow b = \max\{c \in \mathscr{A} : c \cdot a \preccurlyeq b\}$; (5) $a \cdot b \preccurlyeq c$ 当且仅当 $a \preccurlyeq (b \rightsquigarrow c)$。

现在我们将证明，应用结构定义了蕴涵结构，反之亦然。

命题 5。 若 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \cdot)$ 是一个应用结构，且 $\rightsquigarrow$ 按 *3* 中的定义给出，则 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \rightsquigarrow)$ 是一个蕴涵结构，并且对所有 a、 $b \in \mathscr{A}$，其应用 ab 等于 $a \cdot b$。

命题 6。 若 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \to)$ 是一个蕴涵结构，则 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \cdot)$ 是一个应用结构，其中 $a \cdot b := ab$，且 $\rightsquigarrow$ 按 *3* 中的定义给出时等于 $\to$。

任意蕴涵结构 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}, 4, \to)$ 都会自然地导出一个语义类型系统，其类型为 $\mathscr{A}$ 的元素。

在这个框架中，类型上下文是一个有限的（无序）列表 $\Gamma = x_1 : a_1, \ldots\ldots, x_n : a_n$，其中 $x_1, \ldots\ldots, x_n$ 是两两不同的 λ-变量，并且 $a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathscr{A}$。将 $\mathscr{A}$ 的元素视为实现子而非类型，我们也可以把每个类型上下文 $\Gamma = x_1 \; a_1 \ldots x_n \; a_n$ 看作代换 $\Gamma = x_1 = a_1 \ldots x_n = a_n$：，，：。

给定类型上下文 $\Gamma = x_1 : a_1, \ldots, x_n : a_n$，我们将其定义域记为 $\mathrm{dom}(\Gamma) = x_1, \ldots, x_n$，两个类型上下文 Γ, Γ', Γ 和 Γ' 的拼接按预期定义，前提是 $\mathrm{dom}(\Gamma) \cap \mathrm{dom}(\Gamma') = \emptyset$。

给定两个类型上下文 Γ 和 Γ'，当对于每个声明 $(x : a) \in \Gamma$，都存在一个 $(x : b) \in \Gamma'$ 使得 $b \preccurlyeq a$ 时，我们记作 $\Gamma' \preccurlyeq \Gamma$。

[1] 在 [33] Miquel 考虑的是等价的完备交半格，并称并仅仅是“偶然”存在的。由于我们将在某些构造中使用并，因此这里将采用完备格这一说法

定义 7（语义类型系统）。给定一个类型上下文 Γ、一个参数属于 $\mathscr{A}$ 的 λ-项 t 以及一个元素 $a \in \mathscr{A}$，我们将（语义）类型判断 $\Gamma \vdash t : a$ a 定义为以下简写：

$$\Gamma \vdash t : a \quad :\Longleftrightarrow \quad \mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma) \text{ and } (t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \preccurlyeq a$$

（使用 Γ 作为右侧不等式中的代换）。

该语义类型系统为我们提供了一些语义类型规则，我们将用它们从证明树构造类型推导。

命题 8（语义类型规则（2.23））。对所有类型上下文 Γ、Γ'，带有参数 $\mathscr{A}$、a、a' b、b' $c \in \mathscr{A}$ 以及 $(a_i)_{i\in I} \in \mathscr{A}^I$ 的 λ-项 t、u，下列“语义类型规则”成立：

- $x : a \vdash x : a$（公理）
- $\vdash a : a$（参数）
- 若 $\Gamma \vdash t : a$ 且 $a \preccurlyeq a'$ 则 $\Gamma \vdash t : a'$（包含）
- 若 $\Gamma \vdash t : a$ 且 $\Gamma' \preccurlyeq \Gamma$ 则 $\Gamma' \vdash t : a$（上下文包含）
- 若 $\Gamma, x : a \vdash t : b$ 则 $\Gamma \vdash \lambda x.t : a \multimap b$（$\multimap R$）
- 若 $\Gamma \vdash t : a$ 且 $\Delta, x : a \vdash u : b$ 则 $\Gamma, \Delta \vdash (\lambda x.u)\, t : b$（切规则）
- 若 $\Gamma \vdash t : a$ 且 $\Delta, x : b \vdash u : c$ 则 $\Gamma, \Delta, y : a \multimap b \vdash (\lambda x.u)(yt) : c$（$\multimap L$）
- 若 $\Gamma \vdash t : a_i$ 对所有 $i \in I$ 则 $\Gamma \vdash t : \bigwedge_{i\in I} a_i$（泛化）

注记 9。我们不使用与 [33] 完全相同的规则，但这些系统是等价的。

2.3 线性可实现性模型

在线性逻辑 [11], 引入后不久，Jean-Yves Girard 提出了交互几何纲领 [15]。受以动态方式表示证明这一理念的启发，自该纲领创立以来作为其一部分引入的许多构造，也包括基于底层动态情境对类型的重构。Seiller [41] 最近将这些构造称为线性可实现性，并提供了一种更为抽象的表述，类似于关于标准（直觉主义）可实现性的基于 PCA 的观点。

更准确地说，这些模型由一个计算模型以及一种可用于定义类型的测量共同定义，这种模型称为线性可实现性情境。该定义涉及对一个交换群的选择（Θ，$+$，0）。就我们的目的而言，可以将此群视为实数及其通常的加法。

定义 10。一个线性可实现性情境是一个三元组 $(P, \mathrm{Ex}, [\![\cdot,\cdot]\!])$，其中：

- P 是一个（由程序组成的）集合；
- $\mathrm{Ex} : P \times P \to P$ 是一个结合运算，表示程序的组合；
- $[\![\cdot,\cdot]\!] : P \times P \to \Theta$ 满足相对于 Ex 的所谓三叶结性质，或 2-余循环性质：

$$\forall p, q, r \in P,\ [\![\mathrm{Ex}(p,q), r]\!] + [\![p,q]\!] = [\![p, \mathrm{Ex}(q,r)]\!] + [\![q,r]\!]. \quad (1)$$

现在我们将概述如何从线性可实现性情境构造线性逻辑模型。关于该构造及这些实例的更多细节，可见 Seiller 的特许任职资格论文[41]。

该构造将类型定义为双正交闭集，其中正交性的概念由测量诱导。这推广了形式概念 [7, 25], , 并遵循一种已用于定义线性逻辑的指称模型的技术，例如相干空间 [3, 18, 21] 或有限性空间 [5]。在后一类构造中，这些构造被抽象为范畴双重粘合构造[24], , 其中正交性满足雅可比恒等式 $a \otimes b \perp c \Leftrightarrow a \perp b \otimes c$，从而可以将该构造 $\otimes$ 提升为类型上的幺半积。然而，在当前情形下，方程 1 揭示了执行的结合律与测量之间的不匹配。我们现在详细介绍的构造，可以将执行提升到类型上，从而尽管存在这种不匹配，仍能确保类型上运算的结合律。具体做法是为程序附加一个用于扭转执行的元素 Θ，并在集合 $\Theta \times P$ 上构造类型，而不是直接在 P 上构造。

定义 11。投影是一个二元组 $(\alpha,\ a) \in \Theta \times P$，记作 $\alpha \cdot a$。执行和测量在投影上的定义扩展如下：

$$\mathrm{Ex}(\alpha \cdot a, \beta \cdot b) = (\alpha + \beta + [\![a,b]\!]) \cdot \mathrm{Ex}(a,b)$$
$$[\![\alpha \cdot a, \beta \cdot b]\!] = \alpha + \beta + [\![a,b]\!]$$

注意，在投影上，三叶结性质变成了 Jacobi 恒等式：

$$[\![\mathrm{Ex}(\alpha \cdot a, \beta \cdot b), \gamma \cdot c]\!] = [\![\alpha \cdot a, \mathrm{Ex}(\beta \cdot b, \gamma \cdot c)]\!].$$

给定任意子集 $\mathcal{,} \subset \Theta$，可以根据测量定义一个正交关系：

$$\alpha \cdot a \perp \beta \cdot b \Leftrightarrow [\![\alpha \cdot a, \beta \cdot b]\!] \in \perp\!\!\!\perp .$$

然后可以将类型 定义为双正交闭集 $A = A^{\perp\perp}$，其中对于任意集合 X，

$$X^{\perp} = \{\alpha \cdot a \mid \forall \xi \cdot x \in X, \xi \cdot x \perp \alpha \cdot a\}.$$

等价地，集合 A 是类型，当且仅当存在另一个集合 T（由测试组成），使得 $A = T^{\perp}$。

接下来可以证明，以下关于类型的构造刻画了（乘法）线性逻辑的联结词：

$$\begin{aligned} A \multimap B &= \{\xi \cdot x \mid \forall \alpha \cdot a \in A, \mathrm{Ex}(\xi \cdot x, \alpha \cdot a) \in B\} \\ A \otimes B &= \{\mathrm{Ex}(\alpha \cdot a, \beta \cdot b) \mid \alpha \cdot a \in A, \beta \cdot b \in B\}^{\perp\perp} \end{aligned}$$

一个有趣的事实是，$A \multimap B$的定义并不需要双正交闭包；尽管如此，它仍然是一个类型，因为可以证明 $A \multimap B = (A \otimes B^{\perp})^{\perp}$。一般而言，模型还是局部化的，也就是说，每个对象都有一个指定的位置，可以将其理解为布尔代数中的一个关联点。逻辑游戏 [17],交互几何[12–16, 19], 交互图 [35, 37–40, 42], 或超越语法 [6, 20] 等构造，都可以视为上述 [41]的实例。在大多数情况下，通过对底层计算模型（程序集合）考虑额外的运算，并将这些运算提升为对应于逻辑联结词的类型上的运算，模型便可扩展至线性逻辑的更大子片段。

3 乘法线性逻辑

从现在起，我们将在蕴涵结构中使用 $\multimap$ 而不是 $\to$ 表示蕴涵。

3.1 组合子

我们来考虑以下组合子：

$$\mathbf{I} = \lambda x.x \qquad \mathbf{K} = \lambda xy.x$$
$$\mathbf{B} = \lambda xyz.x(yz) \qquad \mathbf{W} = \lambda xy.xyy$$
$$\mathbf{C} = \lambda xyz.xzy \qquad \mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$$

命题 12（2.24）。我们有以下等式：

$$\mathbf{I}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a\in\mathscr{A}} (a \multimap a)$$
$$\mathbf{B}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b,c\in\mathscr{A}} ((b \multimap c) \multimap (a \multimap b) \multimap a \multimap c)$$
$$\mathbf{C}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b,c\in\mathscr{A}} ((a \multimap b \multimap c) \multimap b \multimap a \multimap c)$$
$$\mathbf{K}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} (a \multimap b \multimap a)$$
$$\mathbf{W}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} ((a \multimap a \multimap b) \multimap a \multimap b)$$
$$\mathbf{S}^{\mathscr{A}} = \bigwedge_{a,b,c\in\mathscr{A}} ((a \multimap b \multimap c) \multimap (a \multimap b) \multimap a \multimap c)$$

组合子 **K**、**W** 和 **S** 表示删除或复制前提的运算，因此在线性逻辑中不应允许不受控制地使用它们。这使得我们无法将它们纳入分离子的定义。因此，我们将自身限制在一类足够大的 λ-项上，使其能够表示（乘法）线性逻辑的演绎规则，而不包含结构规则。

定义 13。我们将任意满足以下条件的 λ-项称为“线性 λ-项”：每个抽象恰好绑定一个变量，并且每个自由变量至多出现一次。

我们将通过证明所使用的类型规则只产生这类 λ-项，来说明这部分足够大；并通过给出一个线性模型的例子，说明它又足够小。

本小节旨在说明，线性 λ-项由 **I**、**B** 和 **C** 生成。

注 14. 线性 λ-项是强可规范化的。

定义 15. 线性组合子项是一个线性 λ-项，它或者是 **B**、**C**、**I**、自由变量，或者是线性组合子项的应用。

我们的目标是证明，每个线性 λ-项都可以通过 β-扩展为一个线性组合子项。为了证明这一定理，我们还需要一些组合子：

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I} \qquad \mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{I}_n$$
$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \qquad \mathbf{B}_{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{B}_n$$
$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \qquad \mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{C}_n$$

经过一些计算可以证明：

$$\mathbf{I}_n \twoheadrightarrow_\beta \lambda\overline{x}.\overline{x} \quad \mathbf{B}_n \twoheadrightarrow_\beta \lambda\overline{x}yz.\overline{x}(yz) \quad \mathbf{C}_n \twoheadrightarrow_\beta \lambda\overline{x}yz.\overline{x}zy$$

其中 $\overline{x} = x_1 \dots x_n$。

我们现在将考虑表示置换的 λ-项，以确立主定理。

定义16. 设 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 为一个置换，我们将该置换的 λ-项定义为

$$\lambda_\sigma := \lambda xy_1 \dots y_n.xy_{\sigma^{-1}(1)} \cdots y_{\sigma^{-1}(n)}$$

考虑两个置换 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ 和 $\tau \in \mathfrak{S}_m$，它们在共同支撑集上相同，也就是说，要么 σ 在 $\{1,\dots,m\}$ 上的限制等于 τ，要么 τ 在 $\{1,\dots,n\}$ 上的限制等于 σ。那么，σ 和 τ 可以用同一个 λ-项表示。

命题17。 形式化地说，若 $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ 和 $\tau \in \mathfrak{S}_n$ 满足 $m < n$, $\tau(i) = \sigma(i)$，其中 $i \le n$，且 $\tau(i) = i$，其中 $i > n$，那么对于任意 λ-项 $t, t_1, \dots, t_n$，

$$\lambda_\sigma t t_1 \dots t_n =_\beta \lambda_\tau t t_1 \dots t_n$$

因此，我们只需考虑满足以下条件的 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$：$n$ 是 σ 的支撑集中的最大元素，因为即使在更大的集合上，λ_σ 也会表现正确。特别地，我们将置换写成循环的乘积，而不必担心定义域。

命题18。 对于每个 $\sigma \in \mathfrak{S}$，都存在一个闭合的线性组合子项 t，使得 $t \twoheadrightarrow_\beta \lambda_\sigma$。

证明。对于所有 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$，我们可以计算它们的复合：

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\lambda_\sigma\lambda_\tau &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x.\lambda_\sigma(\lambda_\tau x)\\ &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xy_1 \dots y_n.\lambda_\tau xy_{\sigma^{-1}(1)} \cdots y_{\sigma^{-1}(n)}\\ &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xy_1 \dots y_n.xy_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(1)} \cdots y_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(n)}\\ &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xy_1 \dots y_n.xy_{(\tau\sigma)^{-1}(1)} \cdots y_{(\tau\sigma)^{-1}(n)} = \lambda_{\tau\sigma}.\end{aligned}$$

该结果随后由 $\mathbf{C}i = \lambda_{(i,i+1)}$ 这一事实得出，因为集合 $\{(i, i+1)\}_{i<n}$ 生成 $\mathfrak{S}_n$。□

我们将以下组合子添加到我们的列表中，对于 $l \le k < n$：

$$\mathbf{C}_{l,k} = \mathbf{B}\mathbf{C}_l(\mathbf{B}\mathbf{C}_{l+1} \dots (\mathbf{B}\mathbf{C}_k)\dots)$$
$$\mathbf{B}_{k,n} = \underbrace{\mathbf{B}\mathbf{B}_k(\mathbf{B}\mathbf{B}_k \dots (\mathbf{B}\mathbf{B}_k)\dots)}_{n-k}$$
$$\mathbf{A}_{k,n} = \mathbf{C}_{2,k+1}\mathbf{B}_{k+1,n+1}$$

并验证：

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{l,k} &\twoheadrightarrow_\beta \lambda_{(k+1,k,\dots,l)}\\ \mathbf{B}_{k,n} &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xy_1 \dots y_n.xy_1 \dots y_{k-1}(y_k \dots y_n)\\ \mathbf{A}_{k,n} &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xyz_1 \dots z_k.\mathbf{B}_{k+1,n+1}xz_1 \dots z_k y\\ &\twoheadrightarrow_\beta \lambda xyz_1 \dots z_n.xz_1 \dots z_k(yz_{k+1} \dots z_n)\end{aligned}$$

引理19。 设 t 为一个线性组合子项。对于所有 $x_1, \dots\dots, x_n \in \mathrm{FV}(t)$，存在一个线性组合子项 t_0 使得 $t_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \dots x_n.t$。

证明。该证明通过对 t 的结构使用归纳法进行。若 t 是自由变量，我们取 **I**。若 $t = uv$，则对于所有 $x_1, \dots\dots, x_n \in \mathrm{FV}(t)$，$i \le n$，要么 $x_i \in \mathrm{FV}(u)$，要么 $x_i \in \mathrm{FV}(v)$。根据命题182，我们可以假设存在一个 $k \le n$ 使得 $x_1, \dots\dots, x_k \in \mathrm{FV}(u)$ 且 $x_{k+1}, \dots\dots, x_n \in \mathrm{FV}(v)$。根据归纳法，存在两个线性组合子项 $u_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \dots x_k.u$ 和 $v_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_{k+1} \dots x_n.v$。于是我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{k,n}u_0v_0 &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \dots x_n.u_0x_1 \dots x_k(v_0x_{k+1} \dots x_n)\\ &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \dots x_n.uv\\ &= \lambda x_1 \dots x_n.t\end{aligned}$$

[2]取一个线性组合子项 $T \twoheadrightarrow_\beta \lambda_\sigma$，然后用 $(T\mathbf{A}_{k,n})$ 代替 $\mathbf{A}_{k,n}$。

若 $t = \lambda y.u$，则对所有 $x_1,\dots,x_n \in \mathrm{FV}(t)$，$x_1,\dots,x_n, y \in \mathrm{FV}(u)$，由归纳法可知存在一个线性组合子项

$$u_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \dots x_n y.u = \lambda x_1 \dots x_n.t$$

定理 20。对于每个线性 λ-项 t，都存在一个线性组合子项 t_0 使得 $t_0 \twoheadrightarrow_\beta t$。□

证明。证明对 t 的结构进行归纳。如果 t 是一个自由变量，则结论成立。如果 $t = uv$，那么根据归纳法，存在两个线性组合子项 u_0，v_0，使得 $u_0 \twoheadrightarrow_\beta u$ 和 $v_0 \twoheadrightarrow_\beta v$，并且 $t_0 = u_0 v_0$ 是一个线性组合子项，使得 $t_0 \twoheadrightarrow_\beta t$。如果 $t = \lambda x.u$，根据归纳法，存在一个线性组合子项 $u_0 \twoheadrightarrow_\beta u$，而前述引理保证还存在另一个线性组合子项 $t_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.u_0 \twoheadrightarrow_\beta t$。□

3.2 分离

现在假设给定一个蕴含代数。我们将定义线性分离子的概念。

定义 21。线性分离子 是满足以下条件的子集 $S \subseteq \mathscr{A}$：

(1) 如果 $a \in S$ 且 $a \preccurlyeq b$，则 $b \in S$；(2) $\mathbf{I}^{\mathscr{A}}, \mathbf{B}^{\mathscr{A}}, \mathbf{C}^{\mathscr{A}} \in S$；(3) 如果 $a \in S$ 且 $(a \multimap b) \in S$，则 $b \in S$。

我们称 S 是一致的，如果 $\bot \notin S$。

注 22。条件 1 使我们可以将条件 3 改写为：

3′. 如果 $a \in S$ 且 $b \in S$，则 $ab \in S$。

请注意，按照 Miquel 的意义，任何分离子 [33] 特别地都是线性分离子。然而，反之不成立，这一点应当是显然的。

命题 23（线性 λ闭包）。若 $S \subseteq \mathscr{A}$ 是线性分离子，则对于所有具有自由变量 x 的线性 λ-项 t 以及所有参数 $\overline{a} \in S$：

$$(t\{\overline{x} := \overline{a}\})^{\mathscr{A}} \in S$$

特别地，对于所有闭线性 λ-项 t，$t^{\mathscr{A}} \in S$。

（待办：将以下内容保留为单独的定义，还是并入线性分离子的定义中？）

定义 24。我们称由 X 生成的线性分离子为 $\mathrm{SepL}(X)$，即包含 X 的最小线性分离子；并将 $\mathscr{A}$ 的线性核定义为 $\mathrm{S^0L}(\mathscr{A}) := \mathrm{SepL}(\emptyset)$。

注 25。由定理 20 可直接得出

$$\mathrm{Sep_L}(X) = \uparrow @(X \cup \{\mathbf{I}^{\mathscr{A}}, \mathbf{B}^{\mathscr{A}}, \mathbf{C}^{\mathscr{A}}\}),$$

其中 @ 表示应用闭包，而 $\uparrow$ 表示关于 β-展开的闭包（我们有时称之为向上闭包）。

引理 26. 对于每个线性分离子 $S \subseteq \mathscr{A}$：

$$(a \multimap b) \in S \implies b \in \mathrm{Sep_L}(S \cup \{a\}).$$

请注意，这里只有一个蕴涵，因为 $b \in \mathrm{SepL}(S \cup \{a\})$ 表示可以从 $S \cup \{a\}$ 中的公式推导出 a。它并未对每个公式被使用的次数作出任何假设。这体现了线性逻辑中上下文与理论之间的一个根本区别，而在直觉逻辑或经典逻辑的语境中并不存在这种区别。

$$\frac{}{A \vdash A}\ \mathrm{ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash C}{\Gamma, \Delta \vdash C}\ \mathrm{cut}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B}\ \otimes\text{-R} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C}\ \otimes\text{-L}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\ \multimap\text{-R} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \multimap B \vdash C}\ \multimap\text{-L}$$

图 1：IMLL 的规则

3.3 解释 MLL

现在我们来关注乘法线性逻辑的解释。我们将讨论范围限定在直觉线性逻辑，因为经典变体需要额外的结构，详见下文的注释。

定义 27. 设 $(\mathscr{A}, 4, \multimap)$ 是一个线性蕴涵结构。我们定义：

$$a \otimes b := \bigwedge_{c \in \mathscr{A}} ((a \multimap b \multimap c) \multimap c).$$

由此可以证明，这个张量积验证了合取的乘法规则。

命题 28. 以下语义类型推理在任何线性蕴涵结构中均有效：

$$\frac{\Gamma \vdash t : a \qquad \Delta \vdash u : b}{\Gamma, \Delta \vdash \lambda z.ztu : a \otimes b}\ \otimes\text{-}R \qquad \frac{\Gamma, x : a, y : b \vdash t : c}{\Gamma, z : a \otimes b \vdash z(\lambda xy.t) : c}\ \otimes\text{-}L$$

因此，我们可以在蕴涵结构 $(\mathscr{A}, 4, \multimap)$ 中解释不含单位元的直觉乘法线性逻辑（IMLL）。为此，我们将采用以下语法。

公式由变量集 V 按以下语法定义：

$$A ::= X \mid A \multimap A \mid A \otimes A, \quad (X \in \mathcal{V}).$$

IMLL 的演绎规则见图 图 1。

现在，我们定义 IMLL 公式的解释，并给出一个可靠性结果。

定义29。解释是一个函数，它为每个原子公式 X 关联一个值 $X^{\mathscr{A}} \in \mathscr{A}$，然后递归地通过 $(A \multimap B)^{\mathscr{A}} = A^{\mathscr{A}} \multimap B^{\mathscr{A}}$ 和 $(A \otimes B)^{\mathscr{A}} = A^{\mathscr{A}} \otimes B^{\mathscr{A}}$ 定义于每个公式上。

命题30（可靠性）。如果公式 A 是 *IMLL* 中的重言式，那么 $A^{\mathscr{A}} \in \mathrm{S^0L}(\mathscr{A})$。

注31。虽然这里我们聚焦于 IMLL，但对上述定义作自然扩展，便可为 MLL 的可靠解释提供一个框架。更形式化地说，我们可以考虑以下补充定义：

$$a^{\bot} := a \multimap \bot$$

$$a \parr b := \bigwedge_{c \in \mathscr{A}} ((a \multimap c) \multimap (b \multimap c) \multimap c)$$

$$\mathbf{1} := \bot \multimap \bot$$

然后，通过在分离子内部添加一个类型为 $\bigwedge_{a \in \mathscr{A}} a \multimap a^{\bot\bot}$ 的元素（正如在经典分隔子中对 cc 所做的那样），我们就可以完整地解释 MLL。

3.4 按线性分离子取商

在蕴含代数的框架中，一个重要的构造是考虑商。在 Miquel 的情形下，这些商定义了海廷代数，从而为从任意蕴含代数构造托扑斯提供了一般性构造。更准确地说，蕴含代数定义了 tripoi，而根据从 tripos 到拓扑斯的构造，它们产生了拓扑斯。

在这里，不能指望按蕴涵关系取商后得到一个海廷代数。虽然人们可能会期望得到量子格结构，但一般情况下并非如此，因为商结构并不具备所有所需的极限。所得结构类似于剩余格。

定义 32. 设 $(\mathscr{A}, 4, \multimap)$ 是一个蕴涵结构，且 S 是一个线性分离子。蕴涵关系 $\vdash_S$ 定义如下：

$$a \vdash_S b \iff a \multimap b \in S.$$

这是一个预序，我们将其诱导的等价关系记为 $\dashv\vdash_S$。

现在考虑 $\mathscr{A}/S := \mathscr{A}/\dashv\vdash_S$，即 $\mathscr{A}$ 关于蕴涵等价关系的商。

命题33。 以下运算在$\mathscr{A}/S$ 上定义良好：

$$[a] \multimap [b] := [a \multimap b]$$
$$[a] \otimes [b] := [a \otimes b]$$

命题34。 若 S 是线性分离子，则这些运算具有以下性质：

(1) 交换律：$[a] \otimes [b] = [b] \otimes [a]$；*(2)* 结合律：$([a] \otimes [b]) \otimes [c] = [a] \otimes ([b] \otimes [c])$；*(3)* 恒等元是中性的：$[a] \otimes [I^{\mathscr{A}}] = [a]$；*(4)* 柯里化：$[a] \otimes [b] \multimap [c] = [a] \multimap [b] \multimap [c]$；*(5)* 肯定前件：$([a] \multimap [b]) \otimes [a] \vdash_S [b]$；*(6)* 配对：$[a] \vdash_S [b] \multimap [a] \otimes [b]$；*(7)* 传递性：$([a] \multimap [b]) \otimes ([b] \multimap [c]) \vdash_S [a] \multimap [c]$；*(8)* 张量规则：$([a] \multimap [b]) \otimes ([c] \multimap [d]) \vdash_S [a] \otimes [c] \multimap [b] \otimes [d]$。

3.5 从线性可实现性情境构造线性蕴涵代数

最后，我们证明，由线性可实现性情境定义的模型会产生线性蕴涵代数。

定义35。 我们将任何配备线性分离子 $S \subseteq \mathscr{A}$ 的线性蕴涵结构称为线性蕴涵代数。若线性蕴涵代数 $(\mathscr{A},\ 4,\ \multimap,\ S)$ 满足 S 一致，则称其一致。

我们首先证明一个一般性结果，表明在若干假设下，线性可实现性情境会产生线性蕴涵代数。随后，我们将解释为何这些附加假设是合理的：文献中的所有线性可实现性模型都满足这些假设[3]。

[3]除最近的一种构造外，[8]，其余构造均未假设交换律（并给出了一个非交换的示例以作说明）。然而，该模型并不能为线性逻辑提供可靠模型，而是为一种带有非交换乘法合取的子结构逻辑提供模型。

我们将逐步进行，这样便能准确指出各项假设具体用在何处，也就是证明非空类型的集合是一个相干分离子。一个简单的初步结果是，由线性可实现性情境定义的类型集合构成一个格。

命题36。 给定一个线性可实现性情境 $(P, \mathrm{Ex}\ [\![\cdot,\cdot]\!])$，结构 $(\mathbf{\Pi}, \subseteq)$ 是一个完备格，满足：

$$\bigwedge_{i\in I} \mathbf{A}_i = \bigcap_{i\in I} \mathbf{A}_i$$
$$\bigvee_{i\in I} \mathbf{A}_i = \left(\bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i\right)^{\perp\perp}$$

（待办：为什么有这个⊂？）

这个格为定义线性蕴涵代数提供了基础结构。现在我们可以验证，在类型上定义的线性蕴涵联结词使类型格成为一种应用结构。同样，这并不需要额外的假设。

命题 37. 给定一个线性可实现性情境 $(P, \mathrm{Ex}\ [\![\cdot,\cdot]\!])$，三元组 $(\mathbf{\Pi}, \subseteq, \multimap)$ 构成一个应用结构，其中 Ex 是应用。

命题 37 的证明。我们只需检查所有必要的公理是否都成立。对于公理 1，设 $\mathbf{A}, \mathbf{A}', \mathbf{B}, \mathbf{B}' \in \mathbf{\Pi}$ 满足 $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}$ 且 $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}'$。我们有：

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B} &\implies \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathrm{Ex}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \in \mathbf{B} \\ &\implies \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}', \mathrm{Ex}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \in \mathbf{B}' \\ &\implies \mathfrak{p} \in \mathbf{A}' \multimap \mathbf{B}'\end{aligned}$$

对于公理 2，设 $\mathbf{B}_i \in \mathbf{\Pi}$ 对所有 $i \in I$ 都成立，$\mathbf{A} \in \mathbf{\Pi}$。我们有：

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I}(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}_i) &= \bigcap_{i\in I}\{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} : \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathrm{Ex}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \in \mathbf{B}_i\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} : \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathrm{Ex}(\mathfrak{p}, \mathfrak{a}) \in \bigcap_{i\in I} \mathbf{B}_i\} \\ &= \mathbf{A} \multimap (\bigcap_{i\in I} \mathbf{B}_i)\end{aligned}$$

对于应用，设 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{\Pi}$：

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \bigcap\{\mathbf{C} \in \mathbf{\Pi} : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}\} \\ &= \bigcap\{\mathbf{C} \in \mathbf{\Pi} : \mathbf{A} \subseteq \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} : \forall \mathfrak{b} \in \mathbf{B}, \mathrm{Ex}(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) \in \mathbf{C}\}\} \\ &= \bigcap\{\mathbf{C} \in \mathbf{\Pi} : \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \forall \mathfrak{b} \in \mathbf{B}, \mathrm{Ex}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \mathbf{C}\} \\ &= \{\mathrm{Ex}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) : \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \forall \mathfrak{b} \in \mathbf{B}\} \\ &= \mathbf{A} :: \mathbf{B}\end{aligned}$$

□

现在我们需要证明存在一个相干的线性分离子。这就需要额外的假设，并不令人意外：线性可实现性情境这一抽象概念虽然确保可以定义类型及其间的运算，却不要求存在特定的项，例如恒等项。这里添加的额外假设只是为了确保这些基本项存在。因此，所有已知的线性可实现性模型都满足这些额外要求，也就不足为奇了。

命题 38. 设给定一个线性可实现性情境 $(P, \mathrm{Ex}\ [\![\cdot,\cdot]\!])$。若测量 是对称的，且存在 $id, \tau \in$

P 使得对所有 $p, q \in P$：

$$\mathrm{Ex}(id, p) = p \qquad [\![id, p]\!]_m = 0$$
$$\mathrm{Ex}(\tau, \mathrm{Ex}(p, q)) = \mathrm{Ex}(q, p) \qquad [\![\tau, p]\!]_m = 0$$

那么 $\Pi \setminus \emptyset$ 是一个相干分离子。

证明。我们先验证相干性，这显而易见：$\emptyset \notin \Pi \setminus \emptyset$ $\perp = \Pi \setminus \emptyset$，因此若 $\setminus$ 是一个线性分离子，它就是相干的。现在，我们来证明它确实是一个线性分离子。

它向上封闭这一点很明显。对于应用闭包，根据定义，若 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Pi$ 均非空，则 $\mathbf{A} :: \mathbf{B}$ 非空。由于 Ex 是结合的，为了清晰易读，在本证明结束前我们将使用中缀记法 $\cdot$ 代替 Ex。

现在我们来验证它包含 $\mathbf{I}^{\Pi}$。我们写作 $\mathfrak{id} = (0, id)$，其中 0 是 Θ的幺元。对于所有 $\mathfrak{p} = (a, p) \in \mathfrak{P}$，我们有：

$$\mathfrak{id} \cdot \mathfrak{p} = (0 + a + [\![id, p]\!]_m, id \cdot p) = (a, p) = \mathfrak{p}$$

因此：

$$\begin{aligned} \forall \mathfrak{p} \in \mathfrak{P}, \mathfrak{id} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p} &\implies \forall \mathbf{A} \in \Pi, \mathfrak{id} \in \{\mathfrak{p} \in \mathfrak{P} : \forall \mathfrak{a} \in \mathbf{A}, \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{a} \in \mathbf{A}\} \\ &\implies \forall \mathbf{A} \in \Pi, \mathfrak{id} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{A} \\ &\implies \mathfrak{id} \in \bigcap_{\mathbf{A} \in \Pi} (\mathbf{A} \multimap \mathbf{A}) = \mathbf{I}^{\Pi}. \end{aligned}$$

现在我们来验证它包含 $\mathbf{B}^{\Pi}$。设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C} \in \Pi$，假设 $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$，$\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$，且 $\mathbf{A}$ 非空。那么对于所有 $\mathfrak{f} \in \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$、$\mathfrak{g} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$、$\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$，有：

$$((\mathfrak{id} \cdot \mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{f} \cdot (\mathfrak{g} \cdot \mathfrak{a}) \in \mathbf{C}.$$

若 $\mathbf{A}$ 为空，则 $\mathbf{A} \multimap \mathbf{C} = \top (= \Pi)$，因此

$$(\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C} = \top.$$

若 $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}$ 为空，则 $(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C} = \top$ 所以

$$(\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C} = \top.$$

若 $\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ 为空，

$$(\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C} = \top.$$

在上述四种情况下，我们都可以得出

$$\mathfrak{id} \in (\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C},$$

这就证明了

$$\mathfrak{id} \in \bigcap_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \Pi} ((\mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}) = \mathbf{B}^{\Pi}.$$

最后，我们检查它包含 $\mathbf{C}^{\Pi}$。我们记 $\mathfrak{t} = (0, \tau)$。对于所有 $\mathfrak{p} = (a, p)$ $\mathfrak{q} = (b, q) \in \mathfrak{P}$，我们有：

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} \cdot (\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q}) &= (0 + [\![\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]\!]_m + [\![\tau, p \cdot q]\!]_m, \tau \cdot (p \cdot q)) \\ &= ([\![\mathfrak{p}, \mathfrak{q}]\!]_m, q \cdot p) = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{p}. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C} \in \Pi$。我们假设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 以及 $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ 均非空。那么，对于所有 $\mathfrak{f} \in \mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$，$\mathfrak{a} \in \mathbf{A}$，$\mathfrak{b} \in \mathbf{b}$，都有：

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} &= \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} \\ &= \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

so

$$\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t} \in (\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}.$$

如果 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 或 $\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}$ 为空，我们采用与上文类似的论证，便可得出结论：

$$\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t} \in \bigcap_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C} \in \Pi} ((\mathbf{A} \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{C}) \multimap \mathbf{B} \multimap \mathbf{A} \multimap \mathbf{C}) = \mathbf{C}^{\Pi}. \qquad \square$$

现在，我们已经具备了证明本节主定理所需的全部要素。

定理 39. 设 $(P, \mathrm{Ex}\ [\![\cdot, \cdot]\!])$ 是一个线性可实现性情境，其中测量 Ex 是对称的，并且存在元素 $id, \tau \in P$，使得对于所有 $p, q \in P$：

$$\mathrm{Ex}(id, p) = p, \qquad [\![id, p]\!]_m = 0,$$
$$\mathrm{Ex}(\mathrm{Ex}(\tau, p), q) = \mathrm{Ex}(q, p), \qquad [\![\tau, p]\!]_m = 0.$$

那么 $(\Pi, \subseteq, \multimap, \Pi \setminus \emptyset)$ 是一个一致的线性蕴涵代数，其中 Π 是所有类型构成的集合。

如前所述，另外三个假设似乎有所限制，但在上述文献提及的所有模型中，执行和测量都是对称的。在这种情况下，条件归结为存在一个恒等元 id，使得对于所有 p，$[\![id, p]\!]_m = 0$。不过请注意，这是因为文献中的模型是局部化的（即将对象赋予布尔代数中的一个元素），但也可以构造非局部化模型 [41],，其中测量是对称的，而执行则不一定对称。

注 40. 近期的描述 [8], 表明，线性可实现性的构造也可在测量不对称且执行非交换的情况下进行。不过，这需要进行调整，并且会建模一种不同的次结构逻辑。

正如 Seiller [41], 所解释的，由交互几何 [12–14, 16, 19], 逻辑游戏 [17], 交互图[35, 37–40, 42], 和超越语法 [6, 9, 10, 20] 定义的线性逻辑模型，都可以理解为由线性可实现性情境诱导的模型。因此，这些模型中类型的集合（有时也称为 *co nducts*、*behaviors* 等）定义了一个线性蕴涵代数。

然而，这些模型中的大多数都涵盖了线性逻辑的更大子片段。现在我们将考虑线性蕴涵代数的扩展，以涵盖更大的片段。

4 指数

本节将解释如何对上述框架进行自然扩展，以解释指数联结词。这种方法沿用了在线性可实现性模型中构造指数联结词的方式。

虽然这里不作详细说明，但不难看出，加性联结词可以通过格结构来定义。请注意，这种对加性联结词的定义与上述某些线性可实现性模型中加性联结词的定义相呼应，尤其是 Girard 在超有限因子 [19] 和交互图 [37–40, 42] 中的交互几何。

因此，当前章节的内容可以扩展到加性片段。不过，我们将在下一节详细介绍另一种结构更严谨的加性联结词处理方法。它与其他可实现性模型（例如较早的交互几何模型 [16]）有关，并可用于通过自由指数的公式 [31] 定义指数联结词。

4.1 带指数的蕴涵结构

定义 41. 我们将带有单调一元运算 $!:\ \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 的蕴涵结构 $(\mathscr{A}, 4, \multimap)$ 称为指数蕴涵结构。

我们通过添加 ! 和一种新的 !抽象来扩展 λ-演算，因此有：

$$t, u ::= x \mid tu \mid \lambda x.t \mid !t \mid \lambda !x.t$$

我们称它们为 $\lambda!$-项，并为其定义 !-归约：

$$(\lambda !x.t)!u \twoheadrightarrow_! t[x : u]$$

我们通过添加以下归纳步骤，将 λ-项的解释扩展到这些新项。

$$\begin{aligned}(!t)^{\mathscr{A}} &:= !(t^{\mathscr{A}})\\ (\lambda !x.t)^{\mathscr{A}} &:= \bigwedge_{a\in\mathscr{A}} (!a \multimap (t[x:a])^{\mathscr{A}})\end{aligned}$$

命题42（替换的单调性）。对于每个具有自由变量 x_1、……、x_n 的 $\lambda!$- 项 t，以及任意参数 $a_1 \preccurlyeq a\prime_1$、……、 $a_n \preccurlyeq a\prime_n$，都有：

$$(t\{x_1 := a_1, \dots, x_n := a_n\})^{\mathscr{A}} \preccurlyeq (t\{x_1 := a'_1, \dots, x_n := a'_n\})^{\mathscr{A}}.$$

命题43。若 $t \twoheadrightarrow_{\text{指数模态}} u$，则 $t^{\mathscr{A}} \preccurlyeq u^{\mathscr{A}}$。

对于任意类型 $a \in \mathscr{A}$，我们允许在类型上下文中添加形如 $!x : !a$ 的语句。作为代换，它与 $x : a$ 同义，但这样可以让我们追踪 λ 中指数的存在！-项。

命题44。以下类型规则在任何指数蕴涵结构中都成立：

$$\frac{\Gamma, !x :!A \vdash t : C}{\Gamma \vdash \lambda !x.t :!A \multimap C} \multimap R'$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : C}{\Gamma, !x :!A \vdash (\lambda !x.t)!x : C}\ !wL \qquad \frac{\Gamma, !x :!A, !y :!A \vdash t : C}{\Gamma, !z :!A \vdash t[x : z, y : z] : C}\ !cL$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : C}{\Gamma, !x :!A \vdash t : C}\ !dL \qquad \frac{!\Gamma \vdash t : A}{!\Gamma \vdash !t :!A}\ !R$$

证明。只需计算 λ 指数模态项的解释。 □

现在我们有两条不同的规则 $\multimap !R$ 和 $\multimap !R\prime$，它们彼此重叠。为避免这种情况，我们将始终使用 $!x : !a$ 形式的语句，而不使用 $x : !a$。我们可以认为 $!x : !a$ 是一个更强的语句，因为它假定存在一个类型为 a 的元素；但由于我们使用广义实现子，这一假定总是成立的。

我们考虑以下额外的组合子。初等群：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_! &:= \lambda x!y.x\\ \mathbf{W}_! &:= \lambda x!y.x!y!y\\ \mathbf{F} &:= \lambda !x!y.!(xy)\end{aligned}$$

与余单子群：

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &:= \lambda !x.x\\ \delta &:= \lambda !x.!!x\end{aligned}$$

命题45。下列等式成立：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_!^{\mathscr{A}} &= \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} a \multimap !b \multimap a\\ \mathbf{W}_!^{\mathscr{A}} &= \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} (!a \multimap !a \multimap b) \multimap !a \multimap b\\ \mathbf{F}^{\mathscr{A}} &= \bigwedge_{a,b\in\mathscr{A}} !(a \multimap b) \multimap !a \multimap !b\\ \mathbf{D}^{\mathscr{A}} &= \bigwedge_{a\in\mathscr{A}} !a \multimap a\\ \delta^{\mathscr{A}} &= \bigwedge_{a\in\mathscr{A}} !a \multimap !!a\end{aligned}$$

定义46。我们将任何满足以下条件的 $\lambda!$-项称为线性的 $\lambda!$-项：其中每个 λ-抽象恰好绑定一个变量，该变量不在 ! 之下，并且每个自由变量至多出现一次。

定义47。指数型组合项是一个线性 λ-项，它可以是**B**、**C**、**I**、**K!**、**W!**、**D**、δ、**F**、一个自由变量、上述任一项的 !，或指数型组合项的应用。

定理48。对于每个线性 $\lambda!$-项 t，都存在一个指数型组合项 t_0，使得 $t_0 \twoheadrightarrow t$。

命题49。以下类型规则现在有效，其中 $\Gamma = x_1 :\ a_1, \dots,\ x_n : a_n$ 属于 $!R$。

$$\frac{\Gamma \vdash t : C}{\Gamma, !x :!A \vdash \mathbf{K}_!t!x : C}\ !wL$$

$$\frac{\Gamma, !x :!A, !y :!A \vdash t : C}{\Gamma, !z :!A \vdash \mathbf{W}_!(\lambda !x!y.t)!z : C}\ !cL$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : C}{\Gamma, !x :!A \vdash (\lambda x.t)(\mathbf{D}!x) : C}\ !dL$$

$$\frac{!\Gamma \vdash t : A}{!\Gamma \vdash \mathbf{F}(\dots(\mathbf{F}!(\lambda !x_1, \dots, !x_n.t)!x_1)\dots)!x_n :!A}\ !R$$

定义50。如果一个线性分离子包含组合子**K!**,**W!**,**D** δ、**F**，且在 ! 下封闭，我们就称它为指数分离子。我们将最小的指数分离子称为指数核心（记作 $\mathrm{S}^0!$）。

由指数模态封闭且包含组合子 **K!**,**W!**,**F** 的线性分离子称为初等分离子。初等核心记作 $\mathrm{S}^0_\sharp$，是最小的初等分离子。

命题51。如果公式 A 是 *IMELL* 中的重言式，那么 $A^{\mathscr{A}} \in \mathrm{S}^0!(\mathscr{A})$。如果公式 A 是 *IMELL* 中的重言式，且可在不使用弱化和挖掘的情况下证明，那么 $A^{\mathscr{A}} \in \mathrm{S}^0_\sharp(\mathscr{A})$。

定理 52。设 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \multimap, !)$ 是一个指数蕴涵结构。那么 $(\mathscr{A}\prime, \preccurlyeq, \to)$ 是一个蕴涵结构，其中 $\mathscr{A}\prime = \mathscr{A}$ 且 $a \to b = !a \multimap b$。

此外，如果 S 是 $\mathscr{A}$ 中的指数分离子，那么它是 $\mathscr{A}\prime$ 中的直觉主义分离子。

证明。两个公理很容易验证。两种结构中的向上闭包相同。肯定前件闭包可由

指数闭包推出。我们有

$$(\mathbf{BK}_!\mathbf{D})^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \mathbf{K}^{\mathscr{A}'}$$
$$(\lambda!x!y!z.x!z!(y!z))^{\mathscr{A}} \preccurlyeq \mathbf{S}^{\mathscr{A}'}$$

with

$$\mathbf{S}^{\mathscr{A}'} = \bigwedge_{a,b,c\in\mathscr{A}} (!(!a \multimap !b \multimap c) \multimap !(!a \multimap b) \multimap !a \multimap c)$$

□

4.2 线性可实现性模型中的指数

上述处理指数的方法可用于表明，某些已知的线性可实现性构造不仅是线性蕴涵代数的实例，也是初等蕴含代数或指数蕴含代数的实例。

（待办：下文中，由于证明项是全称的，我们应当加入交；但由于交在论文中是局部化的，应以脚注形式引入。）

特别地，Girard 在超有限因子中的交互几何 [19] 以及 Seiller 基于图化的交互图模型 [39] 都是初等蕴含代数的实例。事实上，这两个模型都在类型集合上引入了一种称为永存化的运算，记作指数模态。在这两种情形中，均已证明特定项居于下列类型：

$$\bigcap_{\mathbf{A},\mathbf{B}} !(\mathbf{A} \multimap \mathbf{B}) \otimes !\mathbf{A} \multimap !\mathbf{B}, \quad \bigcap_{\mathbf{A},\mathbf{B}} \mathbf{A} \otimes !\mathbf{B} \multimap \mathbf{A}, \quad \bigcap_{\mathbf{A}} !\mathbf{A} \otimes !\mathbf{A} \multimap !\mathbf{A},$$

由此，在德摩根等式与标准变换的意义下，可以确立**K**指数模态、**W**指数模态以及**F** 是可居留的。值得注意的是，已有一些论证 [39] 表明这些模型不满足进一步的指数原理，因此不应定义指数蕴含代数。

其他线性可实现性模型，尤其是早期交互几何模型 [13, 14, 16] 以及 Seiller 后来对交互图模型的扩展 [38, 42]，会产生指数蕴含代数。事实上，已经证明上述三种类型都有项，但以下两种类型也同样如此：

$$\bigcap_{\mathbf{A}} !\mathbf{A} \multimap ‼\mathbf{A}, \quad \bigcap_{\mathbf{A}} !\mathbf{A} \multimap \mathbf{A}.$$

因此，这些结果证明，在这些模型中，**K**指数模态、**W**指数模态、**F**、**D**以及δ都有项。因此，根据定理 52，这些模型定义了 Miquel 意义下的蕴含代数；此前尚无人知晓这一点。

5 加性联结词与不动点指数

本节将引入额外结构，以一种不同且更明确的方式定义加性联结词。这将使我们能够基于不动点指数构造，介绍一种定义指数联结词的替代方法。

5.1 记录

定义 53（记录）。设 $(\mathscr{A}, 4, \to)$ 是一个蕴涵结构。我们称 $\mathscr{A}$ 上的一个**记录** 为满足以下条件的函数 $\mathrm{l}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$：

$$\bigwedge_{i\in I} \mathrm{l}(a_i) = \mathrm{l}\left(\bigwedge_{i\in I} a_i\right)$$

注 54。上述定义蕴含存在另一个函数，使得：

$$a.\mathrm{l} \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad a \preccurlyeq \mathrm{l}(b)。$$

.l 和 l 都是单调的，并满足以下条件：

$$\mathrm{l}(\top) = \top$$
$$a.\mathrm{l} = \bigwedge\{b \in \mathscr{A} \mid a \preccurlyeq \mathrm{l}(b)\}.$$

这个伴随对在 $\mathscr{A}$ 上同时诱导出一个单子和一个余单子，因此 $a \preccurlyeq \mathrm{l}(a.\mathrm{l})$ 和 $\mathrm{l}(a).\mathrm{l} \preccurlyeq a$。

命题 55（记录的类型规则）。设l 是一个记录。语义类型规则

$$\frac{\Gamma \vdash t : \alpha}{\Gamma \vdash t.\mathrm{l} : a} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : a}{\Gamma \vdash \mathrm{l}(t) : \mathrm{l}(a)}$$

在任意蕴涵结构中都成立，其中 α 满足 $\alpha.\mathrm{l} = \mathrm{l}(a).\mathrm{l}$。

如果两个记录 l 和 r 满足以下条件，我们就称它们相容：

$$(\mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(b)).\mathrm{l} = \mathrm{l}(a).\mathrm{l}$$
$$(\mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(b)).\mathrm{r} = \mathrm{r}(b).\mathrm{r}$$

例 56（带记录的 λ-演算）。给定互不相交的变量集合 变量 x、y、..... 以及标签 ℓ_1、ℓ_2、.....，带记录的 λ-演算由以下语法定义：

$$t, u := x \mid tu \mid \lambda x.t \mid t \mid \{\} \mid \{t; \ell = u\} \mid t.\ell$$

配合归约规则

$$(\lambda x.t)u \to_\beta t[u/x]$$
$$\{t; \ell = u\}.\ell \to_\iota u$$
$$\{t; \ell = u\}.\ell' \to_\iota t.\ell' \text{ if } \ell \neq \ell'$$

我们将用 $\{\ell_1 = t_1; \ldots; \ell_n = t_n\}$ 表示迭代嵌套

$$\{\{\cdots\{\}; \ell_1 = t_1\}\cdots; \ell_n = t_n\}.$$

请注意，由 ι-归约给出的操作语义意味着同一标签可以被重新定义，而且实际访问的始终只有最后一个定义。

与 λ-演算的每个扩展一样，它定义了一个由项集构成的蕴涵结构 $\mathscr{A}$，其中的项按 $\beta\iota$-等价取商。此外，若ℓ 是一个标签，我们定义函数 $\mathrm{l}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 如下：

$$\mathrm{l}(a) = \left\{t \mid [t.\ell]_{\beta\iota} \in a\right\}$$

直观地说，$\mathrm{l}(a)$ 是包含标签为 ℓ 的记录且该记录中含有 a 的项集。我们验证 $\bigwedge_{i\in I}\mathrm{l}(\ )\ \mathrm{l}(\ )$。注意，对于所有 $a \in \mathscr{A}$，$\mathrm{l}(a).\mathrm{l} = a$；这是我们选择采用 Kleene 可实现性（其中等价项被视为相等），而非 Krivine 可实现性（其中归约被一个序关系抽象）的结果。

$$= \{t \mid \forall i \in I, [t.\ell]_{\beta\iota} \in a_i\} = \left\{t \mid [t.\ell]_{\beta\iota} \in \cap_{i\in I} a_i\right\} = \bigwedge_{i\in I} a_i$$

的项

此外，给定两个不同的标签 ℓ 和 r 以及相关联的记录 l 和 r，我们有：

$$(\mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(b)).\mathrm{l}$$
$$= \bigwedge\{c \in \mathscr{A} \mid (\mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(b)) \preccurlyeq \mathrm{l}(c)\}$$
$$= \bigwedge\left\{c \in \mathscr{A} \mid \left\{t \mid [t.\ell]_{\beta\iota} \in a \wedge [t.r]_{\beta\iota} \in b\right\} \subseteq \left\{t \mid [t.\ell]_{\beta\iota} \in c\right\}\right\}$$
$$= a = (\mathrm{l}(a).\mathrm{l}$$

因此 l 和 r 是兼容记录。

5.2 加性联结词

定义 57 (加性联结词)**.** 设 l 和 r 为两个相容的记录。我们定义：

$$a \,\&\, b = \mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(b)$$
$$a \oplus b = \bigwedge_{c \in \mathscr{A}} \mathtt{l}(a \to c) \wedge \mathtt{r}(b \to c) \to c$$

命题 58. 我们有：

$$a \oplus b \leqslant ((a \to \bot) \,\&\, (b \to \bot)) \to \bot.$$

证明。

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \bigwedge_{c \in \mathscr{A}} \mathtt{l}(a \to c) \wedge \mathtt{r}(b \to c) \to c \\ &\leqslant \mathtt{l}(a \to \bot) \wedge \mathtt{r}(b \to \bot) \to \bot \\ &\leqslant ((a \to \bot) \,\&\, (b \to \bot)) \to \bot \end{aligned}$$

□

定义 59. 设 $(\mathscr{A}, 4, \multimap)$ 是一个蕴涵结构，具有两个兼容记录 l 和 r。加法分隔子 是一个分离子S 在 $\mathscr{A}$ 上，使得

(1) 对所有 $a \in \mathscr{A}$, $a \to$, $\mathtt{l}(a) \in S$和 $a \to \mathtt{r}(a) \in S$；(2) 对所有 $a \in \mathscr{A}$, $a \to a$, $.\mathtt{l} \in S$和 $a \to a.\mathtt{r} \in S$；(3) 对所有 $a, b \in \mathscr{A}$, $(\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(b)) \to (\mathtt{l}(b) \wedge \mathtt{r}(a)) \in S$；(4) 对所有 $a, b, c \in \mathscr{A}$,

$$(\mathtt{ll}(a) \wedge \mathtt{lr}(b) \wedge \mathtt{r}(c)) \to (\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{rl}(b) \wedge \mathtt{rr}(c)) \in S,$$
$$(\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{rl}(b) \wedge \mathtt{rr}(c)) \to (\mathtt{ll}(a) \wedge \mathtt{lr}(b) \wedge \mathtt{r}(c)) \in S.$$

一个加性蕴含代数是一个元组 $(\mathscr{A}, 4, \multimap, \mathtt{l}, \mathtt{r}\ S)$，其中 $(\mathscr{A}, 4, \to)$ 是一个蕴涵结构，l 和 r 是两个相容记录，而 S 是一个加法分离子。

注 60。条件 3 表明了交换律：线性分离子无法区分不同的记录；标签只是用于在同构容器中存储和检索信息的名称。

条件 4 表明了记录嵌套的结合律。事实上，由于记录保持任意下确界，该条件可以改写为

4’ 对所有 $a, b, c \in \mathscr{A}$,

$$(\mathtt{l}(\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(b)) \wedge \mathtt{r}(c)) \to (\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(\mathtt{l}(b) \wedge \mathtt{r}(c))) \in S,$$
$$(\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(\mathtt{l}(b) \wedge \mathtt{r}(c))) \to (\mathtt{l}(\mathtt{l}(a) \wedge \mathtt{r}(b)) \wedge \mathtt{r}(c)) \in S.$$

λ-演算的解释可以扩展到带记录的 λ-演算。

命题 61。 设 $(\mathscr{A}, \leqslant, \multimap, S, \mathtt{l}, \mathtt{r})$ 是一个加性蕴含代数。加性联结词之间具有以下性质：

(1) $a \,\&\, b \dashv\vdash_S b \,\&\, a$(2) $a \oplus b \dashv\vdash_S b \oplus a$(3) $a \,\&\, b \vdash_S a$ 且 $a \,\&\, b \vdash_S b$(4) $a \vdash_S a \oplus b$ 且 $b \vdash_S a \oplus b$(5) $a \,\&\, \top \dashv\vdash_S a \dashv\vdash \top \,\&\, a$(6) $a \oplus \bot \dashv\vdash_S a \dashv\vdash \bot \oplus a$

(7) $a \,\&\, (b \,\&\, c) \dashv\vdash_S (a \,\&\, b) \,\&\, c$(8) 对于所有 $d \in \mathscr{A}$，满足 $a \vdash_S d$ 且 $b \vdash_S d$，$a \oplus b \vdash_S d$(9) $a \oplus (b \oplus c) \dashv\vdash_S (a \oplus b) \oplus c$

以及乘性连接词对加性联结词的分配律：

(1) $a \otimes (b \oplus c) \dashv_S (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ (2) $a \multimap (b \,\&\, c) \vdash_S (a \multimap b) \,\&\, (a \multimap c)$ (3) $(a \oplus b) \multimap c \dashv\vdash_S (a \multimap c) \,\&\, (b \multimap c)$

5.3 线性可实现性模型中的加性联结词

上述对加性联结词的定义，与文献中某些模型对加性联结词的定义密切相关。具体而言，我们将重点关注 Girard 的模型 [16],，更准确地说，是第4节 [4][36, 中的算子代数表述1]，其中通过部分等距算子 p, $q \in \mathrm{L}(\mathbb{H})$来处理加性联结词，其中$\mathbb{H}$是具有可数基的希尔伯特空间，例如 $\ell^2(\mathbb{N})$。这些部分等距算子在 $\mathbb{H}$的自然基上可定义如下：$p(b_i) = b_{2i}$，以及 $q(b_i) = b_{2i+1}$。它们有共轭算子 p^*, q^*，并满足以下性质：

$$p^*p = 1 = q^*q; \qquad q^*p = 0 = p^*q; \qquad pp^* + qq^* = 1,$$

其中，1 表示恒等算子 $x \mapsto x$，0 表示零算子 $x \mapsto 0$，二者均属于 $\mathrm{L}(\mathbb{H})$。

W我们可以如下恢复运算 $a.\mathtt{l}$ 和 $\mathtt{l}(a)$： ws:

$$a.\mathtt{l} = (1 \otimes p^*)a \otimes 1(1 \otimes p)$$
$$\mathtt{l}(a) = (1 \otimes p)a \otimes 1(1 \otimes p^*)$$

由此很容易验证，加性联结词的解释遵循前一节给出的构造。此外，加性分离子所需的性质也都成立。具体而言，我们注意到，Girard 在其构造[4] [14], 中使用的算子 s, t确实存在，并且对应于最后两条性质。事实上，这些算子满足：

$$ss^* = s^*s = 1 \quad s(u \otimes v) = (v \otimes u)s,$$
$$tt^* = t^*t = 1 \quad t(u \otimes (v \otimes w)) = ((u \otimes v) \otimes w)t,$$

其中 $u \otimes v$是 $p^*up + q^*vq$的记号。

5.4 不动点指数

蕴涵结构是一个完备格；因此，原则上可以利用格结构本身来定义某些运算，例如指数。特别是，Baelde [1] 在 μMALL 的框架下引入了将指数编码为不动点的方法。MALL 即扩展了不动点的乘法-加法线性逻辑。我们将采用这种编码。

首先要指出，在任意加性蕴含代数中，以及 $X \in \mathscr{A}$，应用：

$$a \mapsto \mathbf{1} \,\&\, X \,\&\, (a \otimes a)$$
$$a \mapsto \bot \oplus X \oplus (a \parr a)$$

是单调的。接着，由于 A是一个完备格，根据 Knaster-Tarski 定理，它们各自都有一个完备的不动点格。然后我们可以

[4]第一个交互几何模型 [14] 尽管没有解释加性联结词，却引入了此处所考虑的算子 p, q, s, t。

将指数定义为这些不动点中的任意一个。一个规范的选择可以是：

$$!X := \nu a.\mathbf{1} \,\&\, X \,\&\, (a \otimes a)$$
$$?X := \mu a.\bot \oplus X \oplus (a \parr a)$$

其中 μ 表示最小不动点， ν 表示最大不动点。很容易验证，！满足我们在第4节中给出的指数公理。具体而言：

命题62。 设 $(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \multimap, \mathbf{1}, \&, S)$ 是一个加性蕴含代数。

$!: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 函数定义为 $!X$的最大不动点，其中$a \mapsto \mathbf{1}\&X\&(a\otimes a)$ 是单调的，而 S是该函数的一个指数分隔子：$(\mathscr{A}, \preccurlyeq, \multimap, !, S)$ 是一个指数蕴含代数。

6 结论

我们已经表明，Seiller 所定义的线性可实现性——它融合了源自 Girard 对线性逻辑研究的不同工作脉络——可以在蕴含代数这一框架下与强迫法、直觉主义和经典可实现性统一起来，从而体现出一种普遍的直觉：这些工作彼此相关。

这一统一开辟了许多研究方向，尤其是：

- Miquey [34]定义了析取代数和合取代数，以研究按值调用和按名调用 λ-演算。线性逻辑是联系这两种演算的另一种工具，我们期待它们之间也存在联系；
- 蕴含代数已被用于定义拓扑斯（而这一构造实际上是强迫法的核心）。我们可以期待，这类拓扑斯能够通过蕴含代数的线性分解来分解；
- 许多构造通过某种Chu构造 [43]，从直觉主义线性逻辑的模型构造出经典线性逻辑的模型（其中否定是对合的）。对线性蕴含代数也可以进行类似研究。

参考文献

[1] D. Baelde. 线性逻辑中的最小不动点与最大不动点。《*ACM*计算逻辑汇刊》，13(1):2:1–2:44，2012年。[2] S. Berardi、M. Bezem 和 T. Coquand。论选择公理的计算内容。《符号逻辑杂志》，63(2):600–622，1998年。[3] V. Danos 和 T. Ehrhard。作为高阶概率计算模型的概率相干空间。《信息与计算》，209，2011年。[4] E. Duchesne。逻辑中的局部化：交互几何与指称语义。博士论文，地中海大学，2009年。[5] T. Ehrhard。有限性空间。《计算机科学中的数学结构》，15(4):615–646，2005年。[6] B. Eng 和 T. Seiller。由逻辑程序和铺砌构造乘法线性逻辑。hal-02895111，2021年。[7] B. Ganter 和 R. Wille。形式概念分析：数学基础。施普林格，柏林、海德堡，1999年。[8] J. L. Gastaldi、S. Jarvis、T. Seiller 和 J. Terilla。线性可实现性与 $\mathbb{R}$-富集伴随中的结构。预印本，可向作者索取，2025年。[9] J.-Y. Girard。超越语法II：非确定性情形。《计算机科学中的逻辑方法》（即将发表）。[10] J.-Y. Girard。《超越语法III：等式》。[11] J.-Y. Girard。线性逻辑。《理论计算机科学》，50(1):1–101，1987年。[12] J.-Y. Girard。乘性连接词。载于 Lolli 编，《逻辑与计算机科学：新趋势与应用》，第11–34页，都灵，1987年。都灵大学。《都灵大学与理工学院数学研讨会纪要》，1987年特刊。[13] J.-Y. Girard。交互几何II：无死锁算法。载于*COLOG*会议论文集，第417卷《计算机科学讲义》，第76–93页。施普林格，1988年。
[14] J.-Y. Girard. 交互几何 I：系统 F 的解释。载于《逻辑讨论会 88》会议录，1989年。[15] J.-Y. Girard. 走向交互几何。载于美国数学学会范畴、逻辑与计算机科学会议论文集，1989年。[16] J.-Y. Girard. 交互几何 III：容纳加性联结词。载于《线性逻辑进展》，讲义系列第222卷，第329–389页。剑桥大学出版社，1995年。[17] J.-Y. Girard. Locus solum：从逻辑规则到规则的逻辑。《计算机科学中的数学结构》，11(3)，2001年。[18] J.-Y. Girard. 逻辑与量子逻辑之间：一篇短论，第346–381页。伦敦数学会讲义系列第316卷。剑桥大学出版社，2004年。[19] J.-Y. Girard. 交互几何 V：超有限因子中的逻辑。《理论计算机科学》，412：1860–1883，2011年。[20] J.-Y. Girard. 超越语法 I：确定性情形。《计算机科学中的数学结构》，27(5)：827–849，2017年。[21] J.-Y. Girard、Y. Lafont 和 P. Taylor.《证明与类型》。CUP，1989年。[22] T. G. Griffin. 公式即类型的控制概念。载于第17届 ACM SIGPLAN-SIGACT 编程语言原理研讨会论文集，POPL ’90，第47–58页，美国纽约州纽约市，1989年。计算机协会。[23] J. M. E. Hyland、P. T. Johnstone 和 A. M. Pitts. Tripos 理论。《剑桥哲学学会数学汇刊》，88(2)：205–232，1980年。[24] M. Hyland 和 A. Schalk. 线性逻辑模型的粘合与正交性。《理论计算机科学》，294，2003年。[25] J.-B. Joinet 和 T. Seiller. 从抽象与不可分辨性到分类与类型：重访赫尔曼·外尔的理想元素理论。《科学哲学》，53(2)：65–93，2021年。[26] S. C. Kleene. 关于直觉主义数论的解释。《符号逻辑杂志》，10，1945年。[27] G. Kreisel. 通过有限类型构造性泛函解释分析。载于 A. Heyting 编，《数学中的构造性》，第101–128页。北荷兰出版社，1959年。[28] J.-L. Krivine. 经典策梅洛-弗兰克尔集合论中的带类型 λ 演算。《数学逻辑文库》，40(3)：189–205，2001年。[29] J.-L. Krivine. 经典逻辑中的可实现性。《全景与综合》，27 229，2009年 197：–。[30] J.-L. Krivine. 可实现性代数 II：ZF 的新模型 + dc。《计算机科学中的逻辑方法》，第8卷，第1期，2012年2月。[31] P.-A. Melliès、N. Tabareau 和 C. Tasson. 线性逻辑自由指数模态的显式公式。载于第36届自动机、语言与编程国际研讨会论文集：第二部分，ICALP ’09，第247–260页，柏林，海德堡，2009年。施普林格出版社。[32] A. Miquel. 经典可实现性综述。载于 C. L. Ong 编，《带类型 λ 演算及其应用——第十届国际会议，TLCA 2011》，诺维萨德，塞尔维亚，2011年6月1–3日。会议录，《计算机科学讲义》第6690卷，第1–2页。施普林格，2011年。[33] A. Miquel. 蕴含代数：可实现性与力迫的新基础。《数学结构与计算机科学》，30(5)：458–510，2020年。[34] É. Miquey. 重新审视计算对偶性：对经典可实现性模型的代数分析。载于 LIPIcs，CSL 2020，LIPIcs 第152卷，CSL 2020，第1–52页，西班牙巴塞罗那，2020年1月。[35] T. Seiller. 交互图：乘性连接词。《纯粹与应用逻辑年刊》，163：1808–1837，2012年12月。[36] T. Seiller. 超有限因子中的逻辑：交互几何与复杂性。博士论文，艾克斯-马赛大学，2012年。[37] T. Seiller. 交互图：加性联结词。《纯粹与应用逻辑年刊》，167：95–154，2016年。[38] T. Seiller. 交互图：完整线性逻辑。载于 IEEE/ACM 计算机科学逻辑研讨会（LICS），2016年。[39] T. Seiller. 交互图：图化。《纯粹与应用逻辑年刊》，168(2)：278–320，2017年。[40] T. Seiller. 交互图：指数。《计算机科学中的逻辑方法》，15(3)，2019年。[41] T. Seiller. 数学信息学，2024年。授业资格论文。[42] T. Seiller. ζ 函数与马尔可夫过程的（线性）逻辑。《计算机科学中的逻辑方法》，第20卷，第3期，2024年。[43] M. SHULMAN. 构造性数学的仿射逻辑。《符号逻辑公报》，28(3)：327–386，2022年7月。[44] T. Streicher. 从范畴论视角看 Krivine 的经典可实现性。《数学结构与计算机科学》，23(6)：1234–1256，2013年。[45] J. Van Oosten. 可实现性：范畴论方面导论。爱思唯尔，2008年。

A 省略的证明

命题4的证明。对于所有 $a,\ b \in \mathscr{A}$，我们记作 $V_{a,\ b} = \{c \in \mathscr{A} \colon c \cdot a \preccurlyeq b\}$，从而 $a \rightsquigarrow b := \bigvee V_{a,\ b}$。

（1）令 $a' \preccurlyeq a$、$b \preccurlyeq b'$，则 $\forall c \in \mathscr{A} \colon\ c \cdot a' \preccurlyeq c \cdot a$ 以及 $b \preccurlyeq b'$，因此 $V_{a,\ b} \subseteq V_{a'、\ b'}$，$\rightsquigarrow$，然后 $a \rightsquigarrow b = \bigvee V_{a,b} \preccurlyeq \bigvee V_{a',b'} = a'\,'$。（2）显然 $a \in V_{b\,a\,b}$ $a \preccurlyeq \bigvee V_{b\,a\,b} = a \preccurlyeq b \rightsquigarrow$、$\cdot$，因此，$\cdot$ $a\ \ b$ $(\cdot)$。（3）根据 $V_{a、\ b}$ 的定义，我们有 $(a \rightsquigarrow b) \cdot a = (\bigvee V_{a、\ b}) \cdot a = \bigvee_{c \in V_{a、\ b}} (c \cdot a) \preccurlyeq b$。（4）由（3）可得 $a \rightsquigarrow b \in V_{a,b},$，因此 $a \rightsquigarrow b = \min(V_{a、\ b})$。（5）假设 $a \cdot b \preccurlyeq c$，则有 $a \in V_{b、\ c}$，因此 $a \preccurlyeq b \rightsquigarrow c$。反之，若 $a \preccurlyeq b \rightsquigarrow c$ 3 $a\ \ b \preccurlyeq b \rightsquigarrow$（），由（）$c\ \ b \preccurlyeq c$ 可得 $\cdot$（）$\cdot$。

□

命题??的证明。我们已经证明 $\rightsquigarrow$ 验证 (1)。

我们有

$$\begin{aligned}\forall b \in B, \bigwedge_{b \in B} b \preccurlyeq b &\implies \forall b \in B, (a \rightsquigarrow \bigwedge_{b \in B} b) \preccurlyeq a \rightsquigarrow b \\ &\implies (a \rightsquigarrow \bigwedge_{b \in B} b) \preccurlyeq \bigwedge_{b \in B} (a \rightsquigarrow b)\end{aligned}$$

并且对于所有 $z \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned}z \preccurlyeq \bigwedge_{b \in B} (a \rightsquigarrow b) &\implies \forall b \in B, z \preccurlyeq (a \rightsquigarrow b) \\ &\implies \forall b \in B, z \cdot a \preccurlyeq b \\ &\implies z \cdot a \preccurlyeq \bigwedge_{b \in B} b \\ &\implies z \preccurlyeq a \rightsquigarrow \bigwedge_{b \in B} b\end{aligned}$$

so

$$\bigwedge_{b \in B} (a \rightsquigarrow b) \preccurlyeq a \rightsquigarrow \bigwedge_{b \in B} b$$

那么 $\rightsquigarrow$验证 (2)。

最后，对于所有 $a,\ b \in \mathscr{A}$：

$$\begin{aligned}ab &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : a \preccurlyeq b \rightsquigarrow c\} \\ &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : a \preccurlyeq \max\{z \in \mathscr{A} : z \cdot b \preccurlyeq c\}\} \\ &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : a \cdot b \preccurlyeq c\} \\ &= a \cdot b\end{aligned}$$

□

命题 6 的证明。我们已经知道应用遵守 1。

对于 2.，我们有，对所有 $b \in \mathscr{A}$、$A \subseteq \mathscr{A}$：

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{a \in A} a\right) b &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : \bigvee_{a \in A} a \preccurlyeq b \to c\} \\ &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : \forall a \in A, a \preccurlyeq b \to c\} \\ &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : \forall a \in A, ab \preccurlyeq c\} \\ &= \bigwedge \{c \in \mathscr{A} : \bigvee_{a \in A} (ab) \preccurlyeq c\} \\ &= \bigvee_{a \in A} (ab)\end{aligned}$$

最后，我们有，对于所有 $a,\ b \in \mathscr{A}$：

$$\begin{aligned}a \rightsquigarrow b &= \bigvee \{c \in \mathscr{A} : ca \preccurlyeq b\} \\ &= \bigvee \{c \in \mathscr{A} : \min\{z \in \mathscr{A} : c \preccurlyeq a \to z\} \preccurlyeq b\} \\ &= \bigvee \{c \in \mathscr{A} : c \preccurlyeq a \to b\} \\ &= a \to b\end{aligned}$$

□

命题 8 的证明。公理、参数、包含：根据定义可立即得出。

上下文包含：由 ?? （替换的单调性）可得。 $=$ $.$ $a] \ ^{\mathscr{A}} \preccurlyeq b$ $\lambda x.t \ \subseteq \ \Gamma \ \ x \notin \ \Gamma$ -R：假设 $\mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma,\colon)$ 且 $(t[\Gamma, x\colon)$。我们有 $\mathrm{FV}(\ )\ \mathrm{dom}(\ )$ 和 $\mathrm{dom}(\ )$，因此：

$$\begin{aligned}((\lambda x.t)[\Gamma])^{\mathscr{A}} &= (\lambda x.t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \\ &= \bigwedge_{a_0 \in \mathscr{A}} \left(a_0 \multimap (t[\Gamma, x := a_0])^{\mathscr{A}}\right) \\ &\preccurlyeq a \multimap (t[\Gamma, x := a])^{\mathscr{A}} \\ &\preccurlyeq a \multimap b\end{aligned}$$

切规则：假设 $\mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$，$(t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \preccurlyeq a$，$\mathrm{FV}(u) \subseteq \mathrm{dom}(\Delta, x\colon\ a)$ 且 $(u[\Delta, x\colon= a])^{\mathscr{A}} \preccurlyeq b$。我们有 $\mathrm{FV}(\lambda x.u) \subseteq \mathrm{dom}(\Delta)$ 和 $x \notin \mathrm{dom}(\Delta)$。我们可以假设 $\mathrm{dom}(\Gamma) \cap \mathrm{dom}(\Delta) = \emptyset$ 且 $x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$，因此：

$$\begin{aligned}(((\lambda x.u)t)[\Gamma \cdot \Delta])^{\mathscr{A}} &= (\lambda x.u[\Delta])^{\mathscr{A}} (t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \\ &\preccurlyeq \bigwedge_{a_0 \in \mathscr{A}} \left(a_0 \multimap (u[\Delta, x := a_0])^{\mathscr{A}}\right) a \\ &\preccurlyeq (a \multimap (u[\Delta, x := a])^{\mathscr{A}}) a \\ &\preccurlyeq (a \multimap b) a \\ &\preccurlyeq b\end{aligned}$$

$\multimap$-L：假设 $\mathrm{FV}(t) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma)$、$(t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \preccurlyeq a$、$\mathrm{FV}(u) \subseteq \mathrm{dom}(\Delta, x\colon\ b)$ 以及 $(u[\Delta, x\colon= b])^{\mathscr{A}} \preccurlyeq c$。我们有 $\mathrm{FV}(\lambda x.u) \subseteq \mathrm{dom}(\Delta)$ 且 $x \notin \mathrm{dom}(\Delta)$。我们可以假设 $\mathrm{dom}(\Gamma) \cap \mathrm{dom}(\Delta) =$

$\emptyset, x \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$、 $y \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$ 且 $y \notin \mathrm{dom}(\Delta)$，使得：

$$\begin{aligned}
&(((\lambda x.u)(yt))[\Gamma,\Delta, y := a \multimap b])^{\mathscr{A}} \\
&= (\lambda x.u[\Delta])^{\mathscr{A}}((y[y := a \multimap b])^{\mathscr{A}}(t[\Gamma])^{\mathscr{A}}) \\
&= \bigwedge_{b_0 \in \mathscr{A}} \left(b_0 \multimap (u[\Delta, x := b_0])^{\mathscr{A}}\right)((a \multimap b)a) \\
&\leqslant (b \multimap (u[\Delta, x := b])^{\mathscr{A}})b \\
&\leqslant (b \multimap c)b \\
&\leqslant c
\end{aligned}$$

广：$(t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \leqslant a_i$对所有 $i \in I$均意味着 $(t[\Gamma])^{\mathscr{A}} \leqslant \bigwedge_{i\in I} a_i$。

推 □

命题 17 的证明。我们有：

$$\begin{aligned}
\lambda_\sigma t t_1 \ldots t_n &= \lambda x y_1 \ldots y_m . x y_{\sigma^{-1}(1)} \cdots y_{\sigma^{-1}(m)} t_1 \ldots t_n \\
&\twoheadrightarrow_\beta t t_{\sigma^{-1}(1)} \cdots t_{\sigma^{-1}(m)} t_{m+1} \ldots t_n
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\lambda_\tau t t_1 \ldots t_n &= \lambda x y_1 \ldots y_n . x y_{\tau^{-1}(1)} \cdots y_{\tau^{-1}(n)} t_1 \ldots t_n \\
&\twoheadrightarrow_\beta t t_{\tau^{-1}(1)} \cdots t_{\tau^{-1}(n)} \\
&= t t_{\sigma^{-1}(1)} \cdots t_{\sigma^{-1}(m)} t_{m+1} \ldots t_n
\end{aligned}$$

□

引理 19 的证明。我们对 t 的结构进行归纳：

若 t 是一个自由变量，我们取$\mathbf{I}$。

如果 $t = uv$，那么对于所有 $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{FV}(t)$， $i \leq n$，要么 $x_i \in \mathrm{FV}(u)$，要么 $x_i \in \mathrm{FV}(v)$。根据 ??[5]，我们可以假设存在一个 $k \leq n$，使得 $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{FV}(u)$ 且 $x_{k+1}, \ldots, x_n \in \mathrm{FV}(v)$。通过归纳法，存在两个线性组合子项 $u_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \ldots x_k . u$ 和 $v_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_{k+1} \ldots x_n . v$。于是我们有

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{k,n} u_0 v_0 &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \ldots x_n . u_0 x_1 \ldots x_k (v_0 x_{k+1} \ldots x_n) \\
&\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \ldots x_n . uv \\
&= \lambda x_1 \ldots x_n . t
\end{aligned}$$

如果 $t = \lambda y.u$，那么对于所有 $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{FV}(t)$， $x_1, \ldots, x_n, y \in \mathrm{FV}(u)$，因此通过归纳法存在一个线性组合子项

$$u_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \ldots x_n y . u = _\circ \lambda x_1 \ldots x_n . t$$

□

命题 23 的证明。设 t 是一个自由变量为 x 的线性 λ-项，且 $\overline{a} \in S$是 S中的参数。根据定理 ??，存在一个闭线性组合子项 t_0，使得 $t_0 \twoheadrightarrow_\beta \lambda \overline{x}.t_\circ$ 根据分离子的性质 (2) 和 (3')，$t_0^{\mathscr{A}} \overline{a} \in S_\circ$ 此外，根据 ??，

$$t_0^{\mathscr{A}} \overline{a} \quad \leqslant \quad (\lambda \overline{x}.t)^{\mathscr{A}} \overline{a} \quad \leqslant \quad (t[\overline{x} := \overline{a}])^{\mathscr{A}}$$

那么，根据向上闭包有 $(t[\overline{x} := \overline{a}])^{\mathscr{A}} \in S_\circ$ □

[5]取一个线性组合子项 $T \twoheadrightarrow_\beta \lambda_\sigma$然后使用 $(T\mathbf{A}_{k,n})$ 代替 $\mathbf{A}_{k,n}$

命题 28 的证明。 ⊗-R：根据给定的前提，我们有：

$$\begin{aligned}
((\lambda z.ztu)[\Gamma,\Delta])^{\mathscr{A}} &= (\lambda z.zt[\Gamma]u[\Delta])^{\mathscr{A}} \\
&= \bigwedge_{d \in \mathscr{A}} \left(d \multimap (z[z := d])^{\mathscr{A}}(t[\Gamma])^{\mathscr{A}}(u[\Delta])^{\mathscr{A}}\right) \\
&\leqslant \bigwedge_{d \in \mathscr{A}} (d \multimap dab) \\
&\leqslant (a \multimap b \multimap c) \multimap ((a \multimap b \multimap c)ab) \\
&\leqslant (a \multimap b \multimap c) \multimap c
\end{aligned}$$

⊗-L：由给定前提可得：

$$\begin{aligned}
&((z(\lambda xy.t))[\Gamma, z := a \otimes b])^{\mathscr{A}} \\
&= (z[z := a \otimes b](\lambda xy.t)[\Gamma])^{\mathscr{A}} \\
&= (a \otimes b) \bigwedge_{a_0, b_0 \in \mathscr{A}} \left(a_0 \multimap b_0 \multimap (t[\Gamma, x = a_0, y = b_0])^{\mathscr{A}}\right) \\
&\leqslant \bigwedge_{c_0 \in \mathscr{A}} ((a \multimap b \multimap c_0) \multimap c_0) \bigwedge_{a_0, b_0 \in \mathscr{A}} (a_0 \multimap b_0 \multimap c) \\
&\leqslant ((a \multimap b \multimap c) \multimap c)(a \multimap b \multimap c) \\
&\leqslant c
\end{aligned}$$

□

30 的证明。通过归纳法，我们验证：如果一个类型判断 $\Gamma \vdash t : a$ 是通过使用语义类型规则（公理）、（切规则）、（$\multimap$-R）、（$\multimap$-L）、（⊗-R）和（⊗-L），从 ?? 和 ??推导得出的，那么 $\mathrm{dom}(\Gamma) = \mathrm{FV}(t)$，且 t 是线性的。因此，对 A的推导进行归纳，我们使用这些规则构造一个线性 λ-项 t，使得 $\vdash t : A^{\mathscr{A}}$。于是有 $t^{\mathscr{A}} \leqslant A^{\mathscr{A}}$，并由 ?? （线性 λ-闭包）得出结论。□

33的证明 . (1) 见 [33]

(2) 若 $a \vdash_S a'$ 且 $b \vdash_S b'$，则 $a \otimes b \vdash_S a' \otimes b'$。

$T^{\mathscr{A}}$ 是关于 S的线性 λ项，因此 $T^{\mathscr{A}} \in S_\circ$ 我们容易验证 $T^{\mathscr{A}} \leqslant a \otimes b \multimap a' \otimes b'$，因此 $a \otimes b \vdash_S a' \otimes b'_\circ$

□

命题34的证明。对于每一点，我们构造一个具有所需类型的线性λ项：

(1) $\lambda x.x(\lambda aby.yba)$: $[a] \otimes [b] \multimap [b] \otimes [a]$ (2) $\lambda x.x(\lambda yc.y(\lambda abt.ta(\lambda u.ubc))$: $([a] \otimes [b]) \otimes [c] \multimap [a] \otimes ([b] \otimes [c])$ $\lambda x.x(\lambda ay.y(\lambda bct.t(\lambda u.uab)c))$: $[a] \otimes ([b] \otimes [c]) \multimap ([a] \otimes [b]) \otimes [c]$ (3) $\lambda x.x\ \lambda ai.ia$ $[a] \otimes [\mathscr{A}] \multimap [a]$ ( ): I (I): $\lambda a.\ \lambda x.xa$ $[a] \multimap [a] \otimes [\mathscr{A}]$

I (4) $\lambda xab.x(\lambda y.yab)$: ($[a] \otimes [b] \multimap [c] \multimap [a] \multimap [b] \multimap [c]$) ( ): ( ) (5) $\lambda x.x(\lambda xy.y\ \lambda ab.xab$ $[a] \multimap [b] \multimap [c] \multimap [a] \otimes [b] \multimap [c]$ $\lambda ya.ya)$: $([a] \multimap [b]) \otimes [a] \multimap [b]$ (6) $\lambda abx.xab$: $[a] \multimap [b] \multimap [a] \otimes [b]$ (7) $\lambda xa.x(\lambda yz.z(ya))$: $([a] \multimap [b]) \otimes ([b] \multimap [c]) \multimap [a] \multimap [c]$ (8) $\lambda xy.x(\lambda uv.y(\lambda act.t(ua)(vc)))$: $([a] \multimap [b]) \otimes ([c] \multimap [d]) \multimap [a] \otimes [c] \multimap [b$

□

命题36的证明。根据定义（Ð $_{i\in I}\mathbf{A}_i$）⊥⊥是小型的-

是包含所有$\mathbf{A}_i$ 的类型，因此它就是并 .

根据定义 $\bigwedge_{i\in I}\mathbf{A}_i \subseteq \tilde{\mathbf{N}}_{i\in I}\mathbf{A}_i$，并且对于所有 $T_i \subseteq \mathfrak{P}$，$i \in I$：

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} T_i^{\perp\!\!\!\perp} &= \bigcap_{i\in I}\{\mathfrak{a}\in\mathfrak{P} : \forall \mathfrak{p}\in T_i, \mathfrak{a} \perp\!\!\!\perp_{\aleph} \mathfrak{p}\}\\ &= \{\mathfrak{a}\in\mathfrak{P} : \forall \mathfrak{p}\in \bigcap_{i\in I} T_i, \mathfrak{a} \perp\!\!\!\perp_{\aleph} \mathfrak{p}\}\\ &= (\bigcap_{i\in I} T_i)^{\perp\!\!\!\perp}\end{aligned}$$

因此，特别地，$\mathbf{\Pi}$ 在交运算下封闭，进而 $\bigwedge_{i\in I}\mathbf{A}^i = \tilde{\mathbf{N}}_{i\in I}\mathbf{A}_i$ □

命题 61 的证明。(1) 这正是条件 3；(2) $a \oplus b \dashv\vdash_S b \oplus a$(3) 我们有 $(a \,\&\, b) \to (a \,\&\, b).\mathrm{l} \in S$，而且 $(a \,\&\, b).\mathrm{l} = (\mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(b)).\mathrm{l} = \mathrm{l}(a).\mathrm{l} \leqslant a$，因此 $(a \,\&\, b) \to a \in S$；(4) (5) $a \,\&\, \top = \mathrm{l}(a) \wedge \mathrm{r}(\top) = \mathrm{l}(a) \wedge \top = \mathrm{l}(a)$，因为 r 保持零元下确界。因此，$a \to (a \,\&\, \top) \in S$。反向结论可由前面的一条要点推出。(6) $a \oplus \bot \dashv\vdash_S a \dashv\vdash \bot \oplus a$(7) 这正是条件 4；$a \,\&\, (b \,\&\, c) \dashv\vdash_S (a \,\&\, b) \,\&\, c$(8) $\lambda t.t\mathrm{l}(a \to d)\mathrm{r}(b \to d)\, 4(a \oplus b) \to d \in S$(9) 根据前一项，由于 $a \vdash_S a \oplus (b \oplus c)$, $b \vdash_S a \oplus (b \oplus c)$, 和 $c \vdash_S a \oplus (b \oplus c)$，我们有 $(a \oplus b) \vdash_S a \oplus (b \oplus c)$

因此，$(a \oplus b) \oplus c \vdash_S a \oplus (b \oplus c)$。另一个方向的证明类似。

对于命题的第二部分。

对于第一个断言，我们可以验证

$$\lambda p.p(\lambda xy.\lambda z.zx(\lambda v.(v\,\mathtt{l})u)) \preccurlyeq a \otimes b \to a \otimes (b \oplus c) \in S.$$

类似地，

$$\lambda p.p(\lambda xy.\lambda z.zx(\lambda v.(v\,\mathtt{r})u)) \preccurlyeq a \otimes c \to a \otimes (b \oplus c) \in S.$$

因此，根据命题 61.4，

$$(a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \vdash_S a \otimes (b \oplus c).$$

$$\begin{aligned}&a \otimes (b \oplus c)\\ &= \bigwedge_{d\in\mathscr{A}} a \to \left(\bigwedge_{e\in\mathscr{A}} \mathtt{l}(b \to e) \wedge \mathtt{r}(c \to e) \to e\right) \to d\\ &(a \otimes b) \oplus (a \otimes c)\\ &= \bigwedge_{d\in\mathscr{A}} \left(\mathtt{l}\left(\left(\bigwedge_{e\in\mathscr{A}} a \to b \to e\right) \to d\right) \wedge \mathtt{r}\left(\left(\bigwedge_{f\in\mathscr{A}} a \to c \to f\right) \to d\right)\right) \to d\end{aligned}$$

$\lambda z.z(\lambda x\{a \multimap (b \,\&\, c)x).\text{左})(\lambda x\{a \multimap (b \,\&\, c)x).\text{右}) \preccurlyeq a \multimap (b \,\&\, c) = a \to (\text{左}(b) \wedge \text{右}(c)) = (\text{左}(b)) \wedge (\text{右}(c)) \wedge (a \multimap b) \,\&\, (a \multimap c)$ □