arXiv:2602.06617v1 [math.NT] 6 Feb 2026

对称空间的迹公式。Guo-Jacquet 情形。

Pierre-Henri Chaudouard 和 Huajie Li

摘要

我们仿照 Arthur 迹公式，为与数域 F 上中心除法代数上的有限生成模之对合簇相关的对称空间建立了一般迹公式。这样的公式应有助于研究这些对称空间的自守谱，以及线性周期与其对称中心处 L 标准函数特殊值之间的深刻联系。事实上，我们的公式给出了谱分布与几何分布之间的恒等式：前者推广了由线性周期构造的相对特征，后者则是相对轨道积分的扩展。我们证明，谱分布在某种意义下渐近于与尖点数据相关的自守核分量的截断积分：这使我们得以处理这些分布，并在一篇附带论文中将其中一些分布表示为加权相对特征。附属于“正则半单”几何数据的几何分布可表示为加权相对轨道积分。一般而言，对于非正则几何数据，我们引入一种向中心化子下降的过程，从而将任意几何分布表示为先前论文中研究的无穷小迹公式的幂零贡献。

摘要

秉承 Arthur 迹公式的思想，我们为与有限 D-模的对合簇相关的对称空间建立了一般迹公式，其中 D 是一个在数域 F上为中心的除代数。该公式有望用于研究这些对称空间的自守谱，以及线性周期与标准 L-函数在其对称中心处的特殊值之间的深刻联系。事实上，我们的公式给出了谱分布与几何分布之间的恒等式：前者推广了基于线性周期构造的相对特征，后者则是相对轨道积分的扩展。我们证明，从某种意义上说，谱分布渐近于与某个尖点数据相关的自守核各分量的截断积分；这为研究这些分布提供了切入点，并使我们得以在一篇配套论文中将其中一些分布表示为加权相对特征的形式。附属于“正则半单”几何数据的几何分布可表示为加权相对轨道积分。一般而言，对于非正则几何数据，我们引入一种向中心化子下降的过程，从而能够用先前论文中研究的无穷小迹公式的幂零贡献来表示任意几何分布。

目录

1 引言 **2**1.1 对称空间与相对迹公式.2 1.2 结果概述.5 1.3 群 $G = GL(2, D)$ 的例子.10 1.4 文章结构.14

2 预备知识 **15**
2.1 一般记号.15 2.2 关于一般线性群内形式上的某些对合 . . . 21 2.3 一个相对划分.26 2.4 一个截断算子.28

3 谱展开 31
3.1 自守核.31 3.2 修改核的上界.31 3.3 谱收敛陈述.36 3.4 关于 T 的行为.38 3.5 谱分布.41

4 几何　发展 48
4.1 对称空间与范畴商.48 4.2 几何分布.58 4.3 Guo-Jacquet 迹公式.65 4.4 转到对称空间.66 4.5 半单下降.75 4.6 加权轨道积分.95 4.7 无穷小变体.99

1 引言

1.1 对称空间与相对迹公式

1.1.1. 设 F 是一个数域，$\mathbb{A}$ 是 F 的阿代尔环。设 $n \geqslant 1$ 是一个整数，D 是 F 上指标为 d 的中心除法代数，也就是说 $\dim_F(D) = d^2$。设 G 是右 D-模 D^n 的自同构群。因此它是一个定义在 F 上的仿射、约化、连通代数群。设 Z_G 是它的中心。设

$$S = \{g \in G \mid g^2 = 1\}. \tag{1.1.1.1}$$

它是 G 的一个闭子簇，赋有群 G 通过共轭作用的作用。簇 S 既不连通，甚至在 $n > 1$ 时也不纯维数。S 的一个连通分支由一对自然数 (p, q) 标记，其中 $p + q = n$，而 p 和 q 分别是 S 中元素对应特征值 1 和 -1 的特征子空间的维数。每个连通分支都是在 G 作用下的一个齐性空间，并且含有一个有理点。设 Ξ 是 $S(F)$ 中 $G(F)$ 的共轭类代表元系。将 $\theta \in \Xi$ 映为 S_θ 在 G 作用下的 θ 轨道的映射，诱导出从 Ξ 到 S 的（有限）连通分支集合的一个双射。记 G^θ 为 θ 在 G 中的中心化子。

1.1.2. 设 $\mathcal{S}(S(\mathbb{A}))$，相应地 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，为 $S(\mathbb{A})$ 上、相应地 $G(\mathbb{A})$ 上的施瓦茨函数空间。对一切 $\theta \in \Xi$，在 $G^\theta(\mathbb{A})$ 上固定 dh 一个 Haar 测度。对一切 $\Phi \in \mathcal{S}(S(\mathbb{A}))$，固定一个函数 $\Phi_\theta \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，使得

$$\forall g \in G(\mathbb{A}),\ \Phi(g\theta g^{-1}) = \int_{G^\theta(\mathbb{A})} \Phi_\theta(gh)\, dh. \tag{1.1.2.1}$$

1.1.3. 周期。 — 设 (π, V_π) 是 $G(\mathbb{A})$ 的一个尖点自守表示，其在 $Z_G(\mathbb{A})$ 上的中心特征平凡。设 $\theta \in \Xi$。我们将 G^θ-周期 $\mathcal{P}_{G^\theta}$ 定义为V_π 上的如下线性形式

$$\phi \in V_\pi \mapsto \mathcal{P}_{G^\theta}(\phi) = \int_{Z_G(\mathbb{A})G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \phi(h)\, dh. \tag{1.1.3.1}$$

由于函数 φ 是尖点的，被积函数快速衰减，因此上述积分有定义。若线性形式 $\mathcal{P}_{G^\theta}$ 在 V_π 上非零，我们称表示 π 是 G^θ-区分的。

1.1.4. 对任意 $\Phi \in \mathcal{S}(S(\mathbb{A}))$，定义一个函数 K_Φ，其定义在 $G(F)Z_G(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上，定义如下

$$\begin{aligned} K_\Phi(g) &= \sum_{\theta \in S(F)} \Phi(g^{-1}\theta g) \\ &= \sum_{\theta \in \Xi} \int_{G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} K_{\Phi_\theta}(g,h)\,dh \end{aligned}$$

其中，对 任意函数 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 以及任意 $x, y \in G(\mathbb{A})$，我们将其相乘，得到“自守核”

$$K_f(x,y) = \sum_{\gamma \in G(F)} f(x^{-1}\gamma y). \tag{1.1.4.1}$$

群 $G(\mathbb{A})$ 通过右平移作用于由函数 K_Φ 张成的空间，其中Φ 遍历$\mathcal{S}(S(\mathbb{A}))$。Jacquet 提出了对该空间进行谱分解的问题，参见例如 [Jac97] 。下面的计算对任意 $\phi \in V_\pi$ 都成立，它

$$\int_{Z_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_\Phi(g)\overline{\phi(g)}\,dg = \sum_{\theta \in \Xi} \int_{G^\theta(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \Phi(g^{-1}\theta g) \overline{\int_{Z_G(\mathbb{A})G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \phi(hg)\,dh}\,dg,$$

表明， K_Φ 的尖点分量由尖点自守表示构成，而这些表示对于至少一个满足 $\theta \in \Xi$ 的群 G^θ 是区分的。

1.1.5. 相对迹公式。 — 相对迹公式应当提供一种便捷的方法，以利用函数 K_Φ 中包含的谱信息。这个假设性的公式有多种表述方式。按照 Sakellaridis 在 [Sak19，第 1.2 节 2], 中的表述，我们要研究厄米内积

$$(\Phi, \Phi') \in \mathcal{S}(S(\mathbb{A}))^2 \mapsto \langle K_\Phi, K_{\Phi'} \rangle = \int_{G(F)Z_G(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \overline{K_\Phi(g)} K_{\Phi'}(g)\,dg$$

它通常并不收敛。不过，忽略收敛性问题，并引入由 $\Phi_\theta^*(g) = \overline{\Phi_\theta(g^{-1})}$ 定义的函数 $\Phi_\theta^* \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，便可写成

$$\begin{aligned} \langle K_\Phi, K_{\Phi'} \rangle &= \sum_{\theta,\theta' \in \Xi} \int_{Z_G(\mathbb{A})G(F)\backslash G(\mathbb{A})} \int_{G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} K_{\Phi_\theta^*}(h,g)\,dh \int_{G^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} K_{\Phi_{\theta'}}(g,h')\,dh'dg \\ &= \sum_{\theta,\theta' \in \Xi} \int_{Z_G(\mathbb{A})G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \int_{G^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} \int_{G(\mathbb{A})} \Phi_\theta^*(h^{-1}g) K_{\Phi_{\theta'}}(g,h')\,dgdh'dh \\ &= \sum_{\theta,\theta' \in \Xi} \int_{Z_G(\mathbb{A})G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \int_{G^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} K_{\Phi_{\theta,\theta'}}(h,h')\,dh'dh \end{aligned}$$

其中 $\Phi_{\theta,\theta'}$ 表示卷积乘积 $\Phi_\theta^* * \Phi_{\theta'}$。

因此，我们需要研究这个先验 发散积分

$$\int_{Z_G(\mathbb{A})G^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \int_{G^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} K_f(h,h')\,dh'dh \tag{1.1.5.1}$$

对于任意函数 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，这更接近 Jacquet 在 [Jac97] 中提出的观点。本文的目的是构造一个依赖辅助参数的自守核修正变体$K_f(h,h')$，使得上述积分绝对收敛。于是，我们可以仿照 Arthur 迹公式（参见 [Art05],），得到一个引人注目的恒等式：两个由不同类型的分布构成的和，均定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上：

一方面是谱分布，粗略地说，它们是借助周期 $\mathcal{P}_{G^\theta}$ 和 $\mathcal{P}_{G^{\theta'}}$ 构造的“相对”特征；另一方面是几何分布，它们推广了与 $G^\theta(F)\backslash G(F)/G^{\theta'}(F)$ 中双陪集相关的“相对”轨道积分。不过需要指出的是，一旦取 $n > 2$，我们得到的公式虽然在 $G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 对 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 的右作用下不变，却不在 $G^\theta(\mathbb{A})$ 的左作用下不变。也可以将我们的公式视为 $\mathcal{S}(S_{\theta'}(\mathbb{A}))$ 上的一个分布：在这种情况下，该公式在 G^θ 对 $\mathcal{S}(S_{\theta'}(\mathbb{A}))$ 的共轭作用下不变性不成立。换言之，对称空间的迹公式（至少是我们所考虑的那些）似乎比 Gan-Gross-Prasad 猜想中出现的某些簇的迹公式更接近 Arthur 迹公式：请注意，在其工作 [Zyd20], 中，Zydor 得到了不变分布。实际上，我们公式中主要的几何项和谱项分别是加权相对轨道积分和加权相对特征。

1.1.6. 在更详细地讨论这些结果之前，我们想先说明研究这些相对迹公式的一些动机。让我们回到对称空间 G/G^θ 的自守谱分解这一基本问题；本质上，这是对由函数 K_Φ 张成的空间进行谱分解。根据 Nadler [Nad05],Sakellaridis [Sak13], Sakellaridis-Venkatesh [SV17]以及 Takeda [Tak23],等人的工作，我们预期，G/G^θ 的自守谱将由某个对偶群控制，朗兰兹参数（当然，目前仍是猜想性的）可经由该群分解；这些参数对应于出现在 G/G^θ 的自守谱中的 $G(\mathbb{A})$ 的自守表示。若要了解更多细节，请读者参阅 [Cha25b，第 1 节1]中的讨论。

暂且假设 $D = F$，从而 G 是F上的一般线性群 $GL(n)$。上述猜想应当可以有一种具体的表述。让我们排除平凡情形 $n = 1$ 来说明这一点；在该情形中，对称空间退化为一个点。对于 $n \geqslant 2$，Friedberg-Jacquet 在 [FJ93] 中观察到，G/G^θ 的尖自守谱为空，除非 n 为偶数且 θ 共轭于矩阵

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} I_{n/2} & 0 \\ 0 & -I_{n/2} \end{pmatrix}.$$

此外，在该情形下，Friedberg-Jacquet 证明，$G(\mathbb{A})$的尖点自守表示 $\pi = GL(n, \mathbb{A})$ 出现在 G/G^{θ_0} 的谱中，当且仅当表示 π 为辛型，并满足 $L(1/2, \pi) \neq 0$，其中 $L(s, \pi)$ 是 L 标准函数。为辛型这一条件意味着，外平方 $L(s, \pi, \Lambda^2)$函数在 $s = 1$处有一个极点。当然，研究并不止于尖点谱。例如，考虑 [Cha25b], 中研究的情形，其中 $n = 2p + 1$ 与 $p \geqslant 1$ 以及

$$\theta = \begin{pmatrix} I_{p+1} & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}.$$

设 σ $G(\mathbb{A}) = GL(2p + 1, \mathbb{A})$ 表示由 Levi 子群 $GL(1, \mathbb{A}) \times GL(2p, \mathbb{A})$ 的表示 $1 \boxtimes \pi$ 诱导而来，其中 1 是 $GL(1, \mathbb{A})$ 的平凡表示，而 π是 $GL(2p, \mathbb{A})$ 的尖点自守表示。那么，根据 [Cha25b], , 表示σ 属于 G/G^θ 的自守谱，当且仅当 π 为辛型。

现在回到中心在任意 F 上的指标为 d的可除代数 D 的情形。我们有 Jacquet-Langlands 全局对应，它将 $G(\mathbb{A})$的自守表示与 $G^*(\mathbb{A})$的自守表示对应起来，其中 $G^* = GL(nd)$。这一对应已由 Badulescu 和 Renard 在完全一般的情形下建立，参见 [Bad08 、 BR10]。这一对应可作为 Langlands 猜想的全局参数的替代。因此，自然会猜想：$G(\mathbb{A})$的自守表示 π 出现在簇 S 的自守谱中，与其 Jacquet-Langlands 转移出现在 G^*所对应的簇 S^*的自守谱中，两者之间存在联系。关于 n 偶数的情形以及与上述元素 θ_0 相关的分量的结果，请读者参阅 Matringe-Offen-Yang 的近期工作 [MOY25，定理 1.3]。一种研究

这一问题的方法是比较 G 与 G^*的相对迹公式（例如， [Zha15]中提出的方法）。正如 Jacquet-Langlands 对应体现为群 $G(\mathbb{A})$和$G^*(\mathbb{A})$的表示特征之间的局部恒等式，而这些恒等式又与局部轨道积分之间的恒等式互为对偶（从更广泛的角度看，这类似于 Arthur迹公式中的端oscopy理论），相对轨道积分之间也应存在恒等式，并与相对特征之间的恒等式互为对偶。这一方法还应能给出周期的显式分解，其思路与 Ichino-Ikeda公式相同，即用局部泛函和函数L的特殊值来表示。

关于 S^* 和 G^* 的相对迹公式，也应有助于理解其他对称空间的自守谱。具体而言，设 E/F 是一个数域的二次扩张，记 η 为由类域论与 $\mathbb{A}^\times$ 相关联的二次特征。再假设矩阵代数 $M(n,\ D)$包含 E。这意味着 nd 为偶数。设 H 为 G 中 E的中心化子。设 π 是 $G(\mathbb{A})$的一个尖点自守表示 π，并设 π^* 是其到 G^*的 Jacquet-Langlands 转移。那么 π^* 是 $G^*(\mathbb{A})$的一个自守表示，且我们进一步假设它是尖点表示。Matringe-Offen-Yang 在 [MOY25 的定理 1.4],中证明了以下结果。该结果由 Guo-Jacquet 在 [Guo96],中提出猜想，是 Waldspurger 的一个著名结果 [Wal85], 的推广（另见 [Jac86]）：如果表示 π出现在 G/H 的自守谱中，那么 π^* 和 $\pi^* \otimes \eta \circ \det$ 都出现在 $G^*/(G^*)^\theta$ 的自守谱中，其中

$$\theta = \begin{pmatrix} I_{nd/2} & 0 \\ 0 & -I_{nd/2} \end{pmatrix}.$$

需要指出的是，Matringe-Offen-Yang 在他们的工作中并未使用相对迹公式，而是研究了 Eisenstein 级数的某些截断周期。这些截断对我们也发挥着作用：在本文中，我们将自守核的修改变体与这些核的截断联系起来。Matringe-Offen-Yang 还证明了其定理的一个逆命题，而且这个逆命题更难表述。当然，我们希望能超越 π^* cuspidale 假设，甚至描述 G/H 的整个自守谱，并将周期分解为局部对象的项。在这方面，相对迹公式应当是一种有力的工具（参见 [Jac86, JC01, FMW18, Zha15, XZ25] ，其中有一些启发性结果）。

1.2 结果概述

1.2.1. 继续沿用上一节的记号。设 $G(\mathbb{A})^1$ 为 $G(\mathbb{A})$ 上行列式模数的核。我们有分解 $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 \times A_G^\infty$，其中 A_G^∞ 是 $G(\mathbb{A})$ 的某个中心子群，参见 § 2.1.9。固定 $P_0 \subset G$ 一个定义在 F 上的极小抛物子群。再固定 M_0 一个定义在 F 上的 P_0 Levi 因子。取 $\theta,\ \theta' \in \Xi$。我们可以并且将假设 θ 和 θ' 是 $M_0(F)$ 中彼此可交换的元素。令 $[G^\theta] = G(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})$，以及$[G^\theta]^G = G^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)$。此记号对 θ' 也同样适用。于是，相对迹公式的问题就是给出一种方法，在其定义域上对映射进行积分

$$(x, y) \in [G^{\theta'}]^G \times [G^\theta] \mapsto K_f(x, y)$$

其中 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。对于 $n = 1$，商 $[G^{\theta'}]^G$ 是紧集，且上述映射快速衰减。特别地，它在其定义域上可积。一般而言，该映射关于一个变量快速衰减，但关于另一个变量缓慢增长，因此不足以保证在 $[G^{\theta'}]^G \times [G^\theta]$ 上的积分收敛。受 Arthur 关于迹公式的研究启发，参见 [Art78, Art05], ，我们引入一个修正核$K_f^T(x,\ y)$，它一方面取决于 $G(\mathbb{A})$ 中一个与 M_0 处于良好位置的极大紧子群的选择，另一方面取决于一个辅助参数 T，该参数取值于某个实向量空间的锥中；其定义见第3.2小节。在那里，这个修正核更常记为 $K_f^{T,\ \theta'\ \theta}(x,\ y)$，因为所用的修正取决于 θ' 和 θ 的选择，参见注

1.3.8.1. 这个修正核有两种分解。第一种是谱分解，基于将 $K_f(x,\ y)$ 解释为右卷积算子 $R(f)$ 在空间 $L^2([G])$ 上的核；该空间由 $[G]=G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的平方可积函数构成。Langlands 给出的分解

$$L^2([G])=\hat{\oplus}_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}L^2_\chi([G]), \tag{1.2.1.1}$$

根据 G 的尖点数据集合 $\mathfrak{X}(G)$，在不变闭子空间上（以及某些与 G 的抛物子群相关的类比空间上）的分解

$$K_f^T(x,y)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}K^T_{\chi,f}(x,y). \tag{1.2.1.2}$$

第二种是几何性的，在 (4.2.4.5) 中引入：它是一个以商范畴 $\mathfrak{c}$ 的有理点为指标的和，其中 G 受 $G^{\theta'}$ 和 G^θ 分别从左和从右作用：

$$K_f^T(x,y)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)}K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y). \tag{1.2.1.3}$$

下面介绍我们得到的主要收敛结果之一。

定理 1.2.1.1.— （更强且更精确的版本参见定理 *3.3.2.1* 和 *4.2.5.1*）对于任意函数 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 以及锥中的任意 T，有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|K^T_{\chi,f}(x,y)|\,dxdy<\infty \tag{1.2.1.4}$$

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)|\,dxdy<\infty. \tag{1.2.1.5}$$

设 η 是 $\mathbb{A}^\times/F^\times$ 的一个特征。与行列式复合后，得到 $G(\mathbb{A})$ 的一个特征，它在子群 $G(F)$ 上平凡，仍记作 η。

在 §§ 3.4.1 和 4.2.7 中，对任意 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 和 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$，定义

$$J^T_\chi(\eta,f)=\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}K^T_{\chi,f}(x,y)\,\eta(x)dxdy\ ;$$
$$J^T_\mathfrak{o}(\eta,f)=\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)\,\eta(x)dxdy.$$

上述积分的绝对收敛性由定理 1.2.1.1 保证，至少当 eta 是酉的情形如此；否则则由定理 3.3.2.1 和 4.2.5.1 保证。由此得到的线性形式 $J^T_\mathfrak{o}(\eta)$ 和 $J^T_\chi(\eta)$ 在施瓦茨空间的自然拓扑下连续。于是得到以下结论。

定理 1.2.1.2。——（参见定理 *4.3.1.1*）对于任意函数 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}J^T_\chi(\eta,f)=\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)}J^T_\mathfrak{o}(\eta,f).$$

此处我们假设 η 在 A_G^∞ 上是平凡的。这意味着特征 η 是酉的。我们已经注意到，对于收敛问题而言，这一假设是多余的。不过，若不作此假设，就必须重新表述对 T 的依赖性以及分布的协变性，参见下文第 1.2.2 节。事实上，我们证明了 $J^T_\chi(\eta,\ f)$,

作为参数 T的函数，与一个多项式指数函数重合，参见命题 3.5.3.2。于是，我们将 $J_\chi(\eta,\ f)$定义为该表达式的常数项。类似地，我们定义 $J_\mathfrak{o}(\eta,\ f)$，参见第 4.2.7 节。

由此得到“Guo-Jacquet 迹公式”。

定理 1.2.1.3。——（参见定理 *4.3.2.1*）线性形式 J_χ（η）和 $J_\mathfrak{o}$（η）在 $\mathcal{S}$（G（$\mathbb{A}$））上是连续的。此外，对于任意函数 $f \in \mathcal{S}$（G（$\mathbb{A}$））,

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} J_\chi(\eta,f) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} J_\mathfrak{o}(\eta,f).$$

可以说，这是一个“未经加工的”公式：随着各种映射的应用，它还需要逐步加以细化。基于这一点，我们将对某些分布$J_\mathfrak{o}$ 和 J_χ 进行明确描述，其中的 χ 和 $\mathfrak{o}$ 相当一般。在此之前，我们将回顾这些分布的协变性。

1.2.2. 协变性。 — 群 $G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 和 $G^\theta(\mathbb{A})$ 分别通过记为 $f \mapsto {}^g f$ 和 $f \mapsto f^g$ 的左平移和右平移作用于 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，参见 § 3.5.4。上文定义的分布 $J_\chi(\eta)$ 和$J_\mathfrak{o}(\eta)$一般而言并非这些作用下的不变量。下面的结果借助定义在 G 的 Levi 子群上的类比分布，表达了不变性的缺失。

命题 1.2.2.1.—（参见命题 *3.5.5.1* 和 *4.2.8.3*）。符号 $\bullet$ 表示尖点数据 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ 或范畴商 $\mathfrak{c}(F)$的有理点 $\mathfrak{o}$。

1. 对任意 $g \in G^\theta(\mathbb{A})$ 以及任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$J_\bullet(\eta, f^g) = J_\bullet(\eta, f).$$

2. 对任意 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 以及任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$J_\bullet(\eta,{}^g f) - J_\bullet(\eta, f) = \eta(g) \sum_{(Q,w_1',w_2')} J_\bullet^{Q,\theta_1,\theta_2}(\eta, f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'})$$

其中，求和遍历由有限多个三元组 (Q, w_1', w_2') 构成的集合；这些三元组由一个真抛物子群 $P_0 \subset Q \subsetneq G$ 及其 *Levi* 因子 M_Q （包含 M_0 ）和魏尔群 (G, M_0) 的元素 w_1' 与 w_2' 组成。与之对应的是 $M_0(F)$ 中阶至多为 *2* 的元素 θ_1 和 θ_2，以及一个定义在 $\mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$ 上的分布 $J^Q_{\bullet\ \theta_1\ \theta_2}$，它在 *(3.5.3.2)* 中定义为上述在 T 上、于 *(3.4.2.3)* 或 *(4.2.8.5)* 引入的多项式指数函数的常数项；还有一个定义在 $\mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$ 上的函数 $f^{w_1'}{}_{,Q\,\eta}{}^{w_2'}{}_{,,g} \in$，定义见 *(3.5.4.1)*。

1.2.3. 分布 $J_\chi(\eta)$**.** — 当 χ 是一对 (G,π) 的类时，其中 π 是 $G(\mathbb{A})$ 的不可约尖点自守表示（其中心特征在 A_G^∞ 上平凡），分布 $f \mapsto J_\chi(\eta, f)$ 等于相对特征

$$\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_\pi} \mathcal{P}_{G^{\theta'},\eta}(\pi(f)\varphi)\overline{\mathcal{P}_{G^\theta}(\varphi)}.$$

这里，$\mathcal{P}_{G^{\theta'},\eta}$是与 π 相关联的、定义在子空间 $V_\pi \subset L^2(G(F)A_G^\infty\backslash G(\mathbb{A}))$ 上的线性形式，并由下式给出

$$\mathcal{P}_{G^{\theta'},\eta}(\varphi) = \int_{[G^{\theta'}]_0} \varphi(h)\eta(h)\,dh$$

其中 $[G^{\theta'}]_0 = G^{\theta'}(F)A_G^\infty\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})$。线性形式 $\mathcal{P}_{G^\theta}$ 是相对于群 G^θ 和$\blacklozenge\blacklozenge$平凡特征以类似方式定义的。和取遍某个子空间 V_π的希尔伯特基 $\mathcal{B}_\pi$。或许会令读者失望，但我们还是要说明，这些周期往往为零。若 $n = 1$,

所考虑的周期之积恒为零，除非 η 是平凡特征且 π 是平凡表示。若 $n>1$，只要 θ（或 θ'）的特征值 ±1 的重数不相等，周期之积就为零；当 n为奇数时，这种情况总是发生。这是对 [FJ93，命题 2.1]的推广所导致的。在这种情形下，尖点谱对迹公式完全没有贡献。在 [Cha25b] 中给出了一个“相对尖点”贡献的例子；此时，该贡献可借助加权相对特征来表示。对于一般的尖点数据 χ，更明确的分布 $J_\chi(\eta)$ 公式将留待未来工作。尽管如此，我们在此证明以下结果，它应有助于研究 $J_\chi(\eta)$，而且无论如何，该结果已用于 [Cha25b]。

定理 1.2.3.1。—— （更强且更精确的结果见定理 *3.3.3.1*。）设 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 是尖点数据。表达式 $J_\chi^T(\eta,f)$作为参数 T 的函数，当 T 沿正室远离壁趋于无穷时，渐近于积分

$$\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}\Lambda_{\theta'}^T K_\chi(x,y)\,\eta(x)dxdy.$$

下面说明所用的记号。算子 $\Lambda_{\theta'}^T$ 是一种称为“相对”的截断算子（这是相对于 Arthur 的 [Art80] 中“绝对”截断算子而言的）。我们在第 2.4 小节中定义它。值得指出的是，我们的定义的一种变体已见于 Zydor[Zyd22 的第 3.7] 节。我们的算子具有几项重要性质：它将 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上光滑且具有一致温和增长的函数，变为 $[G^{\theta'}]^G$ 上快速衰减的函数（精确结果见命题 2.4.3.1）；它使 $[G]$ 上的尖点函数保持不变（即常数项为零的函数）；最后，对于 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上任意连续函数 ϕ，函数 $\Lambda_{\theta'}^T\phi$ 在 $G^{\theta'}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1$ 上逐点收敛至 ϕ 在该子群上的限制。这一性质可直接由命题 2.4.3.2 得出。相反，Zydor 算子不满足这一性质，参见注 2.4.2.1。不过，在 [Cha25b] 中，这一性质至关重要；该文在某些情形下给出了 $J_\chi(\eta)$ 的明确表达。读者可参阅 [Cha25b 中的定理 2.4.3.1 和 2.5.1.1] 及其证明。

1.2.4. 分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta,f)$：正则半单情形。— 在下文中，我们将 G/G^θ 认作簇 S 中由 θ 所在的连通分支 S_θ，该簇由 (1.1.1.1) 定义。沿着 $G^\theta(\mathbb{A})$ 对 f 积分（参见 (1.1.2.1)），得到定义在 $\mathcal{S}(S_\theta(\mathbb{A}))$ 上的 Schwartz 函数 φ。对任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$，令

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta,\varphi)=J_{\mathfrak{o}}(\eta,f).$$

于是，左端定义了 $\mathcal{S}(S_\theta(\mathbb{A}))$ 上的一个分布。范畴商 $\mathfrak{c}$ 可识别为 S_θ 在 $G^{\theta'}$ 的共轭作用下所得范畴商 $\mathfrak{c}_\theta$。这样，我们将 $\mathfrak{o}$ 视为 $\mathfrak{c}_\theta(F)$ 的一个元素。

设 $\gamma\in S_\theta(F)$。若 γ 在 $G^{\theta'}$ 的作用下的轨道是闭的，则称 γ 为 $G^{\theta'}$-半单；若该轨道在 S_θ 中的 $G^{\theta'}$-轨道里维数最大，则称 γ 为 $G^{\theta'}$-正则。存在一个稠密开集 $\mathfrak{c}_\theta^{\mathrm{rss}}\subset\mathfrak{c}_\theta$，使得对任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}_\theta^{\mathrm{rss}}$，典范映射 $S_\theta\to\mathfrak{c}_\theta$ 在 $\mathfrak{o}$ 上方的纤维 $S_{\theta,\mathfrak{o}}$ 由唯一一个 $G^{\theta'}$-轨道构成，该轨道必为正则半单轨道。

设 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}_\theta^{\mathrm{rss}}(F)$。设 M 是 G 的一个 Levi 子群，包含 M_0，且 M 对以下性质而言是极小的：$(M\cap S_\theta,\mathfrak{o})(F)\neq\emptyset$。若 $M=G$，则称 $\mathfrak{o}$ 为 (G,θ')-各向异性的。注意，与 Arthur 迹公式的情形不同，也就是说，与 G 通过共轭作用于自身的情形不同，一般而言并不存在 (G,θ')-各向异性元素。存在这类元素的充要条件是：$n=1$ 或 $n>1$，且 θ（分别为 θ'）的特征值 ±1 的重数相等。(G,θ')-各向异性元素的存在或缺失，似乎在对偶意义下反映了迹公式中尖点谱的存在或缺失。设 $\gamma\in(M\cap S_\theta)(F)$ 在 $\mathfrak{c}_\theta(F)$ 中的像为 $\mathfrak{o}$。当且仅当 γ 在 $G^{\theta'}$ 中的中心化子 $G_\gamma^{\theta'}$ 模 G 的中心各向异性时，$\mathfrak{o}$ 才是 (G,θ')-各向异性的。注意，$G_\gamma^{\theta'}$ 是一个连通约化群，一般既不是环面，也不包含 $G^{\theta'}$ 的极大环面；这一点与 Arthur 迹公式的情形不同

这里同样与 Arthur 迹公式的情形不同。设 A 为 $G_\gamma^{\theta'}$ 的极大中心分裂环面。注意， M 的极大中心分裂环面 A_M 包含于 $G_\gamma^{\theta'}$ 中，因此有 $A \subset A_M$。设 G 的 Levi 子群 L 定义为 A 的中心化子。于是 $G_\gamma^{\theta'} \subset L$ 且 $M \subset L$。于是 A_L 是 $G_\gamma^{\theta'}$ 的一个中心分裂子环面，因此有 $A_L \subset A$；事实上，根据 L 的构造， $A_L = A$ 。对任意 $g \in G(\mathbb{A})$，都有 Arthur 权重 $v_L^G(g)$，参见 § 4.6.1：它出现在 Arthur 迹公式的加权轨道积分中，参见 Art78，§8]。它取决于 $G(\mathbb{A})$ 的极大紧子群的选取；该子群参与修正核 K^T 的定义。

首先，假设特征 η 在中心化子 $G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 上非平凡。在这种情况下，我们得到

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, f) = J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi) = 0.$$

现在假设特征 η 在 $G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 上是平凡的。于是可以将 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi)$ 表示为由特征 η扭曲的加权轨道积分。更确切地说，有

定理 1.2.4.1。— （参见定理 *4.6.3.1*）在上述假设下，有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, f) = J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi) = \mathrm{vol}(G_\gamma^{\theta'}(F)A_L^\infty \backslash G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})) \cdot \int_{G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} \varphi(h^{-1}\gamma h) v_L^G(h)\, \eta(h) dh$$

其中 A_L^∞ 是 L（$\mathbb{A}$） 的中心子群，参见 *§ 2.1.9*。

$G_\gamma^{\theta'}(F)A_L^\infty \backslash G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 的体积是有限的。权 v_L^G 是一个函数，它在 $L(\mathbb{A})$ 左作用下不变，因而也在 $G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 左作用下不变，并且取决于 A_L^∞ 和 A_G^∞ 上 Haar 测度的选择。这些选择与在 $G_\gamma^{\theta'}(F)A_L^\infty \backslash G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 上商测度的定义以及测度 $G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A}) = A_G^\infty \times (G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)$ 的分解中所采用的选择相容。在 $G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 上的测度选择，在该积分中与商 $G_\gamma^{\theta'}(F)A_L^\infty \backslash G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A})$ 上的测度相同。阿代尔积分绝对收敛。然而，如果 $L \subsetneq G$，分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta)$ 在 $G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 的作用下并不不变。

1.2.5. 分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, f)$：一般情形下的下降。 — 在一般情形下，即$\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$任意时，我们给出一个关键步骤，以便将 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi)$表示为局部对象的项。更确切地说，我们将这个问题归结为幺幂情形，也就是与 Id_{D^n}相关的不变量 $\mathfrak{o}$ 的情形。在给出一些细节之前，我们注意到，为了对对称空间进行 Jordan 分解，在引言余下部分及本文中，研究$S_\theta = S_\theta\theta'$ 将比研究 S_θ更方便。设 $\widetilde{\mathfrak{c}_\theta}$ 为 $\widetilde{S_\theta}$ 关于 $G^{\theta'}$ 共轭作用的范畴商。它可与 $\mathfrak{c}_\theta \simeq \mathfrak{c}$等同。设$(\widetilde{S_\theta})_{\mathfrak{o}}$ 为范畴商$\widetilde{\ }$ $S_\theta \to \widetilde{\mathfrak{c}_\theta}$在 $\mathfrak{o}$上方的纤维。设 M为如上所述的 G的一个 Levi 子群。我们固定一个元素 $\gamma \in (M \cap (\widetilde{S_\theta})_{\mathfrak{o}})(F)$，其 $G^{\theta'}$-轨道是闭的。于是中心化子 G_γ是一个连通约化群，并带有由 θ'的共轭作用所诱导的对合；设$G_\gamma^{\theta'} = G^{\theta'} \cap G_\gamma$为其不动点子群。这称为$(G, G^{\theta'})$的一个下降，其所有可能情形在命题 4.5.1.1 中有明确描述。根据引理 4.5.5.1，我们有

$$(\widetilde{S_\theta})_{\mathfrak{o}} = \mathrm{Int}(G^{\theta'})(\gamma \cdot (\mathcal{U}_{G_\gamma} \cap \widetilde{S_{\theta'}}))$$

其中，Int 表示共轭作用，$\mathcal{U}^{G_\gamma}$ 表示由 G_γ 的幂单元组成的簇。$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$单位元属于 $S_{\theta'}$ ，且 $S_{\theta'}$ 在该点的切空间可识别为 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间

$$\mathfrak{s}_{\theta'} = \{X \in \mathfrak{g} | \, \mathrm{Ad}(\theta')(X) + X = 0\},$$

其中 Ad 表示伴随作用。指数映射诱导出一个同构

$$\exp : \mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\gamma} \cap \mathfrak{s}_{\theta'} \to \mathcal{U}_{G_\gamma} \cap \widetilde{S_{\theta'}}$$

其中记 $\mathrm{N}\mathfrak{g}_\gamma$ 为李代数 $\mathfrak{g}_\gamma$ 的幂零锥。群 $G_\gamma^{\theta'}$ 作用于$\mathfrak{s}_{\theta'}$，$\gamma = \mathfrak{s}_{\theta'} \cap \mathfrak{g}_\gamma$。于是，我们将 $J_\mathfrak{o}(\eta, f) = J_\mathfrak{o}(\eta, \varphi)$ 与 $G_\gamma^{\theta'}$ 作用于 $\mathfrak{s}_{\theta'}$,γ时的无穷小迹公式中的幂零贡献联系起来。更确切地说，若 $\gamma = \mathrm{Id}$，则得到$G^{\theta'}$ 作用于$\mathfrak{s}_{\theta'}$ 的作用，相应的迹公式在 [Li22] 中进行了研究。一般而言，对$G_\gamma^{\theta'}$ 作用于$\mathfrak{s}_{\theta'}$,γ 的研究可归结为若干更简单的群作用的乘积：其中至多有两个因子上的作用是刚才所描述的作用（但秩更小），而其他因子上的作用则由下述模型给出。取一个整数 $r \geqslant 1$、E'/F 一个有限扩张、D' 一个 E' 上的中心单代数，以及 E/E' 一个二次 étale 代数，并记 σ 为其唯一的 E'-非平凡自同构。再记σ 为由 $\sigma \otimes \mathrm{Id}$ 给出的 $E \otimes_{E'} D'$ 的自同构。所要考虑的作用是群 $G' = GL(r, D')$ 通过共轭在空间上的作用

$$\{X \in M(r, E \otimes_{E'} D') | X + \sigma(X) = 0\}.$$

设 $\iota \in E$ 是满足 $\iota + \sigma(\iota) = 0$ 的非零元素。映射 $X \mapsto \iota X$ 遂将前述作用等变地等同于 G' 在其李代数上的伴随作用。约化群的伴随作用的迹公式已在 [Cha02] 中研究。

G_γ 的抛物子群 R' 若在 θ' 作用下稳定，且包含 $G_\gamma^{\theta'}$ 的一个极小抛物子群，则称为“相对标准”。对于这样的 R'，将其与 R' 的 Levi 因子 $M_{R'}$ 的一个特征 $\chi_{R'}$ 以及一个幂零分布 $J^{R'}{}_{\text{幂零}}(\eta, \chi_{R'})$ 联系起来；该分布在 §4.7.6 中定义于 $M_{R'}/M_{R'}^{\theta'}$ 在单位元处的切空间 $\mathfrak{s}_{\theta', R'}$ 上，是发散线性泛函的一个截断版本

$$\Phi \mapsto \int_{[M_{R'}^{\theta'}]^{R'}} \sum_{X \in (\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\gamma} \cap \mathfrak{s}_{\theta', R'})(F)} \Phi(\mathrm{Ad}(h^{-1})X)\, dh$$

对任意定义在 $\mathfrak{s}_{\theta', R'}(\mathbb{A})$ 上的 Schwartz 函数 Φ，其中 $[M_{R'}^{\theta'}]^{R'}$ 是 $[G^{\theta'}]^G$ 的一个类比。我们也通过 (4.5.8.2)、(4.5.13.4) 和 (4.5.13.11)，为 φ 和 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 关联一个定义在 $\mathfrak{s}_{\theta', R'}(\mathbb{A})$ 上的 Schwartz 函数 $\Phi_{g, R'}$。

定理 1.2.5.1。— （参见定理 *4.5.13.2*）设 $\varphi \in \mathcal{S}(S_\theta(\mathbb{A}))$ 是一个紧支撑函数。则

$$J_\mathfrak{o}(\eta, \varphi) = \int_{G_\gamma^{\theta'}(\mathbb{A}) \backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})} \sum_{R'} J_{\mathrm{nilp}}^{R'}(\eta, \chi_{R'}, \Phi_{g, R'}) \eta(g)\, dg$$

其中，和式遍历 G_γ 的一个有限集相对标准抛物子群 R'。

1.3 群 $G = GL(2, D)$ 的例子

1.3.1. 我们暂且不考虑显然的情形 $n = 1$，此时簇 S 由两个点构成。自守核的谱分量积分直接收敛，并给出不变分布；除非特征 η 是平凡特征且尖点数据对应于平凡特征，否则这些分布实际上都为零。至于几何展开，则化简为核积分。

1.3.2. 我们将更详细地考察情形 $n = 2$。回顾一下，特征 η 在 A_G^∞上是平凡的。因此，簇 S 有三个连通分支，它们分别是矩阵 I_2、$-I_2$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$的 G-轨道。

1.3.3. 我们将使用以下记号。设 $B \subset G$为由上三角矩阵组成的极小抛物子群。它具有 Levi 分解 $B = M_B N_B$

其中 M_B 是对角矩阵子群， N_B 是 B的幺幂根基。设$A_B \subset M_B$ 为极大中心分裂环面， α 为 A_B 在 N_B中的唯一根。截断参数 T 是向量空间 $\mathfrak{a}_B = \mathrm{Hom}(X^*(M_B)\ \mathbb{R})$中的一点；该空间是群 $X^*(M_B)$ 的有理特征群的对偶，这些特征定义在 M_B 的 F 上。根 α 在 $\mathfrak{a}_B$ 上诱导一个线性形式，记作$\langle\alpha,\cdot\rangle$。设 $\hat{}\tau_B$为 $\mathfrak{a}_B$上的函数，它是由满足$\langle\alpha, H\rangle > 0$的 H构成的锥的特征函数。我们假设$\langle\alpha, T\rangle$ 足够大。

固定一个相对于 M_B 处于良好位置的极大紧子群 $K \subset G(\mathbb{A})$：于是有一个右 K-不变映射 $H_B:\ G(\mathbb{A}) \mapsto \mathfrak{a}_B$ ，它在 $B(\mathbb{A})$ 上与如下同态一致：将 $M_B(\mathbb{A})$ 到 $\mathrm{Hom}(X^*(M_B)\ \mathbb{A}^\times)$ 的典范态射与通常的模的对数复合而成的同态。记 $M_B(\mathbb{A})^1$ 为该同态的核。我们对 K、 $N_B(\mathbb{A})$ 和 $M_B(\mathbb{A})^1$ 上的 Haar 测度进行正规化，使得 K、$N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})$ 以及 $M_B(F)\backslash M_B(\mathbb{A})^1$（对于商测度）的体积均为 1。态射 $m \mapsto \alpha, H_B(m)$ 导出一个正合序列

$$1 \to M_B(\mathbb{A})^1 \to M_B(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1 \to \mathbb{R} \to 1.$$

在 $M_B(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ 上赋予测度，使得商 $\mathbb{R}$ 上的测度为勒贝格测度。于是，$G(\mathbb{A})^1$ 赋予与分解 $G(\mathbb{A})^1 = (M_B(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)N_B(\mathbb{A})K$ 相容的测度。最后，将 A_G^∞ 自然地识别为 $\mathbb{R}_+^\times$，并在其上赋予通常的勒贝格测度。分解 $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A})^1 \times A_G^\infty$ 从而确定 $G(\mathbb{A})$ 上的一个 Haar 测度，该测度与右端上的乘积测度相容。同样地，可在 $M_B(\mathbb{A})$ 上得到一个 Haar 测度。

设 $W = \{I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$。我们将使用以下计算

(1.3.3.1)

$\forall x \in G(\mathbb{A})$

$$\int_{M_B(F)\backslash(M_B(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} (1 - \sum_{w\in W} \hat{\tau}_B(H_B(wyx) - T))\eta(y)\, dy = \begin{cases} 0 \text{ si } \eta \text{ n'est pas trivial} \\ \langle\alpha, 2T - H_B(wx) - H_B(x)\rangle \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1.3.3.2)

$$\int_{[G]^G} (1 - \sum_{\delta\in B(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_B(H_B(\delta x) - T))\, \eta(x) dx = \begin{cases} 0 \text{ si } \eta \text{ n'est pas trivial} \\ \mathrm{vol}([G]^G) - \exp(-\langle\alpha, T\rangle) \text{ sinon.} \end{cases}$$

其中 $[G]^G = G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$.

代数 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 通过右卷积作用于空间 $L^2(M_B(F)N_B(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$。与 f 对应的算子具有一个核，记为 $K_{B,f}$。设 $K_{B,\chi,f}$ 为该核中与分解中由 χ 标记的因子相对应的分量

$$L^2(M_B(F)N_B(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})) = \hat{\oplus}_{\chi'\in\mathfrak{X}(G)} L^2_{\chi'}(M_B(F)N_B(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}))$$

根据 G 的尖点数据。我们还定义

$$\begin{aligned} (K_{\chi,f})_B(x,y) &= \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})} K_{\chi,f}(nx, y)\, dn \\ &= \sum_{\delta\in B(F)\backslash G(F)} K_{B,\chi,f}(x, \delta y). \end{aligned} \tag{1.3.3.3}$$

1.3.4. 设 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$。设 $K^{T,\ \theta'\ \theta}{}_{,\chi,f}$为第3.2小节定义的修正核，它与 S 中属于 § 1.3.2 所给元素的 θ, θ' 相关。设 $\chi_0 \in \mathfrak{X}(G)$ 为与 $(M_B, 1)^\chi$相关联的尖点数据，其中 1 是 $M_B(\mathbb{A})$ 的平凡表示。

1.3.5. 在§§ 1.3.6、1.3.7和1.3.8给出的前三个例子中，几何商退化为一个点，而几何展开退化为一项。

1.3.6. 情形 $\theta=\theta'=I_2$**.**—同样的计算也适用于类似情形 $\theta=\pm I_2$ 和 $\theta'=\pm I_2$。根据第3.2小节的定义和等式（1.3.3.3），有

$$\begin{aligned}K_{\chi,f}^{T,\theta',\theta}(x,y)&=K_{\chi,f}(x,y)-\sum_{\delta_1,\delta_2\in B(F)\backslash G(F)}\hat{\tau}_B(H_B(\delta_1x)-T)K_{B,\chi,f}(\delta_1x,\delta_2y)\\&=K_{\chi,f}(x,y)-\sum_{\delta\in B(F)\backslash G(F)}\hat{\tau}_B(H_B(\delta x)-T)(K_{\chi,f})_B(\delta x,y)\end{aligned}$$

根据定义，有

$$J_\chi^T(\eta,f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1\times G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_\chi^T(x,y)\,\eta(x)dxdy. \tag{1.3.6.1}$$

在上面右端的积分中，我们先对变量 y 积分。首先，有

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_{\chi,f}(x,y)\,dy=0\text{ et }\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}(K_{\chi,f})_B(x,y)\,dy=0$$

除非 $\chi=\chi_0$。令

$$I(f)=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}f(y)\,dy.$$

于是，有

$$\begin{aligned}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_{\chi_0,f}(x,y)\,dy&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}K_f(x,y)\,dy=I(f)\\\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}(K_{\chi_0,f})_B(x,y)\,dy&=\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})}(K_f)_B(x,y)\,dy=I(f).\end{aligned}$$

考虑到计算式 (1.3.3.2)，我们得出

$$J_{\chi_0}^T(\eta,f)=\begin{cases}0\text{ si }\eta\text{ n'est pas trivial};\\I(f)(\mathrm{vol}([G]^G)-\exp(-\langle\alpha,T\rangle))\text{ sinon.}\end{cases}$$

由此可得

$$J_\chi(\eta,f)=\begin{cases}0\text{ si }\eta\text{ n'est pas trivial ou }\chi\neq\chi_0\ ;\\\mathrm{vol}([G]^G)I(f)\text{ sinon.}\end{cases}$$

所得分布在 $G(\mathbb{A})$的平移作用下左右不变。

1.3.7. 情形 $\theta=I_2$ **与** $\theta'=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$**.** ——这一次，始终遵循第3.2小节的定义并利用(1.3.3.3)，我们有

$$K_{\chi,f}^{T,\theta',\theta}(x,y)=K_{\chi,f}(x,y)-\sum_{w\in W}\hat{\tau}_B(H_B(wx)-T)(K_{\chi,f})_B(wx,y).$$

如前所述，但这次对 $x=1$使用(1.3.3.1)，我们得到

$$J_\chi^T(\eta,f)=\begin{cases}0\text{ si }\eta\text{ n'est pas trivial ou }\chi\neq\chi_0\ ;\\I(f)\langle\alpha,2T\rangle\text{ sinon.}\end{cases}$$

因此，上述积分关于 T 线性：其常数项为零，由此可得，对任意 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$，都有 $J_\chi(\eta,f)=0$。

1.3.8. 情形 $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **和** $\theta' = I_{2\circ}$ — 在这种情形下，修正核可写为

$$K_{\chi,f}^{T,\theta',\theta}(x,y) = K_{\chi,f}(x,y) - \sum_{\delta_1 \in B(F)\backslash G(F)} \hat{\tau}_B(H_B(\delta_1 x) - T) \sum_{w \in W} K_{B,\chi,f}(\delta_1 x, wy)$$

利用等式 $K^{T,\theta',\theta}_{\chi,f}(ax,y) = K^{T,\theta',\theta}_{\chi,f}(x,a^{-1}y)$ 对任意 $a \in A_G^\infty$，可得

$$\begin{aligned} J_\chi^T(\eta,f) &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})^1 \times M_B(F)\backslash M_B(\mathbb{A})} K_{\chi,f}^T(x,y)\,\eta(x)dxdy \\ &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})\times M_B(F)\backslash (M_B(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} K_{\chi,f}^T(x,y)\,\eta(x)dxdy. \end{aligned}$$

于是先对变量 x 积分，得到

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_{\chi,f}(x,y)\eta(x)\,dx - \int_{B(F)\backslash G(\mathbb{A})} \hat{\tau}_B(H_B(x)-T) \sum_{w\in W} K_{B,\chi,f}(x,wy)\eta(x)\,dx.$$

除非 χ 等于与 (M_B,η) 关联的尖点数据 χ_1，否则此表达式为零。对于 $\chi=\chi_1$，可得

$$\begin{aligned} &\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_{\chi_1,f}(x,y)\eta(x)\,dx - \int_{B(F)\backslash G(\mathbb{A})} \hat{\tau}_B(H_B(x)-T) \sum_{w\in W} K_{B,\chi_1,f}(x,wy)\eta(x)\,dx \\ &= \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})} K_f(x,y)\eta(x)\,dx - \int_{B(F)\backslash G(\mathbb{A})} \hat{\tau}_B(H_B(x)-T) \sum_{w\in W} K_{B,f}(x,wy)\eta(x)\,dx \\ &= \int_{G(\mathbb{A})} f(x^{-1}y)\eta(x)\,dx - \int_{N_B(F)\backslash N_B(\mathbb{A})}\int_{G(\mathbb{A})} \hat{\tau}_B(H_B(x)-T) \sum_{w\in W} f(x^{-1}uwy)\eta(x)\,dx\,du \\ &= \eta(y)\int_{G(\mathbb{A})} (1 - \sum_{w\in W} \hat{\tau}_B(H_B(wyx)-T)) f(x^{-1})\eta(x)\,dx, \end{aligned}$$

最后一个等式由变量替换 $x \mapsto uwyx$ 得到。因此，由 **(1.3.3.1)** 可得

$$J_\chi^T(\eta,f) = \begin{cases} 0 \text{ si } \eta \text{ n'est pas trivial ou } \chi \neq \chi_0\ ; \\ 2\langle \alpha, T\rangle I(f) + I'(f) \text{ sinon,} \end{cases}$$

其中引入了

$$I'(f) = \int_{G(\mathbb{A})} \langle \alpha, -H_B(wx^{-1}) - H_B(x^{-1})\rangle f(x)\,dx.$$

这一次，$J_\chi^T(\eta,f)$ 是关于 T 的仿射函数，因此得到

$$J_\chi(\eta,f) = \begin{cases} 0 \text{ si } \eta \text{ n'est pas trivial ou } \chi \neq \chi_0\ ; \\ I'(f) \text{ sinon.} \end{cases}$$

注意到，分布 I' 在 $M_B(\mathbb{A})$的右作用下是不变量。相反，它在 $G(\mathbb{A})$的左作用下不是不变量。对于任意 $y \in G(\mathbb{A})$，有

$$I'({}^y f) - I'(f) = \sum_{w\in W} I_{M_B}(f_{B,w,y})$$

其中，对于任意函数 $\varphi \in \mathcal{S}(M_B(\mathbb{A}))$，令

$$I_{M_B}(\varphi) = \int_{M_B(\mathbb{A})} \varphi(m)\,dm$$

并且，对于任意 $m \in M_B(\mathbb{A})$,

$$f_{B,w,y}(m) = \int_{N_B(\mathbb{A})} \int_K -\langle \alpha, H_B(k^{-1}y)\rangle f(knmw)\, dndk.$$

该公式是对命题 1.2.2.1 的明确表述。

注 1.3.8.1。— 修正核 $K^T_{\chi,f}(\theta',\theta,\cdot,\cdot)$ 以及 $K^T_{\chi,f}(\theta,\theta',\cdot,\cdot)$ 通常彼此不同。因此，与它们相关联的分布最终也可能彼此不同，比较 §§ 1.3.7 和 1.3.8 的结果即可看出这一点。

1.3.9. 情形 $\theta = \theta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$。— 事实上，这一情形有趣得多，但在某种意义上是例外的：

实际上，我们将在 §§ 3.5.8 和 4.2.9 中证明，此时得到的谱分布 $J_\chi(\eta)$ 和几何分布 $J_\mathfrak{o}(\eta)$ 对右作用不变，并且对于 $M_B(\mathbb{A})$ 的平移作用，在左侧是 η-等变的。需要强调的是，一般情况下完全不是如此。实际上，这一特殊情形应当属于 Sakellaridis 在 [Sak16] 中所构造框架的范畴（也就是说，按照本文的意义，它不应当具有临界指数）；因此，我们建议读者将我们的构造与 Sakellaridis 的构造进行比较。关于所得分布的明确表述，请参阅 Jacquet 的文章 [Jac86], ，另见 [JC01] 以获取补充内容。

1.4 文章结构

1.4.1. 读者可在第2.1小节找到本文所用的主要记号。第2.2小节陈述了关于本文所考虑的对合的一些代数结果。随后，我们在第2.3小节给出 Arthur 所用的一种划分的“相对”版本。接着，在第2.4小节引入相对截断算子及其主要性质。第3节专门讨论相对迹公式的谱分解。第3.2小节定义修正核，并给出其上界估计。由此得到的主要谱命题见第3.3小节。我们在第3.4小节分析所得分布关于 T 的行为。随后，我们在第3.5小节将迹公式的谱项定义为它们关于 T 的常数项。我们还给出这些项在相关群的自然作用下的协变性。

本文其余部分，即第4节， посвящ于相对迹公式的几何展开。我们首先在第4.1小节介绍代数预备知识（引入对称空间 S、计算范畴商、计算半单轨道等）。第4.2小节陈述了关于范畴商有理点的几何展开收敛性的一个初步版本。随后，我们在第4.3小节陈述 Guo-Jacquet 迹公式。在第4.4小节中，我们从 $G^{\theta'}$ 对簇 S 的作用这一视角出发：将几何展开改写为 $S(\mathbb{A})$ 的施瓦茨空间上的分布，并为分布 $J^T_\mathfrak{o}$ 的半单下降作各种准备。第4.5小节专门讨论分布 $J^T_\mathfrak{o}$ 的半单下降，旨在将此类分布与无穷小迹公式中的幂零贡献联系起来；该无穷小迹公式对应于一个与不变量为 $\mathfrak{o}$ 的半单元素之中心化子相联系的某个对称空间。在第4.6小节中，对于正则半单不变量 $\mathfrak{o}$ ，我们用加权轨道积分表示分布 $J_\mathfrak{o}(\eta)$。最后，第4.7小节回顾并补充了关于某些对称空间的无穷小迹公式的内容。

1.4.2. 致谢。 — 作者感谢 Jayce Getz 就交换对合对所作的讨论，并使其了解到 Helminck-Schwarz 的工作 [HS01, HS04]。他们亦感谢 Yiannis Sakellaridis 就本文结果所作的讨论，以及其强调群 $GL(2)$ 的情形。Pierre-Henri

Chaudouard 感谢法兰西大学研究院为其提供了出色的工作条件。这项工作部分完成于 Huajie Li 任职于约翰斯·霍普金斯大学、马克斯·普朗克数学研究所及艾克斯-马赛大学期间；第二作者感谢这些机构所提供的出色工作条件与经费支持，其中包括法国政府在未来投资计划框架下、通过艾克斯-马赛大学卓越计划（A*MIDEX）提供的资助。他还感谢巴黎西岱大学的邀请及其对巴黎逗留的资助，本文即在此期间定稿。

2 预备知识

2.1 一般记号

2.1.1. 在本子小节中，我们将引入本文中最常用的记号：正如后文所见，我们尽可能采用Arthur记号。

2.1.2. 设 F 是一个域， G 是定义在 F上的连通约化群。设 A_G 是 G的极大中心分裂环面。设(P_0, M_0)是一对由抛物子群 P_0 及Levi 因子 M_0 组成的对象，二者均定义在 F 上，且在满足这些性质的对象中取极小者。除非另有说明， G 的子群均假定定义在 F上。对于 G 的任意子群P ，记 P为 N_P 的幺幂根基。若抛物子群 P 包含 P_0，则称其为标准的；若包含 M_0，则称其为半标准的。设F(P_0) ⊂F(M_0)分别为 G 的标准抛物子群和半标准抛物子群的集合。每个 $P \in$ F(M_0)都存在唯一一个包含 M_0的Levi 因子，记为 M_P。因此有 $P = M_P N_P$。设$A_P = A_{M_P}$。 G 的抛物子群的任意Levi 因子称为 G的Levi 子群。设L(M_0)为 G中包含 M_0的Levi 子群的集合。对于任意$M \in$L(M_0)，定义

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(M) &= \{P \in \mathcal{F}(M_0) : P \supset M\},\\ \mathcal{P}(M) &= \{P \in \mathcal{F}(M) : M_P = M\},\\ \mathcal{L}(M) &= \{L \in \mathcal{L}(M_0) : L \supset M\}.\end{aligned}$$

2.1.3. 设 P G的抛物子群。设 $X^*(P)$为P上定义的代数特征群。设 $\mathfrak{a}_P^* = X^*(P) \otimes \mathbb{R}$和 $\mathfrak{a}_P =$ $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(P)\ \mathbb{R})$：它们是互为对偶的 $\mathbb{R}$-向量空间。对于 $P \subset Q$ 的标准抛物子群，有限制映射 $\mathfrak{a}_Q^* \to \mathfrak{a}_P^*$，以及与之对偶的 $\mathfrak{a}_P \to \mathfrak{a}_Q$。前者是单射，并将 $\mathfrak{a}_Q^*$ 识别为 $\mathfrak{a}_P^*$的一个子空间；后者的核记作 $\mathfrak{a}_P^Q$。事实上，还有 $\mathfrak{a}_P^* = X^*(A_P) \otimes \mathbb{R}$，因此有态射 $\mathfrak{a}_Q \to \mathfrak{a}_P$，它是单射；以及 $\mathfrak{a}_P^* \to \mathfrak{a}_Q^*$，其核记作 $\mathfrak{a}^{Q,}{}_P{}^*$。于是有直和 $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q$ 及其对偶。下文所用的投影均默认对应于这些分解。任意 $X \in \mathfrak{a}_P$ 均可按此分解写成 $X^Q + X_Q$。设 $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{P_0}$、 $\mathfrak{a}_0^* = \mathfrak{a}_{P_0}^*$ 等。

2.1.4. 李代数。 ——通常，用相应的哥特字体字母 G, P, M, N表示代数群的李代数 $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}, \mathfrak{m}, \mathfrak{n}$。这一约定不适用于环面$A_G, A_P = A_{M_P}$ 等。

2.1.5. 设 P 为标准抛物子群。设 Δ_0^P、$\hat{}\Delta_0^P$、 Δ^P、$_0{}^\vee$ 以及 $\hat{}\Delta^P$、$_0{}^\vee$ 分别为 A_0 在 $P_0 \cap M_P$ 中的根、权、余根和余权的集合。将 Δ_0^P 和 $\hat{}\,\Delta_0^P$ 视为 $\mathfrak{a}^P$、$_0{}^*$ 的基。设 $\hat{}\Delta^P$、$_0{}^\vee$ 以及 Δ^P、$_0{}^\vee$ 分别为 $\mathfrak{a}_0^P$ 中的对偶基。对于 $P \subset Q$ 个标准抛物子群，我们还定义 Δ_P^Q 为 A_P 在 $M_Q \cap N_P$ 中的简单根集合。这仍然是通过 $\mathfrak{a}^Q$、$_0{}^* \to \mathfrak{a}^Q$、$_P{}^*$ 将 $\Delta_0^Q \setminus \Delta_0^P$ 投影而得到的 $\mathfrak{a}^Q$、$_P{}^*$ 的基。设 $(\varpi_\alpha^\vee)^{\alpha \in \Delta_P^Q}$ 为 $\mathfrak{a}_P^Q$ 的基，是 Δ_P^Q 的对偶基：该基的元素记为

$\hat{\Delta}^{Q,\ P\ \vee}$。对于任意 $\alpha\in\Delta_P^Q$，可以定义一个余根 $\alpha^\vee$（当 $P=P_0$ 时这是显然的；一般而言，$\alpha^\vee$ 是 $\beta^\vee$ 在 $\mathfrak{a}_P^Q$ 上的投影，其中 β 是将 β 唯一提升到 Δ_0^Q 的提升）。记 $\underset{\sim}{\Delta}^{Q,\ P\ \vee}$ 为满足 $\alpha\in\Delta_P^Q$ 的 $\alpha^\vee$ 的集合。设 $(\varpi_\alpha)^{\alpha\in\Delta_P^Q}$ 为 $\mathfrak{a}^{Q,\ P\ *}$ 的基，是 $(\alpha^\vee)^{\alpha\in\Delta_P^Q}$ 的对偶基：其元素构成集合 $\hat{\Delta}_P^Q$。

对于任意标准抛物子群 P，设

$$\mathfrak{a}_P^{*,+}=\{\lambda\in\mathfrak{a}_P^*\mid\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle>0\,\forall\alpha\in\Delta_P\}.$$

设 $\mathfrak{a}^{\overline{*,\ P}+}$ 为其在 $\mathfrak{a}_P^*$ 中的闭包。同样，通过互换根与余根的作用来定义 $\mathfrak{a}_P^+$。置 $\mathfrak{a}^{G,\ P\ +}=\mathfrak{a}_P^+\cap\mathfrak{a}_P^G$。

2.1.6. 当一个抛物子群记作 P_i 时，在记号中作为上标或下标的 P_i 可以替换为 i。因此记作 $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}_{P_0}$。在某个记号中若需要上标而省略了上标，则其隐含含义为环境群 G。

2.1.7. 特征函数。 — 设 $P_1\subset P_2$ 为 G 的标准抛物子群。置

$$\varepsilon_1^2=\varepsilon_{P_1}^{P_2}=(-1)^{\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{P_1}^{P_2})}.$$

定义函数 $\tau_{P_1}^{P_2}$，分别记作 $\hat{\tau}_{P_1}^{P_2}$、$\phi_{P_1}^{P_2}$，为满足下述条件 1、条件 2、条件 3 的 $H\in\mathfrak{a}_0$ 所成集合的特征函数：

1. $\langle\alpha,H\rangle>0$ 对任意 $\alpha\in\Delta_1^2$；2. $\langle\varpi,H\rangle>0$ 对任意 $\varpi\in\hat{\Delta}_1^2$；3. $\langle\alpha,H\rangle>0$ 对任意 $\alpha\in\Delta_1^2$ 且 $\langle\alpha,H\rangle\leqslant 0$ 对任意 $\alpha\in\Delta_1\setminus\Delta_1^2$。

我们还将 $\sigma_{P_1}^{P_2}$ 定义为 $\phi_{P_1}^{P_2}$ 与 $\hat{\tau}_{P_2}^G$ 的乘积。注意，与 $\tau_{P_1}^{P_2}$ 和 $\hat{\tau}_{P_1}^{P_2}$ 不同，函数 $\sigma_{P_1}^{P_2}$ 不仅依赖于 P_1 和 P_2，还依赖于环境群 G。对于 $P_1=P_2$，此外有 $\sigma_{P_1}^{P_1}$ 恒等于零，除非 $P_1=G$，此时它恒等于 1。注意，对于 $P_1\subset P\subset P_2$，有（参见 [Art78，引理 6.1]）

$$\tau_{P_1}^P\hat{\tau}_P=\sum_{P\subset P_2}\sigma_{P_1}^{P_2}. \tag{2.1.7.1}$$

2.1.8. 现在进一步假设，F 还是一个数域。设 V_F 为 F 的赋值集合，$\mathbb{A}$ 为 F的阿代尔环。设 $F_\infty=F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$。有 $\mathbb{A}=F_\infty\times\mathbb{A}_f$，其中 $\mathbb{A}_f$表示“有限阿代尔”环。对任意 $v\in V_F$，设 F_v 为 F在 v 处的完备化，$|\cdot|_v$ 为 F_v上相应的归一化绝对值。设$\mathcal{O}_v\subset F_v$ 为整数环。设 $|\cdot|_{\mathbb{A}}$ 为态射 $\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^\times$，由 $v\in V_F$ 上的归一化绝对值 $|\cdot|_v$的乘积给出。

2.1.9. 极大紧子群。 — 设 $K=\prod_{v\in V}K_v$，其中对任意 $v\in V_F$，子群 $K_v\in G(F_v)$是一个相对于在§2.2.3中固定的极小 Levi 子群 M_0 处于良好位置的极大紧子群（更准确地说，K_v 必须满足 Art81，第 9] 页的条件 [）。

设 $P\in\mathcal{F}(M_0)$ 是 G 的一个半标准抛物子群。于是有 $G(\mathbb{A})=P(\mathbb{A})K$。配对 $(\chi,x)\mapsto\log|\chi(x)|_{\mathbb{A}}$ 在 $X^*(P)\times P(\mathbb{A})$ 上定义了一个群同态 $P(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_P$，并将其扩展为映射 $H_P\colon G(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_P$，满足 $H_P(pk)=H_P(p)$，对所有 $p\in P(\mathbb{A})$ 和$k\in K$均成立。

对于定义在 F 上的任意约化群 H，令 A_H^∞ 为 $\mathrm{Res}^{F/\mathbb{Q}}(A_H)$ 的极大分裂子$\mathbb{Q}$环面之 $\mathbb{R}$-点群的单位连通分支。设 $A_P^\infty=A_{M_P}^\infty$。令 $P(\mathbb{A})^1$ 为 H_P 的核。我们有 $P(\mathbb{A})^1=M_P(\mathbb{A})^1N_P(\mathbb{A})$，其中 $M_P(\mathbb{A})^1=M_P(\mathbb{A})\cap P(\mathbb{A})^1$。因此有 $M_P(\mathbb{A})\simeq M_P(\mathbb{A})^1\times A_P^\infty$，且 H_P 的限制诱导出一个同构 $A_P^\infty\simeq\mathfrak{a}_P$。令 $A^{G,\ P\ \infty}=A_P^\infty\cap G(\mathbb{A})^1$。记作

$$[G]_P=N_P(\mathbb{A})M_P(F)\backslash G(\mathbb{A})\text{ et }[G]_P^1=N_P(\mathbb{A})M_P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1.$$

若 $P = G$，则省略指标 G。更一般地，对于定义在 F 上的任意子群N，记 $[N] = N(F)\backslash N(\mathbb{A})$。

2.1.10. Haar 测度。 — 在 K 上赋予 Haar 测度，使其总体积为 1。对于 G的任意幂单子群 N，在 $N(\mathbb{A})$ 上赋予 Haar 测度，使得当商 $[N]$ 配备由 $N(\mathbb{A})$ 上的测度与 $N(F)$ 上的计数测度所诱导的商测度时，其体积为 1。

固定 在 $G(\mathbb{A})$ 和 $M_P(\mathbb{A})$ 上分别选取 Haar 测度，其中 $M_P(\mathbb{A})$ 对每个半标准 P，使得乘积映射 $M_P(\mathbb{A}) \times N_P(\mathbb{A}) \times K \to G(\mathbb{A})$ 保持测度不变。

设 W 为（G, M_0）的魏尔群，也就是 M_0 在 $G(F)$ 中的正规化子对 $M_0(F)$ 的商。群 W 作用于 $\mathfrak{a}_{P_0}$，并在 $\mathfrak{a}_{P_0}$上固定一个 W-不变内积。记 $\|\cdot\|$ 为相应的范数。于是，每个子空间都配备该范数及相应的欧几里得测度。由此可在 $\mathfrak{a}_P$ 和 $\mathfrak{a}_P^G$ 上得到测度。通过 H_P 的传输，可在 A_P^∞ 和 $A^{G,}{}_P{}^\infty$ 上导出 Haar 测度。最后，在 $M_P(\mathbb{A})^1$ 上赋予测度，使得乘积映射 $A_P^\infty \times M_P(\mathbb{A})^1 \to M_P(\mathbb{A})$ 与所选测度相容。

对 $[G]$ 上的任意绝对可积函数，以及 G的任意半标准抛物子群 P，都有积分公式

$$\begin{aligned}\int_{P(F)\backslash G(\mathbb{A})} f(x)\,dx &= \int_{[N]}\int_{[M_P]}\int_K \exp(-\langle 2\rho_P, H_P(m)\rangle) f(nmk)\,dndmdk \\ &= \int_{[N]}\int_{[M_P]^1}\int_{A_P^\infty}\int_K \exp(-\langle 2\rho_P, H_P(a)\rangle) f(namk)\,dndadmdk\end{aligned} \tag{2.1.10.1}$$

其中， A_P 在 N_P中的根之和记为 $2\rho_P \in \mathfrak{a}_P^*$。当然，这些公式也有用于在 $P(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$ 上积分的变体。若需要强调其对群 G的依赖，可将元素 ρ_P 记作 ρ_P^G。

2.1.11. 点 T_0 与划分。 — 设 $T_1, T \in \mathfrak{a}_0$，且 P是G的一个标准抛物子群。定义

$$A_{P_0}^{P,\infty}(T_1) = \{a \in A_0^\infty \mid \langle \alpha, H_0(a)\rangle \geqslant \langle \alpha, T_1\rangle,\ \forall \alpha \in \Delta_0^P\}$$

et

$$A_{P_0}^{P,\infty}(T_1, T) = \{a \in A_0^{P,\infty}(T_1) \mid \langle \varpi, H_0(a)\rangle \leqslant \langle \varpi, T\rangle,\ \forall \varpi \in \hat{\Delta}_0^P\}.$$

固定 $T_- \in \mathfrak{a}_0^G$，并取 $\omega_0 \subset P_0(\mathbb{A})^1$ 为一个紧集，使得 $P_0(\mathbb{A})^1 = P_0(F)\omega_0$。引入 Siegel 集

$$\mathfrak{S}^P = \mathfrak{S}_{P_0}^P = \omega_0 A_{P_0}^{P,\infty}(T_-)K.$$

由于可以自由选择，实际上我们选取 $T_- \in -\mathfrak{a}^{G,}{}_0{}^+$，使得 $G(\mathbb{A}) = P(F)\mathfrak{S}^P$（无论 P为何，均如此）。对任意 $T \in \mathfrak{a}_0^+$，设 $F^P(\cdot\ T)$ 是 $P(F)\omega_0 A^{P,}{}_0{}^\infty(T_-, T)K \subset \mathfrak{S}^P$ 的特征函数，参见 Art78，第 6] 节。将 $F^P(\cdot\ T)$ 视为定义在 $[G]_P$ 上的函数。根据 Art85，引理 2.1],，存在 $T_0 \in \mathfrak{a}^{G,}{}_0{}^+$，使得对任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}^{G,}{}_0{}^+$，函数 $F^P(\cdot\ T)$ 是集合的特征函数

$$\{g \in [G]_P \mid \langle \varpi, H_0(\delta g) - T\rangle \leqslant 0\, \forall \varpi \in \hat{\Delta}_0^P,\ \forall \delta \in P(F)\}, \tag{2.1.11.1}$$

无论 P为何，设 Q G的一个标准抛物子群。对于任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}^{G,}{}_0{}^+$，由恒等式（参见 Art78，引理 6.4]）可得 $[G]_Q$ 的划分

$$\forall g \in G(\mathbb{A}) \sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash Q(F)} F^P(\delta g, T)\tau_P^Q(H_P(\delta g) - T) = 1. \tag{2.1.11.2}$$

按照 [BPC25, § 2.3.4]，，对于任意 $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$，定义对于任意 $g \in [G]_Q$

$$d^Q(\lambda, g) = \sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \sum_{\delta \in P(F)\backslash Q(F)} F^P(\delta g, T_0)\tau_P^Q(H_P(\delta g) - T_0)\exp(\langle \lambda, H_P(\delta g)\rangle). \tag{2.1.11.3}$$

引理 2.1.11.1. — 设 $Q \subset R$ 为标准抛物子群。存在 $c \geqslant 1$，使得对于任意 $g \in G(\mathbb{A})$，至多存在一个元素 $\delta \in Q(F)\backslash R(F)$ 满足 $d^Q(\alpha, \delta g) > c$ 对于任意 $\alpha \in \Delta_0^R \backslash \Delta_0^Q$。

证明。——这是 [BPC25 命题 2.3.4.3] 的一个变体。取 $c \geqslant 1$，使得对任意标准抛物子群 P 及任意 $\alpha \in \Delta_P$，都有 $\log(c) > \alpha, T_0$。设 $g \in G(\mathbb{A})$ 且 $\delta_1, \delta_2 \in R(F)$ 满足：对任意 $\alpha \in \Delta_0 \backslash \Delta_0^Q$ 及任意 $i \in \{1, 2\}$，都有 $d^Q(\alpha, \delta_i g) > c$。我们要证明 $\delta_1 \delta_2^{-1} \in Q(F)$。将 δ_i 左乘 $Q(F)$ 的一个元素，不会改变假设或结论。设 $i \in \{1, 2\}$。利用 $[G]_Q$ 的划分 (2.1.11.2)，我们可以假设存在一个标准抛物子群 $P_i \subset Q$，使得 $F^{P_i}(\delta_i g, T_0)\tau_{P_i}^Q(H_{P_i}(\delta_i g) - T_0) = 1$。设 $\alpha \in \Delta_0^R \backslash \Delta_0^Q$。条件 $d^Q(\alpha, \delta_i g) > c$ 随即推出 $\alpha, H_P(g) > \log(c)$。因此，对任意 $\alpha \in \Delta_{P_i}^R \backslash \Delta_{P_i}^Q$，都有 $\alpha, H_{P_i}(\delta_i g) - T_0 > 0$。于是

$$F^{P_i}(\delta_i g, T_0)\tau_{P_i}^R(H_{P_i}(\delta_i g) - T_0) = 1.$$

这次对于 $[G]_R$，我们可以再次调用划分 (2.1.11.2)：由此得到 $P_1(F)\delta_1 = P_2(F)\delta_2$ 以及 $P_1 = P_2$。由于 $P_i \subset Q$，结论显然。□

2.1.12. 高度。 — 我们在 $G(\mathbb{A})$ 上固定一个记作 $\|\cdot\|$ 的高度，如 [MW94，第 I.2 节2]所述；其主要性质可参见该处。

设 $P \subset G$ 为一个抛物子群。对于任意 $g \in G(\mathbb{A})$，定义

$$\|g\|_P = \inf_{\delta \in N_P(\mathbb{A})M_P(F)} \|\delta g\|.$$

我们将 $\|\cdot\|_P$ 视为定义在 $[G]_P$ 上的函数。对于任意集合 X 以及任意映射 $f, g : X \to \mathbb{R}_+$，如果存在 $c > 0$，以及 $d > 0$，使得对于任意 $x \in X$ 都有 $f(x) \leqslant cg(x)$，以及 $f(x) \leqslant cg(x)^d$，我们分别记作 $f \ll g$ 和 $f \prec g$。我们称 f 与 g 分别等价、可比较；如果 $f \ll g$ 与 $g \ll f$，以及 $f \prec g$ 与 $g \prec f$，则分别记作 $f \sim g$ 和 $f \asymp g$。作为定义在 $G(\mathbb{A})$ 上的函数，根据 $[N_P]$ 的紧致性，有 $\|\cdot\|_G \ll \|\cdot\|_P \ll \|\cdot\|$。此外，$\|\cdot\|_P$ 和 $\|\cdot\|$ 在 $\mathfrak{S}^P$ 上的限制是等价的（这由 [MW94，第 I.2.2 节 (ii) 和 (vii)] 得出）。

对于任意闭子群 $H \subset G$，将高度从 $G(\mathbb{A})$ 限制到 $H(\mathbb{A})$，所得高度与 $H(\mathbb{A})$ 上的某个高度可比。

2.1.13.

引理 2.1.13.1. — 设 $P_1 \subset P_2 \subset G$ 为标准抛物子群。对于任意 $N > 0$ 和 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$，存在 C、$c > 0$，使得对于任意

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \backslash \Delta_0^1} c_\alpha \alpha \ avec \ c_\alpha > c \tag{2.1.13.1}$$

对于任意 $g \in [G]_{P_1}^1$，有，

$$F^{P_1}(g, T)\sigma_1^2(H_{P_0}(g) - T)d^{P_1}(-\lambda, g) \leqslant C\|g\|_{P_1}^{-N}. \tag{2.1.13.2}$$

证明。——这是对 [BPC25 引理 3.3.4.1] 中证明的一种变体。为方便读者，我们重述这一论证。我们可以并且将只考虑 g 属于集合 $\mathfrak{S}^{P_1} \cap G(\mathbb{A})^1$ 的情形。存在 c_1，$c_2 > 0$，使得对任意 $g \in \mathfrak{S}^{P_1} \cap G(\mathbb{A})^1$，，都有 $\|g\|_{P_1} \leqslant c_1 \exp(c_2\|H_{P_0}(g)\|)$。设 $T \trianglelefteq T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。我们进一步假设 g 还满足

$$F^{P_1}(g, T)\sigma_1^2(H_{P_0}(g) - T) \neq 0. \tag{2.1.13.3}$$

对于这样的 g，需要求出 $\|H_{P_0}(g)\|$ 的范数。根据分解 $\mathfrak{a}_0^G = \mathfrak{a}_0^{P_1} \oplus \mathfrak{a}_{P_1}^{P_2} \oplus \mathfrak{a}_{P_2}^G$，我们写作 $H_{P_0}(g) = H_{P_0}(g))^{P_1} + H_{P_1}(g)^{P_2} + H_{P_2}(g)$。

$$\|H_{P_0}(g)\| \leqslant \|H_{P_0}(g)^{P_1}\| + \|H_{P_1}(g)^{P_2}\| + \|H_{P_2}(g)\|.$$

由于 $F^{P_1}(g,T) \neq 0$，存在 $c_3 > 0$ 使得 $\|(H_{P_0}(g)^{P_1}\| \leqslant c_3(1+\|T^{P_1}\|)$。由于 $\sigma_1^2(H_{P_0}(g)$ _ $T \neq 0$ $c_4 > 0$ $\|H_{P_2}\ g\ \| \leqslant c_4\ 1+\|\ H_{P_1}\ g\ ^{P_2} - T_{P_1}^{P_2}\| + \|T_{P_2}^G\|$ [78, ），存在使得 ( ) ((( )))，参见 Art 推论 6.2]。存在 $c_5 > 0$ 使得 $\|(H_{P_1}(g))^{P_2} - T_{P_1}^{P_2}\| \leqslant c_5 \sum_{\alpha \in \Delta_1^2} \alpha, H_0(g) - T$，其中，在该和中，可以观察到 $\alpha, H_0(g) - T > 0$，参见 § 2.1.7。同样地，在条件 (2.1.13.3) 下，可以证明对所有 $\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1$，有 $\alpha, H_0(g) - T \geqslant \bar{\alpha}, H_0(g) - T > 0$，其中 $\bar{\alpha}$ 是 α 在 $\mathfrak{a}_1^*$ 上的投影。最终，我们得到 $c_6 > 0$ 使得

$$\|H_{P_0}(g)\| \leqslant c_6(1 + \|T^G\| + \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} \langle \alpha, H_0(g) \rangle).$$

注意到，在上述和中，我们有 $\langle \alpha,\ H_0(g) \rangle > \langle \alpha,\ T \rangle \geqslant 0$。于是结论显然，因为可以将 $d^{P_1}(-\lambda,\ g)$ 替换为指数映射$(-\langle \lambda,\ H_{P_0}(g) \rangle)$，参见 [BPC25，命题 2.3.4.1]。还可以观察到，出现的常数 c_i 与 T 的选择无关。 □

2.1.14. 充分正点。 — 对于 $T \in \mathfrak{a}_0$，定义 $d(T) = \min_{\alpha \in \Delta_0} \langle \alpha,\ T \rangle$。在下文中，我们固定一个足够小的 $\varepsilon > 0$，并称某个断言“对所有充分正的 $T \in \mathfrak{a}_0$”成立，是指它对所有满足 $d(T) \geqslant \varepsilon \|T^G\|$ 的 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 均成立。这个概念将通过以下引理发挥作用。

引理 2.1.14.1。——设 $P_1 \subset P_2 \subset G$ 为标准抛物子群。对任意 $N, r > 0$，存在 $C, c > 0$，使得对任意

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} c_\alpha \alpha \ avec\ c_\alpha > c \tag{2.1.14.1}$$

on a

$$F^{P_1}(g,T)\sigma_1^2(H_{P_0}(g) - T)d^{P_1}(-\lambda, g) \leqslant C \exp(-r\|T^G\|)\|g\|_{P_1}^{-N} \tag{2.1.14.2}$$

任意 $g \in [G]_{P_1}^1$ 以及任意充分大的 $T \in \mathfrak{a}_0$。

证明。——这直接由引理 2.1.13.1 的证明得出，因为若 T 充分大，且 $g \in \mathfrak{S}^{P_1} \cap G(\mathbb{A})^1$ 满足 (2.1.13.3)，则对任意 $\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1$，有 $\langle \alpha, H_0(g) \rangle \geqslant \langle \alpha, T \rangle \geqslant \varepsilon \|T^G\|$。 □

2.1.15. 设 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 为 G 的复化李代数的包络代数。该代数通过右正则表示 R 和左正则表示 L 作用于空间 $C^\infty(G(\mathbb{A}))$，即定义在 $G(\mathbb{A})$ 上的 R 光滑函数。设 $J \subset G(\mathbb{A}_f)$ 为一个紧开子群。设 $Q \subset G$ 为一个抛物子群。设 $C^\infty([G]_Q)^J \subset C^\infty(G(\mathbb{A}))$ 为 $G(\mathbb{A})$ 上的光滑函数构成的子空间，这些函数关于左侧的 $N_Q(\mathbb{A})M_Q(F)$ 不变，并关于右侧的 J 不变。对任意整数 $N \geqslant 0$、任意有限子集 $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 以及任意 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$，定义

$$\|\varphi\|_{N,\mathfrak{F}} = \sup_{x \in [G]_Q^1, X \in \mathfrak{F}} \|x\|_Q^{-N} |R(X)\varphi(x)|. \tag{2.1.15.1}$$

设 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$。对于任意标准抛物子群 $P \subset Q$，定义一个元素 $\varphi_P \in C^\infty([G]_P)^J$ 为

$$\forall g \in [G]_P \quad \varphi_P(g) = \int_{[N_P]} \varphi(ng)\, dn. \tag{2.1.15.2}$$

对于标准抛物子群 $P_1 \subset P_2 \subset Q$ 以及任意 $g \in G(\mathbb{A})$，令

$$\varphi_{1,2}(g) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} \varepsilon_P^G \varphi_P(g). \tag{2.1.15.3}$$

引理 2.1.15.1. — 假设 $P_1 \subsetneq P_2 \subset Q$。对于任意

$$\lambda = \sum_{\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1} c_\alpha \alpha \ avec\ c_\alpha \geqslant 0$$

存在一个有限集合 $\mathfrak{F} \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得

$$|\varphi_{1,2}(g)| \leqslant \exp(-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle) \|g\|_Q^N \|\varphi\|_{N,\mathfrak{F}} \tag{2.1.15.4}$$

对于所有 $g \in \mathfrak{S}^{P_2} \cap G(\mathbb{A})^1$, $N > 0$，以及 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$。

证明。— 情形 $P_2 = Q$ 蕴含更一般的结果：事实上，这一情形表明存在有限的 $\mathfrak{F} \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，使得

$$|\varphi_{1,2}(g)| \leqslant \exp(-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle) \|g\|_{P_2}^N \|\varphi_{P_2}\|_{N,\mathfrak{F}}$$

对于任意 $g \in \mathfrak{S}^{P_2} \cap G(\mathbb{A})^1$, $N > 0$，以及 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$。这个上界估计确实给出了 (2.1.15.4)：一方面，函数 $\|\cdot\|_Q$ 和 $\|\cdot\|_{P_2}$ 在 $\mathfrak{S}^{P_2}$ 上等价；另一方面，存在 $C > 0$，使得对于任意 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$，有

$$\|\varphi_{P_2}\|_{N,\mathfrak{F}} \leqslant C \|\varphi\|_{N,\mathfrak{F}}.$$

此后假设 $P_2 = Q$。接下来只需证明当 $\lambda = c\alpha$ 连同 $c > 0$ 以及 $\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1$ 时该结果成立。于是归结为 $P_1 \subsetneq Q$ 是极大抛物子群的情形 [MW94，推论 I.2.11] 的证明。后一情形的处理方式与 [MW94 中引理 I.2.10] 的证明相同）。□

引理 2.1.15.2. — 假设 $P_1 \subsetneq P_2 \subset Q$。

1. 对所有 r、N_1、$N_2 > 0$，存在有限集 $\mathfrak{F} \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得

$$F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x) - T)|\varphi_{P_1,P_2}(x)| \leqslant \exp(-r\|T^G\|)\|x\|_{P_1}^{-N_1}\|\varphi\|_{N_2,\mathfrak{F}}.$$

pour 所有 $x \in P_1(F)N_2(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})^1$, 所有充分正的 $T \in \mathfrak{a}_0$ 以及所有 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$.

2. 对所有 N_1、$N_2 > 0$ 以及 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$，存在有限集 $\mathfrak{F} \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 使得

$$F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x) - T)|\varphi_{P_1,P_2}(x)| \leqslant \|x\|_{P_1}^{-N_1}\|\varphi\|_{N_2,\mathfrak{F}}.$$

对于任意 $x \in P_1(F)N_2(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 以及任意 $\varphi \in C^\infty([G]_Q)^J$。

证明。——设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。设 $x \in \overline{P_1}(F)N_2(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})^1$ 满足 $F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x) - T) \neq 0$。设 $g \in G(\mathbb{A})^1$ 是 x的一个提升。当然可以假设 $g \in \mathfrak{S}^{P_1}$。条件 $F^{P_1}(g,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_0}(g) - T) \neq 0$ 于是意味着，对于任意 $\alpha \in \Delta_0^2 \setminus \Delta_0^1$，都有 $\alpha, H_0(g) - T > 0$。由此可得 $g \in \mathfrak{S}^{P_2}$。取如引理 2.1.15.1中的 λ。因此存在一个有限集 $\mathfrak{F} \subset U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$，使得对任意 $N > 0$ 都有

$$F^{P_1}(g,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(g) - T)|\varphi_{P_1,P_2}(g)| \leqslant F^{P_1}(g,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(g) - T)\exp(-\langle \lambda, H_{P_0}(g) \rangle)\|g\|_Q^N \|\varphi\|_{N,\mathfrak{F}}.$$

在 $\mathfrak{S}^{P_1}$ 上，更不必说在 $\mathfrak{S}^{P_2}$ 上，一方面函数指数映射$(-\langle \lambda, H_{P_0}(\cdot) \rangle)$ 与 $d^{P_1}(-\lambda, \cdot)$，另一方面 $\|\cdot\|_Q$ 与 $\|\cdot\|_{P_1}$，彼此等价。于是只需运用引理 2.1.14.1 与 2.1.13.1 即可得出结论。□

2.1.16. 施瓦茨空间。 — 设 G 为一个连通的仿射代数群，定义在 F 上（在本节中，我们并不必然假定它是约化的）。设 X 为一个定义在 F 上的仿射代数簇， G 在其上右作用[1]，从而使 X 成为一个齐性空间。假定存在一个有理点 $e \in X(F)$。于是 $X \simeq H\backslash G$，其中 H 是 e 的稳定子：它是 G 的定义在 F 上的闭子群。本文中将遇到的唯一情形是，点 $e \in X(F)$ 的选取给出 $X(\mathbb{A})$ 与 $H(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 的等同。换言之，下文假定 $G(\mathbb{A})$ 在 $X(\mathbb{A})$ 上传递地作用。

集合 $X(\mathbb{A})$ 自然带有一种与 $\mathbb{A}$ 上的拓扑相关联的拓扑。记 $\|\cdot\|$为 $X(\mathbb{A})$ 上的一个高度（参见 [Beu21, A.1] 中"抽象范数"的构造）。群$G(\mathbb{A})$ 作用于 $X(\mathbb{A})$，并通过对偶作用于从 $X(\mathbb{A})$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射集合。映射$f : X(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 称为光滑的，如果存在 $J \subset G(\mathbb{A}_f)$ 的一个紧开子群，使得 f 是J-不变的，并且对任意 $X \in X(\mathbb{A})$，映射 $g \in G(\mathbb{R}) \mapsto f(xg)$ 按通常意义是光滑的。

设 $C \subset X(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧集， $J \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧开子群。设$\mathcal{S}(X(\mathbb{A}) \ C)^J$为光滑函数构成的空间，这些函数在 J 作用下不变，支集包含于 $X(F_\infty) \times C$，并且满足由下式定义的半范数

$$\|f\|_{r,Y} = \sup_{x \in X(\mathbb{A})} \|x\|^r |R(Y)f(x)| \tag{2.1.16.1}$$

使 $r \geqslant 1$ 和 $Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 有限。这些半范数在 $\mathcal{S}(X(\mathbb{A}) \ C)^J$上定义了一种拓扑，使其成为一个弗雷歇空间。施瓦茨空间 $\mathcal{S}(X(\mathbb{A}))$ 是空间 $\mathcal{S}(X(\mathbb{A}) \ C)^J$的局部凸拓扑极限。它是一个严格 LF 空间。

一个有趣的特殊情形是 $X = G$ （且群 H 是平凡群）。群G 实际上以左作用和右作用作用于自身，而 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 对卷积乘积构成一个代数。对于任意紧开子群 $J \subset G(\mathbb{A}_f)$，记 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 为左、右 J-不变函数构成的子代数。此构造特别适用于 G的李代数 $\mathfrak{g}$。在这种情形下，$\mathcal{S}(\mathfrak{g}(\mathbb{A}))$ 由函数 $f_\infty \otimes f^\infty$ 生成，其中 f_∞是 $\mathbb{R}$-向量空间 $\mathfrak{g}(F_\infty)$上的一个施瓦茨函数，而 f^∞ 是 $\mathfrak{g}(\mathbb{A}_f)$上的一个紧支撑局部常值函数。回到空间 $X = H\backslash G$的情形。设 dh 是群 $H(\mathbb{A})$上的一个右不变测度。映射

$$f \mapsto \left(H(\mathbb{A})x \mapsto \int_{H(\mathbb{A})} f(hx)\, dh \right) \tag{2.1.16.2}$$

诱导出从$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$到$\mathcal{S}(X(\mathbb{A}))$的连续满射。连续性由 [Beu21, 命题 A.1.1 (vii)]得出。根据开映射定理，这也是一个开映射。

2.2 线性一般群内形式的某些对合

2.2.1. 在本节中， F是一个特征为 0 的域。设 M 是 F上的有限维中心单代数，维数为 > 0。存在 $N \geqslant 1$ 和 D，其中 D 是 F 上的有限维中心除法代数，并且当 $V = D^N$ 赋予其右 D-模结构时， M 可识别为 V的 D-线性自同态代数 $\mathrm{End}_D(V)$。设 M的乘法群 G 视为 F上的代数群。由此可知， G 可识别为 V的 D-线性自同构群 $G = GL_D(V)$。

2.2.2. 设 $\theta \in G(F)$ 满足 $\theta^2 = 1$。设

$$V^{\pm\theta} = \{v \in V \mid \theta(v) = \pm v\}.$$

当 背景已明确，令 $V^\pm = V^{\pm\theta}$。于是有一个按 D-模的分解

$$V = V^+ \oplus V^-.$$

1. 当然，本节对左作用仍然成立。

设 G^θ 是 θ 的中心化子。这是一个定义在 F 上的连通约化群，可识别为 $GL_D(V^+) \times GL_D(V^-)$。它也是 G 的极大抛物子群的一个 Levi 因子，该抛物子群稳定 V^+（分别地，稳定 V^-）。

更一般地，对于任意子群 $P \subset G$，记 $P^\theta = P \cap G^\theta$ 为 θ 在 P 中的中心化子。

引理 2.2.2.1.—

1. 设 P 是 G 的一个抛物子群。以下三个断言等价：*(a)* P^θ 是 G^θ 的一个抛物子群；*(b)* $\theta \in P$；*(c)* $\theta P \theta = P$。*2.* 设 P 是 G 的一个抛物子群，且包含 θ。*(a)* 对于 P 的任意 *Levi* 因子 M，群 M^θ 是 P^θ 的一个 *Levi* 因子，当且仅当 $\theta \in M$。*(b)* 存在一个包含 θ 的 P 的 *Levi* 因子 M。*3.* G^θ 的任意抛物子群都具有如下形式：P^θ，其中 P 是 G 的一个抛物子群，且包含 θ。*4.* 存在 G 的一个极小抛物子群 $P_0 \subset G$ 和 P_0 的一个 *Levi* 因子 M_0，使得 M_0 包含 θ。对于这样的一对$(P_0,\ M_0)$，可见 M_0 包含于 G^θ，且 P_0^θ 是 G^θ 的一个极小抛物子群。

证明。— 1.b 与 1.c 等价是众所周知的。断言 1.a 蕴含断言 1.b，因为若 P^θ 是 G^θ 的一个抛物子群，则它包含 G^θ 的中心，因此 θ。下面证明断言 1.b 蕴含断言 1.a。抛物子群 P 是 V 中由 $V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V$ 个 D-子模组成的一个旗的稳定子。由于 $\theta \in P$，对于任意 i，子模 V_i 在 θ 作用下稳定，因而分解为 $V_i = V_i^+ \oplus V_i^-$，其中 $V_i^\pm = V_i \cap V^\pm$。一个元素属于 P^θ，当且仅当它稳定 $V^\pm$ 中由 $V_0^\pm \subset V_1^\pm \subset V_2^\pm \subset \ldots \subset V^\pm$ 定义的相应旗。但这一条件显然定义了 G^θ 的一个抛物子群。

证明断言 2.a。该条件是必要的，因为若 M^θ 是P^θ 的一个 Levi 因子，则它包含 G^θ 的中心，从而包含 θ。该条件是充分的：采用上述记号，额外给定 M 等价于对每个 i给定一个分解 $V_i = V_{i-1} \oplus W_i$，并且 M是每个 W_i的稳定子。由于 $\theta \in M$，我们有 $W_i = W_i^+ \oplus W_i^-$，其中 $W_i^\pm = W_i \cap V^\pm$。由此推出，M^θ是 G^θ中使每个 $W_i^\pm$保持稳定的子群，而后者是 M^θ的一个 Levi 因子。为得到断言 2.b，只需在 $V_{i+1}^\pm$中任意选取 $V_i^\pm$ 的一个补 $W_{i+1}^\pm$。定义为子模 $W_i = W_i^+ \oplus W_i^-$ 之稳定子的 P的 Levi 因子包含 θ。

证明 3. 设 Q 是 G^θ 的一个抛物子群，定义为稳定子，即稳定子模 $V^\pm$ 的旗（$V_\bullet^\pm$）。设 P 是 G 中由子模 $V_0^+ \subset V_1^+ \subset \ldots \subset V^+ \subset V^+ \oplus V_1^- \subset \ldots \subset V^+ \oplus V^-$ 构成的旗的稳定子。则 P 包含 θ 和 $P^\theta = Q$。此外，若 Q 是极小的，则每个商 $V_i^\pm / V_{i-1}^\pm$ 的秩均为 1，且 P 也极小。反之，若（P_0, M_0）是 G 的一个极小对，且 $\theta \in M_0$，则 M_0 是那些秩为 1 且直和为 V 的子模的稳定子。由于 θ 必然在每个此类子模上通过 ± 1 作用，因此显然 $M_0 \subset G^\theta$。同样显然，P_0^θ 在 G_0^θ 中是极小的。□

2.2.3. 设 $P_0 \subset G$ 是定义在 F 上且满足这些性质的极小抛物子群，并设 M_0 是 P_0 的 Levi 因子，使得 $\theta \in M_0$（此类对象 M_0 和 P_0 确实存在，参见引理 2.2.2.1 的断言 4）。

G的一个抛物子群若包含 P_0，则称为标准的；若包含 M_0，则称为半标准的；若包含 P_0^θ，则称为相对标准的。如果上下文不明确，可以将副词“相对”替换为“相对于 θ”。标准蕴含相对标准

而后者本身又蕴含半标准。我们回顾一下， M_0 包含于 G^θ中。 G^θ 的一个抛物子群若包含 P_0^θ，则称为标准的；若包含 M_0，则称为半标准的。

Soit

$$\mathcal{F}(P_0) \subset \mathcal{F}(P_0^\theta) \subset \mathcal{F}(M_0) \subset \mathcal{F}(\theta)$$

G的抛物子群集合，它们分别是标准的、相对标准的、半标准的，以及包含 θ的那些。同样，我们定义$\mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$ $\subset \mathcal{F}^\theta(M_0)$为 G^θ 的抛物子群集合，它们分别是标准的、半标准的。

群 $G^\theta(F)$通过共轭作用在$\mathcal{F}(\theta)$上。注意到映射

$$P \mapsto P^\theta$$

诱导出从$\mathcal{F}(\theta)$到 G^θ的抛物子群集合、从$\mathcal{F}(P_0^\theta)$到$\mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$、以及从$\mathcal{F}(M_0)$到$\mathcal{F}^\theta(M_0)$的满射。

2.2.4. 回顾 W是(G, M_0)的魏尔群，参见§ 2.1.10。同样，我们定义 W^θ为(G^θ, M_0)的魏尔群。自然地， W^θ是 W的一个子群。群 W作用在$\mathcal{F}(M_0)$上。 W 的所有轨道都与$\mathcal{F}(P_0)$相交。对于作用在$\mathcal{F}^\theta(M_0)$上、相对于$\mathcal{F}(P_0^\theta)$的 W^θ 亦然。对任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$，设 W^P为 P在 W中关于此作用的稳定子。

对于任意 $w \in W$和 $P \in \mathcal{F}(M_0)$，置

$$P_w = w^{-1}Pw \text{ et } P_w^\theta = P_w \cap G^\theta.$$

设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$，且

$${}_PW_\theta = \{w \in W \mid M_P \cap P_0 = M_P \cap wP_0w^{-1} \text{ et } P_0^\theta \subset P_w\}.$$

命题 2.2.4.1.—

1. 对于任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 以及任意双陪集 $\dot{w} \in W^P \backslash W / W^\theta$，在 ${}_PW_\theta$ 中存在唯一一个 $\dot{w}$ 的代表元。*2.* 映射 $(P, w) \mapsto P_w$ 诱导出从不交并集

$$\bigcup_{P \in \mathcal{F}(P_0)} {}_PW_\theta$$

到 $F(\theta)$的 $G^\theta(F)$-共轭陪集集合上的双射。

证明。— 1. 设 $w \in W$。有 $P_w^\theta \in \mathcal{F}^\theta(M_0)$。因此存在 $w_\theta \in W^\theta$ 使得 $w_\theta^{-1}P_w^\theta w_\theta \in \mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$。将 w 替换为 ww_θ后，不妨设有 $P_0^\theta \subset P_w$。将 w 替换为满足 $w' \in W^P$ 的 $w'w$ 后，由于这不会改变 P_w，不妨设还有$M_P \cap P_0 = M_P \cap wP_0w^{-1}$。因此有 $w \in {}_PW_\theta$，以下均作此假设。设 $w_P \in W^P$ 和 $w_\theta \in W^\theta$ 满足 $w_1 = w_P w w_\theta \in {}_PW_\theta$。于是 P_w^θ 和 $P_{ww_\theta}^\theta$ 是 G^θ 的两个标准抛物子群且彼此共轭：因此二者相等。由此可得 $w_\theta \in W^{P_w^\theta}$。因此 $w_1 = w'w$，其中 $w' = w_P w w_\theta w^{-1} \in W^P$。由此可得，$M_P \cap P_{0,w_1^{-1}}$ 和 $M_P \cap P_{0,w^{-1}}$ 被 w' 共轭。由于二者都等于 $M_P \cap P_0$，实际上有 $w' = 1$，从而 $w_1 = w$。

2. 首先证明所讨论的映射是单射。设 (P, w) 和 (P_1, w_1) 满足 P_w 和 $(P_1)_{w_1}$ 是 $G^\theta(F)$-共轭的。存在 $h \in G^\theta(F)$ 使得 $(wh)^{-1}Pwh = w_1^{-1}P_1w_1$。由于此时 P和 P_1 是标准且共轭的，因此有 $P = P_1$。然后 P_w^θ和 $P_{w_1}^\theta$ 属于 $\mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$，并且是 $G^\theta(F)$-共轭的：因此它们也相等，且 $h \in P_w^\theta$。于是 $P_w = P_{w_1}$。结论显然。

最后证明所讨论的映射是满射。设 P 是包含 θ 的 G 抛物子群，也就是说， P^θ 是 G^θ的抛物子群。将 P用 $G^\theta(F)$的一个元素共轭后，不妨设 P包含 P_0^θ。特别地， P是

半标准的。存在 $w \in W$ 使得 wPw^{-1} 是标准的。因此 $P = w^{-1}(wPw^{-1})w$，证毕。□

我们也有该命题的如下变体。

推论 2.2.4.2.—

1. 对任意 $P \in \mathbf{F}(M_0)$ 以及任意双陪集 $\dot{w} \in P(F)\backslash P(F)WG^{\theta}(F)/G^{\theta}(F)$，在 ${}_PW_{\theta}$ 中存在 $\dot{w}$ 的唯一代表元。*2.* 映射 $(P, w) \mapsto P_w$ 诱导不相交并集的一个双射

$$\bigcup_{P \in \mathcal{F}(P_0)} {}_PW_{\theta}$$

到 $\boldsymbol{F}(P_0^{\theta})$ 上，即 G 的相对标准抛物子群的集合。

证明。— 对于断言 1，利用命题 2.2.4.1 中的存在性，我们只需证明唯一性。设 $w, w_1 \in {}_PW_{\theta}$ 为 $\dot{w}$ 的代表元。存在 $p \in P(F)$ 与 $h \in G^{\theta}(F)$ 使得 $w_1 = pwh$。于是有 $P_{w_1} = h^{-1}P_wh$。若 P 是标准的，则命题 2.2.4.1 中的单射性蕴含 $w_1 = w$，从而得证。但显然，其论证对任意 P 半标准情形同样成立。

对于断言 2，根据命题 2.2.4.1 中的双射，只需证明从$\mathcal{F}(P_0^{\theta})$到$\mathcal{F}(\theta)$的 $G^{\theta}(F)$-共轭陪集集合的典范映射是单射的。为此，可以沿用命题 2.2.4.1 中单射性的证明。□

2.2.5. 设 Q 是 G 的一个半标准抛物子群，${}^Q\mathbf{F}$ 和 $\mathbf{F}(Q)$ 分别表示包含于 Q和包含 Q的抛物子群集合。令 $\mathbf{F}^Q(P_0) = \mathbf{F}^Q \cap \mathbf{F}(P_0)$，$\mathbf{F}^Q(P_0^{\theta}) = \mathbf{F}^Q \cap \mathbf{F}(P_0^{\theta})$，以及 $\mathbf{F}^Q(\theta) = \mathbf{F}^Q \cap \mathbf{F}(\theta)$。再令 $\mathbf{P}^Q(P_0^{\theta}) = \mathbf{P}(M_0) \cap \mathbf{F}^Q(P_0^{\theta})$。假设 Q还满足标准。于是定义

$${}_PW_{\theta}^Q = {}_PW_{\theta} \cap W^Q.$$

立即得到推论。

推论 2.2.5.1. — 映射 $(P, w) \mapsto P_w$ 诱导出一个从不交并集到

$$\bigcup_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} {}_PW_{\theta}^Q$$

的双射，该双射定义在 $Q^{\theta}(F)$-共轭的 $\boldsymbol{F}^Q(\theta)$ 或 $\boldsymbol{F}^Q(P_0^{\theta})$的陪集集合上。

2.2.6. 记号约定。— 对任意 $w \in W$，此前的结果以及接下来的结果，在将 θ 替换为 $w\theta w^{-1}$ 时仍然成立。为简化相对于 $w\theta w^{-1}$ 定义的对象的记号，我们常将指标或上标 $w\theta w^{-1}$ 替换为 $w\theta$。希望这不会引起混淆。注意，此时有公式 $wG^{\theta}w^{-1} = G^{w\theta}$。

2.2.7. 我们以几个引理结束本小节。

引理 2.2.7.1. — 设 $P \subset Q \subset R$ 是 G 的三个标准抛物子群。

1. 对任意 $w \in {}_QW_{\theta}^R$ 和任意 $w_1 \in {}_PW_{w\theta}^Q$，有 $w_1w \in {}_PW_{\theta}^R$。*2.* 反过来，对于任意 $w_0 \in {}_PW_{\theta}^R$，存在唯一的如上所述的有序对 (w, w_1)，使得 $w_0 = w_1w$。

证明。—

1. 设 $w_0 = w_1w$。我们有

$$\begin{aligned} M_P \cap w_0P_0w_0^{-1} \subset M_Q \cap w_0P_0w_0^{-1} &= w_1(M_Q \cap wP_0w^{-1})w_1^{-1} \\ &= w_1(M_Q \cap P_0)w_1^{-1} \\ &= M_Q \cap w_1P_0w_1^{-1}. \end{aligned}$$

因此我们有

$$M_P \cap w_0 P_0 w_0^{-1} \subset M_P \cap w_1 P_0 w_1^{-1} = M_P \cap P_0$$

由此得到等式$M_P \cap w_0 P_0 w_0^{-1} = M_P \cap P_0$。此外，我们有 $P_0^{w\theta} \subset P_{w_1}$。由此可得$P_{0,w}^{\theta} = w^{-1} P_0^{w\theta} w \subset P_{w_1 w} = P_{w_0}$。将下文的引理2.2.7.2应用于 w，我们得出$P_0^{\theta} = P_{0,w}^{\theta} \subset P_{w_0}$。

2. 设 $w_0 \in {}_P W_\theta^R$。于是我们有 $P_0^\theta \subset P_{w_0} \subset Q_{w_0}$。此时存在唯一的 $w_1 \in W^Q$，使得 $w = w_1^{-1} w_0$满足 $M_Q \cap w P_0 w^{-1} = M_Q \cap P_0$和 $P_0^\theta \subset Q_w$。于是 $w \in {}_Q W_\theta^R$。因此我们既有唯一性，也有存在性，因为我们得到 $w_1 \in {}_P W_{w\theta}^Q$：事实上，一方面，借助引理2.2.7.2，

$$P_0^{w\theta} = w(P_{0,w}^\theta) w^{-1} = w(P_0^\theta) w^{-1} \subset P_{w_0 w^{-1}} = P_{w_1}$$

另一方面

$$M_P \cap w_1 P_0 w_1^{-1} \subset M_Q \cap w_1 P_0 w_1^{-1} = w_1 (M_Q \cap P_0) w_1^{-1}$$
$$= w_1 (M_Q \cap w P_0 w^{-1}) w_1^{-1} = M_Q \cap (w_0 P_0 w_0^{-1}) = M_Q \cap P_0.$$

□

引理2.2.7.2. — 设 Q 为 G的一个标准抛物子群。对任意 $w \in {}_Q W_\theta$，有

$$P_0^\theta = P_{0,w}^\theta. \tag{2.2.7.1}$$

证明. — 由关于 w的假设，有 $P_0^\theta \subset Q_w^\theta$。由于 Q 是标准的，同样有$P_{0,w}^\theta \subset Q_w^\theta$。由于它们是 G^θ的抛物子群，由此推出 $P_0^\theta = (P_0 \cap M_{Q_w})^\theta N_{Q_w^\theta}$与$P_{0,w}^\theta = (P_{0,w} \cap M_{Q_w})^\theta N_{Q_w^\theta}$。而仍由关于 w的假设，同样有$P_{0,w} \cap M_{Q_w} = w^{-1}(P_0 \cap M_Q)w = w^{-1}(P_{0,w^{-1}} \cap M_Q)w = P_0 \cap M_{Q_w}$。等式(2.2.7.1)随之成立。

□

引理 2.2.7.3. — 设 $P \in F(M_0)$ 以及满足 $M_P \cap P_0 = M_P \cap w_1 P_0 w_1^{-1}$ 的 $w_1 \in W$。映射 $w_2 \mapsto w_1^{-1} w_2$ 在 ${}_P W_\theta$ 与 ${}_{P_{w_1}} W_\theta$ 之间诱导出一个双射。

证明。— 注意到

$$w_1^{-1}(M_P \cap P_0) w_1 = w_1^{-1}(M_P \cap w_1 P_0 w_1^{-1}) w_1 = M_{P_{w_1}} \cap P_0.$$

由此可得，对于 $w_2 \in W$

$$M_{P_{w_1}} \cap P_0 = M_{P_{w_1}} \cap w_1^{-1} w_2 P_0 w_2^{-1} w_1$$

当且仅当

$$w_1^{-1}(M_P \cap P_0) w_1 = w_1^{-1}(M_P \cap w_2 P_0 w_2^{-1}) w_1$$

也就是说

$$M_P \cap P_0 = M_P \cap w_2 P_0 w_2^{-1}.$$

结论显而易见。 □

2.3 一个相对划分

2.3.1. 我们考虑第 2.2 小节中的情形，并额外假设F 是一个数域。其他记号沿用第 2.1 小节。更具体地说，我们固定 D和 $V = D^N$，如 § 2.2.1 所述。设$(e_1, \ldots\ldots, e_N)$为D^N的标准基。设 $G = GL_D(V)$和 $P_0 \subset G$ 分别为由$e_1, \ldots\ldots, e_i$所张成子空间的稳定子，其中 $1 \leqslant i \leqslant N$。那么 P_0是 G的一个定义在 F上的抛物子群，并且在满足这些性质的群中是极小的。设 $M_0 \subset G$ 为 P_0 的一个定义在 F 上的Levi 因子，它是由 e_i所张成直线的稳定子（其中 $1 \leqslant i \leqslant N$）。有 $M_0(F) = (D^\times)^N$。

2.3.2. 极大紧子群的选择。——设 $\mathsf{O}_D \subset D$ 是 D 的一个极大序， $A \subset F$ 是整数环。设 $v \in V_F$ 是一个非阿基米德位。那么 $\mathsf{O}_D \otimes_A \mathsf{O}_v$ 是 $\mathsf{O}_D \otimes_F F_v$ 中的一个极大序。存在一个定义在 F_v 上的可除代数 D_v ，以及一个整数 $n_v \geqslant 1$ ，使得若 O_{D_v} 表示 D_v 的唯一极大序，则代数 $\mathsf{O}_D \otimes_F F_v$ 可识别为 $M(n_v, D_v)$，而所考虑的极大序可识别为 $M(n_v, \mathsf{O}_{D_v})$。于是可以将群 $G(F_v)$ 识别为 $GL(n_vN, D_v)$。设 $K_v \subset G(F_v)$ 是对应于 $GL(n_vN, \mathsf{O}_{D_v})$ 的极大紧子群。

设 $v \in V_F$ 为一个阿基米德位。存在定义在 F_v 上的可除代数 D_v 以及 $n_v \geqslant 1$，使得代数 $\mathcal{O}_D \otimes_F F_v$ 等同于 $M(n_v, D_v)$。代数 D_v 配备一个记为 $x \mapsto \bar{x}$ 的对合（若 $D_v = \mathbb{R}$，则该对合是平凡的；若 D_v 是四元数代数，则它实际上是一个反对合）。于是群 $G(F_v)$ 等同于 $GL(n_vN, D_v)$。设 $K_v \subset G(F_v)$ 为¯极大紧子群，它对应于由满足 ${}^tMM$ 为恒等式的矩阵 $M \in GL(n_vN, D_v)$ 所构成的群。

于是令 $K = \prod_{v \in V_F} K_v$。它是 $G(\mathbb{A})$ 的一个相对于 M_0 处于良好位置的极大紧子群，其意义见 § 2.1.9。

2.3.3. 魏尔群。 — 在下文中，我们将魏尔群W在 (G, M_0) 中的元素都视为 $G(F)$ 中的置换矩阵，即置换标准基元素的矩阵。于是可以看出， W是 $G(F) \cap K$的子群。

2.3.4. 元素 θ。 — 设 $\theta \in M_0(F)$ 是一个阶至多为 2 的元素。设 $I_\pm = \{1 \leqslant i \leqslant N | \theta(e_i) = \pm e_i\}$。设 $V_\pm$ 是基 $(e_i)_{i \in I_\pm}$ 的子-D-模。那么 V 是 V_+ 与 V_- 的直和，且群 G^θ 可识别为 $GL_D(V_+) \times GL_D(V_-)$。根据 K 的选取，有 $\theta \in K$。对于包含 M_0 的任意抛物子群 P，都有相对于紧子群 $K \subset G(\mathbb{A})$ 定义于 §2.1.9 的映射 H_P。注意，对于任意 $g \in G(\mathbb{A})$，有

$$H_P(\theta g) = H_P(g). \tag{2.3.4.1}$$

设 $K^\theta = \prod_{v \in V_F} K_v^\theta$，其中 $K_v^\theta = K_v \cap G^\theta(F_v)$。注意，此时 K_v^θ 是 $G^\theta(\mathbb{A})$ 的极大紧子群，且相对于 G^θ 的极小 Levi 子群 M_0 处于良好位置。我们选择子群 K^θ 作为 $G^\theta(\mathbb{A})$ 的参考极大紧子群。

2.3.5. 使用 § 2.1.11 中的假设和记号。设 $g \in G(\mathbb{A})$ 且 $Q \in \mathrm{F}^G(P_0)$。称 g 的唯一一对 (P, δ) 为 (Q, T)- 典范对，其中 $P \in \mathrm{F}^Q(P_0)$ 且 $\delta \in P(F) \backslash Q(F)$，并且它在 (2.1.11.2) 中给出非零贡献。利用 (2.3.4.1) 以及 $\theta \in K$ 这一事实，可以看出，如果 (P, δ) 是 g 的 (Q, T)-典范对，那么 $(P, \delta\theta^{-1})$ 就是 $\theta g \theta^{-1}$ 的典范对。因此，对于 $g \in G^\theta(\mathbb{A})$，此典范对 (Q, T) 满足 $\theta \in \delta^{-1} P \delta$。借助推论 2.2.5.1，可推出 $[G^\theta]_{Q^\theta}$ 的一个划分，对任意 $h \in G^\theta(\mathbb{A})$，该划分由下式给出

$$\sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \sum_{w \in {}_PW_\theta^Q} \sum_{\delta \in P_w^\theta(F) \backslash Q^\theta(F)} F^P(w\delta h, T) \tau_P^Q(H_P(w\delta h) - T) = 1. \tag{2.3.5.1}$$

注意，由于 $w \in {}_PW_\theta^Q$，我们有 $P_w \in \mathcal{F}^Q(P_0^\theta)$，因此有 $P_w^\theta \subset Q^\theta$。

2.3.6. 对于标准抛物子群 $P \subset Q$所引入的函数τ_P^Q和$\hat{\tau}_P^Q$，更一般地也适用于半标准抛物子群：可以验证，它们的

定义不依赖于元素 $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$的选取。另一方面，函数 $F^P(\cdot\ T)$的定义则依赖于 $P_0 \in \mathcal{P}(M_0)$的选取。因此，引入 $F_B^P(\cdot\ T)$，即§ 2.1.11中相对于子群 $B \in \mathcal{P}(M_0)$及包含 B的半标准抛物子群P所定义的函数。对于任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$和 $T \in \mathfrak{a}_0$，设 T_P为 wT在 $\mathfrak{a}_P$上的投影，其中 $w \in W$满足 $P_0 \subset P_w$。此定义不依赖于 w的选取。例如，对于 $T \in \mathfrak{a}_0^+$，任意 $B \in \mathcal{P}(M_0)$均有 $T_B \in \mathfrak{a}_B^+$。采用这一记号，可以看出，对于任意 $w \in W$，$T_{P_w} = w^{-1}(T_P)$是 $w^{-1}T$在 $\mathfrak{a}_{P_w}$上的投影。

引理 2.3.6.1。— 设 $w \in W$，$g \in G(\mathbb{A})$且 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。

1. 对任意标准抛物子群 P，有

$$F^P(wg, T) = F_B^{P_w}(g, T_{P_w})$$

其中 $B = (P_0)_w$。

2. 对任意半标准抛物子群 $P \subset Q$，有

(2.3.6.1)
$$\tau_{P_w}^{Q_w}(H_{P_w}(g) - T_{P_w}) = \tau_P^Q(H_P(wg) - T_P)\ et\ \hat{\tau}_{P_w}^{Q_w}(H_{P_w}(g) - T_{P_w}) = \hat{\tau}_P^Q(H_P(wg) - T_P).$$

证明。— 有 $W \subset G(F) \cap K$。由此可知，若 $B = (P_0)_w$则有

$$H_{P_0}(wg) = wH_B(g).$$

引理由此得证。 □

对于任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$和 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$，定义

$$F^P(\cdot, T) = F_B^P(\cdot, T_B)$$

其中，B 是包含于 P 中的 $\mathcal{P}(M_0)$ 的任意元素。由引理 2.3.6.1 的断言 1，以及函数 $F^P(\cdot\ T)$ 在 $P(F)$ 下左不变可知，该定义与 B 的选取无关。采用此定义后，引理 2.3.6.1 的断言 1 变为

$$F^{P_w}(x, T) = F^P(wx, T)$$

对于任意 $w \in W$ 和任意 $x \in G(\mathbb{A})$。

利用推论 2.2.5.1，可以改写恒等式 (2.3.5.1)。对于任意 $Q \in \mathcal{F}(P_0)$、$T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 和 $h \in G^\theta(\mathbb{A})$，有

(2.3.6.2)
$$\sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0^\theta)} \sum_{\delta \in P^\theta(F) \backslash Q^\theta(F)} F^P(\delta h, T) \tau_P^Q(H_P(\delta h) - T_P) = 1.$$

事实上，这个恒等式更一般地对任意 $Q \in \mathcal{F}(P_0^\theta)$ 都成立。确实，对于这样的 Q，存在包含于 Q 中的 $B \in \mathcal{P}(M_0)$。由此可知，B^θ 是 Q^θ 的极小抛物子群，且以 M_0 为 Levi 因子。因此，存在 $M_{Q^\theta}(F)$ 中的元素 m，它正规化 M_0，并且满足 $mB^\theta m^{-1} = P_0^\theta$。将 B 替换为 mBm^{-1} 后，不妨进一步假设 $B \in \mathcal{P}(M_0) \cap \mathcal{F}^Q(P_0^\theta)$。于是，只需将 (2.3.5.1) 中的 P_0 换成 B 即可。

注 2.3.6.2. —恒等式2.3.6.2见于 [Li22,引理4.4]。这里给出的证明与 [Li22] 中的略有不同。

2.3.7. 按照§ 2.1.11，对于任意 $P \in \mathcal{F}(P_0^\theta)$，都有相对于$G^\theta(\mathbb{A})$的 Siegel集

$$\mathfrak{S}^{P^\theta} = \mathfrak{S}_{P_0^\theta}^{P^\theta} = \omega_{P_0^\theta} A_{P_0^\theta}^{P^\theta, \infty}(T_-) K^\theta.$$

假设 $T_- \in -\mathfrak{a}_{G,0}^{+}$ 满足 $G(\mathbb{A}) = P(F)\mathfrak{S}^P$ 以及 $G^\theta(\mathbb{A}) = P^\theta(F)\mathfrak{S}^{P^\theta}$。于是，对于任意 $B \in \mathcal{P}^P(P_0^\theta)$ 和 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$，定义集合

$$\mathfrak{S}^{M_P^\theta}(B, T_B) = \left(\omega_{P_0^\theta} \cap M_P^\theta(\mathbb{A})\right)\left(A_{P_0^\theta}^{P^\theta,\infty}(T_-) \cap A_B^{P,\infty}(T_-, T_B)\right)\left(K^\theta \cap M_P^\theta(\mathbb{A})\right).$$

我们将使用下面的引理：

引理 2.3.7.1. —*([Li22，推论 4.13])* 对任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$，有

$$\{m \in M_P^\theta(\mathbb{A}) \mid F^P(m, T) = 1\} = \bigcup_{B \in \mathcal{P}^P(P_0^\theta)} M_P^\theta(F)\mathfrak{S}^{M_P^\theta}(B, T_B).$$

2.4 一个截断算子

2.4.1. 我们继续沿用第 2.3 节中的记号。还定义 $[G^\theta]^G = G^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)$。

2.4.2. 截断算子。 — 设 $Q \in \mathcal{F}(P_0)$。设 $T \in \mathfrak{a}_0$。定义算子 $\Lambda^{T,\theta}{}^{Q}$ 如下：对于任意定义在 $[G]_Q$ 上的连续函数 φ，对 $x \in G(\mathbb{A})$ 令

$$(\Lambda_\theta^{T,Q}\varphi)(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}^Q(P_0)} \varepsilon_P^Q \sum_{w \in {}_PW_\theta^Q} \sum_{\delta \in P_w^\theta(F)\backslash Q^\theta(F)} \hat{\tau}_P^Q(H_P(w\delta x) - T)\varphi_P(w\delta x) \tag{2.4.2.1}$$

其中 φ_P 是由(2.1.15.2)给出的 φ的常数项。记 (2.4.2.1) 中关于 δ 的和实际上是有限和（参见 [Art78，引理 5.1]）。将上述定义推广到定义在 $[G]$上的任意连续函数 φ，令：

$$\Lambda_\theta^{T,Q}\varphi = \Lambda_\theta^{T,Q}\varphi_Q.$$

与通常一样，当指的是群 G 本身时，我们省略上标。

注 2.4.2.1. — 上文定义的截断算子与 Zydor 在 [Zyd22 第 3 节中为子群 G^θ 定义的截断算子有很大相似之处（Zydor 研究的背景比我们一般得多）。因此，通过推论 2.2.4.2 中的双射 $(P, w) \mapsto P_w$，我们可以将求和集与 Zydor 的求和集对应起来。利用引理 2.3.6.1 以及我们对极大紧子群的选择，可以看出

$$\hat{\tau}_P^Q(H_P(wx) - T) = \hat{\tau}_P^Q(H_P(wx) - T_P) = \hat{\tau}_{P_w}^{Q_w}(H_{P_w}(x) - T_{P_w}) = \hat{\tau}_{P_w}^{Q_w}(H_{P_w^\theta}(x) - T_{P_w}),$$
$$\varphi_P(wx) = \varphi_{P_w}(x),$$

对所有 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$、$P \in \mathrm{F}^Q(P_0)$ 和 $w \in {}_PW_\theta^Q$。然而，Zydor 所使用的截断基于表达式 $\hat{\tau}_{P_w}^{Q_w}(H_{P_w^\theta}(x) - T)$，它与上文定义的表达式并不一致。因此，我们的算子不等于 Zydor 的算子。我们以域 F 上群 $G = GL(2)$ 为例来说明这一点，其中 θ 是对角矩阵，其对角元为 1 和 -1。此时群 G^θ 就是极大对角环面。参数 T可视为一对 $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$，其中 $t_1 - t_2$ 足够正。设 ϕ 为 $G(\mathbb{A})$ 上恒等于 1 的函数。设 B 为标准博雷尔子群，$\bar{B}$ 为其关于 G^θ的对立子群。于是有 $T_{\bar{B}} = (t_2, t_1)$。设 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$，将其显然地视为一对 $(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^\times \times \mathbb{A}^\times$。于是有 $H_B(x) = H_{\bar{B}}(x) = (\log(|x_1|), \log(|x_2|))$。记 Λ_z^T 为 Zydor 算子，得到

$$(\Lambda_z^T\phi)(x) = 1 - \hat{\tau}_B(H_B(x) - T) - \hat{\tau}_{\bar{B}}(H_B(x) - T).$$

定义在 $G^\theta(\mathbb{A})$ 上的函数 $(\Lambda_z^T\phi)$ 是满足 $\log(|x_1||x_2|^{-1}) = t_1 - t_2$ 的 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$ 的特征函数。此外，我们注意到

$$(\Lambda_\theta^T\phi)(x) = 1 - \hat{\tau}_B(H_B(x) - T) - \hat{\tau}_{\bar{B}}(H_B(x) - T_{\bar{B}})$$

并且，$G^\theta(\mathbb{A})$ 上的函数 $(\Lambda_\theta^T\phi)$ 因而是满足 $\log(|x_1||x_2|^{-1}) \in [t_2 - t_1$ 的 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$ 的特征函数；$t_1 - t_2]$。因此，对于逐点收敛性，有

$$\lim_{t_1 - t_2 \to +\infty}(\Lambda_z^T\phi) = 0 \qquad \lim_{t_1 - t_2 \to +\infty}(\Lambda_\theta^T\phi) = \phi.$$

特别地，Zydor 算子不满足下述命题 2.4.3.2 的断言。然而，对于本文及其后续发展，参见 [Cha25b], ，具备右侧性质以及下述命题 2.4.3.2 的有效性将至关重要。

2.4.3. 衰减性质。 — 设 $J \subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧开子群。

命题 2.4.3.1。 — 设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。对于任意 N_1、$N_2 > 0$，存在一个有限族 $\mathfrak{F} \subset U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 的元素，使得对于任意任意 $x \in [G^\theta]^G$ 以及任意 $\varphi \in C^\infty([G])^J$，有

$$|(\Lambda_\theta^T\varphi)(x)| \leqslant \|x\|_{G^\theta}^{-N_1}\|\varphi\|_{N_2,\mathfrak{F}}.$$

证明。 — 根据下文命题 2.4.3.2 的断言 2，只需对 $[G^\theta]^G$ 上的函数 $x \mapsto F^G(x, T)\varphi(x)$ 作上界估计，也就是对 $[G^\theta]^G$ 上的函数 $\|x\|_{G^\theta}^{N_1}\|x\|_G^{N_2}$ 作上界估计。这是显然的，因为在 $[G^\theta]^G$ 上，函数 $F^G(x, T)\varphi(x)$ 的支集是紧集。

□

命题 2.4.3.2.—

1. 对任意 $r > 0$ 以及任意 $N_1, N_2 > 0$，存在一个由 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 中元素组成的有限族 $\mathfrak{F}$，使得对任意充分大的正 T，有

$$|(\Lambda_\theta^T\varphi)(x) - F^G(x, T)\varphi(x)| \leqslant \exp(-r\|T^G\|)\|x\|_{G^\theta}^{-N_1}\|\varphi\|_{N_2,\mathfrak{F}}$$

对任意 $x \in [G^\theta]^G$ 以及任意 $\varphi \in C^\infty([G])^J$。

2. 设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。对于任意 $N_1, N_2 > 0$，存在 $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$的一族有限个元素 $\mathfrak{F}$，使得

$$|(\Lambda_\theta^T\varphi)(x) - F^G(x, T)\varphi(x)| \leqslant \|x\|_{G^\theta}^{-N_1}\|\varphi\|_{N_2,\mathfrak{F}}$$

对于任意 $x \in [G^\theta]^G$ 以及任意 $\varphi \in C^\infty([G])^J$。

证明。 — 从 $Q = G$ 的表达式 (2.4.2.1) 出发。设 $h \in G^\theta(\mathbb{A})$。在与 P, w 相关的项中，将恒等式 (2.3.5.1) 应用于 $w\theta w^{-1}$, $Q = P$ 以及元素 $w\delta hw^{-1} \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$，并代入定义 (2.4.2.1) 中的 $(\Lambda_\theta^T\varphi)(h)$ 和 δ。得到:

$$(\Lambda_\theta^T\varphi)(h) = \sum_{P \in \mathcal{F}^G(P_0)} \varepsilon_P^G \sum_{w \in {}_PW_\theta^G} \sum_{\delta \in P_w^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} \hat{\tau}_P^G(H_P(w\delta h) - T)\varphi_P(w\delta h) \times$$

$$\left(\sum_{P_1 \in \mathcal{F}^P(P_0)} \sum_{w_1 \in {}_{P_1}W_{w\theta}^P} \sum_{\gamma \in P_{1,w_1}^{w\theta}(F)\backslash P^{w\theta}(F)} F^{P_1}(w_1\gamma w\delta h, T)\tau_{P_1}^P(H_{P_1}(w_1\gamma w\delta h) - T) \right).$$

采用上述记号，有 $w^{-1}\gamma w \in P_{1,\, w_1 w}(F)\backslash P_w^\theta(F)$ 和 $w_1 w \in {}_{P_1}W_\theta^G$。利用引理 2.2.7.1，可以交换关于 P 和 P_1 的求和，然后使用 (2.1.7.1)。因此，$(\Lambda_\theta^T\varphi)(h)$ 等于

$$\sum_{P_0 \subset P_1 \subset P} \varepsilon_P^G \sum_{w \in {}_{P_1}W_\theta^G} \sum_{\delta \in P_{1,w}^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} F^{P_1}(w\delta h, T)\tau_{P_1}^P(H_P(w\delta h) - T)\hat{\tau}_P^G(H_P(w\delta h) - T)\varphi_P(w\delta h)$$

其值为

$$\sum_{P_0\subset P_1\subset P_2\subset G}\sum_{w\in {}_{P_1}W_\theta^G}\sum_{\delta\in P_{1,w}^\theta(F)\backslash G^\theta(F)}F^{P_1}(w\delta h,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(w\delta h)-T)\varphi_{1,2}(w\delta h)$$

其中 $\varphi_{1,2}$ 在 (2.1.15.3) 中定义。若 $P_1=P_2$，那么函数 $\sigma_{P_1}^{P_2}$ 恒为零，除非$P_1=P_2=G$。在这种情形下，$P_1=P_2=G$的贡献仅为 $F^G(h,T)\varphi(h)$。因此，只需对固定的 $P_1\subsetneq P_2$ 和固定的 $w\in {}_{P_1}W_\theta$ 对应的项建立所需的上界估计。利用引理 2.3.6.1 可知，只要将 T 替换为 wT、将 P_0 替换为 $(P_0)_w$、将 P_i 替换为 $(P_i)_w$、将 δ 替换为 $w\delta w^{-1}$、将 h 替换为 $w\delta hw^{-1}$、将 θ 替换为 $w\theta w^{-1}$，并将 φ 替换为 $\varphi(\cdot w)$，便只需处理和

$$\sum_{\delta\in P_1^\theta(F)\backslash G^\theta(F)}F^{P_1}(\delta h,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(\delta h)-T)\varphi_{P_1,P_2}(\delta h). \tag{2.4.3.1}$$

于是，由引理 2.1.15.2 即可轻易得出结论。 □

2.4.4. 反演公式。 —为便于今后引用，我们也陈述如下命题。

命题 2.4.4.1.— 设 φ 为 $[G]$ 上的连续函数。对任意标准抛物子群 Q 以及任意 $x\in G(\mathbb{A})$，有

$$\varphi_Q(x)=\sum_{P\in\mathcal{F}^Q(P_0)}\sum_{w\in {}_PW_\theta^Q}\sum_{\delta\in P_w^\theta(F)\backslash Q^\theta(F)}\tau_P^Q(H_P(w\delta x)-T)(\Lambda_{w\theta}^{T,P}\varphi)(w\delta x),$$

其中对 δ 的求和实际上具有有限支集。

证明。 —将截断算子的定义代入待证表达式的右端。我们得到

$$\sum_{P\in\mathcal{F}^Q(P_0)}\sum_{w\in {}_PW_\theta^Q}\sum_{\delta\in P_w^\theta(F)\backslash Q^\theta(F)}\tau_P^Q(H_P(w\delta x)-T)\sum_{P_1\in\mathcal{F}^P(P_0)}\varepsilon_{P_1}^P\sum_{w_1\in {}_{P_1}W_{w\theta}^P}\sum_{\delta_1\in P_{1,w_1}^{w\theta}(F)\backslash P^{w\theta}(F)}\hat{\tau}_{P_1}^P(H_{P_1}(w_1\delta_1w\delta x)-T)\varphi_{P_1}(w_1\delta_1w\delta x). \tag{2.4.4.1}$$

注意到我们有 $P^{w\theta}=P\cap Q^{w\theta}=P\cap wQ^\theta w^{-1}$。由此可得

$$w^{-1}P^{w\theta}w=w^{-1}Pw\cap Q^\theta.$$

如同命题 2.4.3.1 的证明，我们借助引理 2.2.7.1 改写该表达式。于是得到表达式 (2.4.4.1) 等于

$$\sum_{P\in\mathcal{F}^Q(P_0)}\sum_{w\in {}_PW_\theta^Q}\sum_{\delta\in P_w^\theta(F)\backslash Q^\theta(F)}\left[\sum_{P\subset R\subset Q}\varepsilon_P^R\hat{\tau}_P^R(H_P(w\delta x)-T)\tau_R^Q(H_R(w\delta x)-T)\right]\varphi_P(w\delta x).$$

方括号中的表达式除非 $P=Q$ 否则为零；在此情形下，和化简为 $\varphi_Q(x)$（这就是“朗兰兹引理”，例如参见 [LW13，命题 1.7.2] 中的证明）。□

3 谱分解

3.1 自守核

3.1.1. 在本节中，F 是一个数域。其余记号与第 2 节相同。

3.1.2. 我们将称的尖点数据为偶对 (M_P, π) 的等价类，其中P 是 G 的标准抛物子群，而 π 是 $M_P(\mathbb{A})$的不可约表示，它实现于空间 $L^2_{\mathrm{cusp}}(A_P^\infty M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A}))$ 中；该空间由定义在 $A_P^\infty M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})$上的平方可积尖点函数构成，等价关系由 [Art78，第 3]节给出。设 G的尖点数据集合为 $\mathfrak{X}(G)$。

3.1.3. 设 P 是 G的半标准抛物子群。设 $L^2([G]_P)$为商 $[G]_P$ 上的平方可积函数构成的希尔伯特空间，并赋予商测度。施瓦茨代数$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，参见第2.1.16节，通过一个可积算子在该空间上从右作用，其核明确给出如下：

$$K_{P,f}(x,y)=\sum_{\gamma\in M_P(F)}\int_{N_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma n y)\,dn$$

对于 $x,\ y\in G(\mathbb{A})$ 和 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。事实上，我们有一个分解

$$K_{P,f}(x,y)=\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} K_{P,\chi,f}(x,y)$$

其中 $K_{P,\chi,f}$ 可解释为由 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 诱导的算子在闭稳定子空间 $L^2_\chi([G]_P)\subset L^2([G]_P)$ 上作用所得的核；该子空间与 χ 相关，定义见例如 [BPCZ22, § 2.9.2]。

3.1.4. 在集合 $[G]_P$ 上，有 [BPCZ22, § 2.4.3] 意义下的权的概念：它们是 $[G]_P$ 上某些正函数，此处不再重述其定义。只需知道，权的集合包含函数 $\|\cdot\|_P$ 和 $d^P(\lambda,\cdot)$（对任意 $\lambda\in\mathfrak{a}_0$），并且该集合对乘积、取最小值或最大值的运算，以及 G 上定义且保持P的任意自同构封闭。这些权会出现在上界估计的表述中，例如下面的表述。

引理 3.1.4.1. —*[BPCZ22，引理 2.10.1.1]* 存在 $N_0>0$，使得对于任意 $N>0$ 以及 $[G]_P$ 上的任意权 ω，都存在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A})$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得对于任意 $y\in[G]_P$以及任意 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，均有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\sup_{x\in[G]_P}\left(\omega(x)\|x\|_P^{-N_0-N}|K_{P,\chi,f}(x,y)|\right)\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}\omega(y)\|y\|_P^{-N}. \tag{3.1.4.1}$$

3.2 修正核的上界估计

3.2.1. 沿用子小节 2.3 中的记号和假设。设 $\theta,\theta'\in M_0(F)$ 为阶至多为 2 的元素。

3.2.2. 设 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。设 $T\in T_0+\overline{\mathfrak{a}_0^+}$为一个截断参数，且 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$。对于所有$x\in G^{\theta'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 和 $y\in G^\theta(F)\backslash G(\mathbb{A})$，定义修正核

$$\begin{aligned}K_{\chi,f}^{T,\theta',\theta}(x,y)=\sum_{P\in\mathcal{F}(P_0)}\varepsilon_P^G\sum_{w_1\in{}_PW_{\theta'}}\sum_{\delta_1\in P_{w_1}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)}\hat{\tau}_P(H_P(w_1\delta_1x)-T)\times\\ \left[\sum_{w_2\in{}_PW_\theta}\sum_{\delta_2\in P_{w_2}^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1x,w_2\delta_2y)\right].\end{aligned} \tag{3.2.2.1}$$

注记 3.2.2.1.— 在表达式 (3.2.2.1) 中，关于 δ_1 的和是有限的（参见 [Art78，引理 5.1]）。然而，在方括号内的表达式中，关于 δ_2 的和一般并非有限，但引理 3.1.4.1 表明，该和至少是绝对收敛的（取 $\omega = 1$ 和 N足够大）。

在下文中，θ' 与 θ 固定；若上下文清楚，可将其从上标中去掉。同样，将$K_{P,\chi,f}$ 替换为$K_{P,f}$，即得修正核 $K^T_{,f,\theta'\theta,}$，简记为 K^T_f。于是有

$$K^T_f = \sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} K^T_{\chi,f}. \tag{3.2.2.2}$$

若上下文清楚，也可省略下标 f。

3.2.3. 本子小节的主要结果如下。

定理 3.2.3.1. — 对所有 N_1、N_2、$r > 0$，存在$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} |K^T_{\chi,f}(x,y) - F^G(x,T)K_{\chi,f}(x,y)| \leqslant \exp(-r\|T^G\|)\|x\|^{-N_1}_{G^{\theta'}}\|y\|^{-N_2}_{G^{\theta}}\|f\|_{\mathcal{S}}$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$、$x \in [G^{\theta'}]^G$、$y \in [G^{\theta}]$ 以及充分正的 $T \in \mathfrak{a}_0$。

定理 3.2.3.2. — 对所有 N_1、$N_2 > 0$ 与 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$，存在$\overline{\mathcal{S}}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数$\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} |K^T_{\chi,f}(x,y)| \leqslant \|x\|^{-N_1}_{G^{\theta'}}\|y\|^{-N_2}_{G^{\theta}}\|f\|_{\mathcal{S}}$$

对所有 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$、$x \in [G^{\theta'}]^G$ 和 $y \in [G^{\theta}]$。

3.2.4. 定理 3.2.3.1 和 3.2.3.2 的证明 — 设 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ 且 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。按照命题 2.4.3.1 的证明进行推导，可知对于所有 $x \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 和 $y \in G^{\theta}(\mathbb{A})$，其差

$$K^T_{\chi,f}(x,y) - F^G(x,T)K_{\chi,f}(x,y) \tag{3.2.4.1}$$

等于对标准抛物子群 $P_1 \subsetneq P_2$ 求和，再对 $w_1 \in {}_{P_1}W_{\theta'}$ 求和，再对 $\delta \in P_1^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)$ 求和，所得结果为

$$F^{P_1}(w_1\delta_1 x, T)\sigma_1^2(H_{P_1}(w_1\delta_1 x) - T)K_{1,2,\chi}(w_1\delta x, y)$$

其中，对任意 $x \in G(\mathbb{A})$，定义

$$K_{1,2,\chi}(x,y) = \sum_{P_1\subset P\subset P_2} \varepsilon_P^G \sum_{w_2\in {}_PW_\theta} \sum_{\delta_2\in P^\theta_{w_2}(F)\backslash G^\theta(F)} K_{P,\chi}(x, w_2\delta_2 y).$$

我们将借助此前证明的中间结果，在第 3.2.7 节证明以下命题。

命题 3.2.4.1. — 设 $P_1 \subsetneq P_2$ 为抛物子群。

1. 对任意 N_1、N_2、$r > 0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} \sum_{w\in {}_{P_1}W_{\theta'}} \sum_{\delta\in P^{\theta'}_{1,w}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} F^{P_1}(w\delta x, T)\sigma_1^2(H_{P_1}(w\delta x) - T)|K_{1,2,\chi}(w\delta x, y)|$$
$$\leqslant \exp(-r\|T^G\|)\|x\|^{-N_1}_{G^{\theta'}}\|y\|^{-N_2}_{G^{\theta}}\|f\|_{\mathcal{S}}$$

对任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，$x \in [G^{\theta'}]^G$、$y \in [G^{\theta}]$ 和 $T \in \mathfrak{a}_0$ 充分大。

2. 设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^{+}$。对于所有 N_1、$N_2 > 0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\sum_{w\in {}_{P_1}W_{\theta'}}\sum_{\delta\in P_{1,w}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} F^{P_1}(w\delta x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(w\delta x)-T)|K_{1,2,\chi}(w\delta x,y)|$$
$$\leqslant \|x\|_{G^{\theta'}}^{-N_1}\|y\|_{G^{\theta}}^{-N_2}\|f\|_{\mathcal{S}}$$

pour tout $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$, $x\in[G^{\theta'}]^G$ *et* $y\in[G^{\theta}]$.

定理 3.2.3.1 于是立即由差 (3.2.4.1) 的组合分解以及上述命题 3.2.4.1 的断言 1 得出。

现在证明定理 3.2.3.2。根据引理 3.1.4.1 应用于权 $\omega=1$，存在 N_0，使得对任意 $N>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A})$ 上，使得对于任意 $x,y\in G(\mathbb{A})$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，都有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}|K_{\chi,f}(x,y)|\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}\|x\|_G^{N_0+N}\|y\|_G^{-N}.$$

设 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^{+}$和 $N'>0$。映射 $x\mapsto F^G(x,T)\|x\|_G^{N_0+N+N'}$ 在 $[G^{\theta'}]^G$ 上具有紧支集：因此它有界。由于对于任意阶至多为 2 的 $\theta\in M_0(F)$，都存在 $C>0$ 和 $r>0$，使得对任意 $y\in G^{\theta}(\mathbb{A})$，有（参见 [Beu21，命题 A.1.1 (ix)]）

$$\|y\|_{G^{\theta}}\leqslant C\|y\|_G^{r},$$

on o可得，对于所有 $N_1,N_2>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得 it

(3.2.4.2)
$$\forall f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A})),x\in[G^{\theta'}]^G \text{ et } y\in[G^{\theta}]$$
$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}F^G(x,T)|K_{\chi,f}(x,y)|\leqslant\|x\|_{G^{\theta'}}^{-N_1}\|y\|_{G^{\theta}}^{-N_2}\|f\|_{\mathcal{S}}.$$

于是，利用差（3.2.4.1）的组合分解和命题 3.2.4.1断言 2，便可得出结论。

3.2.5. 本子小节的其余部分将为命题 3.2.4.1 的证明做准备，该命题最终将在第 3.2.7 节给出。设 $P_1\subsetneq P_2$ 为标准抛物子群。设 $\alpha\in\Delta_0^{P_2}\backslash\Delta_0^{P_1}$。设 $P_1\subsetneq P_1^{\alpha}\subset P_2$ 由 $\Delta_0^{P_1^{\alpha}}=\Delta_0^{P_1}\cup\{\alpha\}$定义。对于任意抛物子群 $P_1^{\alpha}\subset P\subset P_2$，设 P_{α} 由 $\Delta_0^{P_{\alpha}}=\Delta_0^{P}\backslash\{\alpha\}$定义。

设 $\theta_1\in M_0(F)$ 是一个阶至多为二的元素。设 P 是一个标准抛物子群，满足 ${}^{\alpha}P_1\subset P\subset P_2$。设 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$。对于任意 x，$y\in G(\mathbb{A})$，令

$$K_{P,\chi}^{\alpha,\theta_1}(x,y)=K_{P,\chi}(x,y)-\sum_{w_1\in {}_{P_{\alpha}}W_{\theta_1}^{P}}\sum_{\delta_1\in P_{\alpha,w_1}^{\theta_1}(F)\backslash P^{\theta_1}(F)}K_{P_{\alpha},\chi}(x,w_1\delta_1 y).$$

对于 $w\in {}_{P}W_{\theta}$，令 $K^{\alpha,\,{}^{w}P,\chi}=K^{\alpha,\,{}^{\theta_1}P,\chi}$，其中 $\theta_1=w\theta w^{-1}$。

引理 3.2.5.1。—— 对于任意 x、$y\in G$（$\mathbb{A}$），有

$$K_{1,2,\chi}(x,y)=\sum_{{}^{\alpha}P_1\subset P\subset P_2}\varepsilon_P^G\sum_{w\in {}_{P}W_{\theta}}\sum_{\delta\in P_w^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}K_{P,\chi}^{\alpha,w}(x,w\delta y).$$

证明。— 设 $P_1^{\alpha}\subset P\subset P_2$。利用引理 2.2.7.1，可得对所有$x$，$y\in G(\mathbb{A})$

$$\sum_{w\in {}_{P_\alpha}W_\theta}\sum_{\delta\in P^\theta_{\alpha,w}(F)\backslash G^\theta(F)} K_{P_\alpha,\chi}(x,w\delta y)$$
$$=\sum_{w_1\in {}_PW_\theta}\sum_{w_2\in {}_{P_\alpha}W^P_{w_1\theta}}\sum_{\delta_2\in P^\theta_{\alpha,w_2w_1}(F)\backslash P^\theta_{w_1}(F)}\sum_{\delta_1\in P^\theta_{w_1}(F)\backslash G^\theta(F)} K_{P_\alpha,\chi}(x,w_2w_1\delta_2\delta_1 y)$$
$$=\sum_{w_1\in {}_PW_\theta}\sum_{\delta_1\in P^\theta_{w_1}(F)\backslash G^\theta(F)}\sum_{w_2\in {}_{P_\alpha}W^P_{w_1\theta}}\sum_{\delta_2\in P^{w_1\theta}_{\alpha,w_2}(F)\backslash P^{w_1\theta}(F)} K_{P_\alpha,\chi}(x,w_2\delta_2w_1\delta_1 y).$$

由此可得

$$\sum_{w\in {}_PW_\theta}\sum_{\delta\in P^\theta_w(F)\backslash G^\theta(F)} K_{P,\chi}(x,w\delta y)-\sum_{w\in {}_{P_\alpha}W_\theta}\sum_{\delta\in P^\theta_{\alpha,w}(F)\backslash G^\theta(F)} K_{P_\alpha,\chi}(x,w\delta y)$$
$$=\sum_{w\in {}_PW_\theta}\sum_{\delta\in P^\theta_w(F)\backslash G^\theta(F)} K^{\alpha,w}_{P,\chi}(x,w\delta y).$$

该引理很容易推出。 □

引理 3.2.5.2. — 设 $P_1^\alpha\subset P\subset P_2$和 $w\in {}_PW_\theta$。对于任意 $N>0$，存在 $N'>0$，使得对于任意 $t>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上，从而对于任意$T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$

$$F^{P_1}(x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(x)-T)\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}|K^{\alpha,w}_{P,\chi,f}(x,y)|\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}d^{P_1}(-t\alpha,x)\|x\|^{N'}_{P_1}\|y\|^{-N}_{P^{w\theta}} \tag{3.2.5.1}$$

对于任意 $x\in P_1(F)|G(\mathbb{A})^1$，、任意 $y\in G^{w\theta}(\mathbb{A})$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。

证明。 — 设 $J\subset G(\mathbb{A}_f)$ 是一个紧开子群。利用巴拿赫-斯坦豪斯定理可知，只需对由关于 J 双不变的函数构成的子空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J\subset\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 证明该命题。设 $P_1^\alpha\subset P\subset P_2$和 $w\in {}_PW_\theta$。取一个实数 $N_0>0$，使得引理 3.1.4.1 对抛物子群 P和 P_α成立。设 $x,y\in G(\mathbb{A})$。引入

$$K^{\alpha,\sharp}_{P,\chi}(x,y)=K_{P,\chi}(x,y)-\int_{[N_{P_\alpha}]}K_{P,\chi}(nx,y)\,dn.$$

设 $\Omega^w_{P,\ \alpha}$为所有满足 $w\theta w^{-1}\notin\delta^{-1}P_\alpha\delta$ 的 $\delta\in P_\alpha(F)\backslash P(F)$ 的集合。令

$$K^{\alpha,w,\flat}_{P,\chi}(x,y)=\sum_{\delta\in\Omega^w_{P,\alpha}}K_{P_\alpha,\chi}(x,\delta y).$$

On a

$$K^{\alpha,w}_{P,\chi}(x,y)=K^{\alpha,\sharp}_{P,\chi}(x,y)+K^{\alpha,w,\flat}_{P,\chi}(x,y) \tag{3.2.5.2}$$

由等式可知

$$\int_{[N_{P_\alpha}]}K_{P,\chi}(nx,y)\,dn=\sum_{\delta\in P_\alpha(F)\backslash P(F)}K_{P_\alpha,\chi}(x,\delta y).$$

因此，我们只需对 (3.2.5.2) 右端的两项分别给出上界。为了给 $K^{\alpha,\sharp}_{P,\chi}(x,y)$ 给出上界，我们对 $P_\alpha\subsetneq P$ 应用引理 2.1.15.1，将其用于函数 $K_{P,\chi}(\cdot\ y)\in C^\infty([G]_P)^J$。由此可得，对于任意 $y\in G(\mathbb{A})$、任意 $x\in\mathfrak{S}^P\cap G(\mathbb{A})^1$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$

$$|K^{\alpha,\sharp}_{P,\chi}(x,y)|\leqslant\exp(-t\langle\alpha,H_{P_0}(x)\rangle)\|x\|^{N_0+N}_P\sup_{z\in[G]_P,X\in\mathfrak{F}}\left(\|z\|_P^{-N_0-N}|(R(X)K_{P,\chi,f})(z,y)|\right).$$

这里， $R(X)K_{P,\chi,f}$ 表示将微分算子 $R(X)$ 作用于 $K_{P,\chi,f}$ 的第一个变量。事实上，存在 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ 的一个对合 $X \mapsto X^*$，使得 $R(X)K_{P,\chi,f} = K_{P,\chi,L(X^*)f}$。接着，对恒等于 1 的权 ω 应用引理 3.1.4.1，可得 $\mathrm{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得对于任意 $f \in \mathrm{S}(G(\mathbb{A}))$ 和任意 $y \in G(\mathbb{A})$，都有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} \sup_{z\in[G]_P, X\in\mathfrak{F}} \Big(\|z\|_P^{-N_0-N} |(R(X)K_{P,\chi,f})(z,y)| \Big) \leqslant \|y\|_P^{-N} \|f\|_{\mathcal{S}}. \tag{3.2.5.3}$$

因此，对任意 $y \in G(\mathbb{A})$、任意 $x \in \mathfrak{S}^P \cap G(\mathbb{A})^1$ 以及任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} |K_{P,\chi}^{\alpha,\sharp}(x,y)| \leqslant \exp(-t\langle\alpha, H_{P_0}(x)\rangle) \|x\|_P^{N_0+N} \|y\|_P^{-N} \|f\|_{\mathcal{S}}. \tag{3.2.5.4}$$

接下来估计 $K^{\alpha}_{P,\ w\flat,\chi}(x,y)$，其中 $y \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$。我们引入以下引理。

引理 3.2.5.3. — 存在 $c > 0$，使得对于任意 $\delta \in \Omega^w_{P,\alpha}$ 以及任意 $y \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$，都有 $d^{P_\alpha}(\alpha, \delta y) \leqslant c$。

证明。 — 设 $c > 0$ 为引理 2.1.11.1 中出现的对象（对应于 $Q = P_\alpha$ 和 $R = P$）。设 $\delta \in P_\alpha(F)\backslash P(F)$ 和 $y \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$，使得 $d^{P_\alpha}(\alpha, \delta y) > c$。注意，由于我们有 $w\theta w^{-1} \in K$，因此有 $d^{P_\alpha}(\alpha, \delta y) = d^{P_\alpha}(\alpha, \delta y w\theta w^{-1}) = d^{P_\alpha}(\alpha, \delta w\theta w^{-1} y)$。引理 2.1.11.1 蕴含我们有 $\delta w\theta w^{-1} \in P_\alpha(F)\delta$，也就是说 $w\theta w^{-1} \in \delta^{-1}P_\alpha(F)\delta$，因此 $\delta \notin \Omega^w_{P,\alpha}$。 □

将引理 3.1.4.1 应用于权 $\omega = d^{P_\alpha}(t\alpha, \cdot) = d^{P_\alpha}(\alpha, \cdot)^t$，并结合引理 3.2.5.3，可得：对任意 $N' > 0$，存在 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ 上的连续半范数 $\|\|$，使得对于所有 $x \in G(\mathbb{A})$、$y \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$ 和 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$

$$\begin{aligned}\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} |K_{P,\chi}^{\alpha,w,\flat}(x,y)| &\leqslant \sum_{\delta\in\Omega^w_{P,\alpha}} \sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} |K_{P_\alpha,\chi}(x,\delta y)| \\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{S}} \|x\|_{P_\alpha}^{N_0+N'} d^{P_\alpha}(-t\alpha, x) \sum_{\delta\in\Omega^w_{P,\alpha}} \|\delta y\|_{P_\alpha}^{-N'} \\ &\leqslant \|f\|_{\mathcal{S}} \|x\|_{P_\alpha}^{N_0+N'} d^{P_\alpha}(-t\alpha, x) \sum_{\delta\in P_\alpha(F)\backslash P(F)} \|\delta y\|_{P_\alpha}^{-N'}.\end{aligned} \tag{3.2.5.5}$$

说明如何由 (3.2.5.4) 和 (3.2.5.5) 推出 (3.2.5.1)。首先注意到 $x \mapsto K^{\alpha}_{P}{}^{\sharp}(x,y)$ 以及 $x \mapsto K^{\alpha}_{P\ w\flat,\chi}(x,y)$ 在 $P_\alpha(F)$ 下左不变，因此在 $P_1(F)$ 下也左不变。故可假设有 $x \in \mathfrak{S}^{P_1} \cap G(\mathbb{A})^1$。取 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。进一步假设 $F^{P_1}(x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(x) - T) \neq 0$。这意味着 $x \in \mathfrak{S}^{P_2}$。进而， $x \in \mathfrak{S}^P$，于是可以将不等式 (3.2.5.4) 应用于 x。由于这些函数在 $\mathfrak{S}^P$ 上等价（参见 [BPC25, 命题 2.3.4.1]），可以用 $d^{P_1}(-t\alpha, x)$ 替换 $\exp(-t\alpha, H_{P_0}(x))$。同样，可以用 $\|x\|_{P_1}$ 替换 $\|x\|_P$。接着，存在 $C > 0$ 和 $r > 0$，使得对任意 $y \in G^{w\theta}(\mathbb{A})$，都有（参见 [Beu21, 命题 A.1.1 (ix)]）

$$\|y\|_P \leqslant \|y\|_{P^{w\theta}} \leqslant C\|y\|_P^r. \tag{3.2.5.6}$$

基于与上述相同的理由，在 (3.2.5.5) 中，可以将 $d^{P_\alpha}(-t\alpha, x)$ 替换为 $d^{P_1}(-t\alpha, x)$，并将 $\|x\|_{P_\alpha}$ 替换为 $\|x\|_{P_1}$。最后，对于任意 $N > 0$，都存在 N' 使得

$$\sum_{\delta\in P_\alpha(F)\backslash P(F)} \|\delta y\|_{P_\alpha}^{-N'} \leqslant \|y\|_P^{-N}.$$

根据 (3.2.5.6)，用 $\|y\|_{P^{w\theta}}$ 代替 $\|y\|_P$ 时，我们得到同样的结果。 □

3.2.6.

引理 3.2.6.1. — 设 $\lambda=\sum_{\alpha\in\Delta_0^2\backslash\Delta_0^1}\alpha$。对任意 $N>0$，存在 $N'>0$，使得对任意$t>0$，在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上存在连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，从而对一切 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$ —

$$F^{P_1}(x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(x)-T)\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}|K_{1,2,\chi,f}(x,y)|\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}d^{P_1}(-t\lambda,x)\|x\|_{P_1}^{N'}\|y\|_{G^\theta}^{-N}\tag{3.2.6.1}$$

对任意 $x\in P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, 、任意 $y\in G^\theta(\mathbb{A})$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。

证明。 — 设 $\alpha\in\Delta_0^2\setminus\Delta_0^1$。由引理 3.2.5.1 和 3.2.5.2 可知，对任意 $N>0$，存在 $N'>0$，使得对任意 $t>0$，存在一个连续半范数$\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上，使得对任意 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$

$$\begin{aligned}&F^{P_1}(x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(x)-T)\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}|K_{1,2,\chi,f}(x,y)|\\&\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}d^{P_1}(-t\alpha,x)\|x\|_{P_1}^{N'}\sum_{P^\alpha\subset P\subset P_2}\sum_{w\in{}_PW_\theta}\sum_{\delta\in P_w^\theta(F)\backslash G^\theta(F)}\|w\delta yw^{-1}\|_{P^{w\theta}}^{-N}\end{aligned}$$

对任意 $x\in P_1(F)\backslash G(\mathbb{A})^1$, 、任意 $y\in G^\theta(\mathbb{A})$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。对任意 $N''>0$，存在$N,c>0$，使得

$$\sum_{P^\alpha\subset P\subset P_2}\sum_{w\in{}_PW_\theta}\sum_{\delta\in P_w^\theta(F)\backslash G^\theta(F)}\|w\delta yw^{-1}\|_{P^{w\theta}}^{-N}\leqslant c\|y\|_{G^\theta}^{-N''}.$$

由引理可轻易得出，因为 $d^{P_1}(-t\lambda,x)=\prod_{\alpha\in\Delta_0^2\backslash\Delta_0^1}d^{P_1}(-t\alpha,x)$。 □

3.2.7. 命题 3.2.4.1 的证明。— 设 $N_1,N_2>0$。利用 (3.2.5.6)，可知存在 $N_1',c>0$，使得对任意 $x\in G^{\theta'}(\mathbb{A})$

$$\sum_{w\in{}_{P_1}W_{\theta'}}\sum_{\delta\in P_{1,w}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)}\|w\delta x\|_{P_1}^{-N_1'}\leqslant c\|x\|_{G^{\theta'}}^{-N_1}.\tag{3.2.7.1}$$

引理 3.2.6.1（沿用其中的记号）保证存在 $N'>0$，使得对任意$t>0$，存在定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$，使得对任意 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$，有：

$$\begin{aligned}&\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\sum_{w\in{}_{P_1}W_{\theta'}}\sum_{\delta\in P_{1,w}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)}F^{P_1}(w\delta x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(w\delta x)-T)|K_{1,2,\chi}(w\delta x,y)|\\&\leqslant\|f\|_{\mathcal{S}}\|y\|_{G^\theta}^{-N_2}\sum_{w\in{}_{P_1}W_{\theta'}}\sum_{\delta\in P_{1,w}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)}F^{P_1}(w\delta x,T)\sigma_1^2(H_{P_1}(w\delta x)-T)d^{P_1}(-t\lambda,w\delta x)\|w\delta x\|_{G^{\theta'}}^{N'}.\end{aligned}$$

分别利用引理 2.1.14.1 和 2.1.13.1，即可得到命题 3.2.4.1 的断言 1 和 2。

3.3 谱收敛的陈述

3.3.1. 记号与第 3.1 和第 3.2 节相同。我们有 $G^{\theta'}(\mathbb{A})=A_G^\infty\times(G^{\theta'}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)$。于是，在 $G^{\theta'}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1$ 上赋予 Haar 测度，使其与 A_G^∞ 上的测度的乘积等于在 $G^{\theta'}(\mathbb{A})$上固定的 Haar 测度。将此测度除以 $G^{\theta'}(F)$上的计数测度，便得到商 $[G^{\theta'}]^G$上的一个测度。

3.3.2. 设 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。回顾一下，我们在 (3.2.2.1) 中定义了修正核 $K^{T,\ \theta'\ \theta}_{\chi,f}$，它与尖点数据 χ、参数 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$以及 $M_0(F)$ 中阶至多为 2 的元素 θ'和 θ相关。我们省略指数 θ' 和 θ。此外还有截断核 $\Lambda_{\theta'}^TK_{\chi,f}$： 这里的记号

表示我们对核 $K_{\chi,f}$的左侧变量应用了截断算子 $\Lambda_{\theta'}^T$。这个截断核常常是一个方便的中间对象，可用于得到比按尖点数据进行的分解更精细的谱分解。最后，我们还可以将初始核 $K_{\chi,f}$乘以作用于第一个变量的函数 $F^G(\cdot\ T)$。事实上，这些"核"在 $[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]$上都快速衰减。特别地，有如下结论：

定理 3.3.2.1.—

1. 对一切 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$与 $\overline{\ }N_1$、$N_2>0$，存在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对一切 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}F^G(x,T)|K_{\chi,f}(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant\|f\|.$$

2. 对一切 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$与 $\overline{\ }N_1$、$N_2>0$，存在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对一切 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|K_{\chi,f}^T(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant\|f\|.$$

3. 对一切 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$与 $\overline{\ }N_1$、$N_2>0$，存在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对一切 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 有

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|\Lambda_{\theta'}^TK_{\chi,f}(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant\|f\|.$$

证明。— 对所有足够大的 N_1 与 N_2，有

$$\int_{[G^{\theta'}]^G}\|x\|_{G^{\theta'}}^{-N_1}\,dx<\infty\text{ et }\int_{[G^\theta]}\|y\|_{G^\theta}^{-N_2}\,dy<\infty. \tag{3.3.2.1}$$

因此只需看到所考虑的三个核在 $[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]$上具有快速衰减，也就是说，核 $F^G(x,T)|K_{\chi,f}(x,y)|$ 满足 (3.2.4.2)，而核 $K_{\chi,f}^T(x,y)$满足定理 3.2.3.2。对于核 $\Lambda_{\theta'}^TK_{\chi,f}(x,y)$，这由命题 2.4.3.1 与引理 3.1.4.1 的结合得出。□

3.3.3. 关于 T 的渐近分析。— 下面的定理 3.3.3.1 表明，从渐近意义上说，上述定理 3.3.2.1 中的所有表达式都相等。

定理 3.3.3.1. — 对于任意 $N_1,N_2,r>0$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$ 定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上，使得对于任意充分正的 $T\in\mathfrak{a}_0$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，都有

(3.3.3.1)
$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|K_{\chi,f}^T(x,y)-F^G(x,T)K_{\chi,f}(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant e^{-r\|T^G\|}\|f\|_{\mathcal{S}}\ ;$$

(3.3.3.2)
$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|\Lambda_{\theta'}^TK_{\chi,f}(x,y)-F^G(x,T)K_{\chi,f}(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant e^{-r\|T^G\|}\|f\|_{\mathcal{S}}\ ;$$

(3.3.3.3)
$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)}\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^\theta]}|K_{\chi,f}^T(x,y)-\Lambda_{\theta'}^TK_{\chi,f}(x,y)|\|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1}\|y\|_{G^\theta}^{N_2}\,dxdy\leqslant e^{-r\|T^G\|}\|f\|_{\mathcal{S}}.$$

证明。 —首先，(3.3.3.1) 由定理 3.2.3.1 和收敛性 (3.3.2.1) 立即得出。

接下来处理 (3.3.3.2)。可以固定 $J \subset G(\mathbb{A}_f)$ 为一个紧开子群。根据巴拿赫-斯坦豪斯定理，只需证明该陈述对 f 属于子空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J \subset \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 中的双不变函数成立。由命题 2.4.3.2 的断言 1 应用于函数 $x \mapsto K_{\chi,f}(x,y) \in C^\infty([G])^J$ 可知，对于任意 $r > 0$ 以及任意 $N_1, N_2 > 0$，存在 $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ 中一个有限的元素族 $\mathfrak{F}$，使得对任意充分大的正 T，有

$$\begin{aligned}&|(\Lambda^T_{\theta'} K_{\chi,f})(x,y) - F^G(x,T) K_{\chi,f}(x,y)| \\ &\leqslant \exp(-r\|T^G\|)\|x\|^{-N_1}_{G^{\theta'}} \sup_{z\in[G]^1, X\in\mathfrak{F}} \Big(\|z\|_G^{-N_2} |R(X)K_{\chi,f})(z,y)|\Big)\end{aligned}$$

对于任意 $x \in [G^{\theta'}]^G$、任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))^J$ 以及任意 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$。利用权 $\omega = 1$ 的引理 3.1.4.1，存在 $N_0 > 0$，使得对于任意 $N_3 > 0$，$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上存在一个连续半范数 $\|\cdot\|_\mathcal{S}$，使得

$$\sum_{\chi\in\mathfrak{X}(G)} \sup_{z\in[G]^1, X\in\mathfrak{F}} \Big(\|z\|_P^{-N_0-N_3} |(R(X)K_{P,\chi,f})(z,y)|\Big) \leqslant \|y\|_G^{-N_3} \|f\|_\mathcal{S}$$

对任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和任意 $y \in G(\mathbb{A})$，结论显然。

最后，(3.3.3.3) 由 (3.3.3.1) 和 (3.3.3.2) 结合得出。 □

3.4 在 T中的行为

3.4.1. 沿用第 3.2 和 3.3 小节中的记号和假设。设 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是一个连续特征，在 $\mathbb{R}_+^\times$ 经态射 $1 \otimes \mathrm{Id}_\mathbb{R}$ 映入 $(F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R})^\times$ 的像上取平凡值。注意，η 的取值属于单位圆。与约化范数复合后，可得到一个特征 $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$，它在子群 A_G^∞ 和 $G(F)$ 上取平凡值，仍记作 η。

设 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$ 和 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$。在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上引入分布 $J_\chi^T(\eta)$，其定义由下述积分给出；根据定理 3.3.2.1，该积分绝对收敛，且关于 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 连续：

$$J_\chi^T(\eta, f) = \int_{[G^{\theta'}]^G \times [G^\theta]} K^T_{\chi,f}(x,y)\, \eta(x) dx dy. \tag{3.4.1.1}$$

3.4.2. 我们将研究分布 $J_\chi^T(\eta)$ 对 T 的依赖关系：我们将看到，作为 T 的函数，它在 $T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 上与一个多项式指数函数一致；也就是说，它是一个映射 $\mathfrak{a}_0 \to \mathbb{C}$，属于由函数 $T \in \mathfrak{a}_0 \mapsto p_\lambda(T)\exp(\langle\lambda, T\rangle)$ 张成的 $\mathbb{C}$-向量空间，其中 $\lambda \in \mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$，且 p_λ 是一个多项式。使 $p_\lambda \neq 0$ 成立的 λ 称为该多项式指数函数的指数。多项式指数函数的多项式部分，按定义是与 $\lambda = 0$ 相关联的多项式 p_0。常数项是 p_0 在 $T = 0$ 处的值。

我们还需要为 G 的 Levi 子群引入 $J_\chi^T(\eta)$ 的类比。设 Q 是 G 的一个标准抛物子群。群 $P_0 \cap M_Q$ 是 M_Q 的一个定义在 F 上的极小抛物子群，其 Levi 因子为 M_0。设 $w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 和 $w_2' \in {}_QW_\theta$。定义如下：

$$\theta_1 = w_1'\theta' {w_1'}^{-1} \text{ et } \theta_2 = w_2'\theta {w_2'}^{-1}. \tag{3.4.2.1}$$

这些是 $M_0(F)$ 中阶至多为 2 的元素。

设 $f' \in \mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$ 与 $\chi' \in \mathfrak{X}(M_Q)$。我们有修正核 $K^T_{f',\chi',\theta_1,\theta_2}$，其定义由 (3.2.2.1) 给出，其中将 G 替换为 M_Q。于是我们定义

(3.4.2.2)

$$J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\chi'}(\eta, f') = \int_{[M_Q^{\theta_1}]^Q} \int_{[M_Q^{\theta_2}]} \exp(-\langle 2\rho^{G^{\theta_1}}_{Q^{\theta_1}}, H_{Q^{\theta_1}}(x)\rangle + \langle 2\rho^G_Q - 2\rho^{G^{\theta_2}}_{Q^{\theta_2}}, H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle) K^{T,\theta_1,\theta_2}_{f',\chi'}(x,y)\,\eta(x)dxdy$$

其中定义

$$[M_Q^{\theta_1}]^Q = M_Q^{\theta_1}(F)\backslash M_Q^{\theta_1}(\mathbb{A}) \cap M_Q(\mathbb{A})^1.$$

稍后我们将看到引入指数因子的用处。可以看出，定理 3.3.2.1 的断言 2（或者更准确地说，将其显然推广到 M_Q，即由若干个适用该定理的群组成的乘积）保证上述积分绝对收敛，并且由此定义的分布 $J^Q_{\chi',T,\theta_1,\theta_2,\cdot}(\eta)$ 是连续的。定义

$$J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\chi}(\eta) = \sum_{\chi'} J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\chi'}(\eta) \tag{3.4.2.3}$$

其中，右侧的和遍历有限集 $\chi' \in \mathfrak{X}(M_Q)$，它们经显然的映射 $\mathfrak{X}(M_Q) \to \mathfrak{X}(G)$ 的像为 χ。

对于任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，我们还引入由下式定义的函数 $f^{w_1'}_{Q,\eta,\cdot}{}^{w_2'} \in \mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$

$$\forall m \in M_Q(\mathbb{A}) \quad f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta}(m) = \int_{K^{\theta_1}\times K^{\theta_2}} \int_{N_Q(\mathbb{A})} f((k_1w_1')^{-1}mn_Q(k_2w_2'))\,\eta(k_1)dn_Qdk_1dk_2. \tag{3.4.2.4}$$

设 $T' \in \mathfrak{a}_0$。定义：

$$p^Q_{w_1',w_2'}(T,T') = \int_{\mathfrak{a}^G_Q} \exp(\langle 2\rho^G_Q - 2\rho^{G^{\theta_1}}_{Q^{\theta_1}} - 2\rho^{G^{\theta_2}}_{Q^{\theta_2}}, H\rangle)\Gamma_Q(H-T,T')\,dH \tag{3.4.2.5}$$

其中，Γ_Q 是引入并记作 Γ'_Q 的函数，见 [Art81，第 13]页。根据 [Art81，引理 2.2]，映射 $T' \mapsto p^Q_{w_1',w_2'}(T,T')$ 是关于 T'的指数多项式。

3.4.3. 现在我们可以表述本小节的主要结论了。

命题 3.4.3.1. — 对于任意 $T' \in \mathfrak{a}_0^+$，$f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 以及 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$，有

$$J^{T+T'}_{\chi}(\eta, f) = \sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)} \sum_{w_1'\in {}_QW_{\theta'}} \sum_{w_2'\in {}_QW_{\theta}} p^Q_{w_1',w_2'}(T,T')J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\chi}(\eta, f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta}).$$

谨记，θ_1 和 θ_2 分别依赖于 w_1' 和 w_2'，并在式 (3.4.2.1) 中定义。命题 3.4.3.1 的证明见下文 § 3.4.4。

3.4.4. 命题 3.4.3.1 的证明。 — 设 $T' \in \mathfrak{a}_0^+$。根据 [Art81，第 $\overline{14}$], 页，对于 G 的任意标准抛物子群 P 以及任意 $H \in \mathfrak{a}_P$，有

$$\hat{\tau}_P(H-(T+T')) = \sum_{P\subset Q\subset G} \varepsilon^G_Q \hat{\tau}^Q_P(H-T)\Gamma_Q(H-T,T').$$

利用这个等式和引理 2.2.7.1，可以看出，对于任意 $x \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 和 $y \in G^{\theta}(\mathbb{A})$，核 $K^{T+T'}_{\chi,f,\cdot}(x,y)$ 等于对 G 的标准抛物子群 Q、$w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 和 $w_2' \in {}_QW_{\theta}$ 求和所得的

$$\sum_{P\subset Q}\varepsilon_P^Q\sum_{w_1\in {}_PW_{\theta_1}^Q w_1'}\sum_{w_2\in {}_PW_{\theta_2}^Q w_2'}\sum_{\delta_1\in P_{w_1'}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)}\sum_{\delta_2\in P_{w_2}^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}$$
$$\Gamma_Q(H_Q(w_1'\delta_1x)-T,T')\hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1x)-T)K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1x,w_2\delta_2y),$$

其中，与上文一样，$\theta_1=w_1'\theta' {w_1'}^{-1}$ 和 $\theta_2=w_2'\theta {w_2'}^{-1}$。

由此可得

$$J_\chi^{T+T'}(\eta,f)=\sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)}\sum_{w_1'\in {}_QW_{\theta'}}\sum_{w_2'\in {}_QW_\theta}J_{\chi,w_1',w_2'}^{Q,T,T'}(\eta,f)$$

其中，对于如上所定义的 Q、$w_1'\in {}_QW_{\theta'}$、$w_2'\in {}_QW_\theta$，通过积分定义 $J^{Q,\ T,\ T'\chi,\ w_1',\ w_2'}(\eta,\ f)$：

$$\int_{Q_{w_1'}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1}\Gamma_Q(H_Q(w_1'x)-T,T')\int_{Q_{w_2'}^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(\mathbb{A})}\sum_{P\subset Q}\varepsilon_P^Q\sum_{w_1\in {}_PW_{\theta_1}^Q}\sum_{w_2\in {}_PW_{\theta_2}^Q}$$
$$\sum_{\delta_1\in P_{w_1w_1'}^{\theta'}(F)\backslash Q_{w_1'}^{\theta'}(F)}\sum_{\delta_2\in P_{w_2w_2'}^{\theta}(F)\backslash Q_{w_2'}^{\theta}(F)}\hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1w_1'\delta_1x)-T)K_{P,\chi,f}(w_1w_1'\delta_1x,w_2w_2'\delta_2y)\,\eta(x)dxdy.$$

今后，我们固定 Q、$w_1'\in {}_QW_{\theta'}$ 和 $w_2'\in {}_QW_\theta$。通过显然的变量替换，上述表达式变为：

$$\int_{Q^{\theta_1}(F)\backslash G^{\theta_1}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1}\Gamma_Q(H_Q(x)-T,T')\int_{Q^{\theta_2}(F)\backslash G^{\theta_2}(\mathbb{A})}\sum_{P\subset Q}\varepsilon_P^Q\sum_{w_1\in {}_PW_{\theta_1}^Q}\sum_{w_2\in {}_PW_{\theta_2}^Q}$$
$$\sum_{\delta_1\in P_{w_1'}^{\theta_1}(F)\backslash Q^{\theta_1}(F)}\sum_{\delta_2\in P_{w_2'}^{\theta_2}(F)\backslash Q^{\theta_2}(F)}\hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1x)-T)K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1xw_1',w_2\delta_2yw_2')\,\eta(x)dxdy.$$

注意，被积函数作为 $(x,\ y)$ 的函数，在左侧关于 $N_{Q^{\theta_1}}(\mathbb{A})\times N_{Q^{\theta_2}}(\mathbb{A})$ 不变。由于 $[N_{Q^{\theta_1}}]\times[N_{Q^{\theta_2}}]$ 的体积为 1，分解公式 (2.1.10.1) 表明，上述积分等于

$$\int_{[M_Q^{\theta_1}]^G}\int_{K^{\theta_1}\times K^{\theta_2}}\exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}},H_{Q^{\theta_1}}(x)\rangle)\Gamma_Q(H_Q(x)-T,T')\int_{[M_Q^{\theta_2}]}\exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle)$$
$$\sum_{P\subset Q}\varepsilon_P^Q\sum_{w_1\in {}_PW_{\theta_1}^Q}\sum_{w_2\in {}_PW_{\theta_2}^Q}\sum_{\delta_1\in(P_{w_1}\cap M_Q^{\theta_1})(F)\backslash M_Q^{\theta_1}(F)}\sum_{\delta_2\in(P_{w_2}\cap M_Q^{\theta_2})(F)\backslash M_Q^{\theta_2}(F)}$$
$$\hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1x)-T)K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1xk_1w_1',w_2\delta_2yk_2w_2')\,\eta(k_1)dk_1dk_2\eta(x)dxdy.$$

其中 $[M_Q^{\theta_1}]^G=M_Q^{\theta_1}(F)\backslash(M_Q^{\theta_1}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)$。对任意 $m_i\in M^{\theta_i}(\mathbb{A})$ 和 $k_i\in K^{\theta_i}$，当 $i=1,2$ 时，借助变量替换可得，

$$K_{P,f}(m_1k_1w_1',m_2k_2w_2')=\sum_{\gamma\in M_P(F)}\int_{N_P^Q(\mathbb{A})}\int_{N_Q(\mathbb{A})}f((m_1k_1w_1')^{-1}\gamma nn_Q(m_2k_2w_2'))\,dndn_Q$$
$$=\exp(\langle 2\rho_Q^G,H_Q(m_2)\rangle)\sum_{\gamma\in M_P(F)}\int_{N_P^Q(\mathbb{A})}\int_{N_Q(\mathbb{A})}f((m_1k_1w_1')^{-1}\gamma nm_2n_Q(k_2w_2'))\,dndn_Q.$$

对于 M_Q 的抛物子群 $P\cap M_Q$，任意函数 $f'\in\mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$ 以及任意尖点数据 $\chi'\in\mathfrak{X}(M_Q)$，都有核 $K_{P\cap M_Q,f',\chi'}$。于是定义

$$K_{P\cap M_Q,f',\chi}=\sum_{\chi'}K_{P\cap M_Q,f',\chi'}$$

其中右侧的和遍历有限集合中经显然映射 $\mathfrak{X}(M_Q)\to\mathfrak{X}(G)$ 映到 χ 的 $\chi'\in\mathfrak{X}(M_Q)$。同样，根据与 $\chi'\in\mathfrak{X}(M_Q)$ 及元素 θ_1,θ_2相关的修正核 $K^{T,\ \theta_1\ \theta_2,,}_{f'\ \chi'}$，可以为尖点数据 $\chi\in\mathfrak{X}(G)$ 定义 $K^{T,\ \theta_1\ \theta_2,,\circ}_{f'\ \chi}$由上述计算可得，对任意 $m_i\in M^{\theta_i}(\mathbb{A}),\quad i=1,2,$

$$\int_{K^{\theta_1}\times K^{\theta_2}}K_{P,f,\chi}(m_1k_1w_1',m_2k_2w_2')\eta(k_1)dk_1dk_2=\exp(\langle 2\rho_Q^G,H_Q(m_2)\rangle)K_{P\cap M_Q,f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta},\chi}(m_1,m_2).$$

于是得到:

$$J^{Q,T,T'}_{\chi,w_1',w_2'}(\eta,f)=\int_{[M_Q^{\theta_1}]^G}\exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}},H_{Q^{\theta_1}}(x)\rangle)\Gamma_Q(H_Q(x)-T,T')$$
$$\int_{[M_Q^{\theta_2}]}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle)K^{T,\theta_1,\theta_2}_{f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta},\chi}(x,y)\,\eta(x)dxdy.$$

有 $[M_Q^{\theta_1}]^G=[M_Q^{\theta_1}]^Q\times A^G{}_{,Q}{}^{\infty}$，该分解与测度的选取相容。注意，$A^G{}_{,Q}{}^{\infty}\subset(M_Q^{\theta_1}\cap M_Q^{\theta_2})(\mathbb{A})$，且特征 η在 $A^G{}_{,Q}{}^{\infty}$上是平凡的。对于任意 $a\in A^G{}_{,Q}{}^{\infty}$和 $x\in[M_Q^{\theta_1}]^Q$，有

$$\int_{[M_Q^{\theta_2}]}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle)K^{T,\theta_1,\theta_2}_{f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta},\chi}(ax,y)\,dy$$
$$=\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_Q(a)\rangle)\int_{[M_Q^{\theta_2}]}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle)K^{T,\theta_1,\theta_2}_{f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta},\chi}(x,y)\,dy$$

最终得到，$J^{Q,\ T,\ T\prime\chi,\ w_1',\ w_2'}(\eta,\ f)$ 是 $p^{Q}_{w_1',\ w_2'}(T,\ T\prime)$ 与

$$\int_{[M_Q^{\theta_1}]^Q}\int_{[M_Q^{\theta_2}]}\exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}},H_{Q^{\theta_1}}(x)\rangle+\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle)K^{T,\theta_1,\theta_2}_{f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta},\chi}(x,y)\,\eta(x)dxdy$$

最后这个积分正是 $J^{Q,}_{\ \chi\ \ T\ \theta_1\ \theta_2,\ ,}(\eta,\ f^{w_1',\ Q\ \eta}{}^{w_2'})$。

3.5 谱分布

3.5.1. 设 $\theta_1,\ \theta_2\in M_0(F)$ 是两个阶至多为 2 的元素。对于 G 的任意标准抛物子群 Q，令 $\mathcal{F}^{G,}{}^{\flat}(Q,\ \theta_1,\ \theta_2)$ 表示 G 中包含 Q 且满足下列条件的抛物子群 R 集合

$$\rho_R^G=(\rho_{R^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}+\rho_{R^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})_R \tag{3.5.1.1}$$

其中最后一个指标 R 表示到 $\mathfrak{a}_R$ 上的正交投影。

3.5.2. 对于所有抛物子群 $P\subset Q$，定义变量 $\lambda\in\mathfrak{a}_{0,\mathbb{C}}^*$ 的多项式函数:

$$\hat{\Theta}_P^Q(\lambda)=\mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\hat{\Delta}_P^{Q,\vee}))^{-1}\prod_{\varpi^\vee\in\hat{\Delta}_P^{Q,\vee}}\langle\lambda,\varpi^\vee\rangle$$

et

$$\Theta_P^Q(\lambda) = \mathrm{vol}(\mathfrak{a}_P^Q/\mathbb{Z}(\Delta_P^{Q,\vee}))^{-1} \prod_{\alpha\in\Delta_P^Q} \langle \lambda, \alpha^\vee\rangle.$$

上述体积因子分别表示由 $\hat{}\Delta^{Q}{}_{,P}{}^{\vee}$ 和 $\Delta^{Q}{}_{,P}{}^{\vee}$ 生成的格的余体积。与往常一样，当 $Q = G$ 且上下文清楚时，省略上标 G 。

3.5.3. 沿用第3.4小节中的记号。设 $Q \subset G$ 为一个标准抛物子群。设 $w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 和 $w_2' \in {}_QW_{\theta_\circ}$ 于是按照 (3.4.2.1) 定义 θ_1 和 θ_2 。回顾一下，我们在 (3.4.2.5) 中定义了从 $p^Q_{w_1',w_2'}$ 到 $\mathfrak{a}_0 \times \mathfrak{a}_0$ 的映射。

引理 3.5.3.1.—设 $T \in \mathfrak{a}_{0\circ}$。映射 $T' \in \mathfrak{a}_0 \mapsto p^Q_{w_1',w_2'}(0, T\prime - T)$ 是一个多项式-指数映射。此外，该映射的常数项由下列表达式给出：

$$c^Q_{w_1',w_2'}(T) = \lim_{t\to 0} \sum_{R\in\mathcal{F}^{G,\flat}(Q,\theta_1,\theta_2)} \varepsilon_Q^R \frac{\exp(t\langle\lambda, -T_R\rangle)}{t^{\dim(\mathfrak{a}_R^G)}\hat{\Theta}_Q^R(t\lambda + 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})\Theta_R^G(\lambda)}$$

其中 $\lambda \in \mathfrak{a}^{G}{}_{,Q}{}^{*}$ 是一个处于一般位置的元素。

证明。— 根据 [Art81 引理 2.2], ，对于任意处于一般位置的 $\lambda \in \mathfrak{a}^{G}{}_{,Q}{}^{*}$ ，有如下等式

$$\begin{aligned}&\int_{\mathfrak{a}_Q^G} \exp(\lambda + \langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H\rangle)\Gamma_Q(H, T' - T)\, dH\\ &\qquad = \sum_{Q\subset R} \varepsilon_Q^R \frac{\exp(\langle\lambda + 2\rho_R^G - 2\rho_{R^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{R^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, T_R' - T_R\rangle)}{(\hat{\Theta}_Q^R\Theta_R^G)(\lambda + 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})}.\end{aligned}$$

该积分定义了关于 $\lambda \in \mathfrak{a}^{G}{}_{,Q}{}^{*}\mathbb{C}$ 的解析函数，因为 $H \in \mathfrak{a}_Q^G \mapsto \Gamma_Q(\cdot\ T' - T)$ 的支集是紧的（该支集依赖于 $T' - T$）。它在 $\lambda = 0$ 处的值为表达式 $p^Q_{w_1',w_2'}(0, T' - T)$。由此可知，上述等式的右端可解析延拓到 $\mathfrak{a}^{G}{}_{,Q}{}^{*}\mathbb{C}$, 。由上述计算还可得， $T' \mapsto p^Q_{w_1',w_2'}(0, T' - T)$ 是关于 T' 的指数多项式。根据 [Cha25a, 引理 2.4.1.1], , $T' \mapsto p^Q_{w_1',w_2'}(0, T' - T)$ 的纯多项式部分由该解析表达式在 0 附近于 $\lambda = 0$ 处的值给出

$$\sum_R \varepsilon_Q^R \frac{\exp(\langle\lambda, T_R' - T_R\rangle)}{\hat{\Theta}_Q^R(\lambda + 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})\Theta_R^G(\lambda)} \tag{3.5.3.1}$$

其中，求和遍及满足 (3.5.1.1) 且包含 Q 的抛物子群 R 。特别地，要得到常数项，只需在和 (3.5.3.1) 中将 T' 替换为 0。引理由此得证。□

命题 3.5.3.2。— 设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。设 $f \in \overline{S}(G(\mathbb{A}))$ 且 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$。映射$T\prime \mapsto J^{T\prime,\chi}(\eta, f)$ 在锥 $T + \mathfrak{a}_0^+$上与关于 $T\prime$的多项式指数函数一致，其常数项由下式给出

$$\begin{aligned}&J_\chi(\eta, f) =\\ &\sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)} \sum_{w_1'\in {}_QW_{\theta'}} \sum_{w_2'\in {}_QW_\theta} c^Q_{w_1',w_2'}(T)\exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, T_Q\rangle) J_\chi^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta, f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta}).\end{aligned}$$

证明。 — 由命题 3.4.3.1 可知，对任意 $T' \in T + \mathfrak{a}_0^+$

$$J_\chi^{T'}(\eta, f) = \sum_{Q \in \mathcal{F}^G(P_0)} \sum_{w_1' \in {}_QW_{\theta'}} \sum_{w_2' \in {}_QW_\theta} p^Q_{w_1', w_2'}(T, T' - T) J_\chi^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta, f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta}).$$

显然的变量替换表明，我们有

$$p^Q_{w_1', w_2'}(T, T' - T) = \exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, T_Q \rangle) p^Q_{w_1', w_2'}(0, T' - T).$$

因此只需应用引理 3.5.3.1。 □

映射 $f \mapsto J_\chi(\eta, f)$，记作 $J_\chi(\eta)$，是 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续线性形式，这由命题 3.4.3.1 和定理 3.3.2.1（或将其显然的变体应用于 G 的标准 Levi 子群）可知。下文将使用上述结果的若干变体。例如，在 (3.4.2.2) 和 (3.4.2.3) 中定义的分布 $J^{Q,}_{\chi,\ T\,\theta_1\,\theta_2,}(\eta)$ 仅依赖于 T^Q：可以证明，在一个由足够正的 T 构成的集合上，它与关于 T^Q 的指数多项式一致。下文简记为

$$J_\chi^{Q,\theta_1,\theta_2}(\eta) \tag{3.5.3.2}$$

它的常数项。

3.5.4. $J_\chi^T(\eta,\ f)$。 — 在以下讨论中，取 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$。设 Q 是 G的一个标准抛物子群，$w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 且 $w_2' \in {}_QW_\theta$。于是，根据公式 (3.4.2.1) 定义 θ_1和 θ_2。设 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$。于是，根据下式定义 $f^{w_1',\ Q\,\eta\ \ ,\ ,\ g}_{\ \ w_2'} \in \mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$：

$$\forall m \in M_Q(\mathbb{A})\ \ f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}(m) = \tag{3.5.4.1}$$
$$\int_{K^{\theta_1} \times K^{\theta_2}} \int_{N_Q(\mathbb{A})} f((k_1 w_1')^{-1} m n_Q(k_2 w_2')) p^Q_{w_1',w_2'}(0, -H_Q(k_1 w_1' g))\, \eta(k_1) dn_Q dk_1 dk_2.$$

其中 $p^Q_{w_1',\ w_2'}$ 在 (3.4.2.5) 中定义。

对于任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 和 $g \in G(\mathbb{A})$，记 ${}^g f$ 和 f^g 为 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 中由${}^g f(x) = f(gx)$ 和 $f^g(x) = f(xg)$ 定义的函数，其中对任意 $x \in G(\mathbb{A})$ 均成立。

命题 3.5.4.1. —设 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ 和 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。

1. 对任意 $g \in G^\theta(\mathbb{A})$，有

$$J_\chi^T(\eta, f^g) = J_\chi^T(\eta, f).$$

2. 对任意 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$，有

$$J_\chi^T(\eta, {}^g f) = \eta(g) \sum_{Q \in \mathcal{F}^G(P_0)} \sum_{w_1' \in {}_QW_{\theta'}} \sum_{w_2' \in {}_QW_\theta} \exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, T_Q \rangle) J_\chi^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta, f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}),$$

其中 $J^{Q,}_{\chi,\ T\,\theta_1\,\theta_2,\ ,}$ 是在 $\mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$ 上的分布，定义见(3.4.2.2) 和(3.4.2.3)。

证明。 — 由定义（3.4.1.1）可知， $J_\chi^T(\eta)$ 在 $G^\theta(\mathbb{A})$ 的右平移下不变。下面考察左平移的作用。为此，我们基本上沿用 § 3.4.4 中的同样计算，并采用其中的记号。

设 P 为 G 的标准抛物子群。定义映射 k_P：$P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A}) \to (K \cap P(\mathbb{A}))\backslash K$ 如下：对于任意 $x \in G(\mathbb{A})$，有 $P(\mathbb{A})x = P(\mathbb{A})k_P(x)$。于是

$$\hat{\tau}_P(H_P(xg) - T) = \hat{\tau}_P(H_P(x) + H_{P_0}(k_{P_0}(x)g) - T) \tag{3.5.4.2}$$
$$= \sum_{P \subset Q \subset G} \varepsilon_Q^G \hat{\tau}_P^Q(H_P(x) - T) \Gamma_Q(H_Q(x) - T, -H_Q(k_Q(x)g))$$

因为 $H_Q(k_Q(x)g) = H_Q(k_{P_0}(x)g)$。

设 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$。通过变量替换可知

$$J_\chi^T(\eta, {}^g f) = \int_{A_G^\infty \backslash [G^{\theta'}]} \int_{[G^\theta]} K_{\chi, {}^g f}^T(x,y)\, \eta(x) dxdy$$

$$= \eta(g) \int_{A_G^\infty \backslash [G^{\theta'}]} \int_{[G^\theta]} \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} \varepsilon_P^G \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta'}} \sum_{\delta_1 \in P_{w_1}^{\theta'}(F) \backslash G^{\theta'}(F)} \hat{\tau}_P(H_P(w_1\delta_1 x g) - T) \times$$

$$\left[\sum_{w_2 \in {}_P W_\theta} \sum_{\delta_2 \in P_{w_2}^\theta(F) \backslash G^\theta(F)} K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1 x, w_2\delta_2 y) \right] \eta(x) dxdy$$

按照 § 3.4.4 并利用 (3.5.4.2)，可得 $J_\chi^T(\eta, {}^g f)$ 是 $\eta(g)$ 与以下各项之和的乘积：对 G 的标准抛物子群 Q、对 $w_1' \in {}_Q W_{\theta'}$ 以及 $w_2' \in {}_Q W_\theta$ 取和

$$\int_{Q_w^{\theta'}(F) \backslash G^{\theta'}(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1} \int_{Q_w^\theta(F) \backslash G^\theta(\mathbb{A})} \sum_{P \subset Q} \varepsilon_P^Q \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta_1}^Q} \sum_{w_2 \in {}_P W_{\theta_2}^Q} \sum_{\delta_1 \in P^{\theta_1}} \sum_{F'} {}_{w_1 w'} 1(\,) \backslash Q_w^{\theta'} 1(F) \sum_{\delta_2 \in P_{w_2 w}^\theta} \sum_{F'}$$

$$2(\,) \backslash Q_w^\theta 2(F) \Gamma_Q(H_Q(w_1' x) - T, -H_Q(k_Q(w_1'\delta_1 x) g)) \hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1 w_1'\delta_1 x) - T) K_{P,\chi,f}(w_1 w_1'\delta_1 x, w_2 w_2'\delta_2 y)\ \eta(x) dxdy.$$

其中 θ_i 定义见 (3.4.2.1)。经过变量替换，上述表达式变为

$$\int_{Q^{\theta_1}(F) \backslash G^{\theta_1}(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1} \int_{Q^{\theta_2}(F) \backslash G^{\theta_2}(\mathbb{A})} \sum_{P \subset Q} \varepsilon_P^Q \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta_1}^Q} \sum_{w_2 \in {}_P W_{\theta_2}^Q} \sum_{\delta_1 \in P_{w_1}^{\theta_1}(F) \backslash Q^{\theta_1}(F)} \sum_{\delta_2 \in P_{w_2}^{\theta_2}(F) \backslash Q^{\theta_2}(F)}$$

$$\Gamma_Q(H_Q(x) - T, -H_Q(k_Q(x) w_1' g)) \hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1 x) - T) K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1 x w_1', w_2\delta_2 y w_2')\, \eta(x) dxdy.$$

根据测度的岩泽分解，上述表达式等于

$$\int_{[M_Q^{\theta_1}]^G} \int_{K^{\theta_1} \times K^{\theta_2}} \exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}, H_{Q^{\theta_1}}(x) \rangle) \Gamma_Q(H_Q(x) - T, -H_Q(k_1 w_1' g))$$

$$\int_{[M_Q^{\theta_2}]} \exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H_{Q^{\theta_2}}(y) \rangle) \sum_{P \subset Q} \varepsilon_P^Q \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta_1}^Q} \sum_{w_2 \in {}_P W_{\theta_2}^Q}$$

$$\sum_{\delta_1 \in (P_{w_1} \cap M_Q^{\theta_1})(F) \backslash M_Q^{\theta_1}(F)} \sum_{\delta_2 \in (P_{w_2} \cap M_Q^{\theta_2})(F) \backslash M_Q^{\theta_2}(F)}$$

$$\hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1 x) - T) K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1 x k_1 w_1', w_2\delta_2 y k_2 w_2')\, \eta(k_1) dk_1 dk_2 \eta(x) dxdy.$$

此时，我们将 $[M_Q^{\theta_1}]^G = [M_Q^{\theta_1}]^Q \times {A^G}_{,Q}{}^\infty$ 分解。对任意 $a \in {A^G}_{,Q}{}^\infty$ 和 $x \in [M_Q^{\theta_1}]^Q$，都有

$$\int_{[M_Q^{\theta_2}]} \exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H_{Q^{\theta_2}}(y) \rangle) \sum_{P \subset Q} \varepsilon_P^Q \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta_1}^Q} \sum_{w_2 \in {}_P W_{\theta_2}^Q}$$

$$\sum_{\delta_1, \delta_2} \hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1 a x) - T) K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1 a x k_1 w_1', w_2\delta_2 y k_2 w_2')\, dy$$

$$= \exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H_Q(a) \rangle) \int_{[M_Q^{\theta_2}]} \exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H_{Q^{\theta_2}}(y) \rangle) \sum_{P \subset Q} \varepsilon_P^Q \sum_{w_1 \in {}_P W_{\theta_1}^Q} \sum_{w_2 \in {}_P W_{\theta_2}^Q}$$

$$\sum_{\delta_1, \delta_2} \hat{\tau}_P^Q(H_P(w_1\delta_1 x) - T) K_{P,\chi,f}(w_1\delta_1 x k_1 w_1', w_2\delta_2 y k_2 w_2')\, dy.$$

我们可以先对 $A^G_{,Q}{}^{\infty} \simeq \mathfrak{a}_Q^G$ 积分：这就得到积分

$$\int_{\mathfrak{a}_Q^G} \exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H\rangle)\Gamma_Q(H-T, -H_Q(k_1 w_1' g))\, dH$$
$$= \exp(\langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}} - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, T_Q\rangle) p^Q_{w_1', w_2'}(0, -H_Q(k_1 w_1' g)).$$

于是，所宣布的公式便相当容易地由此推出。 □

3.5.5. $J_\chi(\eta, f)$**的协变性**。—

命题 3.5.5.1. —设 $\chi \in \mathfrak{X}(G)$ 与 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。

1. 对任意 $g \in G^\theta(\mathbb{A})$，有

$$J_\chi(\eta, f^g) = J_\chi(\eta, f).$$

2. 对任意 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$，有

$$J_\chi(\eta, {}^g f) = \eta(g) \sum_{Q, w_1', w_2'} J_\chi^{Q, \theta_1, \theta_2}(\eta, f^{w_1', w_2'}_{Q, \eta, g})$$

其中——该和取遍三元组(Q, w_1', w_2')，这些三元组由一个标准抛物子群Q 以及元素 $w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 与 $w_2' \in {}_QW_\theta$ 构成，使得 $Q \in F^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$，且其中函数 $f^{w_1', Q}{}_{\eta}{}^{w_2'}{}_{g}$ 定义于 (3.5.4.1)；——分布 $J^Q_{,\chi}{}_{\theta_1\,\theta_2,}$即为(3.5.3.2)中所定义者。

证明。— 分别取常数项，即可由命题 3.5.4.1 的断言 1 和断言 2 分别推出断言 1 和断言 2。断言 1 是显然的。对于断言 2，需要注意，只有与 $Q \in \mathcal{F}^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$ 相关的项才能给出非零常数项。事实上，指数映射中的 T_Q 的系数不可能由表达式 $J^Q_{,\chi}{}_{T\,\theta_1\,\theta_2,}(\eta, f^{w_1', Q}{}_{\eta}{}^{w_2'}{}_{g,})$ 抵消；后者是关于 T^Q 的指数多项式，其常数项记为（请回忆） $J^Q_{,\chi}{}_{\theta_1\,\theta_2,}(\eta, f^{w_1',}{}_{,})$。 □

3.5.6. 分布 $J^T(\eta)$ **和** $J(\eta)$。— 对任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 以及任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$，定义

$$J^T(\eta, f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} J_\chi^T(\eta, f),$$
$$J(\eta, f) = \sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} J_\chi(\eta, f).$$

这些求和再次根据定理 3.3.2.1 绝对收敛。它们定义了在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上连续的线性形式 $J^T(\eta)$ 和 $J(\eta)$。由命题 3.5.3.2 可知， $J^T(\eta)$ 与一个多项式指数函数重合，其常数项为$J(\eta)$。

3.5.7. 对 $\mathcal{F}^{G}$ 的描述, $^{\flat}(P_0,\ \theta_1,\ \theta_2)$。— 在本段中，我们在两种特殊情形下给出一个判据，以判断某个抛物子群是否满足（3.5.1.1）；这是对 [Li22, 引理 5.5] 的推广。设 θ_1， $\theta_2 \in M_0(F)$ 是两个阶至多为 2 的元素。设 $R \in \mathcal{F}^G(P_0)$ 是 V 的由 $V_0 = 0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \ldots \subsetneq V_m = V$ 个 D-模的旗组成的稳定子。我们有关于 D-模的分解

$$V = V'^{+} \oplus V'^{-} = V^+ \oplus V^-$$

使得 θ_1 和 θ_2 分别在 $V'^{\pm}$ 和 $V^{\pm}$ 上通过 ± 1 作用。回顾 $N=\dim_D(V)$，并令 $p'=\dim_D(V'^{+})$、$q'=\dim_D(V'^{-})$、$p=\dim_D(V^{+})$ 和 $q=\dim_D(V^{-})$。设 $1\leqslant i\leqslant m$。设$W_i\subset V_i$，使得 $V_i=V_{i-1}\oplus W_i$，且 M_R 是子空间 W_i的稳定子。记

$$W_i'^{\pm}=W_i\cap V'^{\pm} \text{ et } W_i^{\pm}=W_i\cap V^{\pm}.$$

设 $n_i=\dim_D(W_i)$，$p_i'=\dim_D({W'}_i^{+})$，$q_i'=\dim_D({W'}_i^{-})$，$p_i=\dim_D(W_i^{+})$ 和 $q_i=\dim_D(W_i^{-})$。显然，

$$n_i=p_i'+q_i'=p_i+q_i \text{ pour tout } i,\ \sum_{1\leqslant i\leqslant m} n_i=N,$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m} p_i'=p',\ \sum_{1\leqslant i\leqslant m} q_i'=q',\ \sum_{1\leqslant i\leqslant m} p_i=p \text{ et } \sum_{1\leqslant i\leqslant m} q_i=q.$$

记 $N_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant i} n_j$, $P_i'=\sum_{1\leqslant j\leqslant i} p_j'$, $Q_i'=\sum_{1\leqslant j\leqslant i} q_j'$, $P_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant i} p_j$和 $Q_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant i} q_j$。

对任意 i，设 $e_i^*\in\mathfrak{a}_0^*$ 为 A_0 在 e_i 上作用的特征，其中 $(e_1,\cdots\ e_N)$ 是 V 的标准基。记 $(e_1^\vee,\cdots\ e_N^\vee)$ 为 $(e_1^*,\cdots\ e_N^*)$ 的对偶基，即 $e_i^\vee\in\mathfrak{a}_0$，其中对于任意数 $1\leqslant i,j\leqslant N$，有 $e_i^*(e_j^\vee)=\delta_{ij}$。因此，$\mathfrak{a}_R$ 的一组基为 $(h_1^\vee,\cdots\ h_N^\vee)$，其中对于任意 i，有 $h_i^\vee=\sum_{N_{i-1}<j\leqslant N_i} e_j^\vee$。记 $(h_1^*,\cdots\ h_N^*)$ 为其对偶基，即 $h_i^*\in\mathfrak{a}_R^*$，其中对于任意 $1\leqslant i,j\leqslant N$，有 $h_i^*(h_j^\vee)=\delta_{ij}$。对任意 $1\leqslant k<m$，定义

$$\varpi_k^\vee=\frac{N-N_k}{N}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant k} h_i^\vee\right)-\frac{N_k}{N}\left(\sum_{k<j\leqslant m} h_j^\vee\right).$$

已知 $\hat{\Delta}^{G,\ }{}_R{}^\vee=\{\varpi_k^\vee:\ 1\leqslant k<m\}$ 是 $\mathfrak{a}_R^G$ 的一个基。那么，当且仅当对任意 $1\leqslant k<m$，$R\in\mathcal{F}^{G,\flat}(P_0,\ \theta_1,\ \theta_2)$ $2\rho_R^G-2\rho_{R^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}-2\rho_{R^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}\varpi_k^\vee=0$。由此可见

$$(2\rho_R^G)_R=\dim_F(D)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} n_in_j(h_i^*-h_j^*),$$

$$(2\rho_{R^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}})_R=\dim_F(D)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(p_i'p_j'+q_i'q_j')(h_i^*-h_j^*),$$

$$(2\rho_{R^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})_R=\dim_F(D)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}(p_ip_j+q_iq_j)(h_i^*-h_j^*).$$

对于 $1\leqslant i<j\leqslant m$ 和 $1\leqslant k<m$，有

$$(h_i^*-h_j^*)(\varpi_k^\vee)=\begin{cases}0 & \text{si } i>k \text{ ou } j\leqslant k;\\ 1 & \text{si } i\leqslant k<j.\end{cases}$$

由此可得，对于任意 $1\leqslant k<m$

$$(3.5.7.1)\quad (2\rho_R^G-2\rho_{R^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}-2\rho_{R^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}})(\varpi_k^\vee)=\dim_F(D)\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\sum_{k<j\leqslant m}(n_in_j-p_i'p_j'-q_i'q_j'-p_ip_j-q_iq_j)$$
$$=\dim_F(D)(N_k(N-N_k)-P_k'(p'-P_k')-Q_k'(q'-Q_k')-P_k(p-P_k)-Q_k(q-Q_k)).$$

命题 3.5.7.1。— 设 $\theta_1=\theta_2$。那么，当且仅当对于任意 $1\leqslant k<m$，有 $P_k-Q_k=0$ 或 $=p-q$，$R\in F^{G,\flat}(P_0,\theta_1,\theta_2)$。

证明。— 若 $\theta_1=\theta_2$，则有 $p_i'=p_i$，且对所有 $1\leqslant i\leqslant m$，$q_i'=q_i$。因此，(3.5.7.1) 变为 $\dim_F(D)$ 与.....的乘积

$$N_k(N-N_k)-2P_k(p-P_k)-2Q_k(q-Q_k).$$

设 $a_k = p - P_k$ 和 $b_k = q - Q_k$。由于 $N_k = P_k + Q_k$ 且 $N = p + q$，最后一个表达式等于

$$(P_k + Q_k)(a_k + b_k) - 2P_k a_k - 2Q_k b_k = (P_k - Q_k)(b_k - a_k).$$

当且仅当 $P_k - Q_k = 0$ 或 $= p - q$时，它为零。这就证明了结论。 □

命题 3.5.7.2.— 假设

$$\theta' = \theta \ et \ \mathrm{Trd}(\theta) = 0 \tag{3.5.7.2}$$

这意味着 N 是偶数，参见 *§2.2.1*。设 $w_1', w_2' \in W$。定义：

$$\theta_1 = w_1' \theta {w_1'}^{-1} \ et \ \theta_2 = w_2' \theta {w_2'}^{-1}.$$

那么，当且仅当对于任意 $1 \leqslant i \leqslant m$，有 $R \in \boldsymbol{F}^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$

$$p_i' = q_i' = p_i = q_i = n_i/2.$$

证明。— 由假设 (3.5.7.2) 可得

$$p' = q' = p = q = N/2.$$

但是 $N_k = P_k' + Q_k' = P_k + Q_k$。于是

$$N_k N - P_k' p' - Q_k' q' - P_k p - Q_k q = N_k N - (P_k' + Q_k' + P_k + Q_k)N/2 = 0.$$

表达式 (3.5.7.1) 变为 $\dim_F(D)$ 与下式的乘积

$$\begin{aligned} -N_k^2 + P_k'^2 + Q_k'^2 + P_k^2 + Q_k^2 &= -(P_k' + Q_k')^2/2 - (P_k + Q_k)^2/2 + P_k'^2 + Q_k'^2 + P_k^2 + Q_k^2 \\ &= (P_k' - Q_k')^2/2 + (P_k - Q_k)^2/2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

等式对任意 $1 \leqslant k < m$ 成立，当且仅当对任意 $1 \leqslant i \leqslant m$，$p_i' = q_i' = p_i = q_i = n_i/2$。□

推论 3.5.7.3。— 假设 (3.5.7.2)。设 $Q \subset G$ 为一个标准抛物子群。设 $w_1', w_2' \in {}_QW_\theta$。于是，按照 (3.4.2.1) 定义 θ_1 和 θ_2。若 $Q \in \boldsymbol{F}^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$，则 $w_1' = w_2'$，从而 $\theta_1 = \theta_2$。

证明。— 根据命题 3.5.7.2，存在 $w \in W^Q$ 使得 $w\theta_1 w^{-1} = \theta_2$。由此可得 $w_2'^{-1} w w_1' \in W^\theta$。根据命题 2.2.4.1，我们进而得到 $w_1' = w_2'$。□

3.5.8. 情形 $GL_2(D)$。— 本节聚焦于情形 $N = 2$，因此 $G = GL_2(D)$，并且

$$\theta = \theta' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

根据命题 3.5.7.2，$\mathcal{F}^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$ 中唯一可能的元素就是 G 本身。特别地，命题 3.5.5.1 的协变关系大大简化了。于是得到本质上为不变量的项。

命题 3.5.8.1. — 在以下条件下，对于任意 $g \in G^\theta(\mathbb{A})$，有

$$\begin{aligned} J_\chi(\eta, f^g) &= J_\chi(\eta, f) \\ J_\chi(\eta, {}^g f) &= \eta(g) J_\chi(\eta, f). \end{aligned}$$

4 几何展开

4.1 对称空间与范畴商

4.1.1. 沿用子小节 2.2 中的记号。特别地，假设 F 是特征零的交换域，且 D 是 F上的有限维中心除法代数。还需回顾的是，我们有 $V = D^N$, $G = GL_D(V)$ 和 $\theta \in G(F)$，它们满足 $\theta^2 = 1$。我们有一个极小抛物子群 $P_0 \subset G$ 以及一个 Levi 因子 M_0，使得$\theta \in M_0(F)$。对于任意 $g \in G$，记 $\mathrm{Int}(g) : x \mapsto gxg^{-1}$ 为由 g的共轭诱导的 G 的内自同构。因此，$\mathrm{Int}(\theta)$诱导 G的一个对合。记 d 为 D 的次数，即$d^2 = \dim_F(D)$。设 $p = \dim_D(V^+)$，且 $q = \dim_D(V^-)$。

设$\{e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q\}$为 V的一个 D-基，使得$\{e_1, \dots, e_p\}$（相应地，$\{f_1, \dots, f_q\}$）为 V^+（相应地，V^-）的一个D-基。对 V的这一基的选取将 G 等同于 F上的代数群，记作$GL_{N,D}$，其 F-点群为 $GL_D(D^N)$。

对任意整数 $0 \leqslant p' \leqslant N$，令

$$q' = N - p' \text{ et } \theta_{p'} = \theta_{p',q'} = \begin{pmatrix} I_{p'} & 0 \\ 0 & -I_{q'} \end{pmatrix} \in M_0(F).$$

于是，在这些等同之下，我们有$\theta = \theta_p = \theta_{p,q}$ 与$G^\theta = GL_{p,D} \times GL_{q,D}$。我们还假设 M_0 是分别由 e_i（对 $1 \leqslant i \leqslant p$）与 f_j（对 $1 \leqslant j \leqslant q$）生成的 D-直线的稳定子。换言之，M_0 等同于对角矩阵子群。此外，我们可以并且将假设P_0^θ 等同于由上三角矩阵构成的 G^θ 的子群。注意，我们总可以把 P_0 取为上三角矩阵群。这并非唯一可能的选择，我们并不强制如此。

4.1.2. 对称空间。—设

$$S = \{g \in G \mid g\,\mathrm{Int}(\theta)(g) = 1\}.$$

换言之，$g \in S$ 当且仅当 $(g\theta)^2 = 1$。群 G 通过扭曲共轭 $\mathrm{Int}_\theta(g)(s) = gs\mathrm{Int}(\theta)(g)^{-1}$ 作用于 S，对任意 $g \in G$ 和任意 $s \in S$均成立。注意，此作用在 G^θ 上的限制恰好就是通常的共轭，以下将此作用记为 Int。与 [JR96, §4.1], 中一样，S有 $N+1$ 个连通分支，记作 $S_{p'} = S_{p',q'}$，并以整数 $0 \leqslant p' \leqslant N$ 为指标：分支 $S_{p'}$ 由满足 $g \in G$ 的 $g\theta_{p'}g^{-1}\theta = g\cdot(\theta_{p'}\theta)\cdot \mathrm{Int}(\theta)(g)^{-1}$组成；换言之，它是 $\theta_{p'}\theta$的轨道。此外还有

$$S_{p'} = \{g \in G \mid (g\theta)^2 = 1, \dim_F(\ker(g\theta - \mathrm{Id}_V)) = dp'\}. \tag{4.1.2.1}$$

态射

$$\rho_{p'} : G \to S$$

由 $g \mapsto g\theta_{p'}g^{-1}\theta$ 给出，因此将商 $G/G^{\theta_{p'}}$ 与 $S_{p'}$ 等同。此态射对于 G 在 $G/G^{\theta'_p}$ 上的左乘作用，以及 G 在 S 上的扭曲共轭 Int_θ，是等变的。特别地，它对于由子群 G^θ 诱导的作用是等变的。对于 $p' = p$，令

$$\rho = \rho_p : G \to S_p. \tag{4.1.2.2}$$

S 中包含 G 的单位元的唯一连通分支 S° 是 S_p。如果 $p = 0$ 或 $q = 0$，则此连通分支 S° 退化为单元素集。

4.1.3. S。— 设 $x \in \mathrm{End}_D(V)$。记 Prd_x、$\mathrm{Nrd}(x)$、$\mathrm{Trd}(x)$分别为 x 在 M中的约化特征多项式、约化范数和约化迹。设$x^\pm$ 为 x 按照分解投影到因子 $\mathrm{End}_D(V^\pm)$上的投影

$$\mathrm{End}_D(V) = \mathrm{End}_D(V^+) \oplus \mathrm{Hom}_D(V^-, V^+) \oplus \mathrm{Hom}_D(V^+, V^-) \oplus \mathrm{End}_D(V^-). \tag{4.1.3.1}$$

若 x 按照分解（4.1.3.1）写作 $A+B+C+D$，则可以用矩阵形式写为

$$x=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}.$$

引理 4.1.3.1. — 设 $x=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in \mathrm{End}_D(V)$.

1. 当且仅当满足以下等式时，有 $x\in S$

$$A^2=I_p+BC, D^2=I_q+CB, AB=BD, CA=DC.$$

2. 设 $0\leqslant p'\leqslant N$。那么，当且仅当 $x\in S_{p'}$ 时， $x\in S$ 且 $\mathrm{Trd}(A)-\mathrm{Trd}(D)=d(p'-q')$。

证明。 — 这是一次直接计算。需要指出的是，断言 1 中的四个等式表达了 $(x\theta)^2=1$，而断言 2 中关于约化迹的等式给出了 $\ker(x\theta-\mathrm{Id}_V)$ 的维数条件。□

设 t 是一个不定元， $F(t)$ 是环 $F[t]$ 上以 F 为系数的关于 t 的多项式的分式域。

引理 4.1.3.2. — 对于任意 $0\leqslant p'\leqslant N$和 $x\in S_{p'}(F)$，在 $F(t)$ 中有如下等式：

$$\mathrm{Prd}_{x^+}(t)=(t-1)^{d(p'-q')}\,\mathrm{Prd}_{x^-}(t).$$

证明。 — 设 $x=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in S_{p'}(F)$。利用引理 4.1.3.1，对于任意整数$m\geqslant 2$，计算得：

$$A^{m+1}=A^{m-1}(I_p+BC)=A^{m-1}+A^{m-1}BC=A^{m-1}+BD^{m-1}C$$

其中在最后一个等式中用到了 $AB=BD$。同样，有

$$D^{m+1}=D^{m-1}(I_q+CB)=D^{m-1}+D^{m-1}CB.$$

可以用归纳法证明

$$\mathrm{Trd}(A^m)-\mathrm{Trd}(D^m)=d(p'-q')$$

对于任意整数 $m\geqslant 1$。最后利用牛顿恒等式即可得证。 □

引理 4.1.3.3. — 对于任意 $x\in S(F)$，在 $F(t)$ 中有如下等式：

$$\begin{aligned}\mathrm{Prd}_x(t)&=\frac{\mathrm{Prd}_{x^-}(t)}{\mathrm{Prd}_{x^+}(t)}\,\mathrm{Nrd}(t^2I_p-2tx^++I_p)\\&=\frac{\mathrm{Prd}_{x^+}(t)}{\mathrm{Prd}_{x^-}(t)}\,\mathrm{Nrd}(t^2I_q-2tx^-+I_q).\end{aligned}$$

证明。 — 设 $x=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in S(F)$。我们有 $x^+=A$ 和 $x^-=D$。首先证明第一个等式。根据定义，并对矩阵的列进行一些变换，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Prd}_x(t)&=\mathrm{Nrd}\begin{pmatrix}tI_p-A & -B\\ -C & tI_q-D\end{pmatrix}\\&=\mathrm{Nrd}\begin{pmatrix}tI_p-A-B(tI_q-D)^{-1}C & -B\\ 0 & tI_q-D\end{pmatrix}\\&=\mathrm{Nrd}(tI_p-A-B(tI_q-D)^{-1}C)\,\mathrm{Prd}_D(t).\end{aligned}$$

根据引理 4.1.3.1 的等式 $AB = BD$，我们得到

$$(tI_p - A)B = B(tI_q - D)$$

因此

$$B(tI_q - D)^{-1} = (tI_p - A)^{-1}B. \tag{4.1.3.2}$$

于是得到

$$\begin{aligned}\operatorname{Nrd}(tI_p - A - B(tI_q - D)^{-1}C) = \operatorname{Nrd}(tI_p - A - (tI_p - A)^{-1}BC)\\ = \operatorname{Prd}_A(t)^{-1}\operatorname{Nrd}((tI_p - A)^2 - BC) = \operatorname{Prd}_A(t)^{-1}\operatorname{Nrd}(t^2I_p - 2tA + I_p)\end{aligned}$$

其中用到了引理 4.1.3.1 中的等式 $A^2 = I_p + BC$。我们已经证明了第一个等式。对于第二个等式，注意到

$$\begin{aligned}\operatorname{Prd}_x(t) &= \operatorname{Nrd}\begin{pmatrix} tI_p - A & 0 \\ -C & tI_q - D - C(tI_p - A)^{-1}B \end{pmatrix}\\ &= \operatorname{Prd}_A(t)\operatorname{Nrd}(tI_q - D - C(tI_p - A)^{-1}B).\end{aligned}$$

但 (4.1.3.2) 蕴含

$$\begin{aligned}\operatorname{Nrd}(tI_q - D - C(tI_p - A)^{-1}B) = \operatorname{Nrd}(tI_q - D - CB(tI_q - D)^{-1})\\ = \operatorname{Prd}_D(t)^{-1}\operatorname{Nrd}((tI_q - D)^2 - CB) = \operatorname{Prd}_D(t)^{-1}\operatorname{Nrd}(t^2I_q - 2tD + I_q)\end{aligned}$$

其中用到了引理 4.1.3.1 中的等式 $D^2 = I_q + CB$。第二个等式由此得出。 □

推论 4.1.3.4. — 对于任意 $0 \leqslant p' \leqslant N$ 和 $x \in S_{p'}(F)$，在 $F(t)$ 中有如下等式：

$$\begin{aligned}\operatorname{Prd}_x(t) &= (t-1)^{d(q'-p')}\operatorname{Nrd}(t^2I_p - 2tx^+ + I_p)\\ &= (t-1)^{d(q'-p')}(2t)^{dp}\operatorname{Prd}_{x^+}(\frac{t^2+1}{2t})\\ &= (t-1)^{d(p'-q')}\operatorname{Nrd}(t^2I_q - 2tx^- + I_q)\\ &= (t-1)^{d(p'-q')}(2t)^{dq}\operatorname{Prd}_{x^-}(\frac{t^2+1}{2t}).\end{aligned}$$

证明。 — 这些等式是引理 4.1.3.2 和引理 4.1.3.3 的推论。 □

4.1.4. H**-半单，** H**-正则**。 — 我们采用以下一般术语，它适用于定义在 F 上的连通仿射簇 X，其中连通仿射代数群 H 作用于该簇。设 $x \in X$ 是一个几何点。若 x 在 H 的作用下的轨道在 X 中关于扎里斯基拓扑是闭的，则称 x是 H-半单的。若 x 在 H 中的中心化子 H_x 维数最小（或者说， x 的 H-轨道维数最大），则称 x 是 H-正则的。在上下文清楚时，有时可以省略前缀 H。本节所关注的情形是连通群 G^θ 在 S的连通分支上的共轭作用。

引理 4.1.4.1.— 设 $x \in S$。那么， x 是 G 中通常意义下的半单元素，当且仅当 x 是 G^θ-半单的。

证明。 — 这是 [Ric82 定理 C]的推论。也可参阅 [Ric82 命题 93] 的证明。（该命题仅涉及分量 S°，但证明对 S仍然成立。）□

对于所有满足 $m \leqslant \min\{p-r, q-t\}$ 的整数 $m, r, t \geqslant 0$，以及任意 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$，定义

$$x(A,r,t) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & A-I_m & 0 & 0 \\ 0 & I_{p-m-r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r & 0 & 0 & 0 \\ A+I_m & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{q-m-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_t \end{pmatrix}. \tag{4.1.4.1}$$

由引理 4.1.3.1 可知 $x(A,\ r,\ t) \in S(F)$。

注记 4.1.4.2. — 若 A 是一个没有特征值 ± 1 的矩阵，则 $x(A,\ r,\ t)$ 在 G^θ 中的中心化子的维数为

$$\dim_F((GL_{m,D})_A) + \dim_F(D)[(p-m-r)^2 + r^2 + (q-m-t)^2 + t^2]$$

其中 $(GL_{m,\ D})_A$ 是 A 在 $GL_{m,\ D}$ 中的中心化子。

引理 4.1.4.3. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。那么 $x(A,\ r,\ t) \in S_{p'}$ 当且仅当

$$t - r = p' - p.$$

在这种情形下，还有

$$0 \leqslant m \leqslant \min\{p, q, p', q'\}.$$

证明。 — 根据引理 4.1.3.1，$x(A,\ r,\ t) \in S_{p'}$ 当且仅当

$$(p-m-r-r) - (q-m-t-t) = p' - q'$$

也就是说

$$(p-2r) - (N-p-2t) = p' - (N-p')$$

这等价于

$$t - r = p' - p.$$

总有 $0 \leqslant r \leqslant p-m$ 和 $0 \leqslant t \leqslant q-m$，因此

$$m - p \leqslant t - r = p' - p \leqslant q - m$$

由此得到 $m \leqslant p' \leqslant N - m$。这给出了最后的条件。 □

引理 4.1.4.4. — *([JR96, 引理 4.3])* 对任意整数 $m \geqslant 0$ 和任意 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$ 没有特征值 ± 1的矩阵

$$\begin{pmatrix} A & A-I_m \\ A+I_m & A \end{pmatrix}$$

可逆且没有特征值 ± 1。它是半单的，当且仅当 A 是半单的。

命题 4.1.4.5。 —

1. 元素 $x \in S(F)$ 是 G^θ-半单的，当且仅当存在整数 $m, r, t \geqslant 0$，使得 $m \leqslant \min\{p-r, q-t\}$，并且存在一个没有特征值 ± 1 的半单元素 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$，使得 x 在 $G^\theta(F)$ 下与 $x(A,r,t)$共轭。

2. $S(F)$ 中半单元素的 $G^\theta(F)$-共轭类集合与四元组 $(m,[A],r,t)$ 的集合之间存在双射，其中 $m,r,t\geqslant 0$ 是满足 $m\leqslant \min\{p-r,q-t\}$ 的整数，而 $[A]$ 是 $\mathfrak{gl}_m(D)$ 中不含特征值 ± 1的半单共轭类。

证明。— 证明与 [JR96 的命题 4.1] 在 $D=F$ 时的证明相同，也与[Zha15 的命题 5.1] 在 $p=q$时的证明相同。一般而言，只需结合二者的论证即可。□

推论 4.1.4.6。— 设 $0\leqslant p'\leqslant N$。

1. 元素 $x\in S_{p'}(F)$ 是 G^θ-半单的，当且仅当存在整数 m、r、$t\geqslant 0$以及一个没有 ± 1 特征值的半单元素 $A\in\mathfrak{gl}_m(D)$，使得 $m\leqslant \min\{p-r,q-t\}$，$t-r=p'-p$，且 x 在 $G^\theta(F)$ 下与 $x(A,r,t)$ 共轭。2. $S_{p'}(F)$ 中半单元素的 $G^\theta(F)$-共轭类集合与四元组 $(m,[A],r,t)$ 的集合之间存在双射，其中 m、r、$t\geqslant 0$ 是满足 $m\leqslant \min\{p-r,q-t\}$ 的整数，$t-r=p'-p$，且 $[A]$ 是 $\mathfrak{gl}_m(D)$ 中一个没有 ± 1 特征值的半单共轭类。

Dé证明。— 这是引理 4.1.4.3 和命题 4.1.4.5 的推论。 □

引理 4.1.4.7.— 设 $x\in S(F)$ 及 $x=x_sx_u=x_ux_s$ 是其在 $G(F)$中的 *Jordan* 分解，其中 x_s 和 x_u 分别是 x 的半单部分与幂单部分。

1. 有 $x_s\in S(F)$ 和 $x_u\in S^\circ(F)$。2. 设 $0\leqslant p'\leqslant N$。那么，$x\in S_{p'}(F)$ 当且仅当 $x_s\in S_{p'}(F)$。

证明。— 我们依照 JR96 引理 4.1] 的证明。

1. Jordan 分解的唯一性意味着有 $x_s,x_u\in S(F)$。设 $X\in\mathfrak{g}(F)$ 是满足 $x_u=\exp(X)$ 的唯一幂零元。那么 $\theta X\theta=-X$ 且 $x_u\in S^\circ(F)$。

2. 由于 S 是连通分支 $S_{p'}$ 的不交并集，其中 $0\leqslant p'\leqslant N$，故只需证明：若 $x\in S_{p'}(F)$，则 $x_s\in S_{p'}(F)$。设 $x\in S_{p'}(F)$。我们有 $xx_u=x_ux$。设 $g\in G(F)$使得$x=\rho_{p'}(g)=g\theta_{p'}g^{-1}\theta$。于是我们有

$$g\theta_{p'}g^{-1}\theta x_u=x_ug\theta_{p'}g^{-1}\theta.$$

而 $x_u\in S(F)$蕴含我们有$(x_u\theta)^2=1$，从而

$$g\theta_{p'}g^{-1}x_u^{-1}=x_ug\theta_{p'}g^{-1}.$$

因此，利用上文1中所定义的 X，我们有伴随作用$(g\theta_{p'}g^{-1})(X)=-X$。令 $v=$ 指数映射$(X/2)\in G(F)$。则

$$g\theta_{p'}g^{-1}v=v^{-1}g\theta_{p'}g^{-1}.$$

由此推出

$$\rho_{p'}(v^{-1}g)=(v^{-1}g)\theta_{p'}(v^{-1}g)^{-1}\theta=v^{-2}g\theta_{p'}g^{-1}\theta=v^{-2}x=x_s.$$

从而得到 $x_s\in S_{p'}(F)$。 □

推论 4.1.4.8.— 设 $x\in S(F)$，且 $x=x_sx_u=x_ux_s$ 为其在 $G(F)$中的*Jordan* 分解，其中 x_s 与 x_u 分别为半单部分与幂单部分。则$\mathrm{Prd}_{x^+}=\mathrm{Prd}_{(x_s)^+}$。

证明。— 由等式 $\mathrm{Prd}_x=\mathrm{Prd}_{x_s}$、引理 4.1.4.7 和推论 4.1.3.4 得出。□

引理 4.1.4.9.— 设 $0\leqslant p'\leqslant N$。对于任意 $x\in S_{p'}(F)$，多项式

$$(t-1)^{d\max\{p'-q,0\}}(t+1)^{d\max\{p-p',0\}}$$

整除 $F[t]$ 中的Prd_{x^+}。

证明。— 根据推论 4.1.4.8，只需考虑 x 为半单的情形：此时使用推论 4.1.4.6。我们需要证明

1. $p-m-r\geqslant \max\{p'-q,$
$0\}$；2. $r\geqslant \max\{p-p',0\}$。

由于 $m\leqslant \min\{p-r,q-t\}$，我们有 $m\leqslant p-r$，因而 $p-m-r\geqslant 0$。此外，$m\leqslant q-t$意味着

$$p-m-r\geqslant p+t-q-r=p-q+p'-p=p'-q$$

这里用到了 $t-r=p'-p$。我们已经证明了 $p-m-r\geqslant \max\{p'-q,0\}$。

我们知道 因为 $r\geqslant 0$。既然 $t-r=p'-p$，我们就有 $r=t+p-p'\geqslant p-p'$。因此 $r\geqslant \max\{p-p',0\}$.

□

4.1.5. 正则半单元素。— 设 $0\leqslant p'\leqslant N$ 和 $x\in S_{p'}(F)$。令

$$\nu=\min\{p,q,p',q'\}$$

$$\chi_x=(t-1)^{-d\max\{p'-q,0\}}(t+1)^{-d\max\{p-p',0\}}\,\mathrm{Prd}_{x^+}\,. \tag{4.1.5.1}$$

由引理 4.1.4.9，得到一个关于 $F[t]$ 的首一多项式 χ_x。其次数为 $d\nu$，这可由下述引理得出。

引理 4.1.5.1. — 设 $\nu=$最小值$\{p,q,p',q'\}$。有以下等式：

$$\begin{aligned}\nu+\max\{p'-q,0\}+\max\{p-p',0\}&=p,\\ \nu+\max\{q-p',0\}+\max\{p'-p,0\}&=q,\\ \max\{p'-p,0\}-\max\{p-p',0\}&=p'-p.\end{aligned}$$

证明。— 首先考虑情形 $\nu=p$。在此情形下，有 $\max\{p,q,p',q'\}=q$。由此可得

$$\max\{p'-q,0\}=0,\max\{p-p',0\}=0,\max\{q-p',0\}=q-p',\max\{p'-p,0\}=p'-p.$$

此时等式显然成立。其余情形可参照汇总表以同样方式处理：

ν	$\max\{p,q,p',q'\}$	$\max\{p'-q,0\}$	$\max\{p-p',0\}$	$\max\{q-p',0\}$	$\max\{p'-p,0\}$
p	q	0	0	$q-p'$	$p'-p$
q	p	$p'-q$	$p-p'$	0	0
p'	q'	0	$p-p'$	$q-p'$	0
q'	p'	$p'-q$	0	0	$p'-p$

□

对任意 $A\in\mathfrak{gl}_\nu(D)$，令 $x(A)=x(A,\max\{p-p',0\},\max\{p'-p,0\})$，也就是说

$$x(A)=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & A-I_\nu & 0 & 0\\ 0 & I_{\max\{p'-q,0\}} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -I_{\max\{p-p',0\}} & 0 & 0 & 0\\ A+I_\nu & 0 & 0 & A & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{\max\{q-p',0\}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\max\{p'-p,0\}}\end{pmatrix}. \tag{4.1.5.2}$$

根据引理 4.1.4.3 和 4.1.5.1，我们有 $x(A) \in S_{p'}$。若 A 是一个没有特征值± 1的矩阵，则由引理 4.1.4.1 和 4.1.4.4 可得，$x(A)$ 是 G^θ-半单的，当且仅当 A 是半单的。

注记 4.1.5.2. — 注意，$\max\{p'-q,0\}$ 与 $\max\{q-p',0\}$ 中有一个为零，$\max\{p-p',0\}$ 与 $\max\{p'-p,0\}$中也有一个为零。

命题 4.1.5.3. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$ 和 $x \in S_{p'}(F)$。以下命题等价 *s.*

1. 元素 x 在 $G^\theta(F)$ 下共轭于形如 $x(A)$ 的元素，其中 $A \in \mathfrak{gl}_\nu(D)$ 是正则半单且没有特征值 ± 1。*2.* 多项式 χ_x 可分，且 $\chi_x(\pm 1) \neq 0$。*3.* 元素 x 既是 G^θ-半单的，也是 G^θ-正则的。

证明。—

1 蕴含 2。这显然，因为 $\chi_{x(A)} = \mathrm{Prd}_A$。

2 蕴含 3。假设 χ_x 可分且 $\chi_x(\pm 1) \neq 0$。首先证明 x 是G^θ-半单的。设 $x = x_s x_u = x_u x_s$ 是 x 在 $G(F)$中的 Jordan 分解，其中 x_s 和 x_u分别是半单部分与幺幂部分。根据引理 4.1.4.1，只需证明 $x_u = 1$。由引理 4.1.4.7 和推论 4.1.4.8，得到 $x_s \in S_{p'}(F)$ 和 $\chi_x = \chi_{x_s}$。于是 χ_{x_s} 可分且 $\chi_{x_s}(\pm 1) \neq 0$。利用推论 4.1.4.6，在必要时用 $G^\theta(F)$中的一个元素共轭 x 后，可以并且将假设 $x_s = x(A, r, t)$，其中整数 m、r、$t \geqslant 0$ 满足该推论的条件，且 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$ 是一个没有特征值± 1的半单元素。根据假设，多项式 $\mathrm{Prd}_{x_s}^+$的根 1（分别为 -1）的重数是 $d\max\{p'-q, 0\}$（分别为 $d\max\{p-p', 0\}$）。由此可得 $r = \max\{p-p', 0\}$ 和 $p-m-r = \max\{p'-q, 0\}$。根据引理 4.1.5.1，得到 $m = \nu$。由于 $t-r = p'-p$，还可得到 $t = \max\{p'-p, 0\}$。最后，按上述记号，有 $x_s = x(A)$。由推论 4.1.3.4（应用于情形$p = q = p' = q' = \nu$）可知，矩阵 $\begin{pmatrix} A & A - I_\nu \\ A + I_\nu & A \end{pmatrix}$ 是正则半单的，且没有特征值 ± 1。由于 x_u 是一个与 x_s交换的幺幂元素，我们发现 x_u必定具有如下形式

$$\begin{pmatrix} I_\nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & I_\nu & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

其中，A_1、A_2、D_1、D_2分别是阶数为 $\max\{p'-q,\ 0\}$、$\max\{p-p',\ 0\}$、$\max\{q-p',\ 0\}$、$\max\{p'-p,\ 0\}$的方阵。根据注记 4.1.5.2，上述矩阵中不出现块 B_1、B_2、C_1、C_2。因此有 $\theta x_u = x_u \theta$；而 $(x_u\theta)^2 = 1$，因为 $x_u \in S(F)$，参见引理 4.1.4.7。由此可得 $x_u^2 = 1$。由于 x_u 是幂单的，$x_u + 1$ 可逆。因此有 $x_u = 1$，从而得到所需的 $x = x_s$。

因此我们得到 $x = x_s = x(A)$，且该元素是 G^θ-半单的。容易计算出 $x(A)$ 在 G^θ 中的中心化子：可以看出，它同构于$GL_{\nu,\ D}$ 的一个极大环面（A的中心化子）与群 $GL_{\max\{p'-q,0\}\ D}$、$GL_{\max\{p-p',0\}\ D}$、$GL_{\max\{q-p',0\}\ D}$、$GL_{\max\{p'-p,0\}\ D}$的乘积。因此其维数由公式给出

$$\begin{aligned} d\nu + d^2(\max\{p'-q,0\}^2 + \max\{p-p',0\}^2 + \max\{q-p',0\}^2 + \max\{p'-p,0\}^2) \\ = d\nu + d^2[(p'-q)^2 + (p-p')^2]. \end{aligned}$$

一方面，条件 χ_x 可分和 $\chi_x(\pm 1) \neq 0$ 定义了 $S_{p'}$ 中的一个非空扎里斯基开集；我们刚刚看到，该开集由 G^θ-半单 x 元素构成，这些元素在 G^θ中的中心化子记作 G_x^θ，且维数始终相同。另一方面，函数 $x \mapsto \dim(G_x^\theta)$

在 $S_{p'}$上上半连续，因此 $S_{p'}$ 的正则元素集合也是一个非空扎里斯基开集。由于 $S_{p'}$ 不可约（它是 G 经态射 $\rho_{p'}$的像），这两个开集有非空交集；由此可得，第一个开集中的所有元素也都是 G^θ-正则的。

3 蕴含 1。设 $x \in S(F)$ 是 G^θ-半单且 G^θ-正则的。根据推论 4.1.4.6，可以假设 $x = x(A, r, t)$，其中 m、r、$t \geqslant 0$ 是满足 $m \leqslant \min\{p-r, q-t\}$,$t-r = p'-p$ 的整数，并且 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$ 是一个没有 ± 1 特征值的半单元素。根据引理 4.1.5.1，只需证明 $m = \nu$, $r = \max\{p-p', 0\}$，且 A 是正则的。先计算中心化子 G_x^θ：它同构于 A 在 $GL_{m,D}$ 中的中心化子与群 $GL_{p-m-r,D}$, $GL_{r,D}$, $GL_{q-m-t,D}$ 和 $GL_{t,D}$ 的乘积。这个中心化子的维数至少为

$$f(m,r,t) = dm + d^2[(p-m-r)^2 + r^2 + (q-m-t)^2 + t^2].$$

容易看出，对于 $m \leqslant \min\{p-r, q-t\}$</style}，有

1. $f(m,r,t) > f(m+1,r,t)$，若 $(p-m-r)(q-m-t) \neq 0$；2. $f(m,r,t) > f(m+1,r-1,t-1)$，若 $rt \neq 0$。

因此，在函数 f 取最小值的点处，必须有 $(p-m-r)(q-m-t) = 0$ 且 $rt = 0$。在这种情况下，有

$$f(m,r,t) = dm + d^2[(p-m-r-q+m+t)^2 + (r-t)^2]$$
$$= dm + d^2[(p-q+p'-p)^2 + (p-p')^2] = dm + d^2[(p'-q)^2 + (p-p')^2]$$

这里用到了 $t-r = p'-p$。我们需要逐个情形进行讨论。

1. 若 $p-m-r = 0$ 且 $r = 0$，则有 $m = p$。2. 若 $p-m-r = 0$ 且 $t = 0$，则有 $r = p-p'$，因此 $m = p'$。

3. 若 $q-m-t = 0$ 且 $r = 0$，则有 $t = p'-p$，因此 $m = q'$。4. 若 $q-m-t = 0$ 且 $t = 0$，则有 $m = q$。

无论如何，我们有 $m \geqslant \nu$。由此可得

$$f(m,r,t) \geqslant d\nu + d^2[(p'-q)^2 + (p'-p)^2]$$

这就是 G^θ-正则元素的中心化子的维数。要使 $x(A, r, t)$ 为 G^θ-正则的一个必要条件是 $m = \nu$，A 在 $\mathfrak{gl}_\nu(D)$ 中正则，$(p-m-r)(q-m-t) = 0$，且 $rt = 0$。由于 $t-r = p'-p$，可见

1. 若 $r = 0$, $t = p'-p \geqslant 0$;
2. 若 $t = 0$, $r = p-p' \geqslant 0$。

无论如何，我们有 $r = \max\{p-p', 0\}$ 且 $t = \max\{p'-p, 0\}$。 □

4.1.6. G^θ **在** $S_{p'}$**上的作用的不变量。** — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。回忆一下，我们记$d^2 = \dim_F(D)$ 和 $\nu = \min\{p, q, p', q'\}$。设 $\mathbf{A}^{d\nu}$ 为定义在 F 上、维数为 $d\nu$ 的仿射空间。根据引理 4.1.5.1，可以定义一个态射 $c_{p'}^\flat: S_{p'} \to \mathbf{A}^{d\nu}$，将 x 映射为由式 (4.1.5.1) 定义的多项式 χ_x 的非主导系数集合。显然，$c_{p'}^\flat$ 是 G^θ-不变量。设 $\mathbf{A}^{d\nu}_{\mathrm{rss}} \subset \mathbf{A}^{d\nu}$ 为由满足以下条件的元素 $(c_i)_{0 \leqslant i \leqslant d\nu-1}$ 构成的子集：多项式

$$P(t) = t^{d\nu} + \sum_{i=0}^{d\nu-1} c_i t^i \in F[t]$$

是可分的，且 $P(\pm 1) \neq 0$。这是 $\mathbf{A}^{d\nu}$ 的一个扎里斯基开集。

在下文中，如果上下文清楚，我们将省略 p' 在 $c_{p'}^\flat$中的指标。

命题 4.1.6.1. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。有序对 $(c_{p'}^{\flat}, \mathbf{A}^{d\nu})$ 是 $S_{p'}$ 关于 G^{θ} 的作用的范畴商。

证明。 — 需要证明由 $c^{\flat}$ 诱导的余态射 $c_{,*}^{\flat}$: $F[\mathbf{A}^{d\nu}] \to F[S_{p'}]^{G^{\theta}}$ 是一个 F-同构。我们先在 $G_0 = GL_F(F^{dN})$的情形下证明，且

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} I_{dp} & 0 \\ 0 & -I_{dq} \end{pmatrix} \text{ et } \theta_{0,dp'} = \begin{pmatrix} I_{dp'} & 0 \\ 0 & -I_{dq'} \end{pmatrix}.$$

设 $S_{0,dp'}$ 为相应的簇，其定义如第 4.1.2 节所述； $c_0^{\flat}$:$S_{0,dp'} \to \mathbf{A}^{d\nu}$ 为如上定义的映射。对于 $(c_i)_{0\leqslant i\leqslant d\nu-1} \in \mathbf{A}^{d\nu}$，定义一个 $d\nu$ 阶方阵作为伴随矩阵

$$A((c_i)_{0\leqslant i\leqslant d\nu-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{d\nu-1} \end{pmatrix}.$$

定义一个态射 j_0 :$\mathbf{A}^{d\nu} \to S_{0,dp'}$ 如下:

$$(c_i)_{0\leqslant i\leqslant d\nu-1} \mapsto x(A((c_i)_{0\leqslant i\leqslant d\nu-1}), d\max\{p-p',0\}, d\max\{p'-p,0\}).$$

这是 $c_0^{\flat}$的一个节，也就是说，我们有 $c_0^{\flat} \circ j_0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^{d\nu}}$。对偶地， $j_0^* \circ c_{,0}^{\flat\,*}$ 是 $F[\mathbf{A}^{d\nu}]$上的恒等式。因此 j_0^*是满射；我们证明 j_0^*在 $F[S_{0,dp'}]^{G_0^{\theta_0}}$到 $F[\mathbf{A}^{d\nu}]$之间诱导一个单态射。于是它也是一个同构， $c_{,0}^{\flat\,*}$ 亦然。设 $f \in F[S_{0,dp'}]$ 是定义在S_0上的一个正则函数，$_{dp'}$ 且为 $G_0^{\theta_0}$-不变量，并满足 $f \circ j_0$ 恒等于零。由命题 4.1.5.3可知，一个 $G_0^{\theta_0}$-正则半单元素在 $G_0^{\theta_0}$下的轨道与 $j_0(\mathbf{A}^{d\nu})$相交。因此， f 在所有 $G_0^{\theta_0}$-正则半单元素上恒等于零；进而，由于后者是一个扎里斯基稠密开集（这可由命题 4.1.5.3得出）， f恒等于零。由此便得到关于$S_{0,dp'}$ 和 θ_0的结论。

现在考虑一般情形。设 F 是 F的代数闭包。记带有指标 F的从 F到 F的基变换，存在 φ: $G_{\bar{F}} \to G_{0,\bar{F}}$在 F上的一个同构，以及伽罗瓦群 $\Gamma = \mathrm{Gal}(F/F)$ 到伴随群 $G_{0,\mathrm{ad}}(F)$中的一个 1-余循环 $(u_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$，使得对于任意 $\sigma \in \Gamma$, $\varphi(\theta) = \theta_0$ 和 $\varphi(\theta_{p'}) = \theta_0$，都有 $\varphi \circ \sigma = \mathrm{Int}(u_\sigma) \circ \sigma \circ \varphi$，$_{dp'}$。注意到 u_σ 属于 $G_0^{\theta_0}(\bar{F})$ 和 $G_{,0}^{\theta_0}{}_{dp'}(\bar{F})$ 的像在伴随群 $G_{0,\mathrm{ad}}(F)$中的交集。另一方面， φ诱导出一个同构 $S_{p',\bar{F}} \to S_{0,dp',\bar{F}}$。由此可得，$\varphi$ 诱导出一个同构 $\bar{F}[S_{0,dp',\bar{F}}]^{G_0^{\theta_0}}$，$_{\bar{F}} \to \bar{F}[S_{p',\bar{F}}]^{G_{\bar{F}}^{\theta}}$，其限制为一个 F-同构$F[S_{0,dp'}]^{G_0^{\theta_0}} \to F[S_{p'}]^{G^{\theta}}$。最后注意到 $c^{\flat} = c_0^{\flat} \circ \varphi$即可得证。□

4.1.7. 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。

引理 4.1.7.1。 — 设 $x \in S_{p'}$ 和 $x = x_s x_u$ 是 x 在 G中的 *Jordan* 分解。那么 $x_s \in S_{p'}$ 和 $c_{p'}^{\flat}(x) = c_{p'}^{\flat}(x_s)$。

证明。 — 第一个断言由引理 4.1.4.7 的断言 2 得出，第二个则由推论 4.1.4.8 和定义 (4.1.5.1) 得出。□

令 $\mathfrak{c}_{p'} = \mathrm{Spec}(F[S_{p'}]^{G^{\theta}})$（根据命题 4.1.6.1，它同构于 $\mathbf{A}^{d\nu}$）。对于任意 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$，设 $S_{p',\mathfrak{o}}$ 为 $c_{p'}^{\flat}$在 $\mathfrak{o}$上方的纤维。

引理 4.1.7.2. — 设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$、 $m \in M_P$ 和 $n \in N_P$。对于任意 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}$, $mn \in S_{p',\mathfrak{o}}$ 当且仅当 $m \in S_{p',\mathfrak{o}}$ 和 $mn \in S$。

证明。 — 设 $m \in M_P$ 和 $n \in N_P$ 满足 $mn \in S$。由于 $\theta \in M_0$，由 θ 共轭将 M_P 正规化，并将 N_P 正规化。因此 $m \in S$；此外，由于 (4.1.2.1)， $mn \in S_{p'}$ 当且仅当 $m \in S_{p'}$。在这种情形下，由于 $\mathrm{Prd}_{mn} = \mathrm{Prd}_m$，推论 4.1.3.4 表明 $c^\flat(mn) = c^\flat(m)$。因此该断言显然成立。□

4.1.8. 对 G的任意半标准子群 P，设 P 为与 P相反的半标准抛物子群，也就是说有 $P \cap P = M_P$。对 G的所有半标准抛物子群 $P \subset Q$，我们定义

$$N_P^Q = N_P \cap M_Q, \overline{N}_P^Q = N_{\overline{P}} \cap M_Q \text{ et } N_P^{Q,\theta} = N_P^Q \cap G^\theta.$$

引理 4.1.8.1. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。对任意 $P \in \boldsymbol{F}(M_0)$，我们有

$$(M_P \cap S_{p'})(F) = \bigsqcup_{w \in {}_PW_{\theta_{p'}}} \rho_{p'}(M_P(F)w).$$

ℓ**证明**。 — 假设$M_P \simeq GL_{n_1,D} \times \ldots \times GL_{n_\ell,D}$，其中 $\sum n_i = p + q$。$(M_P \cap S_{p'}\theta)(F)$中的每$_{i=1}$个元素都是特征值为 ± 1 的半单元素，因而在 $M_P(F)$下共轭于一个对角矩阵，其对角系数是 ± 1，重数分别为 p'和 q'。此外，$(M_P \cap S_{p'}\theta)(F)$中的一个 $M_P(F)$-共轭类由 ± 1在每个块$GL_{n_i,D}$中的重数唯一确定。由于魏尔群 W 通过对角系数的置换作用于 $\theta_{p'}$，根据应用于$\theta_{p'}$的命题 2.2.4.1 和推论 2.2.4.2，可见$\{w\theta_{p'}w^{-1} | w \in {}_PW_{\theta_{p'}}\}$恰好是$(M_P \cap S_{p'}\theta)(F)$中 $M_P(F)$-共轭类的一个代表元系。至此得证。□

引理 4.1.8.2. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。设 $P \subset Q$ 是G的半标准抛物子群。我们有

$$(P \cap M_Q \cap S_{p'})(F) = \mathrm{Int}_\theta(N_P^Q(F))((M_P \cap S_{p'})(F)).$$

证明. — 设 $m \in M_P(F)$ 和 $n \in N_P^Q(F)$ 满足 $mn \in (P \cap M_Q \cap S_{p'}\theta)(F)$。由 $S_{p'}$ 的定义可知，$m \in (M_P \cap S_{p'}\theta)(F)$。由于 $(mn)^2 = m^2 = 1$，元素 mn 和 m 按通常意义是 $M_Q(F)$ 中的半单元素。根据 Art78 的引理 2.1] ，将其应用于 M_Q 的抛物子群 $P \cap M_Q$ 和单元素集 $\{n\}$ 的特征函数，可得 mn 与一个元素 mn' 在 $N_P^Q(F)$ 下共轭，其中 $n' \in N_P^Q(F)$，且满足 $mn' = n'm$。由于 mn' 和 m 是 $M_Q(F)$ 中的半单元素，Jordan 分解的唯一性推出 $n' = 1$，也就是说，mn 与 $m \in (M_P \cap S_{p'}\theta)(F)$ 在 $N_P^Q(F)$ 下共轭。结论得证。□

推论 4.1.8.3. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$。设 $P \subset Q$ 是 G的半标准抛物子群。则有

$$(P \cap M_Q \cap S_{p'})(F) = \bigsqcup_{w \in {}_PW_{\theta_{p'}}} \rho_{p'}((P \cap M_Q)(F)w).$$

其中 $\bigsqcup$ 表示并集，但需明确指出，该并集中任意两个集合的交集均为空。

证明。 — 这是由引理 4.1.8.1 和 4.1.8.2 得出的。 □

4.2 几何分布

4.2.1. 本节的记号与第 3 节相同。设 $\theta,\theta'\in M_0(F)$ 为阶至多为 2 的元素。

4.2.2. 群 $G^{\theta'}\times G^{\theta}$ 通过 $(h_1,h_2)\cdot g=h_1gh_2^{-1}$ 在 G 上左作用。设 $\mathfrak{c}=\mathrm{Spec}(F[G]^{G^{\theta'}\times G^{\theta}})$，其中 $F[G]^{G^{\theta'}\times G^{\theta}}$ 是 G 上在 $G^{\theta'}\times G^{\theta}$ 作用下不变的正则函数 F-代数。设 $c:G\to\mathfrak{c}$ 为典范态射。态射

$$\rho_\theta: g\mapsto g\theta g^{-1}\theta', \tag{4.2.2.1}$$

将其在 G 中的像记为 S_θ，它将代数 $F[G]^{G^{\theta'}\times G^{\theta}}$ 与由 $G^{\theta'}$ 共轭作用不变的 S_θ 上的函数代数 $F[S_\theta]^{G^{\theta'}}$ 等同。注意，S_θ 是簇 $S=\{g\in G\mid (g\theta')^2=1\}$ 的一个连通分支，参见第4.1小节。根据命题 4.1.6.1，我们可以并且将 $\mathfrak{c}$ 等同于仿射空间 $\mathbf{A}^{d\nu}$，其中

$$\nu=\min\{\dim_D(V^{\pm\theta}),\dim_D(V^{\pm\theta'})\}.$$

对任意 $g\in G$，因此有 $c(g)=c^\flat(\rho_\theta(g))$，其中 $c^\flat: S_\theta\to\mathbf{A}^{d\nu}$ 的定义同 §4.1.6。我们有与开集 $\mathbf{A}^{d\nu}_{\mathrm{rss}}\subset\mathbf{A}^{d\nu}$ 对应的开集 $\mathfrak{c}_{\mathrm{rss}}$。

对任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}$，令 $G_{\mathfrak{o}}$ 为 c 在 $\mathfrak{o}$ 上方的纤维。

命题 4.2.2.1. — 设 $P=MN$ 是一个带有 *Levi* 分解的半标准抛物子群，并且 w_1、$w_2\in W$。对任意 $n\in N$ 和 $m\in M$，有

$$c(w_1nmw_2)=c(w_1mw_2).$$

特别地，对任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}$，有

$$w_1Pw_2\cap G_{\mathfrak{o}}=w_1Nw_1^{-1}(w_1Mw_2\cap G_{\mathfrak{o}})=(w_1Mw_2\cap G_{\mathfrak{o}})w_2^{-1}Nw_2.$$

证明。— 第二个断言由第一个断言立即推出。若引入 $P'=w_1Pw_1^{-1}$，则可见 P' 是 Levi 因子为 $M'=w_1Mw_1^{-1}$ 的半标准子群。将 P 替换为 P' 并将 w_2 替换为 w_1w_2 后，不妨设 $w_1=1$，以下均作此假设。因此只需证明，对于 $n\in N$、$m\in M$ 和 $w\in W$，有 $c(nmw)=c(mw)$。设 $\delta=\rho_\theta(mw)$ 且 $\gamma=\rho_\theta(nmw)$。于是有 $c(nmw)=c^\flat(\gamma)$ 以及 $c(mw)=c^\flat(\delta)$。注意到有 $\delta\in M$ 且 $\gamma=n\delta\theta'(n)^{-1}\in\delta N$。然而，引理 4.1.7.2 表明，对任意满足 $\delta n\in S_\theta$ 的 $n\in N$，有 $c^\flat(\delta n)=c^\flat(\delta)$。结论得证。□

4.2.3. 如上所述，我们将 $\mathfrak{c}$ 识别为维数为 $d\nu$ 的仿射空间。设 V 是 $\mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 中 0 的一个邻域，满足 $\mathrm{V}\cap\mathfrak{c}(F)=\{0\}$。设 ω 是 $\mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 中 0 的一个紧邻域，满足 $\omega-\omega\subset\mathrm{V}$。设 ζ 是 $\mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 上的一个光滑函数，其支集包含于 ω，取值于实区间 $[0,1]$，并且在 0 的某个邻域上恒为 1。对于任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$ 和 $x\in G(\mathbb{A})$，定义 $\zeta_{\mathfrak{o}}(x)=\zeta(c(x)-\mathfrak{o})$。对于互不相同的元素 $\mathfrak{o}$、$\mathfrak{o}'\in\mathfrak{c}(F)$，函数 $\zeta_{\mathfrak{o}}$ 和 $\zeta_{\mathfrak{o}'}$ 的支集互不相交。特别地，属于 $\zeta_{\mathfrak{o}}$ 的支集的元素 $\delta\in G(F)$ 必然满足 $c(\delta)=\mathfrak{o}$。于是，对任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，定义 $f_{\mathfrak{o}}=\zeta_{\mathfrak{o}}f$。

引理 4.2.3.1.—

1. 对任意 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$ 以及任意 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，函数 $f_{\mathfrak{o}}$ 属于 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。*2.* 对于 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的任意连续半范数 $\|\cdot\|$，映射 $f\mapsto\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)}\|f_{\mathfrak{o}}\|$ 是一个连续半范数。

证明。— 断言 1 是显然的。只需对配备了由半范数 $\|\cdot\|_{r,Y}$（定义于 (2.1.16.1)）所诱导的拓扑的子空间 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A})^1)^J$ 证明断言 2。根据巴拿赫-斯坦豪斯定理，只需证明 $\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)}\|f_{\mathfrak{o}}\|$ 的收敛性，对于

一切 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A})\ C)^J$ 以及每一个连续半范数。这由以下和在 $t > 0$充分大时的收敛性得出:

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \sup_{x\in G(\mathbb{A}),c(x)\in\mathfrak{o}+\omega} \|x\|^{-t}$$

其中 $\omega \subset \mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 是前文引入的紧集。通过将 $\mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 识别为 $\mathbb{A}^{d\nu}$，元素 $y \in \mathfrak{c}(\mathbb{A})$ 可写作 $y = (y_1, \dots, y_{d\nu}) \in \mathbb{A}^{d\nu}$；于是令

$$\|y\| = \prod_v \sup(1, |y_{1,v}|_v, \dots, |y_{d\nu,v}|_v).$$

存在 $N, C > 0$，使得对于任意 $x \in G(\mathbb{A})$，都有 $\|c(x)\| \leqslant C\|x\|^N$，于是上述收敛性可由以下收敛性推出

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \sup_{y\in\omega} \|y + \mathfrak{o}\|^{-t/N} < \infty$$

对于所有充分大的 $t > 0$。 □

4.2.4. 设 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 且 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$。对于所有 $w_1, w_2 \in W$ 以及所有 $x, y \in G(\mathbb{A})$，令

$$K_{P,\mathfrak{o},f}^{w_1,w_2}(x,y) = \sum_{\gamma\in(M_P\cap w_1 G_{\mathfrak{o}} w_2^{-1})(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} f((w_1 x)^{-1}\gamma n w_2 y)\, dn. \tag{4.2.4.1}$$

由此得到定义在 $P_{w_1}^{\theta'}(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times P_{w_2}^{\theta}(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的一个函数。

设 $K^{w_1,P}{}^{w_2}{}_{,f}(x,y) = K_{P,f}(w_1 x, w_2 y)$，其中 $K_{P,f}$ 已在 § 3.1.3 中引入。注意到

$$K_{P,f}^{w_1,w_2}(x,y) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} K_{P,\mathfrak{o},f}^{w_1,w_2}(x,y). \tag{4.2.4.2}$$

引理 4.2.4.1。—设 $P \in F(M_0)$。对于任意 w_1、$w_2 \in W$、$\mathfrak{o}$、$\mathfrak{o}' \in \mathfrak{c}(F)$、$x \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 和 $y \in G^{\theta}(\mathbb{A})$，有

$$K_{P,\mathfrak{o}',f_{\mathfrak{o}}}^{w_1,w_2}(x,y) = \begin{cases} K_{P,\mathfrak{o},f}^{w_1,w_2}(x,y) \ si\ \mathfrak{o}' = \mathfrak{o}; \\ 0 \ sinon. \end{cases} \tag{4.2.4.3}$$

特别地，有

$$K_{P,f_{\mathfrak{o}}}^{w_1,w_2}(x,y) = K_{P,\mathfrak{o},f}^{w_1,w_2}(x,y).$$

证明。— 设 w_1、w_2、$\mathfrak{o}$、$\mathfrak{o}'$、x、y 如命题中所述。若（4.2.4.3）的左端非零，则存在 $\gamma \in (M_P \cap w_1 G_{\mathfrak{o}'} w_2^{-1})(F)$ 和 $n \in N_P(\mathbb{A})$，使得

$$\zeta(c(x^{-1}w_1^{-1}\gamma n w_2 y) - \mathfrak{o}) \neq 0.$$

由命题 4.2.2.1 可知

$$c(x^{-1}w_1^{-1}\gamma n w_2 y) = c(w_1^{-1}\gamma w_2) = \mathfrak{o}'.$$

或者 $\zeta(\mathfrak{o}' - \mathfrak{o}) = 0$除非 $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'$，在这种情形下有 $\zeta(\mathfrak{o}' - \mathfrak{o}) = 1$。由此可得 (4.2.4.3) 中的消去。假设 $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}$。在这种情形下，对于所有 $\gamma \in (M_P \cap w_1 G_{\mathfrak{o}} w_2^{-1})(F)$ 和 $n \in N_P(\mathbb{A})$，有

$$\zeta(c(x^{-1}w_1^{-1}\gamma n w_2 y) - \mathfrak{o}) = \zeta(\mathfrak{o} - \mathfrak{o}) = 1.$$

这样就得到了第一个等式。最后一个等式由 (4.2.4.2) 得出。 □

设 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$为一个截断参数。对于所有 $x \in G^{\theta'}(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 和 $y \in G^{\theta}(F)\backslash G(\mathbb{A})$，定义

$$K_{f}^{T}(x,y) = K_{f}^{T,\theta',\theta}(x,y) = \sum_{P\in\mathcal{F}(P_0)} \varepsilon_P^G \sum_{w_1\in {}_PW_{\theta'}} \sum_{\delta_1\in P_{w_1}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} \hat{\tau}_P(H_P(w_1\delta_1 x)-T)\times \left[\sum_{w_2\in {}_PW_{\theta}} \sum_{\delta_2\in P_{w_2}^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)} K_{P,f}^{w_1,w_2}(\delta_1 x,\delta_2 y)\right]. \tag{4.2.4.4}$$

注记 4.2.4.2. — 上述关于 δ_1 的和是有限的，而关于 δ_2 的和是绝对收敛的，参见注记 3.2.2.1。

设 $K_f^T = K^{T,\theta',\theta}_{f}$为 §3.2.2 中引入的修正核。根据等式 (4.2.4.2)，对于所有 $x, y \in G(\mathbb{A})$，有

$$K_f^T(x,y) = \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} K_{\mathfrak{o},f}^T(x,y) \tag{4.2.4.5}$$

其绝对收敛性再次由引理 3.1.4.1 得出。于是由引理 4.2.4.1 可知，对于所有 $x \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 和 $y \in G^{\theta}(\mathbb{A})$，有

$$K_{f_{\mathfrak{o}}}^T(x,y) = K_{\mathfrak{o},f}^T(x,y). \tag{4.2.4.6}$$

4.2.5. 定理 4.2.5.1. — 对于任意的 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$和 $N_1, N_2 > 0$，存在一个定义在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对于任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^{\theta}]} |K_{\mathfrak{o},f}^T(x,y)| \|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1} \|y\|_{G^{\theta}}^{N_2}\, dxdy \leqslant \|f\|.$$

证明。 — 根据定理 3.3.2.1，存在一个定义在$\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对于任意 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$\int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^{\theta}]} |K_{f}^T(x,y)| \|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1} \|y\|_{G^{\theta}}^{N_2}\, dxdy \leqslant \|f\|.$$

利用 (4.2.4.6)，可推得

$$\sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \int_{[G^{\theta'}]^G\times[G^{\theta}]} |K_{\mathfrak{o},f}^T(x,y)| \|x\|_{G^{\theta'}}^{N_1} \|y\|_{G^{\theta}}^{N_2}\, dxdy \leqslant \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \|f_{\mathfrak{o}}\|.$$

根据引理 4.2.3.1，$f \mapsto \sum_{\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)} \|f_{\mathfrak{o}}\|$ 仍是一个连续半范数。证毕。 □

4.2.6. 有时，使用与某些半标准抛物子群相关联的核会更方便。为此，我们注意到，对于任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$、所有 $x, y \in G(\mathbb{A})$ 以及所有$w_1, w_2 \in W$，都有

$$K_{P,\mathfrak{o},f}^{w_1,w_2}(x,y) = K_{P_{w_1},\mathfrak{o},f}^{1,w_1^{-1}w_2}(x,y). \tag{4.2.6.1}$$

于是我们将使用以下关于 $K_{\mathfrak{o},f}^T(x,y)$ 的表达式。

命题 4.2.6.1。——设 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$。对于任意 $x, y \in G(\mathbb{A})$，都有

$$K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y) = \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0^{\theta'})} \varepsilon_P^G \sum_{\delta_1 \in P^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta_1 x) - T_P) \times \left[\sum_{w \in {}_PW_\theta} \sum_{\delta_2 \in P_w^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} K^{1,w}_{P,\mathfrak{o},f}(\delta_1 x, \delta_2 y) \right]. \tag{4.2.6.2}$$

证明。— 根据等式 (2.3.6.1) 和 (4.2.6.1)，有

$$K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y) = \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} \varepsilon_P^G \sum_{w_1 \in {}_PW_{\theta'}} \sum_{\delta_1 \in P_{w_1}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} \hat{\tau}_{P_{w_1}}(H_{P_{w_1}}(\delta_1 x) - T_{P_{w_1}}) \times \left[\sum_{w_2 \in {}_PW_\theta} \sum_{\delta_2 \in P_{w_2}^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} K^{1,w_1^{-1}w_2}_{P_{w_1},\mathfrak{o},f}(\delta_1 x, \delta_2 y) \right].$$

根据引理 2.2.7.3，可以进行变量替换 $w_2 \mapsto w = w_1^{-1}w_2$；得到 $K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)$ 等于

$$\sum_{P \in \mathcal{F}(P_0)} \varepsilon_P^G \sum_{w_1 \in {}_PW_{\theta'}} \sum_{\delta_1 \in P_{w_1}^{\theta'}(F)\backslash G^{\theta'}(F)} \hat{\tau}_{P_{w_1}}(H_{P_{w_1}}(\delta_1 x) - T_{P_{w_1}}) \times \left[\sum_{w \in {}_{P_{w_1}}W_\theta} \sum_{\delta_2 \in P_{w_1 w}^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} K^{1,w}_{P_{w_1},\mathfrak{o},f}(\delta_1 x, \delta_2 y) \right].$$

由推论 2.2.4.2 得出结论。 □

4.2.7. 几何分布。— 设 $\eta : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ 是 §3.4.1 中的一个酉特征。设 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$和 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$。在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上引入分布 $J^T_{\mathfrak{o}}(\eta)$，其由下述积分给出；该积分的绝对收敛性以及关于 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 的连续性由定理 4.2.5.1 保证：

$$J^T_{\mathfrak{o}}(\eta, f) = \int_{[G^{\theta'}]^G \times [G^\theta]} K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)\, \eta(x) dx dy. \tag{4.2.7.1}$$

等式 (4.2.4.6) 推出

$$J^T_{\mathfrak{o}}(\eta, f) = J^T(\eta, f_{\mathfrak{o}}) \tag{4.2.7.2}$$

其中 $J^T(\eta)$ 是 § 3.5.6 中引入的分布。由 $J^T(\eta)$ 的性质可知，参见 § 3.5.6，映射 $T \mapsto J^T_{\mathfrak{o}}(\eta, f)$ 在某个锥内与关于 T 的多项式 - 指数函数一致。于是将此函数关于 T 的常数项定义为 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, f)$。于是

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, f) = J(\eta, f_{\mathfrak{o}}),$$

其中 $J(\eta)$ 是定义为 $J^T(\eta)$ 的常数项的分布，参见 § 3.5.6。由于 $J(\eta)$ 连续，根据引理 4.2.3.1，分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta)$ 和 $\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)} J_{\mathfrak{o}}(\eta)$ 在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上连续。

4.2.8. $J^T_{\mathfrak{o}}$**的协变性（**η，f**）和** $J_{\mathfrak{o}}$（η，f）。— 设 $Q \subset G$ 为标准抛物子群，$w_1' \in {}_QW_{\theta'}$ 和 $w_2' \in {}_QW_\theta$。令 $\theta_1 = w_1'\theta' {w_1'}^{-1}$ 和 $\theta_2 = w_2'\theta {w_2'}^{-1}$。与 §4.2.2 中一样，引入典范态射 c_{M_Q}：$M_Q \to \mathfrak{c}_{M_Q} = \mathrm{Spec}(F[M_Q]^{M_Q^{\theta_1} \times M_Q^{\theta_2}})$，其中

$F[M_Q]^{M_Q^{\theta_1}\times M_Q^{\theta_2}}$是 F-代数，由 M_Q 上分别在右侧和左侧对 $M_Q^{\theta_1}$ 和 $M_Q^{\theta_2}$ 不变的正则函数构成。我们有如下交换图：

(4.2.8.1)
$$\begin{array}{ccc} M_Q & \xrightarrow{i_{Q,w_1',w_2'}} & G \\ \downarrow{\scriptstyle c_{M_Q}} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathfrak{c}_{M_Q} & \xrightarrow{j_{Q,w_1',w_2'}} & \mathfrak{c} \end{array}$$

其中 $i_{Q,\ w_1',\ w_2'}\colon M_Q \to G$ 由 $m \mapsto w_1'^{-1} m w_2'$ 给出，而 $j_{Q,\ w_1',\ w_2'}\colon \mathfrak{c}_{M_Q} \to \mathfrak{c}$ 是由范畴商的泛性质诱导的态射。

引理 4.2.8.1。— 态射 $j_{Q,\ w_1',\ w_2'}$ 是有限的。特别地，它的纤维是有限集。

证明。— 由 $g \mapsto w_1'^{-1} g w_2'$ 给出的态射 $G \to G$ 在对偶意义下将$F[G]^{G^{\theta'}\times G^{\theta}}$与 $F[G]^{G^{\theta_1}\times G^{\theta_2}}$ 等同。因此，只需证明限制态射 $F[G]^{G^{\theta_1}\times G^{\theta_2}} \to F[M_Q]^{M_Q^{\theta_1}\times M_Q^{\theta_2}}$ 是有限的。设 $S_1 = \{g\theta_2 g^{-1}\theta_1 \mid g \in G\}$和 $S_1^Q = \{m\theta_2 m^{-1}\theta_1 \mid m \in G\}$分别配备由 G^{θ_1} 和 $M_Q^{\theta_1}$给出的共轭作用。前述态射可识别为 $F[S_1]^{G^{\theta_1}} \to F[S_1^Q]^{M_Q^{\theta_1}}$，其中照例，上标表示不变正则函数子代数。Levi 子群是 V中一个分解 $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$的固定子群，该分解将其分成若干子-$D$-模，参见第4.1小节。对于 $1 \leqslant j \leqslant r$和$i = 1,\ 2$，记 $V_j^{\pm\theta_i}$为 θ_i 在 V_j 上的限制对应于特征值±1的特征子空间。令 $p_j = \dim_D(V_j^{\theta_1})$（省略上标中的 $+$），并令 $q_j = \dim(V_j^{\theta_1})$。记 p_j'和q_j'为相对于 θ_2 的对应维数。设 $\nu_j = \min\{p_j, q_j, p_j', q_j'\}$。设 $p = \sum_{j=1}^r p_j$。同样，定义 $q = \sum_{j=1}^r q_j$、 p'和 q'。引入自然数 $\nu = \min\{p, q, p', q'\}$,$N_+ = \sum_{j=1}^r \max(p_j' - q_j, 0) - \max(p' - q, 0)$ 和 $N_- = \sum_{j=1}^r \max(p_j - p_j', 0) - \max(p - p', 0)$。根据命题 4.1.6.1，态射 $\mathrm{Spec}(F[S_1^Q]^{M_Q^{\theta_1}}) \to \mathrm{Spec}(F[S_1]^{G^{\theta_1}})$可解释为由下式给出的态射

$$(P_1, \ldots, P_r) \mapsto (t-1)^{dN_+}(t+1)^{dN_-}\prod_{j=1}^r P_j$$

从 $j = 1, \ldots, r$ 个次数为 $d\nu_j$的首一多项式仿射空间的乘积到次数为 $d\nu$的首一多项式仿射空间。容易看出，这个态射是有限的。

□

现在沿用第3.5.4节的记号。设 $f' \in \mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$和 $\mathfrak{o}' \in \mathfrak{c}_{M_Q}(F)$。我们有修正核 $K^T_{\mathfrak{o}',\ f',\ \theta_1\ \theta_2,}$和 $K^T_{\mathfrak{o}',\ f',\ \theta_1\ \theta_2,,}$，其定义分别见§3.2.2和(4.2.4.4)，其中将 G替换为 M_Q 。设

(4.2.8.2)
$$J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta, f') = \sum_{\chi' \in \mathfrak{X}(M_Q)} J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\chi'}(\eta, f')$$

其中右端各项在 (3.4.2.2) 中定义。正如 (3.4.2.2) 后面的几行所述，定理 3.3.2.1 的断言 2 适用于我们的情形，并保证右端收敛且连续。这些谱项的几何对应物为

(4.2.8.3)
$$\begin{aligned} &J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}'}(\eta, f') \\ &= \int_{[M_Q^{\theta_1}]^Q}\int_{[M_Q^{\theta_2}]} \exp(-\langle 2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}, H_{Q^{\theta_1}}(x)\rangle + \langle 2\rho_Q^G - 2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}}, H_{Q^{\theta_2}}(y)\rangle) K^{T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}',f'}(x,y)\,\eta(x)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

同样，定理 4.2.5.1 在此保证积分 (4.2.8.3) 绝对收敛，并且由此定义的分布 $J^{Q,}_{\mathfrak{o}'}{}^{T\,\theta_1\,\theta_2,\,,}(\eta)$ 连续。

设 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$。有

$$M_Q(F)\cap w_1'G_{\mathfrak{o}}(F)w_2'^{-1}=\bigsqcup_{\mathfrak{o}'}M_{Q,\mathfrak{o}'}(F) \tag{4.2.8.4}$$

其中 $M_{Q,\,\mathfrak{o}'}$ 是 $\mathfrak{c}_{M_Q}$ 在 $\mathfrak{o}'$ 上方的纤维，而并集取遍满足 $j_{Q,\,w_1',\,w_2'}(\mathfrak{o}')=\mathfrak{o}$ 的 $\mathfrak{o}'\in\mathfrak{c}_{M_Q}(F)$ 的集合（有限，参见引理 4.2.8.1）。于是，设

$$J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}}(\eta)=\sum_{\mathfrak{o}'}J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}'}(\eta) \tag{4.2.8.5}$$

其中右侧的和取遍满足 $j_{Q,\,w_1',\,w_2'}(\mathfrak{o}')=\mathfrak{o}$ 的同一有限集合中的 $\mathfrak{o}'\in\mathfrak{c}_{M_Q}(F)$。如 §4.2.7 中一样，设 $J^{Q,}_{\mathfrak{o}}{}^{\theta_1\,\theta_2,}(\eta)$ 为 $J^{Q,}_{\mathfrak{o}}{}^{T\,\theta_1\,\theta_2,,}(\eta)$ 的常数项。下述命题研究 $G^{\theta}(\mathbb{A})$ 和 $G^{\theta'}(\mathbb{A})$ 对这些分布的作用；记号 $f^{g,}_{\mathfrak{o}}{}^{g}f$ 参见 § 3.5.4。

命题 4.2.8.2. — 设 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}(F)$ 且 $f\in\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$.

1. 对任意 $g\in G^{\theta}(\mathbb{A})$，有

$$J^T_{\mathfrak{o}}(\eta,f^g)=J^T_{\mathfrak{o}}(\eta,f).$$

2. 对任意 $g\in G^{\theta'}(\mathbb{A})$，有

$$J^T_{\mathfrak{o}}(\eta,{}^gf)=$$
$$\eta(g)\sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)}\sum_{w_1'\in{}_QW_{\theta'}}\sum_{w_2'\in{}_QW_{\theta}}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},T_Q\rangle)J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}}(\eta,f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}).$$

où $f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}$ *et* $J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}}(\eta)$ *sont définis respectivement en* (3.5.4.1) *et* (4.2.8.5).

证明。 — 1. 根据定义 (4.2.7.1)，对 $G^{\theta}(\mathbb{A})$ 作右平移所得的不变量显然成立。

2. 对任意 $g\in G^{\theta'}(\mathbb{A})$，将命题 3.5.4.1 的断言 2 中的等式对尖点数据求和，可得

$$J^T(\eta,{}^gf)=$$
$$\eta(g)\sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)}\sum_{w_1'\in{}_QW_{\theta'}}\sum_{w_2'\in{}_QW_{\theta}}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},T_Q\rangle)J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta,f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}).$$

由 $f_{\mathfrak{o}}$ 的构造本身，参见 §4.2.3，有 $({}^gf)_{\mathfrak{o}}={}^g(f_{\mathfrak{o}})$。结合 (4.2.7.2)，可推出

$$J^T_{\mathfrak{o}}(\eta,{}^gf)=J^T(\eta,({}^gf)_{\mathfrak{o}})=J^T(\eta,{}^g(f_{\mathfrak{o}}))=$$
$$\eta(g)\sum_{Q\in\mathcal{F}^G(P_0)}\sum_{w_1'\in{}_QW_{\theta'}}\sum_{w_2'\in{}_QW_{\theta}}\exp(\langle 2\rho_Q^G-2\rho_{Q^{\theta_1}}^{G^{\theta_1}}-2\rho_{Q^{\theta_2}}^{G^{\theta_2}},T_Q\rangle)J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta,(f_{\mathfrak{o}})^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}).$$

因此只需证明

$$J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}(\eta,(f_{\mathfrak{o}})^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g})=J^{Q,T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}}(\eta,f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}).$$

根据 (4.2.8.2)、(4.2.8.3) 和 (4.2.8.5)，只需证明

$$K^{T,\theta_1,\theta_2}_{(f_{\mathfrak{o}})^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}}=\sum_{\mathfrak{o}'\in j^{-1}_{Q,w_1',w_2'}(\mathfrak{o})}K^{T,\theta_1,\theta_2}_{\mathfrak{o}',f^{w_1',w_2'}_{Q,\eta,g}}.$$

设 $f'\in\mathcal{S}(M_Q(\mathbb{A}))$、 $x\in M_Q^{\theta_1}(\mathbb{A})$ 和 $y\in M_Q^{\theta_2}(\mathbb{A})$。各定义具体写为:

$$K_{f'}^{T,\theta_1,\theta_2}(x,y)=\sum_{P\in\mathcal{F}^{M_Q}(P_0\cap M_Q)}\varepsilon_P^{M_Q}\sum_{w_3\in {}_PW_{\theta_1}^{M_Q}}\sum_{\delta_3\in P_{w_3}^{\theta_1}(F)\backslash M_Q^{\theta_1}(F)}\hat{\tau}_P^{M_Q}(H_P(w_3\delta_3x)-T)\times$$
$$\left[\sum_{w_4\in {}_PW_{\theta_2}^{M_Q}}\sum_{\delta_4\in P_{w_4}^{\theta_2}(F)\backslash M_Q^{\theta_2}(F)}K_{P,f'}(w_3\delta_3x,w_4\delta_4y)\right]$$

以及

$$K_{\mathfrak{o}',f'}^{T,\theta_1,\theta_2}(x,y)=\sum_{P\in\mathcal{F}^{M_Q}(P_0\cap M_Q)}\varepsilon_P^{M_Q}\sum_{w_3\in {}_PW_{\theta_1}^{M_Q}}\sum_{\delta_3\in P_{w_3}^{\theta_1}(F)\backslash M_Q^{\theta_1}(F)}\hat{\tau}_P^{M_Q}(H_P(w_3\delta_3x)-T)\times$$
$$\left[\sum_{w_4\in {}_PW_{\theta_2}^{M_Q}}\sum_{\delta_4\in P_{w_4}^{\theta_2}(F)\backslash M_Q^{\theta_2}(F)}K_{P,\mathfrak{o}',f'}^{w_3,w_4}(\delta_3x,\delta_4y)\right].$$

上面的表达式 $K^{w_3,\ P\mathfrak{o}'^{\ w_4},\ ,\ f'}$ 由（4.2.4.1）的以下变体给出

$$K_{P,\mathfrak{o}',f'}^{w_3,w_4}(x,y)=\sum_{\gamma\in(M_P\cap w_3M_{Q,\mathfrak{o}'}w_4^{-1})(F)}\int_{N_P(\mathbb{A})}f'((w_3x)^{-1}\gamma nw_4y)\,dn.$$

只需证明，对于上面求和中的所有 $x\in M_Q^{\theta_1}(\mathbb{A})$ 和 $y\in M_Q^{\theta_2}(\mathbb{A})$，以及所有 $(P,\ w_3,\ w_4)$，有

$$K_{P,(f_{\mathfrak{o}})_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}}(w_3x,w_4y)=\sum_{\mathfrak{o}'\in j_{Q,w_1',w_2'}^{-1}(\mathfrak{o})}K_{P,\mathfrak{o}',f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}}^{w_3,w_4}(x,y).\tag{4.2.8.6}$$

M但是，命题 4.2.2.1 和定义 (3.5.4.1) 推出，对于任意 $m\in M_Q(\mathbb{A}$ $)$

$$(f_{\mathfrak{o}})_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}(m)=\zeta_{\mathfrak{o}}(w_1'^{-1}mw_2')f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}(m).$$

设 $x\in M_Q^{\theta_1}(\mathbb{A})$ 和 $y\in M_Q^{\theta_2}(\mathbb{A})$。对于任意 $\gamma\in M_P(F)$ 和 $n\in N_P(\mathbb{A})$，再次利用命题 4.2.2.1，有

$$\zeta_{\mathfrak{o}}(w_1'^{-1}(w_3x)^{-1}\gamma n(w_4y)w_2')=\zeta_{\mathfrak{o}}((w_3w_1')^{-1}\gamma n(w_4w_2'))=\zeta_{\mathfrak{o}}((w_3w_1')^{-1}\gamma(w_4w_2')).$$

由此可得

$$\begin{aligned}K_{P,(f_{\mathfrak{o}})_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}}(w_3x,w_4y)&=\sum_{\gamma\in M_P(F)}\int_{N_P(\mathbb{A})}(f_{\mathfrak{o}})_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}((w_3x)^{-1}\gamma n(w_4y))\,dn\\&=\sum_{\gamma\in M_P(F)}\zeta_{\mathfrak{o}}((w_3w_1')^{-1}\gamma(w_4w_2'))\int_{N_P(\mathbb{A})}f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}((w_3x)^{-1}\gamma n(w_4y))\,dn\\&=\sum_{\gamma\in(M_P\cap(w_3w_1')G_{\mathfrak{o}}(w_4w_2')^{-1})(F)}\int_{N_P(\mathbb{A})}f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}((w_3x)^{-1}\gamma n(w_4y))\,dn.\end{aligned}$$

我们有 $(M_P\cap(w_3w_1')G_{\mathfrak{o}}(w_4w_2')^{-1})\subset M_Q\cap(w_3w_1')G_{\mathfrak{o}}(w_4w_2')^{-1})=w_3(M_Q\cap(w_1'G_{\mathfrak{o}}(w_2')^{-1}))w_4^{-1}$。于是可以使用分解 (4.2.8.4)，从而得到前面的表达式等于

$$\sum_{\mathfrak{o}'\in j_{Q,w_1',w_2'}^{-1}(\mathfrak{o})}\sum_{\gamma\in(M_P\cap w_3M_{Q,\mathfrak{o}'}w_4^{-1})(F)}\int_{N_P(\mathbb{A})}f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}((w_3x)^{-1}\gamma n(w_4y))\,dn$$
$$=\sum_{\mathfrak{o}'\in j_{Q,w_1',w_2'}^{-1}(\mathfrak{o})}K_{P,\mathfrak{o}',f_{Q,\eta,g}^{w_1',w_2'}}^{w_3,w_4}(x,y).$$

因此我们证明了 (4.2.8.6)，从而得出该命题。 □

作为命题 4.2.8.2 的推论，我们得到分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta)$的协变关系，这些关系此外还类比于在命题 3.5.5.1 中对谱分布 $J_{\chi}(\eta)$所得到的那些关系。

命题 4.2.8.3. —设 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$ 与 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$。

1. 对所有 $g \in G^{\theta}(\mathbb{A})$，有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, f^g) = J_{\mathfrak{o}}(\eta, f).$$

2. 对所有 $g \in G^{\theta'}(\mathbb{A})$，有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, {}^g f) = \eta(g) \sum_{Q, w_1', w_2'} J_{\mathfrak{o}}^{Q, \theta_1, \theta_2}(\eta, f_{Q,\eta,g}^{w_1', w_2'})$$

其中该和遍历由一个标准抛物子群Q 以及元素 $w_1' \in {}_{Q}W_{\theta'}$ 与 $w_2' \in {}_{Q}W_{\theta}$ 构成的三元组 (Q, w_1', w_2')，使得 $Q \in \boldsymbol{F}^{G,\flat}(P_0, \theta_1, \theta_2)$，并且其中 $f^{w_1', Q}{}_{\eta}{}_{g}{}^{,,}$定义于 $(3.5.4.1)$，而 $J^{Q}_{\mathfrak{o}}{}_{\theta_1}{}_{\theta_2,}$ (η) 是 $(4.2.8.5)$ 的常数项。

证明。 — 取命题 4.2.8.2 中的常数项。证明与命题 3.5.5.1 的证明相同。 □

4.2.9. 的情形 $GL_2(D)$。 — 回到 § 3.5.8 所述的情形，其中涉及 $G = GL_2(D)$ 和阶为 2 且不同于 $\pm I_2$ 的 $\theta = \theta'$ 。在这种情形下，命题 4.2.8.3 得以简化，从而得到命题 3.5.8.1 的几何对应物。

命题 4.2.9.1。— 在下列条件下，对任意 $g \in G^{\theta}(\mathbb{A})$、 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)$ 以及 $f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, {}^g f) = \eta(g) J_{\mathfrak{o}}(\eta, f).$$

4.3 Guo-Jacquet 迹公式

4.3.1. 回顾一下， η 是在 § 3.4.1 中引入的 $F^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times}$ 的特征。

定理 4.3.1.1. — 对任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 和任意 $\overline{f} \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，有

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} J_{\chi}^{T}(\eta, f) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)} J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta, f)$$

其中， $J_{\chi}^{T}(\eta, f)$和 $J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta, f)$分别是定义于$(3.4.1.1)$和 $(4.2.7.1)$的 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$上的连续线性泛函。

证明。 — 这是由 (3.2.2.2)、(4.2.4.5)、定理 3.3.2.1 和 4.2.5.1，以及分布的定义 (3.4.1.1) 和 (4.2.7.1) 得出的。□

4.3.2. 最终得到 Guo-Jacquet 迹公式。

定理 4.3.2.1.— 在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$上有分布等式

$$\sum_{\chi \in \mathfrak{X}(G)} J_{\chi}(\eta) = \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}(F)} J_{\mathfrak{o}}(\eta).$$

收敛性是绝对的，其含义是，对每个成员，项的绝对值之和在 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$ 上定义一个连续半范数。

证明。 — 只需在定理 4.3.1.1 中取关于 T 的常数项，因为根据命题 3.5.3.2 和 §4.2.7， $J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta, f)$ 和 $J_{\chi}^{T}(\eta, f)$ 都是关于 T 的多项式 - 指数函数。□

4.4 过渡到对称空间

4.4.1. 我们沿用第4.1小节的记号，并进一步假设 F 是一个数域。设 $0 \leqslant p,\ p' \leqslant N$。令 $\theta = \theta_p$。

注 4.4.1.1. — 我们也将使用第4.2小节的结果。不过，需注意记号上的轻微不一致：我们在此记为 θ 的元素，起着那里记为 θ' 的元素的作用。

4.4.2. 设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 与 $\gamma \in (M_P \cap S_{p'})(F)$。根据引理 4.1.8.2，映射

$$n \mapsto \mathrm{Int}_\theta(n)(\gamma)$$

诱导出从 $N_P/N_P^{\gamma\theta}$ 到 $(\gamma N_P) \cap S_{p'}$ 的同构。于是，通过对 $N_P(\mathbb{A})/N_P^{\gamma\theta}(\mathbb{A})$ 上的商测度进行测度传递，得到 $((\gamma N_P) \cap S_{p'})(\mathbb{A})$ 上的一个测度。

4.4.3. 设 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$，参见 §2.1.16。设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 与 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$。对一切 $x \in G(\mathbb{A})$，令

$$K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{\gamma \in (M_P \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \int_{((\gamma N_P) \cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}_\theta(x^{-1})(y))\, dy. \tag{4.4.3.1}$$

由此得到一个定义在 $N_P^\theta(\mathbb{A})M_P^\theta(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的函数。对于 $K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x)$，还可以得到以下表达式。**引理 4.4.3.1.** — 对于任意 $x \in G(\mathbb{A})$，有

$$K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{w \in {}_PW_{\theta_{p'}}} \sum_{\gamma} \int_{N_P(\mathbb{A})/N_P^{w\theta_{p'}}(\mathbb{A})} \varphi(\rho_{p'}(x^{-1}\gamma n w))\, dn \tag{4.4.3.2}$$

其中，和遍历满足 $\gamma M_P^{w\theta_{p'}}(F)w \subset G_{\mathfrak{o}}(F)$ 的陪集 $\gamma \in M_P(F)/M_P^{w\theta_{p'}}(F)$.

证明。 — 根据我们在 $((\gamma N_P) \cap S_{p'})(\mathbb{A})$ 上对测度的选取，有

$$K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{\gamma \in (M_P \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})/N_P^{\gamma\theta}(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}_\theta(x^{-1}n)(\gamma))\, dn. \tag{4.4.3.3}$$

根据引理 4.1.8.1，该表达式等于

$$\sum_{w \in {}_PW_{\theta_{p'}}} \sum_{\gamma \in M_P(F)/M_P^{w\theta_{p'}}(F), \gamma w \in G_{\mathfrak{o}}} \int_{N_P(\mathbb{A})/N_P^{\mathrm{Int}(\gamma w)(\theta_{p'})}(\mathbb{A})} \varphi(\rho_{p'}(x^{-1}n\gamma w))\, dn.$$

注意到 $\mathrm{Int}(\gamma^{-1})$ 的作用诱导出一个同构

$$N_P(\mathbb{A})/N_P^{\mathrm{Int}(\gamma w)(\theta_{p'})}(\mathbb{A}) \to N_P(\mathbb{A})/N_P^{w\theta_{p'}}(\mathbb{A})$$

该同构保持测度，因此得到所需表达式。 □

4.4.4. 自身t $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$。对于 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$一个截断参数和 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$，我们定义

$$K_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0^\theta)} \varepsilon_P^G \sum_{\delta \in P^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T_P) K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x) \tag{4.4.4.1}$$

对于 $x \in G(\mathbb{A})$。借助 [Art78，引理 5.1], 可见，最后一式中对 δ 的和是有限的。

定理 4.4.4.1. — 对于一切 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 与 $N_1 \overline{>} 0$，在 $\mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 上存在一个连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对一切 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 有

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)} \int_{[G^\theta]^G} |K^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x)| \|x\|^{N_1}_{G^\theta}\, dx \leqslant \|\varphi\|.$$

证明。 — 我们有一个由沿纤维积分给出的连续满射 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$。特别地，对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$，存在一个函数$f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A}))$，使得

$$\varphi(x) = \int_{G^{\theta_{p'}}(\mathbb{A})} f(g_x y)\, dy$$

对任意 $x \in S_{p'}(\mathbb{A})$，其中 $g_x \in G(\mathbb{A})$ 是满足 $\rho_{p'}(g_x) = x$ 的一个元素。只需证明我们有

$$\int_{[G^{\theta_{p'}}]} K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)\, dy = K^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x) \tag{4.4.4.2}$$

对所有 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^{+,\overline{\ }}$ $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$ 以及 $x \in G(\mathbb{A})$ 成立。事实上，定理 4.2.5.1 蕴含该映射

$$f \in \mathcal{S}(G(\mathbb{A})) \mapsto \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)} \int_{[G^\theta]^G} \Big| \int_{[G^{\theta_{p'}}]} K^T_{\mathfrak{o},f}(x,y)\, dy \Big| \|x\|^{N_1}_{G^\theta}\, dx$$

是连续的。于是该映射经由开映射 $S(G(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 分解为一个连续映射，而这正是我们所关心的映射：

$$\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A})) \mapsto \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)} \int_{[G^\theta]^G} |K^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x)| \|x\|^{N_1}_{G^\theta}\, dx.$$

于是我们可以借助定理 4.2.5.1 得出结论。我们来证明 (4.4.4.2)。为此，考虑一个点 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$。比较表达式 (4.2.6.2) 与 (4.4.4.1)，可见只需证明

$$\int_{[G^{\theta_{p'}}]} \sum_{w \in {}_P W_{\theta_{p'}}} \sum_{\delta_2 \in P_w^{\theta_{p'}}(F) \backslash G^{\theta_{p'}}(F)} K^{1,w}_{P,\mathfrak{o},f}(x, \delta_2 y)\, dy = K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) \tag{4.4.4.3}$$

对任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$ 以及任意 $x \in G(\mathbb{A})$。然而，利用分解

$$w P_w^{\theta_{p'}}(F) = M_P^{w\theta_{p'}}(F) N_P^{w\theta_{p'}}(F) w,$$

可见 (4.4.4.3) 左边等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{w \in {}_P W_{\theta_{p'}}} \int_{P_w^{\theta_{p'}}(F) \backslash G^{\theta_{p'}}(\mathbb{A})} K^{1,w}_{P,\mathfrak{o},f}(x,y)\, dy \\
&= \sum_{w \in {}_P W_{\theta_{p'}}} \int_{P_w^{\theta_{p'}}(F) \backslash G^{\theta_{p'}}(\mathbb{A})} \sum_{\gamma \in (M_P \cap (G_{\mathfrak{o}} w^{-1}))(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma n w y)\, dn dy \\
&= \sum_{w \in {}_P W_{\theta_{p'}}} \sum_{\gamma \in M_P(F)/M_P^{w\theta_{p'}}(F), \gamma w \in G_{\mathfrak{o}}(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})/N_P^{w\theta_{p'}}(F)} \int_{G^{\theta_{p'}}(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma n w y)\, dy dn \\
&= \sum_{w \in {}_P W_{\theta_{p'}}} \sum_{\gamma \in M_P(F)/M_P^{w\theta_{p'}}(F), \gamma w \in G_{\mathfrak{o}}(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})/N_P^{w\theta_{p'}}(F)} \varphi(\rho_{p'}(x^{-1}\gamma n w))\, dn.
\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{vol}([N_P^{w\theta_{p'}}]) = 1$，上面的表达式确实等于 $K_{P,\,\mathfrak{o},\,\varphi}(x)$，参见 (4.4.3.2)。 □

4.4.5. 对称空间上的分布。 — 设 $\eta : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ 为如 §3.4.1 中的酉特征。利用定理 4.4.4.1，对一切 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$ 以及一切 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$，可以定义

$$J_{\mathfrak{o}}^T(\eta, \varphi) = \int_{[G^\theta]^G} K_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)\eta(x)\,dx. \tag{4.4.5.1}$$

由定理 4.4.4.1 可知，映射

$$\varphi \mapsto \sum_{\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)} J_{\mathfrak{o}}^T(\eta, \varphi)$$

由一个绝对收敛级数定义，并且它在 $\mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 上连续。

根据等式 (4.4.4.2) 与 §4.2.7，映射 $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(\eta, \varphi)$ 在某个锥中与关于 T 的一个多项式指数函数重合。于是将 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi)$ 定义为该关于 T 的函数的常数项。经由开映射 $\mathcal{S}(G(\mathbb{A})) \to \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$，由此得到 $\mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 上的连续分布 $J_{\mathfrak{o}}(\eta)$。

4.4.6. 无穷小对称空间。 — 中心单代数 $\mathrm{End}_D(V)$ 配备通常的李括号后，可识别为 G 的李代数 $\mathfrak{g}$。θ 在 $\mathrm{End}_D(V)$ 中的中心化子可识别为 G^θ 的李代数 $\mathfrak{g}^\theta$。对于任意子空间 $W \subset \mathrm{End}_D(V)$，令 W^θ 为 W 与 θ 的中心化子的交。令 $\mathfrak{s}$ 为 S 在 1 处的切空间。我们始终通过如下识别，将其视为 $\mathrm{End}_D(V)$ 的子空间

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathrm{End}_D(V) \mid X + \theta X \theta = 0\}.$$

于是，G^θ 通过将 $G = GL_D(V)$ 在 $\mathrm{End}_D(V)$ 上的伴随作用 Ad 限制，左作用于 $\mathfrak{s}$。该作用保持可逆元群不变，而该群可识别为 G。

4.4.7. 设 $P \subset Q$ 为 G 的半标准抛物子群。分别以 $\mathfrak{m}_P$、$\mathfrak{n}_P^Q$、$\mathfrak{n}_P^Q$ 表示 M_P、N_P^Q 和 $\bar{N}_P^Q$ 的李代数。 —

设 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为定义在 $\mathrm{End}_D(V)$ 上的非退化、G-不变对称双线性形式，其定义为

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Trd}(XY)$$

对任意 $X, Y \in \mathrm{End}_D(V)$。由于它在 $\mathrm{Ad}(\theta)$ 作用下不变，可知 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\theta \oplus \mathfrak{s}$ 是关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的正交直和，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 $\mathfrak{g}^\theta$ 或 $\mathfrak{s}$ 上的限制非退化。

若 F 是一个数域，对于任意 F-向量空间 W，在 $W(\mathbb{A})$ 上赋予 Haar 测度，使商 $W(F)\backslash W(\mathbb{A})$ 的体积为 1，其中使用由计数测度诱导的商测度。在此情形下，我们还固定一个连续的非平凡加性特征

$$\psi : F\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times.$$

4.4.8. 对于 $P \in \mathcal{F}(M_0)$，记 $\rho_{\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{s}}$ 为 $\mathfrak{a}_{P^\theta}^*$ 中满足测度 dn 在 $(\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{s})(\mathbb{A})$ 上满足以下条件的元素

$$d(hnh^{-1}) = \exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{s}}, H_{P^\theta}(h)\rangle)\,dn$$

对任意 $h \in M_{P^\theta}(\mathbb{A})$。显然有

$$(\rho_{\mathfrak{n}_P \cap \mathfrak{s}})_{|\mathfrak{a}_P} = \rho_P^G - (\rho_{P^\theta}^{G^\theta})_{|\mathfrak{a}_P}$$

其中下标 $|\mathfrak{a}_P$ 表示对 $\mathfrak{a}_P$ 的限制。

设 $P \in \mathcal{F}(M_0)$。设 N 是 G^θ 的子群，或是 $\mathfrak{g}$ 的子空间，在 $\mathrm{Int}(A_P)$ 下不变，或在 $\mathrm{Ad}(A_P)$ 下不变，并赋有测度 dn。若存在 $\mathfrak{a}_P^*$ 中的元素 ρ 使得

$$d(hnh^{-1}) = \exp(\langle 2\rho, H_P(h)\rangle)dn$$

对任意 $h \in A_P^\infty$，记 $\rho_N = \rho$。

4.4.9. 齐次纤维丛。 — 设 H 是一个代数群，H' 是 H 的一个代数子群，X 是一个拟射影簇，并赋有 H' 的左作用。记 $H \times^{H'} X$ 为乘积 $H \times X$ 关于作用所得的商

$$h' \cdot (h, x) = (hh'^{-1}, h' \cdot x).$$

这是一个代数簇（参见 [PV89，定理 4.19]）。

4.4.10. 关于内对合的 Arthur 引理。 — 对任意 $\gamma \in G$ 及 G 的任意代数子群 H，记 H_γ 为 H 中 γ 的中心化子。设 $P = MN$ 是一个半标准抛物子群，并赋有其 Levi 分解。设 $\gamma \in M \cap S_{p'}$ 和 $\gamma = \gamma_s\gamma_u$ 是其 Jordan 分解，其中 γ_s 是半单的，γ_u 按通常意义是幂单的。根据引理 4.1.4.7，有 $\gamma_s \in M \cap S_{p'}$ 和 $\gamma_u \in M \cap S^\circ$。

引理 4.4.10.1.—

1. 有 $\mathrm{Int}(\theta)(G_\gamma) = G_\gamma$ 且 $\mathrm{Int}(\theta)(N_\gamma) = N_\gamma$。*2.* 对称化态射 ρ（参见 (4.1.2.2)）诱导出一个 F-代数簇之间的同构

$$N_\gamma/N_\gamma^\theta \to N_\gamma \cap S^\circ.$$

证明。 — 1. 有 $\mathrm{Int}(\theta)(\gamma) = \gamma^{-1}$，因为 $\gamma \in S$。若 $x \in G_\gamma$，则 $\mathrm{Int}(\theta)(x) \in G_{\mathrm{Int}(\theta)(\gamma)} = G_{\gamma^{-1}} = G_\gamma$。由于 $\theta \in M$，我们也有 $\mathrm{Int}(\theta)(N) \subset N$，因此 $\mathrm{Int}(\theta)(N_\gamma) = N_\gamma$。

2. 我们像引理 4.1.4.7 的证明中那样使用指数映射。一个元素 $n \in N$ 可写为$n = \exp(X)$，其中 $X \in \mathfrak{n}$。当且仅当 $X \in \mathfrak{n}_\gamma \cap \mathfrak{s}$ 时，有 $n \in N_\gamma \cap S^\circ$（其中 $\mathfrak{n}_\gamma$ 是 N_γ的李代数），此时 $n = \rho(\exp(X/2))$，且 $\exp(X/2) \in N_\gamma$。断言 2 由此容易得到。 □

引理 4.4.10.2。—映射

$$(n, x) \mapsto \mathrm{Int}(n)(x)$$

在共轭作用下诱导出从 $N^\theta \times^{N_{\gamma_s}^\theta}((\gamma N_{\gamma_s}) \cap S_{p'})$ 到 $(\gamma N) \cap S_{p'}$ 的一个同构，其中 $N_{\gamma_s}^\theta$ 在 $(\gamma N_{\gamma_s}) \cap S_{p'}$ 上通过共轭作用。

证明。— 对任意 $n \in N$ 和任意 $x \in \gamma N_{\gamma_s}$，$\mathrm{Int}(n)(x)$ 的半单部分是 $\mathrm{Int}(n)(\gamma_s)$。对于 n、$n' \in N$ 和 x、$x' \in \gamma N_{\gamma_s}$，若 $\mathrm{Int}(n)(x) = \mathrm{Int}(n')(x')$，则有 $\mathrm{Int}(n)(\gamma_s) = \mathrm{Int}(n')(\gamma_s)$，因此 $n' \in nN_{\gamma_s}$。由此可知，所讨论的映射在 $N \times^{N_{\gamma_s}} (\gamma N_{\gamma_s})$ 上诱导出一个同构，到 γN，另见 [Art78，引理 2.1]。由此显然可得，从 $N^\theta \times^{N_{\gamma_s}^\theta}((\gamma N_{\gamma_s}) \cap S_{p'})$ 到 $(\gamma N) \cap S_{p'}$ 有一个浸入。只需证明满射性。设 $y \in (\gamma N) \cap S_{p'}$。存在 $n \in N$ 和 $x \in \gamma N_{\gamma_s}$，使得 $\mathrm{Int}(n)(x) = y$。因此 $\theta y^{-1}\theta = y$。取半单部分并利用 $\theta\gamma_s^{-1}\theta = \gamma_s$ 这一事实，可知 $\mathrm{Int}(\theta n\theta)(\gamma_s) = \mathrm{Int}(n)(\gamma_s)$。因此 $\rho(n^{-1}) \in N_{\gamma_s} \cap S^\circ$。将引理 4.4.10.1 的断言 2 应用于 $\gamma_s \in M \cap S_{p'}$，存在 $u \in N_{\gamma_s}$ 使得 $\rho(n^{-1}) = \rho(u)$，因此 $nu \in N^\theta$。此外，有 $y = \mathrm{Int}(nu)(\mathrm{Int}(u^{-1})x)$，从而有 $\mathrm{Int}(u^{-1})x \in \mathrm{Int}(nu)^{-1}(S_{p'}) = S_{p'}$。 □

4.4.11. 设 $P = MN$为一个半标准抛物子群，且 $\gamma \in (M \cap S_{p'})(F)$。设$\sigma'$ 为由 $\sigma'(n) = \mathrm{Int}(\theta\gamma)(n^{-1})$ 给出的 N 的反对合。那么，根据引理 4.4.10.1 的断言 1，σ' 保持 N_{γ_s} 不变。由此可知，该映射

$$n \mapsto n\sigma'(n)$$

诱导出一个从 $N_{\gamma_s}/N_{\gamma_s}^{\theta\gamma}$到 $N_{\gamma_s}^{\sigma'}$的同构。因此， $N_{\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})$继承了一个归一化不变测度，即商 $N_{\gamma_s}(\mathbb{A})/N_{\gamma_s}^{\theta\gamma}(\mathbb{A})$上的测度。由于 $(\gamma N_{\gamma_s})\cap S_{p'}=\gamma N_{\gamma_s}^{\sigma'}$，我们得到一个定义在 $((\gamma N_{\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})$上的测度。也可以用另一种方式推理：通过指数映射$N_{\gamma_s}^{\sigma'}$将$\mathfrak{n}_{\gamma_s}^{\sigma'}$与其等同，并传输加法测度；此处仍用 σ'表示由 $\sigma'(U)=\mathrm{Ad}(\theta\gamma)(-U)$给出的 $\mathfrak{n}_{\gamma_s}$的反对合。

4.4.12. 设 $\varphi\in\mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$。设 $P\in\mathcal{F}(M_0)$，其中 $P=MN$ 是其半标准 Levi 分解。设 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}_{p'}(F)$。对于 $x\in G(\mathbb{A})$，考虑

$$\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x)=\sum_{\gamma\in(M\cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)}\sum_{\nu\in N_{\gamma_s}^{\theta}(F)\backslash N^{\theta}(F)}\int_{((\gamma N_{\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}_{\theta}(\nu x)^{-1}(y))\,dy. \tag{4.4.12.1}$$

由此得到定义在 $P^{\theta}(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 上的函数。

对于 $T\in T_0+\overline{\mathfrak{a}_0^+}$一个截断参数，定义

$$\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}(x)=\sum_{P\in\mathcal{F}(P_0^{\theta})}\varepsilon_P^G\sum_{\delta\in P^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T_P)\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x) \tag{4.4.12.2}$$

对于 $x\in G(\mathbb{A})$。借助 [Art78，引理 5.1]，可知，最后一个表达式中关于 δ 的和是有限的。

定理 4.4.12.1. — 设 $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}_{p'}(F)$ 且 $\varphi\in C_c^{\infty}(S_{p'}(\mathbb{A}))$。对于任意充分大的 T，若 $\|T^G\|$ 足够大（相对于 φ 的支集），则有

$$\int_{[G^{\theta}]^G}|\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}(x)|\,dx<\infty$$

et

$$J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta,\varphi)=\int_{[G^{\theta}]^G}\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}(x)\eta(x)\,dx \tag{4.4.12.3}$$

其中左端由(4.4.5.1)定义。

该定理的证明见下面几段。

4.4.13. 辅助核的上界估计。 — 设 $x\in G^{\theta}(\mathbb{A})$。将应用于 $Q=P$和元素 $\delta x\in G^{\theta}(\mathbb{A})$ 的恒等式 (2.3.6.2) 代入 $\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}$ 的定义中。得到

$$\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}(x)=\sum_{P\in\mathcal{F}(P_0^{\theta})}\varepsilon_P^G\sum_{\delta\in P^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T_P)\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x)\times$$
$$\left(\sum_{P_1\in\mathcal{F}^P(P_0^{\theta})}\sum_{\delta_1\in P_1^{\theta}(F)\backslash P^{\theta}(F)}F^{P_1}(\delta_1\delta x,T)\tau_{P_1}^{P}(H_{P_1}(\delta_1\delta x)-T_{P_1})\right).$$

由于函数 H_P和 $\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x)$ 在 $P^{\theta}(F)$ 作用下左不变，因此得到 $\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^{T}(x)$ 等于

$$\sum_{P_0^{\theta}\subset P_1\subset P}\varepsilon_P^G\sum_{\delta\in P_1^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}F^{P_1}(\delta x,T)\tau_{P_1}^{P}(H_{P_1}(\delta x)-T_{P_1})\hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T_P)\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x)$$

其值为

$$\sum_{P_0^{\theta}\subset P_1\subset P_2}\sum_{\delta\in P_1^{\theta}(F)\backslash G^{\theta}(F)}F^{P_1}(\delta x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(\delta x)-T_{P_1})\widetilde{K}_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x)$$

其中，对 $g \in G(\mathbb{A})$ 和 $M_0 \subset P_1 \subset P_2$ 作如下定义

$$\widetilde{K}_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(g) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} \varepsilon_P^G \widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(g).$$

由此可得

$$\int_{[G^\theta]^G} |\widetilde{K}^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x)|\, dx$$

被对 $P_0^\theta \subset P_1 \subset P_2$ 的和所上界

$$\int_{P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x)-T_{P_1})|\widetilde{K}_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x)|\, dx.$$

因此只需对固定 $P_1 \subset P_2$ 所对应的项作上界估计。若 $P_1 = P_2$，则有 $\sigma_{P_1}^{P_2} = 0$，除非 $P_1 = P_2 = G$。在此情形下，必须上界估计

$$\int_{[G^\theta]^G} F^G(x,T)|\widetilde{K}_{G,\mathfrak{o},\varphi}(x)|\, dx.$$

根据引理 2.3.7.1，可知函数 $F^G(\cdot\ T)$ 在 $[G^\theta]^G$ 上具有紧支集。因此只需对紧集上一个连续函数的积分作上界估计，其收敛性是显然的。在下文中，我们固定 $P_1 \subsetneq P_2$。

引理 4.4.13.1. — 对一切 $P_1 \subset P \subset P_2$、一切充分为正的 T，且 $\|T^G\|$ 足够大（相对于 φ 的支集），以及一切 $x \in P_1^\theta(F)|G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ 使得

$$F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x)-T_{P_1}) \neq 0,$$

on a

$$\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{\gamma \in (M_P \cap P_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \sum_{\nu \in N^\theta_{P,\gamma_s}(F)\backslash N^\theta_P(F)} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y))\, dy.$$

证明。 — 利用岩泽分解

$$G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1 = N^\theta_{P_1}(\mathbb{A}) \cdot (M^\theta_{P_1}(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1) \cdot K^\theta$$

并将引理 2.3.7.1 应用于 P_1，我们选取 x 在 $G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ 中的一个代表元，其形式为 $n^* n_* m_0 a k$，其中 $a \in A^{P_1}{}_{,B}{}^{\infty}(T_-, T_B) \cap G(\mathbb{A})^1$，对某个 $B \in \mathrm{P}^{P_1}(P_0^\theta)$，$k \in K^\theta$ 和 n^*, n_*, m_0 分别属于某些紧集，这些紧集与 T 无关，且取自 $N^\theta_{P_2}(\mathbb{A})$, $(N_{P_0^\theta} \cap M^\theta_{P_2})(\mathbb{A})$ $M_0(\mathbb{A})^1$。由于 $\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(a) - T_{P_1}) \neq 0$，根据 Art78，第 944] 页，$a^{-1}n_* m_0 a$ 属于一个与 T 无关的紧集。设 $\gamma \in (M_P \cap S_{p'},\mathfrak{o})(F)$, $\nu \in N_P^\theta(F)$ 和 $y \in ((\gamma N_{P,\gamma_s}) \cap S_{p'})(\mathbb{A})$ 满足 $\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y)) \neq 0$。记 $\mathrm{Int}(\nu n^* a)^{-1}(y) \in (a^{-1}\gamma a)N_P(\mathbb{A})$。于是可得，$a^{-1}\gamma a$ 属于 $M_P(\mathbb{A})^1 \cap S_{p'}(\mathbb{A})$ 中的一个紧集，该紧集取决于 φ 的支集。但这意味着，当 $\|T^G\|$ 足够大时，对充分大的正 T，有 $\gamma \in (M_P \cap P_1)(F)$（参见同上引文）。□

根据引理 4.1.7.2 和 4.4.10.2，我们有

$$(4.4.13.1)\quad (M_P \cap P_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F) = \bigsqcup_{\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} ((\gamma N_1^P) \cap S_{p'})(F)$$
$$= \bigsqcup_{\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \bigsqcup_{\delta \in N^{P,\theta}_{1,\gamma_s}(F)\backslash N_1^{P,\theta}(F)} \mathrm{Int}(\delta^{-1})((\gamma N^P_{1,\gamma_s}) \cap S_{p'})(F).$$

~由引理 4.4.13.1 可得，$K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x)$ 等于对 $\gamma\in(M_1\cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$ 求和，得到

$$\sum_{\delta\in N_{1,\gamma_s}^{P,\theta}(F)\backslash N_1^{P,\theta}(F)}\sum_{\xi\in((\gamma N_{1,\gamma_s}^P)\cap S_{p'})(F)}\sum_{\nu\in N^\theta_{P,\delta^{-1}\gamma_s\delta}(F)\backslash N_P^\theta(F)}\int_{((\xi N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\delta\nu x)^{-1}(y))\,dy$$
$$=\sum_{\nu\in N_{1,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_1^\theta(F)}\sum_{\xi\in((\gamma N_{1,\gamma_s}^P)\cap S_{p'})(F)}\int_{((\xi N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y))\,dy.$$

$(\gamma N_{1,\gamma_s}^P)\cap S_{p'}$中的元素可写为 $\gamma\exp(U)$，其中 $U\in\mathfrak{n}^{P,1,\sigma',\gamma_s}$，这里 σ'是第 4.4.11 节中定义的反对合。固定这样一个 U，并令 $\xi=\gamma\exp(U)$。$(\xi N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'}$中的任意元素都可写为 ξn，其中 $n\in N_{P,\gamma_s}$ 满足 $\exp(U)n\in N_1^{\sigma',\gamma_s}$，也就是说 $n'=\mathrm{Int}(\exp(U/2))(n)\in N_P^{\sigma',\gamma_s}$。由此可得，映射

$$(U,n')\mapsto\exp(U)n=\exp(U/2)n'\exp(U/2)$$

诱导出从 $\mathfrak{n}^{P,1,\sigma',\gamma_s}\times N_P^{\sigma',\gamma_s}$ 到 N_1^{σ',γ_s}的同构。由泊松公式，因而有

$$\sum_{\xi\in((\gamma N_{1,\gamma_s}^P)\cap S_{p'})(F)}\int_{((\xi N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y))\,dy$$
$$=\sum_{U\in\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{P,\sigma'}(F)}\int_{N_{P,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(\gamma\exp(U/2)n'\exp(U/2)))\,dn'$$
$$=\sum_{V\in\overline{\mathfrak{n}}_{1,\gamma_s}^{P,\sigma'}(F)}\int_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{P,\sigma'}(\mathbb{A})}\int_{N_{P,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(\gamma\exp(U/2)n'\exp(U/2)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dn'dU$$
$$=\sum_{V\in\overline{\mathfrak{n}}_{1,\gamma_s}^{P,\sigma'}(F)}\int_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(\gamma\exp(U)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dU.$$

设 $(\mathfrak{n}^{2,1,\sigma',\gamma_s})'$ 是 $\mathfrak{n}^{2,1,\sigma',\gamma_s}$ 中不属于任何一个 $\mathfrak{n}^{Q,1,\sigma',\gamma_s}$（其中 $P_1\subset Q\subsetneq P_2$）的元素所组成的集合（可能为空）。记 $[G^\theta]_{P_1^\theta}^G=N_1^\theta(\mathbb{A})M_1^\theta(F)\backslash G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1$。利用 [Art78，命题 1.1]，问题归结为对.....进行估计

$$\int_{[G^\theta]_{P_1^\theta}^G}\exp(\langle-2\rho_{P_1^\theta}^{G^\theta},H_{P_1^\theta}(x)\rangle)F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x)-T_{P_1})\sum_{\gamma\in(M_1\cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)}$$
$$\int_{N_{1,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_1^\theta(\mathbb{A})}\sum_{V\in(\overline{\mathfrak{n}}_{1,\gamma_s}^{2,\sigma'})'(F)}\left|\int_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(nx)^{-1}(\gamma\exp(U)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dU\right|dndx.\tag{4.4.13.2}$$

对于所有 $\gamma\in(M_1\cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$ 和 $V\in(\mathfrak{n}^{2,1,\sigma',\gamma_s})'(F)$，$g\in G^\theta(\mathbb{A})$ 的函数

$$\int_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\gamma\exp(U)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dU$$

被 $N_{2,\gamma_s}^\theta(\mathbb{A})$ 从左侧保持不变。由于 $\mathrm{vol}([N_{2,\gamma_s}^\theta])=1$，因此可以写为 $n=n_2n_1$其中 $n_2\in[N_{1,\gamma_s}^{2,\theta}]$且 $n_1\in N_{1,\gamma_s}^\theta(\mathbb{A})\backslash N_1^\theta(\mathbb{A})$。根据伊瓦萨瓦分解，也可写成 $x=mak$，其中 $m\in M_1^\theta(F)\backslash(M_1^\theta(\mathbb{A})\cap M_1(\mathbb{A})^1)$，$a\in A_{1,\infty}^G$且 $k\in K^\theta$。在条件$F^{P_1}(m,T)=1$下，根据应用于 P_1的引理 2.3.7.1，m位于一个紧集内，该紧集依赖于T以及 $M_1^\theta(\mathbb{A})\cap M_1(\mathbb{A})^1$。由于 $\varphi\in C_c^\infty(S_{p'}(F))$，对 γ 的求和是有限的。注意，$\mathrm{Int}(a^{-1})$ 保持 $N_{1,\gamma_s}^\theta(\mathbb{A})\backslash N_1^\theta(\mathbb{A})$ 不变量，而变量替换 $n_1\mapsto an_1a^{-1}$会在被积函数中添加一个指数映射因子 $\exp(2\rho_{N_1^\theta}-2\rho_{N_{1,\gamma_s}^\theta},H_{P_1}(a))$。接着，对任意固定的 γ，由引理 4.4.10.2，

n_1 位于一个依赖于 φ 支集的紧集内。在条件 $\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(a) - T_{P_1}) \neq 0$ 下，根据 [Art78，第 944] 页，$a^{-1}n_2 a$ 位于一个不依赖于 T 的紧集内。最后，变量替换 $U \mapsto aUa^{-1}$ 会在被积函数中添加一个因子 $\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'},\gamma_s}, H_{P_1}(a)\rangle)$。由此可知，(4.4.13.2) 至多相差一个乘法常数，被 $\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$ 上的和所控制，其中 y 的上确界仍落在 $G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ 的一个紧集内，而对 $a \in A^G_{,1}{}^\infty$ 的积分为

$$\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{\sigma'}} - 2\rho_{N_{1,\gamma_s}^\theta}, H_{P_1}(a)\rangle)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(a) - T_{P_1})$$
$$\sum_{V \in (\overline{\mathfrak{n}}_{1,\gamma_s}^{2,\sigma'})'(F)} \left| \int_{\mathfrak{n}_{1,\gamma_s}^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}\gamma \exp(U)y)\psi(\langle U, aVa^{-1}\rangle)\, dU \right|.$$

沿用估计 [Art78, (7.8)（第 p.945] 页）时所用的相同论证，并像 [Li22 命题 4.15], 证明的末尾那样处理因子指数映射($\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'},\gamma_s} - 2\rho_{N_{1,\gamma_s}^\theta}, H_{P_1}(a)\rangle$)，可知这个积分是收敛的。

4.4.14. 等式 (4.4.12.3) **的证明。** —我们已经证明

$$\int_{[G^\theta]^G} \widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)\eta(x)\, dx$$
$$= \sum_{P_0^\theta \subset P_1 \subset P_2} \int_{P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x) - T_{P_1})\widetilde{K}_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x)\eta(x)\, dx$$

où

$$\widetilde{K}_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} \varepsilon_P^G \sum_{\gamma \in (M_P \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \sum_{\nu \in N_{P,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_P^\theta(F)} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y))\, dy.$$

将积分在 $P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)$ 上分解为关于 $x \in [G^\theta]^G_{P_1^\theta}$ 和 $n_1 \in [N_1^\theta]$ 的二重积分。然后将关于 $[N_1^\theta]$ 的积分移至关于 P 和 γ 的和内。因此考虑

$$\int_{[N_1^\theta]} \sum_{\nu \in N_{P,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_P^\theta(F)} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\nu n_1 x)^{-1}(y))\, dy dn_1.$$

由于 $\mathrm{vol}([N_P^\theta]) = \mathrm{vol}([N_{P,\gamma_s}^\theta]) = 1$，这个表达式等于

$$\int_{[N_1^\theta]} \int_{[N_P^\theta]} \sum_{\nu \in N_{P,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_P^\theta(F)} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\nu n n_1 x)^{-1}(y))\, dy dn dn_1$$
$$= \int_{[N_1^\theta]} \int_{N_{P,\gamma_s}^\theta(F)\backslash N_P^\theta(\mathbb{A})} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(n n_1 x)^{-1}(y))\, dy dn dn_1$$
$$= \int_{[N_1^\theta]} \int_{N_{P,\gamma_s}^\theta(\mathbb{A})\backslash N_P^\theta(\mathbb{A})} \int_{((\gamma N_{P,\gamma_s})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(n n_1 x)^{-1}(y))\, dy dn dn_1$$
$$= \int_{[N_1^\theta]} \int_{((\gamma N_P)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(n_1 x)^{-1}(y))\, dy dn_1$$

其中在最后一个等式中使用了引理 4.4.10.2。我们再次将关于 P 和关于 γ 的和与关于 $[N_1^\theta]$ 的积分互换。根据下面的引理 4.4.14.1，可以将后者与关于 $[G^\theta]^G_{P_1^\theta}$ 的积分重新组合。于是得到

$$\sum_{P_0^\theta \subset P_1 \subset P_2} \int_{P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x) - T_{P_1})K_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x)\eta(x)\, dx$$

其中对于 $g \in G(\mathbb{A})$ 和 $M_0 \subset P_1 \subset P_2$，我们令

$$K_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(g) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} \varepsilon_P^G K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(g).$$

通过第 4.4.13 节开头的推演可知，这恰好是 $J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\ \varphi)$。

引理 4.4.14.1。——设 $P_0^\theta \subset P_1 \subsetneq P_2 \subset G$ 为抛物子群。对于任意充分大的 T，只要 $\|T^G\|$ 足够大（相对于 φ的支集），就有

$$\int_{P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x)-T_{P_1})|K_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x)|\,dx < \infty.$$

证明。——该命题的证明与第4.4.13段的证明基本相同。由引理 4.4.13.1 的类比结果，我们可以将和限制在 γ 上

$$K_{P_1,P_2,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{P_1 \subset P \subset P_2} \varepsilon_P^G \sum_{\gamma \in (M_P \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \int_{((\gamma N_P)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(y))\,dy$$

到 $(M_P \cap P_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$。由 (4.4.13.1) 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma \in (M_P \cap P_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \int_{((\gamma N_P)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(y))\,dy \\
&= \sum_{\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \sum_{\xi \in ((\gamma N_1^P)\cap S_{p'})(F)} \int_{((\xi N_P)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(y))\,dy.
\end{aligned}$$

$(\gamma N_1^P) \cap S_{p'}$的元素可写为 $\gamma\exp(U)$，其中 $U \in \mathfrak{n}^{P,\sigma'}_1$，这里 σ'是第 4.4.11 节中定义的反对合。固定这样一个 U，并令 $\xi = \gamma\exp(U)$。$(\xi N_P) \cap S_{p'}$的任意元素均可写为 ξn，其中 $n \in N_P$ 满足 $\exp(U)n \in N_1^{\sigma'}$，也就是说，$n' = \mathrm{Int}(\exp(U/2))(n) \in N_P^{\sigma'}$。由此可得映射

$$(U,n') \mapsto \exp(U)n = \exp(U/2)n'\exp(U/2)$$

诱导了从 $\mathfrak{n}^{P,\sigma'}_1 \times N_P^{\sigma'}$ 到 $N_1^{\sigma'}$ 的同构。因此，根据泊松公式，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\xi \in ((\gamma N_1^P)\cap S_{p'})(F)} \int_{((\xi N_P)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(y))\,dy \\
&= \sum_{U \in \mathfrak{n}_1^{P,\sigma'}(F)} \int_{N_P^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\gamma\exp(U/2)n'\exp(U/2)))\,dn' \\
&= \sum_{V \in \overline{\mathfrak{n}}_1^{P,\sigma'}(F)} \int_{\mathfrak{n}_1^{P,\sigma'}(\mathbb{A})} \int_{N_P^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\gamma\exp(U/2)n'\exp(U/2)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dn'dU \\
&= \sum_{V \in \overline{\mathfrak{n}}_1^{P,\sigma'}(F)} \int_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\gamma\exp(U)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dU.
\end{aligned}$$

令 $(\mathfrak{n}^{2,\sigma'}_1)'$ 为 $\mathfrak{n}^{2,\sigma'}_1$ 中可能为空的元素集合，这些元素不属于任何一个 $\mathfrak{n}^{Q,\sigma'}_1$，其中 $P_1 \subset Q \subsetneq P_2$。利用 [Art78 命题 1.1]，，问题归结为给出上界

$$\begin{aligned}
(4.4.14.1)\qquad &\int_{P_1^\theta(F)\backslash(G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} F^{P_1}(x,T)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(x)-T_{P_1}) \sum_{\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)} \\
&\sum_{V \in (\overline{\mathfrak{n}}_1^{2,\sigma'})'(F)} \left| \int_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\gamma\exp(U)))\psi(\langle U,V\rangle)\,dU \right| dx.
\end{aligned}$$

令 $x = n^* n_* mak$，其中 $n^* \in [N_2^\theta]$、$n_* \in [N_1^{2,\theta}]$、$m \in M_1^\theta(F)\backslash(M_1^\theta(\mathbb{A}) \cap M_1(\mathbb{A})^1)$、$a \in A^G$、$_1{}^\infty$ 和 $k \in K^\theta$。这个变量替换会在被积函数中增加一个因子 $\exp(-2\rho_{P_1^\theta}^{G^\theta}, H_{P_1^\theta}(ma))$。注意，$n^*$ 可吸收到关于 U 的积分中。变量替换 $U \mapsto aUa^{-1}$ 会在被积函数中增加一个因子 $\exp(2\rho_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'}}$，$H_{P_1}(a))$。根据第4.4.13段的讨论，我们观察到，(4.4.14.1) 除了一个乘法常数因子外，可由关于 $\gamma \in (M_1 \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$ 的有限和控制；y 上的上限仍处于 $G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1$ 的一个紧集内，而关于 $a \in A^G{}_{,1}{}^\infty$ 的积分为

$$\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'}} - 2\rho_{P_1^\theta}^{G^\theta}, H_{P_1}(a)\rangle)\sigma_{P_1}^{P_2}(H_{P_1}(a) - T_{P_1})$$
$$\sum_{V \in (\overline{\mathfrak{n}}_1^{2,\sigma'})'(F)} \left| \int_{\mathfrak{n}_1^{\sigma'}(\mathbb{A})} \varphi(y^{-1}\gamma \exp(U)y)\psi(\langle U, aVa^{-1}\rangle)\, dU \right|.$$

如同第4.4.13段末尾所示，可以证明这个积分是收敛的。 □

4.5 半单下降

4.5.1. 下降对象。 — 对任意半单元素 $\sigma \in S(F)$，有 $\mathrm{Int}(\theta)(G_\sigma) \subset G_\sigma$，参见引理 4.4.10.1，并令 $G_\sigma^\theta = G_\sigma \cap G^\theta$。因此得到一个对称对 $(G_\sigma, G_\sigma^\theta)$。称由此得到的任意三元组 $(G_\sigma, G_\sigma^\theta, \mathrm{Int}(\theta)|_{G_\sigma})$ 为 (G, G^θ) 的下降对象。可以显式描述这些下降对象：

命题 4.5.1.1. — *$(G, G^\theta, \mathrm{Int}(\theta))$ 的任意下降对象都是以下类型之一的三元组之积：*

1. $(\mathrm{Res}_{L/F} GL_{r,D'} \times \mathrm{Res}_{L/F} GL_{r,D'}, \Delta\mathrm{Res}_{L/F} GL_{r,D'}, \delta)$，其中 L/F 是有限域扩张，D' 是 L 上的中心除法代数，而 δ 是由 $(x, y) = (y, x)$ 给出的对合；2. $(\mathrm{Res}_{K/F} GL_{r,D'\otimes_L K}, \mathrm{Res}_{L/F} GL_{r,D'}, \gamma)$，其中 L/F 是有限域扩张，K/L 是二次扩张，D' 是 L 上的中心除法代数，而 γ 是 $\mathrm{Res}_{L/F} GL_{r,D'}$ 的伽罗瓦对合，对应于 $\mathrm{Gal}(K/L)$ 的非平凡元素；3. $(GL_{r+t,D}, GL_{r,D} \times GL_{t,D}, \mathrm{Int}(\theta_{r,t}))$，其中 $\theta_{r,t} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_t \end{pmatrix}$。

注 4.5.1.2。— 对于 2 型，$D' \otimes_L K$ 不一定是可除代数。

证明。— 这是 [JR96，命题 4.3] 或 [AG09，定理 7.7.3] 在情形 $D = F$ 和 [Zha15，命题 4.1] 在情形 $p = q$ 下的直接推广。为方便读者和作者，现将论证重述如下。利用命题 4.1.4.5，不失一般性，可以且将假设 $\sigma = x(A, r, t)$ 是在 (4.1.4.1) 中定义的、带有 $A \in \mathfrak{gl}_m(D)$ 这一没有 ± 1 特征值的半单元素。根据引理 4.1.4.4，我们得到，下降 $(G_\sigma, G_\sigma^\theta, \mathrm{Int}(\theta)|_{G_\sigma})$ 同构于至多两个类型 3 三元组的乘积，并与 $(GL_{2m,D}, GL_{m,D} \times GL_{m,D}, \mathrm{Int}(\theta_{m,m}))$ 的下降相关联于该元素

$$\begin{pmatrix} A & A - I_m \\ A + I_m & A \end{pmatrix}. \tag{4.5.1.1}$$

因此只需研究最后一个下降，换言之我们可以并且将假定 $p = q = m$，且 σ 具有如上所述的 A 的形式 (4.5.1.1)。根据推论 4.1.3.4，我们归结到 Prd_A 是单个不可约多项式的幂的情形，这也是我们将要假定的。设 $\mathrm{Prd}_A = \chi^k$，其中 χ 是 F 上的不可约多项式。由于 A 是半单的，χ 是 A 的最小多项式。回顾 $V = D^{2m}$ 与 $G = GL_D(V)$，采用 §2.2.1 的记号。于是 A 作用在 D^m 与 $\chi(A) = 0$ 上。设 $E = F[t]/(\chi) \simeq F(A)$，它是一个域，其中 $F(A)$ 表示由 A 在 F 上生成的代数。A 的作用使 D^m 具有 $E \otimes_F D$-模结构。

设 $E\otimes_F D\simeq \mathfrak{gl}_s(D')$，其中 $s\geqslant 1$ 是一个整数，D' 是 E上的中心除法代数。作为半单模，对某个整数 $t\geqslant 1$ 有 $D^m\simeq M_{t\times s}(D')$，其中 $M_{t\times s}$ 表示一个大小为 $t\times s$的矩阵。由此可知，A 在 $\mathfrak{gl}_m(D)$中的中心化子（它与 $\mathfrak{g}_\sigma^\theta$等同）同构于 $\mathfrak{gl}_t(D')$。等式 $\mathrm{Prd}_A=\chi^k$ 蕴含 χ 的次数等于 $\deg\chi=\frac{dm}{k}$，其中 d是 D的次数。再次利用推论 4.1.3.4，我们有

$$\mathrm{Prd}_\sigma(t)=(2t)^{dm}\,\mathrm{Prd}_A(\frac{t^2+1}{2t})=\left((2t)^{\deg\chi}\chi(\frac{t^2+1}{2t})\right)^k.$$

令 $\tilde{\chi}(t)=(2t)^{\deg\chi}\chi(\frac{t^2+1}{2t})\in F[t]$，它是可分的，因为 A没有特征值 1。由于 σ是半单的，$\tilde{\chi}$ 是 σ的最小多项式，其次数为 $\deg\tilde{\chi}=2\deg\chi$。~令 $E=F[t]/(\tilde{\chi})\simeq F(\sigma)$，它于是是 E上的次数为 2 的 étale 代数，其中 $F(\sigma)$表示由 σ生成的 F 上的代数~。σ 的作用赋予 $V=D^m\oplus D^m$ 一个 $E\otimes_F D$-模结构。但 $V\simeq M_{2t\times s}(D')$ 和

$$\tilde{E}\otimes_F D\simeq\tilde{E}\otimes_E(E\otimes_F D)\simeq\tilde{E}\otimes_E M_{t\times s}(D')\simeq M_{t\times s}(\tilde{E}\otimes_E D').$$

~有 $\mathfrak{g}_\sigma\simeq\mathfrak{gl}_t(E\otimes_E D')$。注意

$$\mathrm{Int}(\theta)(\sigma)=\begin{pmatrix}A & -A+I_m\\ -A-I_m & A\end{pmatrix}=\sigma^{-1}.$$

~于是 θ 作用于 $E\simeq F(\sigma)$。此外，有

$$F(A)\simeq F\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}=F(\frac{\sigma+\mathrm{Int}(\theta)(\sigma)}{2})\subset F(\sigma)^\theta$$

其中，$F(\sigma)^\theta$表示 $F(\sigma)$中由 θ固定的元素构成的子代数。因此，θ是自同构群 $\mathrm{Aut}_E(E)$ 中唯一的非平凡~元素。总之，我们有

$$(G_\sigma,G_\sigma^\theta,\mathrm{Int}(\theta))\simeq(\mathrm{Res}_{\tilde{E}/F}GL_{t,\tilde{E}\otimes_E D'},\mathrm{Res}_{E/F}GL_{t,D'},\theta).$$

~若 E同构于 $E\times E$，则得到一个 1 型三元组；若 E是一个域，则得到一个 2 型三元组。□

4.5.2. 各向异性元素。——设 $\sigma\in S(F)$是一个半单元素。若对 G的每个真半标准 Levi 子群 M，σ的 $G^\theta(F)$-共轭类都不与 $M(F)$相交，则称 σ 是(G,θ)-各向异性的。若 G模其中心各向异性，即 $p+q=1$、$G=GL_1$、D 和 $\sigma=\pm\mathrm{Id}_D$，则该条件自动成立。若 $p+q>1$，由命题 4.1.4.5 可知，σ 是(G,θ)-各向异性的，当且仅当 $p=q$，且 σ 在 $G^\theta(F)$下与 $\begin{pmatrix}A & A-I_p\\ A+I_p & A\end{pmatrix}$ 共轭，其中 $A\in\mathfrak{gl}_p(D)$是椭圆半单元素（即其在GL_p、D 中的中心化子模$A_{GL_p(D)}$的中心各向异性），且没有特征值±1。在此情形下，特别有 $\sigma\in S^\circ(F)$。无论如何，若 σ是(G,θ)-各向异性的，则G_σ^θ模 $A_{G_\sigma^\theta}$各向异性。此外，注意到 σ是(G,θ)-各向异性的，当且仅当对每个 G的真 $\mathrm{F}(P_0^\theta)$ 抛物子群 $P\in$，σ的 $G^\theta(F)$-共轭类都不与 $P(F)$相交。

P命题 4.5.2.1。—设 $\sigma\in S(F)$ 是一个(G,θ)-非迷向半单元素。则有

$$A_G=A_{G_\sigma}\cap A_{G^\theta}=A_{G_\sigma^\theta}=A_{G_\sigma}^\theta.$$

证明。— 若 $p+q=1$，由于 $\sigma=\pm1$ 且 $\mathrm{Int}(\theta)$ 是 G 的恒等自同构，该断言是平凡的。

若 $p=q$，根据上述讨论，只需考虑 $\sigma=\begin{pmatrix} A & A-I_p \\ A+I_p & A \end{pmatrix}$，其中 $A\in\mathfrak{gl}_p(D)$ 是一个没有特征值 ±1 的椭圆半单元素。等式 $A_G=A_{G_\sigma^\theta}$ 由直接计算得出。但我们还有

$$A_G\subseteq A_{G_\sigma}\cap A_{G^\theta}\text{ et }A_{G^\theta}\subset A_{G_\sigma^\theta}.$$

由此可得

$$A_G=A_{G_\sigma}\cap A_{G^\theta}=A_{G_\sigma^\theta}.$$

我们知道，$(G_\sigma,G_\sigma^\theta)$ 在命题 4.5.1.1 中是类型 1、2 或 3 的对称对。此外，由于 G_σ^θ 模 $A_{G_\sigma^\theta}$ 各向异性，等式 $A_G=A_{G_\sigma^\theta}$ 蕴含 G_σ^θ 为 F-秩 1。对于类型 1 和 2，我们有 $A_{G_\sigma^\theta}=A_{G_\sigma}^\theta$，由此得证。最后，类型 3 不会出现。事实上，由于 $p=q$ 与 $\sigma\in S^\circ(F)$，[Zha15 命题 4.1] 蕴含 $r=t$，特别是 $r+t\neq1$。□

推论 4.5.2.2. — 假设 $p=q$。设 $\sigma=\begin{pmatrix} A & A-I_p \\ A+I_p & A \end{pmatrix}$ 满足 $A\in\mathfrak{gl}_p(D)$ 为一个没有特征值 ±1 的椭圆半单元素。

1. 如果 σ 在 G 中不是椭圆的，那么$(G_\sigma,G_\sigma^\theta)$ 是一个带有$r=1$的 *1* 型对称对。*2.* 如果 σ 在 G 中是椭圆的，那么$(G_\sigma,G_\sigma^\theta)$ 是一个带有 $r=1$ 的 *2* 型对称对。

注 4.5.2.3. — 如推论 4.5.2.2 中的元素 $A\in\mathfrak{gl}_p(D)$，若 $(G_\sigma,G_\sigma^\theta)$ 是 1 型（分别为 2 型）对称对，则称其为 1 型（分别为 2 型）元素。根据推论 4.1.3.4，A 的类型仅取决于 Prd_A。

设 $P\in\mathrm{F}(P_0^\theta)$。若半单元素 $\sigma\in(M_P\cap S)(F)$ 的 $M_P^\theta(F)$-共轭类不与 $Q(F)$（分别为 $M'(F)$）相交，其中任意 $Q\in\mathrm{F}(P_0^\theta)$，$Q\subsetneq P$（分别为任意 $M'\in\mathrm{L}(M_0)$，$M'\subsetneq M_P$），则称其为 (P,θ)-各向异性（分别为 (M_P,θ)-各向异性）。根据命题 4.1.4.5，可以证明，对于 $P\in\mathrm{F}(P_0^\theta)$，半单元素 $\sigma\in(M_P\cap S)(F)$ 是 (P,θ)-各向异性的充要条件是它是 (M_P,θ)-各向异性的。此时，根据上述讨论，$M_{P,\sigma}^\theta$ 模 $A_{M_P^\theta,\sigma}$ 各向异性。

推论 4.5.2.4. — 设 $P\in F(P_0^\theta)$ 及其半标准 *Levi* 分解 $P=MN$。设 $\sigma\in(M\cap S)(F)$ 为一个 (P,θ)-非迷向的半单元素。则有

$$A_P=A_{M_\sigma}\cap A_{M^\theta}=A_{M_\sigma^\theta}=A_{M_\sigma}^\theta.$$

设 $\sigma=x(A,r,t)$ 由 (4.1.4.1) 定义，其中 $m,r,t\geqslant0$ 为整数，使得 $m\leqslant\min\{p-r,q-t\}$，且 $A\in\mathfrak{gl}_m(D)$ 是一个没有特征值 ±1 的半单元素。假设 A 是一个分块对角矩阵

$$\mathrm{diag}(\underbrace{A_1,\cdots,A_1}_{s_1},\cdots,\underbrace{A_i,\cdots,A_i}_{s_i},\underbrace{A_1',\cdots,A_1'}_{k_1},\cdots,\underbrace{A_j',\cdots,A_j'}_{k_j}) \tag{4.5.2.1}$$

其中 A_1、..... A_i 为 1 型，而 A_1'、..... A_j' 为 2 型，它们的约化特征多项式两两不同，参见注 4.5.2.3。事实上，由 [Yu13，定理 4] 可得，所有多项式 Prd^{A_α}，$1\leqslant\alpha\leqslant i$ 和 $\mathrm{Prd}^{A'_\beta}$，$1\leqslant\beta\leqslant j$ 都是 F 上两两不同的不可约多项式的幂。设 $A_\alpha\in\mathfrak{gl}_{m_\alpha}(D)$ 和 $A'_\beta\in\mathfrak{gl}_{m'_\beta}(D)$ 对 $1\leqslant\alpha\leqslant i$ 和 $1\leqslant\beta\leqslant j$ 成立。设 D_α（分别为 D'_β）是 A_α 在 $\mathfrak{gl}_{m_\alpha}(D)$ 中的中心化子（分别是

A'_β 在 $\mathfrak{gl}_{m'_\beta}(D)$ 中的中心化子）。根据推论 4.5.2.2，每个 D_α（分别为 D'_β）都是 F 的一个有限扩张 L_α（分别为 L'_β）上的中心除法代数。因此

$$G_\sigma \simeq \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i}(\mathrm{Res}_{L_\alpha/F}GL_{s_\alpha,D_\alpha}\times\mathrm{Res}_{L_\alpha/F}GL_{s_\alpha,D_\alpha})\times\prod_{1\leqslant\beta\leqslant j}\mathrm{Res}_{K'_\beta/F}GL_{k_\beta,D'_\beta\otimes_{L'_\beta}K'_\beta}\times GL_{p+q-2m-r-t,D}\times GL_{r+t,D} \tag{4.5.2.2}$$

其中 K'_β 是 L'_β 的二次扩张，并且

$$G^\theta_\sigma \simeq \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i}\Delta\,\mathrm{Res}_{L_\alpha/F}GL_{s_\alpha,D_\alpha}\times\prod_{1\leqslant\beta\leqslant j}\mathrm{Res}_{L'_\beta/F}GL_{k_\beta,D'_\beta}\times GL_{p-m-r,D}\times GL_{q-m-t,D}\times GL_{r,D}\times GL_{t,D}. \tag{4.5.2.3}$$

这给出了命题 4.5.1.1 的显式描述。

Pou对于这样的 σ，若 $P_1\in\mathcal{F}(P_0^\theta)$ 且 $\sigma\in(M_1\cap S)(F)$ 是 (P_1,θ)-非迷向的，那么我们发现 e

$$M_1\simeq\prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i}(\underbrace{GL_{2m_\alpha,D}\times\cdots\times GL_{2m_\alpha,D}}_{s_\alpha})\times\prod_{1\leqslant\beta\leqslant j}(\underbrace{GL_{2m'_\beta,D}\times\cdots\times GL_{2m'_\beta,D}}_{k_\beta})\times\underbrace{\mathbb{G}_{m,D}\times\cdots\times\mathbb{G}_{m,D}}_{p+q-2m}. \tag{4.5.2.4}$$

由此可得

$$M_{1,\sigma}\simeq\prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i}(\underbrace{\mathrm{Res}_{L_\alpha/F}\mathbb{G}_{m,D_\alpha}\times\cdots\times\mathrm{Res}_{L_\alpha/F}\mathbb{G}_{m,D_\alpha}}_{2s_\alpha})\times\prod_{1\leqslant\beta\leqslant j}(\underbrace{\mathrm{Res}_{K'_\beta/F}\mathbb{G}_{m,D'_\beta\otimes_{L'_\beta}K'_\beta}\times\cdots\times\mathrm{Res}_{K'_\beta/F}\mathbb{G}_{m,D'_\beta\otimes_{L'_\beta}K'_\beta}}_{k_\beta})\times\underbrace{\mathbb{G}_{m,D}\times\cdots\times\mathbb{G}_{m,D}}_{p+q-2m} \tag{4.5.2.5}$$

它是 G_σ 的对角矩阵子群。对于 G 的任意子群 H，记 $\mathsf{Cent}_G(H)$ 为 G 中 H 的中心化子。可以看出

$$\mathrm{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma})\simeq\prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i}GL_{2s_\alpha m_\alpha,D}\times\prod_{1\leqslant\beta\leqslant j}GL_{2k_\beta m'_\beta,D}\times GL_{p+q-2m-r-t,D}\times GL_{r+t,D} \tag{4.5.2.6}$$

它属于 $\mathcal{L}(M_1)$。显然 $G_\sigma\subset\mathsf{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma})$。

4.5.3. Weyl 集。 — 对于所有 P_1，$P_2\in\mathcal{F}(P_0^\theta)$，令 $W^\theta(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)$ 为通过将 W^θ 中的一个元素限制到 $\mathfrak{a}_1$ 而得到的从 $\mathfrak{a}_1$ 到 $\mathfrak{a}_2$ 的互不相同的同构集合，该集合可能为空。将 $w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2)$ 认作 W^θ 中唯一的元素，仍记为 w，使得对于任意根 $\alpha\in\Delta_0^{P_1^\theta}$，$w\alpha$ 都是 $(P_0^\theta,\ A_0)$ 的一个根；换言之，对于任意根 $\beta\in\Delta_0^{P_2^\theta}$，$w^{-1}\beta$ 都是 $(P_0^\theta,\ A_0)$ 的一个根（参见 [LW13，引理 1.3.6]）。

4.5.4. Luna 切片。 — 设 $\sigma\in G$ 为半单的。设 $\mathfrak{g}_\sigma\subset\mathfrak{g}$ 为 G_σ 的李代数。对于任意 $x\in G_\sigma$，令 Ad 表示 G_σ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\sigma$ 上的伴随作用。设

$$D^\sigma(x)=\det(\mathrm{Ad}(x)-\mathrm{Id}\,|_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\sigma})\in F[G_\sigma]^{G_\sigma}.$$

设 $c^\flat_\sigma\colon\ G_\sigma\to\mathfrak{c}_\sigma=$谱$(F[G_\sigma]^{G_\sigma})$ 为范畴商，且 $\mathfrak{c}'_\sigma$ 为 $\mathfrak{c}_\sigma$ 中由 $D^\sigma(x)\neq0$ 所定义的开集。设 $G'_\sigma\subset G_\sigma$ 为 $\mathfrak{c}'_\sigma$ 在 $c^\flat_\sigma$ 下的原像。则 G'_σ 是 G_σ 的一个开集，它包含 σ，并且对一切 $x\in G'_\sigma$ 有 $G_x\subset G_\sigma$。

此外假设 $\sigma \in S$。设 $S'_\sigma = S_\sigma \cap G'_\sigma$：它是 S_σ 的一个开集，包含 σ，并且对一切 $x \in S'_\sigma$ 有 $G^\theta_x \subset G^\theta_\sigma$。设 $c^\flat_{S_\sigma}$： $S_\sigma \to \mathfrak{c}_{S_\sigma} =$ 谱 $(F[S_\sigma]^{G^\theta_\sigma})$ 为范畴商。我们有如下交换图：

$$\begin{array}{ccc} S_\sigma & \xrightarrow{i} & G_\sigma \\ \downarrow{\scriptstyle c^\flat_{S_\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle c^\flat_\sigma} \\ \mathfrak{c}_{S_\sigma} & \xrightarrow{j} & \mathfrak{c}_\sigma \end{array}$$

其中 i： $S_\sigma \to G_\sigma$ 是自然包含，而 j： $\mathfrak{c}_{S_\sigma} \to \mathfrak{c}_\sigma$ 是限制态射$F[G_\sigma]^{G_\sigma} \to F[S_\sigma]^{G^\theta_\sigma}$的对偶。令 $\mathfrak{c}'_{S_\sigma} \subset \mathfrak{c}_{S_\sigma}$为 j下 $\mathfrak{c}'_\sigma$的原像。那么 $\mathfrak{c}'_{S_\sigma}$是$\mathfrak{c}_{S_\sigma}$ 的一个开集，其在 S_σ 中的原像为 S'_σ。

引理 4.5.4.1. —*(参见 [RR96，引理 3.2] 及 [AG09，定理 A.2.3])* 设 $\sigma \in S$ 为半单。考虑 $y \cdot (h, x) = (hy^{-1}, \mathrm{Int}(y)(x))$所定义的 G^θ_σ 在 $G^\theta \times S_\sigma$ 上的作用。映射

$$\beta : G^\theta \times^{G^\theta_\sigma} S'_\sigma \to S$$

由 $(h, x) \mapsto \mathrm{Int}(h)(x)$ 所定义的映射是平展的。

证明。— 该态射显然是 G^θ-等变的。因此，只需验证在点 $(1, x) \in G^\theta \times S'_\sigma$处的作用。 $G^\theta \times S'_\sigma \to S$ 在此点的微分由下式给出

$$(Y, X) \mapsto \mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - Y + X.$$

这里 $Y \in \mathfrak{g}^\theta$ 和 $X \in T_x S_\sigma$，即 $\mathrm{Ad}(x^{-1}\theta)(X) + X = 0$ 和 $\mathrm{Ad}(\sigma)(X) = X$。我们有

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(x^{-1}\theta)(\mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - Y + X) + \mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - Y + X \\ &\quad = Y - \mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - X + \mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - Y + X = 0. \end{aligned}$$

因此，该映射的像确实落在 $T_x S$中。

根据 S'_σ的定义，映射 ι： $Y \mapsto \mathrm{Ad}(x^{-1})(Y) - Y$诱导出 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_\sigma$的一个自同构。注意，$\mathrm{Ad}(x^{-1}\theta)$ 诱导出该商上的一个对合。此外， $\iota \circ \mathrm{Ad}(\theta) = -\mathrm{Ad}(x^{-1}\theta) \circ \iota$。特别地，我们可以看到 ι 诱导出一个同构 $\mathfrak{g}^\theta/\mathfrak{g}^\theta_\sigma \to T_x S / T_x S_\sigma$。由此很容易得出结论。□

4.5.5. 幺幂簇。— 设 H 是定义在 F 上的连通约化群。记 $\mathcal{U}_H$ 为 H 中 $H(F)$ 的幂单元素集合的 Zariski 闭包。这是 H 的一个闭代数子簇，并且定义在 F 上。再记 $\mathcal{N}_\mathfrak{h}$ 为 $\mathfrak{h}$ 关于 H 的伴随作用的幂零锥，参见 [AG09，例 2.3.13]。

引理 4.5.5.1。—设 $0 \leqslant p' \leqslant N$，且 $\sigma \in S_{p'}$ 是一个半单元素。则有

$$\mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S_{p'} = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S^\circ = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S.$$

证明。— 由引理 4.1.4.7 可知

$$\mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S_{p'} = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S \subset \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S^\circ = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S.$$

设 $u \in \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S^\circ$。存在一个幂零元 $X \in \mathfrak{s}$，使得 $u = \exp(X)$，且 $\mathrm{Ad}(\sigma)(X) = X$。设 $g \in G$ 是满足 $\sigma = \rho_{p'}(g) = g\theta_{p'} g^{-1}\theta$ 的一个元素。令 $v = \exp(X/2) \in G_\sigma$。于是

$$\rho_{p'}(vg) = vg\theta_{p'}(vg)^{-1}\theta = v(g\theta_{p'} g^{-1}\theta)\theta v^{-1}\theta = v\sigma\theta v^{-1}\theta = \sigma v \theta v^{-1}\theta = \sigma v^2 = \sigma u.$$

因此 $\sigma u \in S_{p'}$ 这就证明完毕。 □

引理 4.5.5.2. — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$ 和 $\sigma \in S_{p'}$ 是一个 G^θ-半单且 G^θ-正则的元素。则有

$$\mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S_{p'} = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S^\circ = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S = 1.$$

证明。 — 设 $u \in \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap \sigma^{-1} S_{p'}$。注意， $x := \sigma u = u\sigma$ 是 G中$x \in S_{p'}$ 的 Jordan 分解。由引理 4.1.7.1 和命题 4.1.5.3 可知， x 是G^θ-半单且 G^θ-正则的。命题 4.1.5.3 的证明还表明，其幺幂部分 $u = 1$。由引理 4.5.5.1 即得。□

4.5.6. 指数映射。 — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$ 和$\sigma \in S_{p'}(F)$是一个半单元素。对于任意子空间 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}$，记 $\mathfrak{v}_\sigma$ 为 $\mathfrak{v}$ 中 σ的中心化子。指数映射 exp 将幂零锥 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\mathfrak{g}$ 同构地映到幺幂簇 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G$上。通过限制，特别得到从 $\mathcal{N}_\mathfrak{s} = \mathcal{N} \cap \mathfrak{s}$ 到 $\mathcal{U}_S = \mathcal{U} \cap S = \mathcal{U} \cap S^\circ$ 以及从 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\sigma} \cap \mathfrak{s} = \mathcal{N} \cap \mathfrak{s}_\sigma$ 到$\mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S = \mathcal{U}_{G_\sigma} \cap S^\circ$的同构，参见引理 4.5.5.1。根据引理 4.5.4.1 和 4.1.7.1，有一个同构

$$G^\theta \times^{G^\theta_\sigma} (\mathcal{N} \cap \mathfrak{s}_\sigma) \to S_{p', c^\flat_{p'}(\sigma)}$$

由 $(h, X) \mapsto h\sigma \exp(X) h^{-1}$ 给出，其中 $c^\flat_{p'} \colon S_{p'} \to \mathfrak{c}_{p'} \simeq \mathbf{A}^{d\nu}$ 是 §4.1.6 中定义的态射。

设 V是 F的一个有限赋值集合，包含所有阿基米德赋值且足够大。可以假设，若 $X \in (\mathcal{N} \cap \mathfrak{s}_\sigma)(\mathbb{A})$ $h \in G^\theta(\mathbb{A})$ 满足 $h\sigma \exp(X) h^{-1} \in S_{p'}(\mathcal{O}_v)$ 对于 $v \notin V$成立，那么只需将 X 和 h 同时乘以 $G^\theta_\sigma(\mathbb{A})$ 中的同一个元素，就可以假设 $h_v \in G^\theta(\mathcal{O}_v)$ 且 $X_v \in \mathfrak{s}_\sigma(\mathcal{O}_v)$ 对于 $v \notin V$成立。当然， V取决于 σ。

定义一个包含 0 的开集 $\omega_V \subset \mathfrak{g}(F_V)$，条件如下：$(X_v)_{v \in V} \in \omega_V$当且仅当对于任意 $v \in V$，X_v 的特征多项式的（非首项）系数的绝对值为 $< \varepsilon_v$。当 ε_v 足够小时，指数映射给出从 ω_V 到 $G(F_V)$ 的一个开集 Ω_V 的解析同构。容易证明，映射 $X \mapsto \sigma \exp(X)$ 诱导出一个解析同构

$$\mathfrak{s}_\sigma(F_V) \cap \omega_V \to S_\sigma(F_V) \cap (\sigma \Omega_V).$$

设 ω'_V $S'_\sigma(F_V) \cap (\sigma\Omega_V)$ 在此同构下的原像为 ω'_V。于是 ω'_V是$\mathfrak{s}_\sigma(F_V) \cap \omega_V$的一个开集。由引理 4.5.4.1 可知，映射

$$G^\theta(F_V) \times \omega'_V \to S(F_V)$$

给定的 par $(h, X) \mapsto h\sigma \exp(X) h^{-1}$ 在一个开集 $\Omega'_V \subset S(F_V)$ 上是解析浸没。

考虑 $\varphi = \varphi_V \otimes \mathbf{1}_{S_{p'}(\mathcal{O}^V)}$，其中 $\varphi_V \in C_c^\infty(S_{p'}(F_V))$。假设 $\mathrm{supp}(\varphi_V) \subset \Omega'_V$。存在一个函数 $f_V \in C_c^\infty(G^\theta(F_V) \times \omega'_V)$，使得

$$\int_{G^\theta_\sigma(F_V)} f_V(h^{-1} y^{-1}, \mathrm{Ad}(y)(X))\, dy = \varphi_V(\mathrm{Int}(h^{-1})(\sigma \exp(X)))$$

对任意 $h \in G^\theta(F_V)$ 及任意 $X \in \omega'_V$。令 $f^V = \mathbf{1}_{G^\theta(\mathcal{O}^V)} \otimes \mathbf{1}_{\mathfrak{s}_\sigma(\mathcal{O}^V)}$，并令 $f = f_V \otimes f^V \in C_c^\infty((G^\theta \times \mathfrak{s}_\sigma)(\mathbb{A}))$。于是有

$$\int_{G^\theta_\sigma(\mathbb{A})} f(h^{-1} y^{-1}, \mathrm{Ad}(y)(X))\, dy = \varphi(\mathrm{Int}(h^{-1})(\sigma \exp(X)))$$

对于任意 $h \in G^\theta(\mathbb{A})$ 和任意 $X \in (\mathcal{N} \cap \mathfrak{s}_\sigma)(\mathbb{A})$。

4.5.7. 一个预备公式。 — 设 $0 \leqslant p' \leqslant N$和 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p'}(F)$。设 $P_1 \in \mathcal{F}(P_0^\theta)$，且$\sigma \in (M_{P_1} \cap S_{p',\, \mathfrak{o}})(F)$ 是一个半单的 (P_1, θ)- 非迷向元素。根据推论 4.5.2.4，有

$$A_{M_1} = A_{M_{1,\sigma}} \cap A_{M_1^\theta} = A_{M_{1,\sigma}^\theta} = A^\theta_{M_{1,\sigma}}. \tag{4.5.7.1}$$

由于 $M_{1,\sigma}^{\theta}$ 模 $A_{M_{1,\sigma}^{\theta}}$ 各向异性（见 §4.5.2），有序对 $(P_{1,\sigma}^{\theta}, M_{1,\sigma}^{\theta})$ 由 G_{σ}^{θ} 的一个极小抛物子群及其一个 Levi 因子组成。由命题 4.5.1.1 可知，G_{σ} 中 G_{σ}^{θ} 的一个极大分裂环面的中心化子是 G_{σ} 的一个极小抛物子群的 Levi 因子。因此，(4.5.7.1) 推出有序对 $(P_{1,\sigma}, M_{1,\sigma})$ 由 G_{σ} 的一个极小抛物子群及其一个 Levi 因子组成。

G_{σ} 的一个抛物子群若包含$P_{1,\sigma}^{\theta}$，则称为相对标准。令$\mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta})$表示 G_{σ}中相对标准的抛物子群集合。

命题 4.5.7.1。— 有

$$\mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta}) \subset \mathcal{F}^{G_{\sigma}}(M_{1,\sigma}).$$

证明。— 考虑 $R \in \mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta})$。有$A_{M_{1,\sigma}^{\theta}} \subset R$。由上述讨论，$G_{\sigma}$ 中$A_{M_{1,\sigma}^{\theta}}$的中心化子是一个极小 Levi 因子$M_{1,\sigma}$。取 G_{σ} 的一个极大分裂环面 T，使得$A_{M_{1,\sigma}^{\theta}} \subset T \subset R$。那么 R 包含 G_{σ} 中 T的中心化子。该中心化子是包含于$M_{1,\sigma}$中的一个极小 Levi 因子，因此必为$M_{1,\sigma}$。□

令 $P \in \mathcal{F}(P_0^{\theta})$以及 $\gamma \in (M_P \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$。$\gamma$的半单部分 γ_s在 $M_P^{\theta}(F)$下与$(M_{P_2} \cap S)(F)$中的一个 (P_2, θ)-非迷向元素共轭，其中 $P_2 \in \mathcal{F}^P(P_0^{\theta})$。利用命题 4.1.4.5和引理 4.5.5.1，我们便可写成

$$\gamma = \mu^{-1} w \sigma u w^{-1} \mu \tag{4.5.7.2}$$

où

$$\mu \in M_P^{\theta}(F), w \in W^{\theta}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2), \text{ et } u \in (\mathcal{U}_{G_{\sigma}} \cap M_{P_w} \cap S^{\circ})(F).$$

若 T是连通约化群 H的环面，则记 $W(H, T)$ 为相应的魏尔群。

命题 4.5.7.2.— 韦尔群元素 w 模去左乘 $W(M_P^{\theta}, A_2)$ 和右乘 $W(G_{\sigma}^{\theta}, A_1)$后唯一确定。

证明。—由此可得 (4.5.7.2) 蕴含 $\gamma_s = \mu^{-1} w \sigma w^{-1} \mu$。设 $\gamma_s = \mu_*^{-1} w_* \sigma w_*^{-1} \mu_*$满足 $\mu_* \in M_P^{\theta}(F)$ 和 $w_* \in W^{\theta}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$。由于 $A_1 = A_{M_{1,\sigma}^{\theta}}$是 G_{σ}^{θ}的极大分裂环面，可知 $A_2 = A_{M_{2,w\sigma w^{-1}}^{\theta}}$ 是 $M_{P,w\sigma w^{-1}}^{\theta}$的极大分裂环面。但我们有

$$\mu_* \mu^{-1} (w \sigma w^{-1}) \mu \mu_*^{-1} = w_* \sigma w_*^{-1}. \tag{4.5.7.3}$$

由此可得，$\mu_* \mu^{-1} A_2 \mu \mu_*^{-1}$和 A_2 是 $M_{P,w_*\sigma w_*^{-1}}^{\theta}$的两个极大分裂环面。因此，存在一个 $m \in M_{P,w_*\sigma w_*^{-1}}^{\theta}(F)$，使得 $m\mu_*\mu^{-1}$正规化 A_2。设 $n = m\mu_*\mu^{-1} \in M_P^{\theta}(F)$。由 (4.5.7.3) 可得 $w_*^{-1} n w \in G_{\sigma}^{\theta}(F)$。此外，$w_*^{-1} n w$ 正规化 A_1。我们已证明，对某个正规化 A_1 的 $v \in G_{\sigma}^{\theta}(F)$，有 $w_* = nwv$，这就完成了证明。□

若固定 w，则 μ在相差左乘 $(M_P^{\theta} \cap w G_{\sigma} w^{-1})(F)$的意义下唯一确定。元素 u由 μ和 w唯一确定。设 $W^{\theta}(\mathfrak{a}_1; P, G_{\sigma})$ 为满足以下条件的元素$w \in W^{\theta}(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$的并集：对于 $P_2 \in \mathcal{F}^P(P_0^{\theta})$，$w^{-1}\alpha$ 对每个根 $\alpha \in \Delta_{P_2^{\theta}}^{P^{\theta}}$都是正的，且$w\beta$ 对 $(G_{\sigma}^{\theta}, A_1)$的每个正根 β 都是正的；换言之

$$w(P_{1,\sigma}^{\theta}) w^{-1} = P_{2,w\sigma w^{-1}}^{\theta}. \tag{4.5.7.4}$$

设 $\varphi \in C_c^{\infty}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 且 $x \in G^{\theta}(\mathbb{A})$。由命题 4.1.4.5 和 4.5.7.2 可知，在 (4.4.12.1) 中定义的表达式$\sim K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x)$ 等于

$$\sum_{w \in W^{\theta}(\mathfrak{a}_1; P, G_{\sigma})} \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{u \in (\mathcal{U}_{G_{\sigma}} \cap M_{P_w} \cap S^{\circ})(F)} \int_{((\mu^{-1} w \sigma u w^{-1} \mu N_{P, \mu^{-1} w \sigma w^{-1} \mu}) \cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\nu x)^{-1}(y))\, dy$$

其中关于 μ 和 ν 的求和分别取遍

$$\mu \in (M_P^\theta \cap wG_\sigma w^{-1})(F)\backslash M_P^\theta(F)$$

et

$$\nu \in N^\theta_{P,\mu^{-1}w\sigma w^{-1}\mu}(F)\backslash N_P^\theta(F).$$

合并关于 μ 和 ν的求和，可得

$$\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)} \sum_{\pi} \sum_{u\in(\mathcal{U}_{G_\sigma}\cap M_{P_w}\cap S^\circ)(F)} \int_{((w\sigma uw^{-1}N_{P,w\sigma w^{-1}})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\pi x)^{-1}(y))\,dy$$

其中关于 π 的求和取遍

$$\pi \in (P^\theta \cap wG_\sigma w^{-1})(F)\backslash P^\theta(F).$$

设 $T \in T_0 + \overline{\mathfrak{a}_0^+}$为一个截断参数。将$\widetilde{K}_{P,\ \mathfrak{o},\ \varphi}(x)$的表达式代入求和

$$\sum_{\delta\in P^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x)-T_P)\widetilde{K}_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x) \tag{4.5.7.5}$$

该求和出现在$\widetilde{K}^T_{\mathfrak{o},\ \varphi}(x)$的定义(4.4.12.2)中。我们改变关于 δ 和 w 的求和次序，然后合并关于 π 和 δ的求和。表达式(4.5.7.5)变为

$$\sum_{w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)} \sum_{\xi} \hat{\tau}_P(H_P(\xi x)-T_P) \sum_{u\in(\mathcal{U}_{G_\sigma}\cap M_{P_w}\cap S^\circ)(F)} \int_{((w\sigma uw^{-1}N_{P,w\sigma w^{-1}})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\xi x)^{-1}(y))\,dy$$

其中关于 ξ 的求和取遍

$$\xi \in (P^\theta \cap wG_\sigma w^{-1})(F)\backslash G^\theta(F).$$

将 ξ 替换为 $w\xi$ 并利用(2.3.6.1)，可见(4.5.7.5)等于

$$\sum_{w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)} \sum_{\xi} \hat{\tau}_{P_w}(H_{P_w}(\xi x)-T_{P_w}) \sum_{u\in(\mathcal{U}_{G_\sigma}\cap M_{P_w}\cap S^\circ)(F)} \int_{((\sigma uN_{P_w,\sigma})\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\xi x)^{-1}(y))\,dy$$

其中，对 ξ 的求和取遍

$$\xi \in (P_w^\theta \cap G_\sigma)(F)\backslash G^\theta(F).$$

Soit

$$R = P_{w,\sigma}.$$

根据 (4.5.7.4)，这是 G_σ 的一个相对标准抛物子群。最终得到 (4.5.7.5) 等于

$$\sum_{w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)} \sum_{\xi\in R^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} \hat{\tau}_{P_w}(H_{P_w}(\xi x)-T_{P_w}) \sum_{u\in(\mathcal{U}_{M_R}\cap S^\circ)(F)} \int_{((\sigma uN_R)\cap S_{p'})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(\xi x)^{-1}(y))\,dy.$$

现在可以改写 (4.4.12.2)。对一切 $R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P^\theta_{1,\sigma})$，设

$$K^{\mathrm{unip}}_{R,\varphi}(x) = \sum_{u\in(\mathcal{U}_{M_R}\cap S^\circ)(F)} \int_{((uN_R)\cap S^\circ)(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\sigma y))\,dy. \tag{4.5.7.6}$$

根据引理 4.5.5.1，有 $(\sigma u N_R)\cap S_{p'}=\sigma((uN_R)\cap S^\circ)$。于是 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(x)$ 等于

$$\sum_{u\in(\mathcal{U}_{M_R}\cap S^\circ)(F)}\int_{((\sigma uN_R)\cap S_{p'})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(y))\,dy.$$

由此可得，$\widetilde{K}^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x)$ 等于对 $R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_1^\theta,\sigma)$ 和 $\xi\in R^\theta(F)\backslash G^\theta(F)$ 求和所得的 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(\xi x)$ 与

$$\sum_{P,w}\varepsilon^G_{P_w}\hat{\tau}_{P_w}(H_{P_w}(\xi x)-T_{P_w})$$

其中，对 P 和 w 的求和是在集合

$$\{P\in\mathcal{F}(P_0^\theta),w\in W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)|P_{w,\sigma}=R\}. \tag{4.5.7.7}$$

对于任意 $R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_1^\theta,\sigma)$，定义集合（根据引理 4.5.10.1，该集合可能为空）

$$\mathcal{F}_R(M_1)=\{Q\in\mathcal{F}(M_1)|Q_\sigma=R\}.$$

命题 4.5.7.3.—设 $R\in F^{G_\sigma}(P_1^\theta,\sigma)$。映射

$$(P,w)\mapsto P_w \tag{4.5.7.8}$$

诱导出一个双射，将(4.5.7.7)映到 $F_R(M_1)$。

证明。— 设 $Q\in\mathrm{F}_R(M_1)$。存在唯一的元素 $P\in\mathrm{F}(P_0^\theta)$ 和一个元素$w\in W^\theta$，使得 $Q=P_w$。我们要求对于任意根 $\alpha\in\Delta_0^{P^\theta}$，$w^{-1}\alpha$ 都是正的，从而 w 也唯一确定。由于 $w\mathfrak{a}_1$ 包含 $w\mathfrak{a}_Q=\mathfrak{a}_P$，可知$w\mathfrak{a}_1$具有如下形式：对于某个元素 $P_2\in\mathrm{F}^P(P_0^\theta)$，$w\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$；否则，$w^{-1}$会将 $\Delta_0^{P^\theta}$ 的根的非单根的正线性组合映射为 $\Delta_0^{P_1^\theta}$ 的单根，这就产生了矛盾。此外，由于 $P=wQw^{-1}\supset wRw^{-1}$，有 $P^\theta\supset(wRw^{-1})^\theta\supset wP_{1,\sigma}^\theta w^{-1}$。结合关于 w 的假设可知，对于 (G_σ^θ,A_1) 的任意正根 β，$w\beta$ 都是正的。因此，w 在 $\mathfrak{a}_1$ 上的限制定义了 $W^\theta(\mathfrak{a}_1;P,G_\sigma)$ 中唯一的一个元素。这样，我们就找到了映射 (4.5.7.8) 的一个逆映射。□

总之，我们已经建立了以下 [Art86 引理 3.1] 的类比。

引理 4.5.7.4。——设 $\varphi\in C_c^\infty(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 和 $x\in G^\theta(\mathbb{A})$。对于任意 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$，$\widetilde{K}^T_{\mathfrak{o},\varphi}(x)$ 等于对 $R\in F^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta)$ 和 $\xi\in R^\theta(F)|G^\theta(F)$ 求和所得的 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(\xi x)$ 与.....的乘积

$$\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(\xi x)-T_P). \tag{4.5.7.9}$$

4.5.8. 继续使用 §4.5.7 中的记号。特别地，对于 $\varphi\in C_c^\infty(S_{p'}(\mathbb{A}))$、$x\in G^\theta(\mathbb{A})$ 和 $R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_1^\theta,\sigma)$，我们已在 (4.5.7.6) 中定义了 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(x)$。对于 $u\in(\mathcal{U}_{M_R}\cap S^\circ)(F)$，我们记作 $u=$指数映射(U)，其中 $U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)$。假设测度得到保持，我们通过指数映射将 $((uN_R)\cap S^\circ)(\mathbb{A})$ 与 $U+(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})$ 等同。在 §4.5.6 中，我们已证明存在一个依赖于 φ 的函数$f\in C_c^\infty((G^\theta\times\mathfrak{s}_\sigma)(\mathbb{A}))$，使得

$$\begin{aligned}K^{\mathrm{unip}}_{R,\varphi}(x)&=\sum_{U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)}\int_{(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\sigma\exp(U+V)))\,dV\\&=\sum_{U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)}\int_{(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})}f(x^{-1}z^{-1},\mathrm{Ad}(z)(U+V))\,dzdV.\end{aligned} \tag{4.5.8.1}$$

对于任意 $h \in G^\theta(\mathbb{A})$，可以引入函数

$$\Psi_h(X) = \int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})} f(h^{-1}z^{-1}, \mathrm{Ad}(z)(X))\, dz, \tag{4.5.8.2}$$

它在 $\mathfrak{s}_\sigma(\mathbb{A})$ 上是光滑的。对于 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$ 和 $h \in G_\sigma^\theta(\mathbb{A})$，有

$$\Psi_{hx}(X) = \Psi_x(\mathrm{Ad}(h^{-1})(X)).$$

因此有

$$K_{R,\varphi}^{\mathrm{unip}}(x) = \sum_{U \in \mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R \cap \mathfrak{s}}(F)} \int_{(\mathfrak{n}_R \cap \mathfrak{s})(\mathbb{A})} \Psi_x(U+V)\, dV. \tag{4.5.8.3}$$

4.5.9. 设 H 是定义在 F 上的连通约化群。设 $X_*(H)$ 是 H 定义在 F 上的代数余特征群。对于任意 $\lambda \in X_*(H)$，记 $\mathbf{P}_H(\lambda)$ 为由满足 $\lim_{a\to 0} \lambda(a)x\lambda(a)^{-1}$ 存在的 $x \in H$ 构成的闭子群。它是定义在 F 上的 H 的一个抛物子群（参见 [Spr09，第 13.4] 节）。

4.5.10. 组合引理。 —下一步是将关于 G 的抛物子群的和 (4.5.7.9) 转换为关于 G_σ 的抛物子群的和。

设 $\sigma \in S(F)$ 是一个半单元素。假设 $\sigma \in (M_1 \cap S)(F)$ 是 (M_1, θ)-非迷向的，且 $M_1 \in \mathcal{L}(M_0)$；换言之，对于 M_1 的任意真半标准 Levi 子群 M，σ 的 $M_1^\theta(F)$-共轭类都不与 $M(F)$ 相交。与 §4.5.7 开头一样，我们得到一个对称对 $(G_\sigma, G_\sigma^\theta)$，其 Levi 子群 $M_{1,\sigma}$ 和 $M_{1,\sigma}^\theta$ 定义在 F 上，且分别是 G_σ 和 G_σ^θ 的极小 Levi 子群。根据命题 4.5.2.1，等式 (4.5.7.1) 仍成立。若 G_σ 的一个抛物子群包含 $M_{1,\sigma}$，则称其为半标准抛物子群。令 $\mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma})$ 表示 G_σ 的半标准抛物子群集合。记

$$\mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta) = \{R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}) | \theta R \theta = R\}. \tag{4.5.10.1}$$

引理 4.5.10.1.— 映射

$$P \mapsto P_\sigma$$

诱导从 $F(M_1)$ 到 $F^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta)$ 的满射。

D证明。 — 由于 $\sigma \in S$，我们有 $\theta\sigma\theta = \sigma^{-1}$。于是对一切 $P \in \mathcal{F}(M_1)$，我们有

$$\theta(P_\sigma)\theta = P_{\theta\sigma\theta} = P_{\sigma^{-1}} = P_\sigma$$

也就是说 $P_\sigma \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta)$。设 $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta)$。根据 [HW93，引理 3.3]，存在 $\lambda \in X_*(A_{M_{1,\sigma}}^\theta)$，使得 $R = \mathbf{P}_{G_\sigma}(\lambda)$。设 $P = \mathbf{P}_G(\lambda)$。由 (4.5.7.1)，我们有 $\lambda \in X_*(A_{M_1})$，从而 $P \in \mathcal{F}(M_1)$。由于 $R = P \cap G_\sigma$，满射性是显然的。□

设 $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta)$。对 θ 在其上作用的任意 $\mathbb{R}$-向量空间 W，记 W^θ 为由 θ 固定的向量所成的子空间。于是我们有

$$\mathfrak{a}_R^\theta = \mathfrak{a}_G \oplus (\mathfrak{a}_{G_\sigma}^G)^\theta \oplus (\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta. \tag{4.5.10.2}$$

定义以下集合：$\mathcal{F}_R^0(M_1) \subset \mathcal{F}_R(M_1) \subset \bar{\mathcal{F}}_R(M_1)$：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_R^0(M_1) &= \{P \in \mathcal{F}(M_1) | P_\sigma = R, \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_R^\theta\},\\
\mathcal{F}_R(M_1) &= \{P \in \mathcal{F}(M_1) | P_\sigma = R\},\\
\bar{\mathcal{F}}_R(M_1) &= \{P \in \mathcal{F}(M_1) | P_\sigma \supset R\}.
\end{aligned}$$

由于在本段的其余部分中只会使用 G 和 G_σ 的半标准抛物子群，根据命题 4.1.5.3，不失一般性，可以假设$\sigma = x(A,\ r,\ t)$，其中 A 具有如 §4.5.2 末尾所述的 (4.5.2.1) 形式。我们采用其中引入的记号。根据 (4.5.2.2) 和 (4.5.2.5)，有

$$R \simeq \prod_{1\leqslant\alpha\leqslant i} (R_\alpha \times R_\alpha) \times \prod_{1\leqslant\beta\leqslant j} R'_\beta \times R_+ \times R_- \tag{4.5.10.3}$$

其中 R_α、R'_β、R_+ 和 R_- 分别是.....的半标准抛物子群

$$\mathrm{Res}_{L_\alpha/F} GL_{s_\alpha,D_\alpha}, \mathrm{Res}_{K'_\beta/F} GL_{k_\beta,D'_\beta\otimes_{L'_\beta}K'_\beta}, GL_{p+q-2m-r-t,D} \text{ et } GL_{r+t,D}$$

~对所有 $1 \leqslant \alpha \leqslant i$ 和 $1 \leqslant \beta \leqslant j$ 均成立。由 (4.5.2.4) 和 (4.5.2.6)，存在唯一的 $R \in \mathcal{F}^{\mathrm{Cent}_{G_{(A^\theta_{G_\sigma})}}}(M_1)$，使得 $\tilde{R}_\sigma = R$。事实上，映射

$$R \mapsto \tilde{R} \tag{4.5.10.4}$$

诱导出从 $\mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma},\theta)$ 到 $\mathcal{F}^{\mathrm{Cent}_{G_{(A^\theta_{G_\sigma})}}}(M_1)$ 的双射。此外，有 $A^\theta_R = A_{\tilde{R}}$。特别地，有 $\widetilde{G_\sigma} = \mathrm{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma})$ 和 $A^\theta_{G_\sigma} = A_{\widetilde{G_\sigma}}$。因此，可以将分解 (4.5.10.2) 改写为

$$\mathfrak{a}_{\tilde{R}} = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}^G_{\widetilde{G_\sigma}} \oplus \mathfrak{a}^{\widetilde{G_\sigma}}_{\tilde{R}}.$$

对于 $P \in \mathcal{F}(M_1)$，有 $P^* = P \cap \mathrm{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma}) \in \mathcal{F}^{\mathrm{Cent}_{G_{(A^\theta_{G_\sigma})}}}(M_1)$，且 $P_\sigma = P^*_\sigma$。换言之，$P_\sigma = R$（分别为 $P_\sigma \supset R$）当且仅当 $P^* = \tilde{R}$（分别为 $P^* \supset \tilde{R}$）。若 $P_\sigma = R$，则有 $A_{P^*} = A^\theta_R$。~对任意 $P \in \mathcal{F}_R(M_1)$，定义

$$\mathcal{F}^{P_\sigma}(R,\theta) = \{Q \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma},\theta) | R \subset Q \subset P_\sigma\}.$$

设 $\mathcal{F}^{P^*}(\tilde{R})$ 为包含于 P^* 且包含$\tilde{R}$的 $\mathrm{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma})$ 的抛物子群集合。映射 (4.5.10.4) 也诱导出从 $\mathcal{F}^{P_\sigma}(R,\theta)$ 到 $\mathcal{F}^{P^*}(\tilde{R})$ 的双射。

引理 4.5.10.2.— 集合 $F^0_R(M_1)$ 非空。

证明。— 设 $Q \in \mathcal{F}(M_1)$ 是一个满足 $M_Q = \mathrm{Cent}_G(A^\theta_{G_\sigma})$ 的抛物子群。那么 $P = \tilde{R}N_Q \in \mathcal{F}(M_1)$ 满足 $P_\sigma = P^*_\sigma = \tilde{R}_\sigma = R$ 和 $A_P = A_{P^*} = A^\theta_R$。□

引理 4.5.10.3.— 设 M 为 G 中 A^θ_R 的中心化子。

1. 有 $M = M_{\tilde{R}}$ 和 $A_M = A^\theta_R$。*2.* 群 M 是 $L(M_1)$ 中满足以下条件的唯一元素

$$\mathcal{F}^0_R(M_1) \subset \mathcal{P}(M).$$

3. 集合 $F^0_R(M_1)$ 是 $P(M)$ 中的一个凸族，其意义见 *[复数域Z21]* 的附录 *A*。

证明。— 由于 $A^\theta_R = A_{\tilde{R}}$，有 $M = \mathrm{Cent}_G(A^\theta_R) = \mathrm{Cent}_G(A_{\tilde{R}}) = M_{\tilde{R}}$，于是$A_M = A_{\tilde{R}} = A^\theta_R$，由此得断言 1。

由于 A^θ_R 是连通的，对任意 $P \in \mathcal{F}^0_R(M_1)$，都有 $A^\theta_R = A_P$，于是 $M = \mathrm{Cent}_G(A^\theta_R) = \mathrm{Cent}_G(A_P) = M_P$，由此得断言 2。

根据以上讨论，我们有

$$\mathcal{F}^0_R(M_1) = \{P \in \mathcal{F}(M_1) | P_\sigma = R, \mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}^\theta_R\} = \{P \in \mathcal{F}(M_1) | P^* = \tilde{R}, A_P = A^\theta_R\}.$$

根据前两个断言，可以写成

$$\mathcal{F}^0_R(M_1) = \{P \in \mathcal{P}(M) | P^* = \tilde{R}\}. \tag{4.5.10.5}$$

对于任意 $P\in\mathcal{P}(M)$，记 $\Phi(G,A_M)$（分别记为 $\Phi(P,A_M)$）为 A_M在G（分别在 P）上的约化根集。对于任意 $\alpha\in\Phi(G,A_M)$，令 $H(\alpha)^+$ 为满足 $\alpha\in\Phi(P,A_M)$ 的 $P\in\mathcal{P}(M)$ 的集合。˜ ˜记 $\Phi(R,A_{\tilde{R}})$ $\subset\Phi(G,A_M)$ 为 $A_{\tilde{R}}=A_M$在 R上的约化根子集。于是有

$$\mathcal{F}_R^0(M_1)=\bigcap_{\alpha\in\Phi(\tilde{R},A_{\tilde{R}})}H(\alpha)^+.$$

断言 3 随即由 [CZ21，引理 A.0.3.1] 得出。 □

引理 4.5.10.4。—函数

$$\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X),\forall X\in\mathfrak{a}_R^\theta \tag{4.5.10.6}$$

等于集合的特征函数

$$\{X\in\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta|\varpi(X)\leqslant 0,\forall\varpi\in\hat{\Delta}_R^{G_\sigma}\}. \tag{4.5.10.7}$$

˜**证明**。— 设 $M=M_{\tilde{R}}$。存在 $\lambda\in X_*(A_M)$，使得 $R=\mathbf{P}_{\mathrm{Cent}_G(A_{G_\sigma}^\theta)}(\lambda)$。根据我们的讨论，可以写成

$$\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)=\{P\in\mathcal{F}(M)|P^*\supset\tilde{R}\}.$$

– ˜对于 $P\in\mathcal{F}_R(M_1)$，存在 $\mu\in X_*(A_P)$，使得 $P=\mathbf{P}_G(\mu)$。有 $\mathbf{P}_{\mathrm{Cent}_G(A_{G_\sigma}^\theta)}(\mu)=P^*\supset R$。注意，序列 $\mathbf{P}_G(\lambda\mu^n)$ $n\in\mathbb{N}$ 当整数 n 足够大时趋于稳定。设 $Q=\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_G(\lambda\mu^n)$。由 (4.5.10.5)，可得 $Q\in\mathcal{F}_R^0(M_1)$ 且 $Q\subset P$。我们已证明

$$\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)=\{P\in\mathcal{F}(M)|\exists Q\in\mathcal{F}_R^0(M_1),Q\subset P\}. \tag{4.5.10.8}$$

于是由 [CZ21，引理 A.0.5.3] 以及引理 4.5.10.3 可知，(4.5.10.6) 等于该集合的特征函数

$$\{X\in\mathfrak{a}_M|\varpi(X)\leqslant 0,\forall P\in\mathcal{F}_R^0(M_1),\forall\varpi\in\hat{\Delta}_P\}. \tag{4.5.10.9}$$

显然，该集合在 $\mathfrak{a}_G$的平移下不变。

如同引理 4.5.10.2 的证明，设 $Q\in\mathrm{F}(M_1)$为一个抛物子群，使得 $M_Q=\widetilde{G_\sigma}$，并设 $P\dagger=\tilde{R}N_Q\in\mathrm{F}_R^0(M_1)$。记 Q为相对于 Q的半标准反抛物子群。于是$P^\ddagger=\tilde{R}N_Q\in\mathrm{F}_R^0(M_1)$。设 $X\in\mathfrak{a}_M^G$为 (4.5.10.9) 中的一个元素。按分解$\mathfrak{a}_M^G=\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G\oplus\mathfrak{a}_M^{G_\sigma}$写出$\backsim X=X_1+X_2$。由于对所有 $\alpha\in\Delta_{P\dagger}$有 $\varpi_\alpha(X)\leqslant 0$，特别地，对所有$\alpha\in\Delta_{P\dagger}-\Delta_{P\dagger}^Q$有 $\varpi_\alpha(X_1)=\varpi_\alpha(X)\leqslant 0$，也就是说对所有 $\varpi\in\hat{}\Delta_Q$有 $\varpi(X_1)\leqslant 0$。同样，将 $P^\dagger$替换为 $P\ddagger$，则对所有 $\varpi\in\hat{}\Delta_Q$有 $\varpi(X_1)\leqslant 0$。由此$\hat{}$推出，对所有 $\varpi\in\Delta_Q$ 有 $\varpi(X_1)=0$，换言之 $X_1=0$。我们已证明，(4.5.10.9) 中任一元素在 $\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G=(\mathfrak{a}_{G_\sigma}^G)^\theta$ 中的投影为零。

设$X\in(\mathfrak{a}_{G_\sigma}^{G_\sigma})^\theta$是 (4.5.10.9) 的一个元素。性质 $\varpi_\alpha(X)\leqslant 0$ 对任意 $\alpha\in\backsim\Delta_{P\dagger}^Q\subset\Delta_{P\dagger}$都成立，这意味着 $\varpi(X)\leqslant 0$对任意 $\varpi\in\hat{}\Delta_{P\dagger}^Q=\hat{}\Delta_{\tilde{R}}^{G_\sigma}$都成立。我们已经证明 (4.5.10.9) 是 (4.5.10.7) 的一个子集。

对于欧几里得空间 $\mathfrak{a}_M^G$ 中任意的锥 C，参见 §2.1.10，记 $C^\vee$ 为对偶锥，并记 $-C=\{-X|X\in C\}$。对于两个非空子集 $A,B\subset\mathfrak{a}_M^G$，记 $A+B$ 为它们的闵可夫斯基和。设 $P\in\mathcal{F}_R^0(M_1)$。根据 (4.5.10.5)，有 $P\cap\widetilde{G_\sigma}=\tilde{R}$ 和 $\mathfrak{a}^{G,}{}_P{}^+\subset\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G+\mathfrak{a}^{G_\sigma,\tilde{R}}{}^+$。但是

$$-\overline{\mathfrak{a}_P^{G,+}}^\vee=\{X\in\mathfrak{a}_M^G|\varpi(X)\leqslant 0,\forall\varpi\in\hat{\Delta}_P\} \tag{4.5.10.10}$$

et

$$\overline{-\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^{G}+\mathfrak{a}_{\tilde{R}}^{\widetilde{G_\sigma},+}}^{\vee}=\{X\in\mathfrak{a}_{M}^{\widetilde{G_\sigma}}|\varpi(X)\leqslant 0,\forall\varpi\in\hat{\Delta}_{\tilde{R}}^{\widetilde{G_\sigma}}\}. \tag{4.5.10.11}$$

由此得　　可知 (4.5.10.11) 是 (4.5.10.10) 的子集。因此，(4.5.10.7) 是一个子——到集合　式（4.5.10.9）。

总之，我们已证明集合（4.5.10.9）与（4.5.10.7）相等，由此得证。 □

引理 4.5.10.5。— 对于 $X\in\mathfrak{a}_R^\theta$ 有

$$\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X)=\begin{cases}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta}\hat{\tau}_R^{G_\sigma}(X) & si\ X\in\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta\ ;\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

¯**证明**。 — 对任意 $P\in\mathcal{F}_R(M_1)$，映射

$$Q\mapsto\Delta_R^Q,\ \text{resp. } Q\mapsto\hat{\Delta}_Q^{P_\sigma},$$

在 $\Delta_R^{P_\sigma}$（分别在 $\hat{}\Delta_R^{P_\sigma}$）的所有 θ-稳定子集上，诱导出一个从 $\mathcal{F}^{P_\sigma}(R,\theta)$ 出发的双射。这是 [LW13 引理 2.7.1] 的一个特例。根据二项式公式，参见 [Art78，命题 1.1]，有

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}^{P_\sigma}(R,\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^Q)^\theta}=\begin{cases}1 & \text{si } R=P_\sigma\ ;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

因此得到

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X)&=\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X)\left(\sum_{Q\in\mathcal{F}^{P_\sigma}(R,\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^Q)^\theta}\right)\\ &=\sum_{Q\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^Q)^\theta}\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_Q(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X).\end{aligned} \tag{4.5.10.12}$$

如果 $X\notin\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta$，那么对于任意 $Q\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)$，都有 $X\notin\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_Q^{G_\sigma})^\theta$。在这种情况下，由引理 4.5.10.4 可知，最后一个表达式为零。现在假设 $X\in\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta$。注意，集合 $\{\varpi\in\hat{}\Delta_R^{G_\sigma}|\varpi(X)\leqslant 0\}$ 是 $\hat{}\Delta_R^{G_\sigma}$ 的一个 θ-稳定子集。因此，存在唯一的 $R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)$，使得

$$\hat{\Delta}_{R'}^{G_\sigma}=\{\varpi\in\hat{\Delta}_R^{G_\sigma}|\varpi(X)\leqslant 0\}. \tag{4.5.10.13}$$

设 $Q\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\ \theta)$。注意到

$$\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_Q(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X)=\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_Q(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X_Q). \tag{4.5.10.14}$$

若此表达式非零，则由引理 4.5.10.4 可知 $\varpi(X)=\varpi(X_Q)\leqslant 0$ 对所有$\varpi\in\hat{}\Delta_Q^{G_\sigma}$均成立，换言之，$\hat{}\Delta_Q^{G_\sigma}\subset\hat{}\Delta_{R'}^{G_\sigma}$，也就是说 $R'\subset Q$。若 $R'\subset Q$，则有 $\varpi(X_Q)=\varpi(X)\leqslant 0$对所有 $\varpi\in\hat{}\Delta_Q^{G_\sigma}\subset\hat{}\Delta_{R'}^{G_\sigma}$ 均成立，这意味着 (4.5.10.14) 等于 1。因此，表达式 (4.5.10.12) 变为

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R',\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^Q)^\theta}=\begin{cases}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta} & \text{si } R'=G_\sigma\ ;\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

但根据 (4.5.10.13)， $R'=G_\sigma$ 当且仅当 $\varpi(X)>0$ 对所有 $\varpi\in\hat{}\Delta_R^{G_\sigma}$均成立，也就是说，$\hat{}\tau_R^{G_\sigma}(X)=1$。引理得证。□

引理 4.5.10.6。— 对于 $X\in\mathfrak{a}_R^\theta$ 有

$$\sum_{Q\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)}\varepsilon_Q^G\tau_R^{Q_\sigma}(X)\hat{\tau}_Q(X)=\begin{cases}1 & si\ R=G_\sigma\ et\ X\in\mathfrak{a}_G\ ;\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Démo证明。— 利用引理 4.5.10.1，可见左边的表达式等于

$$\sum_{P\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)}\tau_R^P(X)\sum_{Q\in\mathcal{F}_P(M_1)}\varepsilon_Q^G\hat{\tau}_Q(X). \tag{4.5.10.15}$$

根据引理 4.5.10.5，除非 $X\in\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_R^{G_\sigma})^\theta$，否则此表达式为零。在这种情况下，对于任意 $P\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)$，有

$$\sum_{Q\in\mathcal{F}_P(M_1)}\varepsilon_Q^G\hat{\tau}_Q(X)=\sum_{Q\in\mathcal{F}_P(M_1)}\varepsilon_Q^G\hat{\tau}_Q(X_P)=(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_P^{G_\sigma})^\theta}\hat{\tau}_P^{G_\sigma}(X)$$

因为 $X_P\in\mathfrak{a}_G\oplus(\mathfrak{a}_P^{G_\sigma})^\theta$。于是表达式 (4.5.10.15) 变为

$$\sum_{P\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_P^{G_\sigma})^\theta}\tau_R^P(X)\hat{\tau}_P^{G_\sigma}(X).$$

根据 Langlands 组合引理（见 [LW13，命题 1.7.2 和引理 2.9.2]），最后的和除非 $R=G_\sigma$，否则为零；在这种情况下，该和等于 1。□

引理4.5.10.7。— 对于 $P\in\bar{}\mathcal{F}_R(M_1)$ 和 $X\in\mathfrak{a}_R^\theta$ 有

$$\sum_{Q\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1),Q\subset P}\varepsilon_Q^P\tau_R^{Q_\sigma}(X)\hat{\tau}_Q^P(X)=\begin{cases}1 & si\ P\in\mathcal{F}_R(M_1)\ et\ X\in\mathfrak{a}_P\ ;\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

¯证明。— 设 $P=MN\in\mathcal{F}_R(M_1)$ 配备其 Levi 分解。那么 $M_\sigma\cap R\in\mathcal{F}^{M_\sigma}(M_{1,\sigma},\theta)$，它定义为 (4.5.10.1) 的类比，其中 G_σ 替换为 M_σ。记

$$\bar{\mathcal{F}}^M_{M_\sigma\cap R}(M_1)=\{Q'\in\mathcal{F}^M(M_1)|Q'_\sigma\supset M_\sigma\cap R\}.$$

众所周知，映射

$$Q\mapsto M\cap Q \tag{4.5.10.16}$$

诱导出从 $\mathcal{F}^P(M_1)$ 到 $\mathcal{F}^M(M_1)$ 的双射，其逆映射由 $Q'\mapsto Q'N$ 给出。一方面，若 $Q\in\mathcal{F}^P(M_1)$ 满足 $Q_\sigma\supset R$，则有 $(M\cap Q)_\sigma=M_\sigma\cap Q_\sigma\supset M_\sigma\cap R$。另一方面，若$Q'\in\mathcal{F}^M(M_1)$ 满足 $Q'_\sigma\supset M_\sigma\cap R$，由于 $P_\sigma\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)$，则有

$$R=(M_{P_\sigma}\cap R)N_{P_\sigma}=(M_\sigma\cap R)N_\sigma \tag{4.5.10.17}$$

于是 $(Q'N)_\sigma=Q'_\sigma N_\sigma\supset(M_\sigma\cap R)N_\sigma=R$。我们已经证明，(4.5.10.16) 的限制诱导从集合 $\{Q\in\bar{}\mathcal{F}_R(M_1)|Q\subset P\}$ 到 $\bar{}\mathcal{F}^M_{M_\sigma\cap R}(M_1)$ 的一个双射。

所讨论的和与引理 4.5.10.6 中的和类似，但将 $(G,\ G_\sigma,\ R)$ 替换为 $(M,\ M_\sigma,\ M_\sigma\cap R)$，后者确实是乘积的一个类比。因此，除非$M_\sigma\cap R=M_\sigma$且 $X\in\mathfrak{a}_M=\mathfrak{a}_P$，否则它为零；在这种情况下，它等于 1。最后，根据（4.5.10.17），我们注意到 $M_\sigma\cap R=M_\sigma$当且仅当 $R=P_\sigma$。□

4.5.11. 按照 [Art81, §2], , 对任意 $P \in \mathcal{F}(M_0)$，定义

$$\Gamma_P^G(X,Y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(P)} \varepsilon_Q^G \tau_P^Q(X) \hat{\tau}_Q(X-Y), \forall X, Y \in \mathfrak{a}_0.$$

该函数仅取决于 X, Y在 $\mathfrak{a}_P^G$上的投影。它满足

$$\hat{\tau}_P(X-Y) = \sum_{Q \in \mathcal{F}(P)} \varepsilon_Q^G \hat{\tau}_P^Q(X) \Gamma_Q^G(X,Y), \forall X, Y \in \mathfrak{a}_0. \tag{4.5.11.1}$$

对任意固定的 Y，函数 $\Gamma_P^G(\cdot\ Y)$ 在 $\mathfrak{a}_P^G$上的支集是紧集，这是由 [Art81 引理 2.1] 得出的。令

$$c'_P(\lambda, Y) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma_P^G(X,Y) \exp(\langle \lambda, X \rangle) dX, \forall \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*.$$

这是关于 λ的整函数。特别地，对任意 $x \in G(\mathbb{A})$，令

$$v'_P(\lambda, x) = \int_{\mathfrak{a}_P^G} \Gamma_P^G(X, -H_P(x)) \exp(\langle \lambda, X \rangle) dX, \forall \lambda \in \mathfrak{a}_{P,\mathbb{C}}^*.$$

我们常将 $c'_P(Y)$ 和 $v'_P(x)$ 分别记作 $c'_P(\lambda, Y)$ 和 $v'_P(\lambda, x)$ 在 $\lambda = 0$ 处的值。**4.5.12.** 设 $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta)$。假设

$$\mathcal{Y}_R = \{Y_P | P \in \mathcal{F}_R^0(M_1)\}$$

是 $\mathfrak{a}_R^\theta$ 中的一个点集，且按照 [CZ21, (A.0.4.1)][2] 的意义是 A_R^θ-正交的（该定义源自 [Art76, §3]，此处使用引理 4.5.10.3）。对任意 $Q \in \mathcal{F}_R(M_1)$，根据 (4.5.10.8)，存在包含于 Q 中的 $P \in \mathcal{F}_R^0(M_1)$，并将 Y_Q 定义为Y_P 在 $\mathfrak{a}_Q$上的投影。由于我们对 $\mathcal{Y}_R$的假设， Y_Q 与 $P \subset Q$的选取无关。由此，对任意 $R' \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(R, \theta)$，可得一个 $A_{R'}^\theta$-正交集

$$\mathcal{Y}_{R'} = \{Y_Q | Q \in \mathcal{F}_{R'}^0(M_1)\}.$$

设 $X \in \mathfrak{a}_{R^\circ}^\theta$。定义

$$\Gamma_R^G(X, \mathcal{Y}_R) = \sum_{R' \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)} \tau_R^{R'}(X) \left(\sum_{Q \in \mathcal{F}_{R'}(M_1)} \varepsilon_Q^G \hat{\tau}_Q(X - Y_Q) \right).$$

设 $R' \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\ \theta)$。令

$$\mathcal{F}^{R'}(R, \theta) = \{H \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma}, \theta) | R \subset H \subset R'\}.$$

Langlands 组合引理（参见 [LW13，命题 1.7.2 和引理 2.9.2]）推出

$$\sum_{H \in \mathcal{F}^{R'}(R,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^H)^\theta} \tau_R^H(X) \hat{\tau}_H^{R'}(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } R = R'; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

由此可得

$$\sum_{P \in \mathcal{F}_R(M_1)} \varepsilon_P^G \hat{\tau}_P(X - Y_P) = \sum_{R' \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta} \hat{\tau}_R^{R'}(X) \Gamma_{R'}^G(X, \mathcal{Y}_{R'}). \tag{4.5.12.1}$$

2. 此处我们对这一概念稍作宽泛使用，因为严格来说，应当为 $\mathcal{P}(M_{\tilde{R}})$ 中的每个抛物子群关联 $\mathfrak{a}_R^\theta$ 中的一个点。

Soit

$$c'_R(\lambda,\mathcal{Y}_R)=\sum_{P\in\mathcal{F}_R^0(M_1)}c'_P(\lambda,Y_P),\forall\lambda\in\mathfrak{a}_{R,\mathbb{C}}^{\theta,*}.$$

我们常用 $c'_R(\mathcal{Y}_R)$ 表示 $c'_R(\lambda,\mathcal{Y}_R)$ 在 $\lambda=0$ 处的值。特别地，当对所有 $P\in\mathcal{F}_R^0(M_1)$ 都有 $Y_P=-H_P(x)$ 时，我们得到一个在 $x\in G(\mathbb{A})$ 上的连续函数 $v'_R(x)$。

引理 4.5.12.1.— 函数的支集

$$X\mapsto\Gamma_R^G(X,\mathcal{Y}_R),\forall X\in(\mathfrak{a}_R^G)^\theta$$

是紧集，并且连续依赖于 Y_R。此外，

$$\int_{(\mathfrak{a}_R^G)^\theta}\Gamma_R^G(X,\mathcal{Y}_R)\exp(\langle\lambda,X\rangle)\,dX=c'_R(\lambda,\mathcal{Y}_R),\forall\lambda\in\mathfrak{a}_{R,\mathbb{C}}^{\theta,*}.$$

证明. — 等式 (4.5.11.1) 推出，对于任意 $X\in\mathfrak{a}_R^\theta$,

$$\Gamma_R^G(X,\mathcal{Y}_R)=\sum_{R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)}\tau_R^{R'}(X)\left(\sum_{Q\in\mathcal{F}_{R'}(M_1)}\sum_{P\in\mathcal{F}(Q)}\varepsilon_Q^P\hat{\tau}_Q^P(X)\Gamma_P^G(X,Y_P)\right).$$

根据引理 4.5.10.1，这等于

$$\sum_{P\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1)}\Gamma_P^G(X,Y_P)\left(\sum_{Q\in\bar{\mathcal{F}}_R(M_1),Q\subset P}\varepsilon_Q^P\tau_R^{Q_\sigma}(X)\hat{\tau}_Q^P(X)\right).$$

设 $P\in\bar{\ }\mathcal{F}_R(M_1)$；有 $\mathfrak{a}_P\subset\mathfrak{a}_R^\theta$。设 $\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_P}$ 为定义在 $\mathfrak{a}_R^\theta$ 上的 $\mathfrak{a}_P$ 的特征函数。根据引理4.5.10.7，得到

$$\begin{aligned}\Gamma_R^G(X,\mathcal{Y}_R)&=\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)}\Gamma_P^G(X,Y_P)\mathbf{1}_{\mathfrak{a}_P}(X),\forall X\in\mathfrak{a}_R^\theta\\&=\sum_{P\in\mathcal{F}_R^0(M_1)}\Gamma_P^G(X,Y_P)\end{aligned}$$

对于除去一个零测集之外的所有 $X\in\mathfrak{a}_R^\theta$。为得出结论，我们使用 [Art81，引理 2.1]。□

4.5.13. 约化到幂单情形。——沿用第4.5.7段的记号。特别地，固定 $0\leqslant p'\leqslant N$, $\mathfrak{o}\in\mathfrak{c}_{p'}(F)$、 $P_1\in\mathcal{F}(P_0^\theta)$, 以及 $\sigma\in(M_{P_1}\cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$，后者是一个 (P_1,θ)-非迷向半单元素。对于任意 $Q\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta)$，令

$$\mathcal{F}^Q(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)=\{R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta)|R\subset Q,\theta R\theta=R\}.$$

对于任意 $v\in V_F$，令 $K_{\sigma,v}\in G_\sigma(F_v)$ 为相对于 $M_{1,\sigma}$ 处于良好位置的极大紧子群（依照 [Art81，第 9] 页）。根据命题 4.5.1.1，取 §2.3.2 中所述的子群。由此可得 $\mathrm{Int}(\theta)(K_{\sigma,v})=K_{\sigma,v}$，并且 $K_{\sigma,v}^\theta=K_{\sigma,v}\cap G_\sigma^\theta(F_v)$ 也是 $G_\sigma^\theta(F_v)$ 的一个极大紧子群，且相对于 $M_{1,\sigma}^\theta$ 处于良好位置。令 $K_\sigma=\prod_{v\in V}K_{\sigma,v}$，并令 $K_\sigma^\theta=\prod_{v\in V}K_{\sigma,v}^\theta$。设 $R\in\mathrm{F}^{G_\sigma}(M_{1,\sigma},\theta)$。于是，按照通常的方式，根据分解 $G_\sigma(\mathbb{A})=R(\mathbb{A})K_\sigma$，可得到一个映射 $H_R\colon G_\sigma(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_R$。通过限制可得到映射 $G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\to\mathfrak{a}_R^\theta$。对于任意 $x\in G_\sigma^\theta(\mathbb{A})$，令 $k_R(x)$ 为 x 在 K_σ^θ 中相对于分解 $G_\sigma^\theta(\mathbb{A})=R^\theta(\mathbb{A})K_\sigma^\theta$ 的分量。它在模去 $R^\theta(\mathbb{A})\cap K_\sigma^\theta$ 的左乘后唯一确定。记

$$[M_R^\theta]^R=M_R^\theta(F)\backslash M_R^\theta(\mathbb{A})\cap M_R(\mathbb{A})^1.$$

令 $T\prime\in\mathfrak{a}_{M_{1,\sigma}}^{\theta}\cap\overline{\mathfrak{a}_{P_{1,\sigma}}^{+}}$ 为相对于 $(G_\sigma,P_{1,\sigma})$ 的充分正点。记 T_R' 为 $wT\prime$ 在 $\mathfrak{a}_R^\theta$ 上的投影，其中 $w\in W(G_\sigma,A_{M_{1,\sigma}}^{\theta})$ 满足 $P_{1,\sigma}\subset R_w$。

注 4.5.13.1。——我们需要验证这样的 T' 和 w 的存在性。特别地，如果在命题 4.5.1.1 中，$(G_\sigma,G_\sigma^\theta)$ 分别属于 1 型或 2 型、2 型或 3 型，则可以假设 $T'\in\mathfrak{a}_{M_1^\theta,\sigma}\cap\mathfrak{a}_{P_1^\theta,\sigma}^+$ 分别是相对于 $(G_\sigma^\theta,P_{1,\sigma}^\theta)$、$(G_\sigma,P_{1,\sigma})$ 的充分正点，并且可知 $W(G_\sigma,A_{M_{1,\sigma}}^\theta)$ 分别与 $W(G_\sigma^\theta,A_{M_1^\theta,\sigma})$、$W(G_\sigma,A_{M_{1,\sigma}})$ 相同。我们已将这些元素结合到上述关于 T' 和 w 的假设中，因而得到了它们的存在性。

设 $\varphi\in C_c^\infty(S_{p\prime}(\mathbb{A}))$ 和 $\eta:G(\mathbb{A})\to\mathbb{C}^\times$ 是如 §3.4.1 中所述的一个酉特征。根据定理 4.4.12.1 以及引理 4.5.7.4 和 4.5.10.1，对于任意充分正的 $T\in T_0+\mathfrak{a}_0^+$，只要 $\|T^G\|$ 足够大（相对于 φ 的支集），便有

$$J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi)=\int_{[G^\theta]^G}\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)\eta(x)\,dx \tag{4.5.13.1}$$

其中 $\widetilde{K}_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)$ 等于对 $R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma},\theta)$ 和 $\xi\in R^\theta(F)\backslash G^\theta(F)$ 的求和与积分，其被积项为 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(\xi x)$ 与 (4.5.7.9) 的乘积。如 Art86 的 §6], 所述，我们先形式上进行变量代换，其合理性留待后文说明。我们将对.....的求和与积分

$$(\xi,x)\in(R^\theta(F)\backslash G^\theta(F))\times[G^\theta]^G$$

化为一个和与积分，关于

$$(\delta,x,g)\in(R^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F))\times(G_\sigma^\theta(F)\backslash(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1))\times(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})).$$

设 $P\in\mathcal{F}_R(M_1)$。由于 $H_P(\delta xg)$ 等于 $H_R(\delta x)+H_P(k_R(\delta x)g)$ 在 $\mathfrak{a}_P$ 上的投影，故有

$$\hat{\tau}_P(H_P(\delta xg)-T_P)=\hat{\tau}_P(H_R(\delta x)-T_R'-Y_P^{T,T'}(\delta x,g))$$

其中令

$$Y_P^{T,T'}(\delta x,g)=-H_P(k_R(\delta x)g)+T_P-T_R'.$$

根据 [Art76，引理 3.6] 以及 $T\in\mathfrak{a}_0^+$ 这一事实，$\overline{\text{}}$集合

$$\mathcal{Y}_R^{T,T'}(\delta x,g)=\{Y_P^{T,T'}(\delta x,g)|P\in\mathcal{F}_R^0(M_1)\}$$

是正 A_R^θ-正交的。于是由 (4.5.12.1) 可得，该和

$$\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(\delta xg)-T_P)$$

等于在 $R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(R,\theta)$ 上对下列量所取的和

$$(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta}\hat{\tau}_R^{R'}(H_R(\delta x)-T_R')\Gamma_{R'}^G(H_{R'}(\delta x)-T_{R'}',\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(\delta x,g)). \tag{4.5.13.2}$$

表达式 $J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi)$ 变为对 $g\in G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})$ 和 $x\in G_\sigma^\theta(F)\backslash(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)$ 的积分，以及对 $R'\in\mathrm{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)$、$R\in\mathrm{F}^{R'}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)$ 和 $\delta\in R^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F)$ 的求和，求和项为 $K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(\delta xg)$、(4.5.13.2) 和 $\eta(xg)$ 的乘积。

接下来，对 $\delta\in R^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F)$ 的和分解为关于.....的双重和

$$(\mu,\xi)\in(R^\theta\cap M_{R'^\theta})(F)\backslash M_{R'^\theta}(F)\times R'^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F).$$

我们将关于.....的和与积分替换为

$$(\xi,x)\in R'^{\theta}(F)\backslash G_{\sigma}^{\theta}(F)\times G_{\sigma}^{\theta}(F)\backslash(G_{\sigma}^{\theta}(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^{1})$$

通过对.....的积分

$$(v,a,m,k)\in[N_{R'}^{\theta}]\times(A_{R'}^{\theta})^{G,\infty}\times[M_{R'}^{\theta}]^{R'}\times K_{\sigma}^{\theta}$$

其中引入了因子 $\exp(\langle -2\rho_{R'^{\theta}}^{G_{\sigma}^{\theta}},H_{R'^{\theta}}(am)\rangle)$。注意

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{R}^{R'}(H_{R}(\mu vamk)-T_{R}')&=\hat{\tau}_{R}^{R'}(H_{R}(\mu m)-T_{R}'),\\ \Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(\mu vamk)-T_{R'}',\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(\mu vamk,g))&=\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-T_{R'}',\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g)),\\ \eta(\mu vamkg)&=\eta(mkg).\end{aligned}$$

由 (4.5.8.1) 可知

$$K_{R,\varphi}^{\mathrm{unip}}(\mu vamkg)=K_{R,\varphi}^{\mathrm{unip}}(\mu amkg)=\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}},H_{R'^{\theta}}(a)\rangle)K_{R,\varphi}^{\mathrm{unip}}(\mu mkg).\tag{4.5.13.3}$$

回顾一下，我们在 (4.5.8.2) 中引入了一个依赖于 φ 的函数 $\Psi_h\in C_c^{\infty}(\mathfrak{s}_{\sigma}(\mathbb{A}))$，对任意 $h\in G^{\theta}(\mathbb{A})$ 均成立。我们还对任意 $U\in(\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})$ 定义

$$\Psi_{h,R'}(U)=\int_{(\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\Psi_h(U+V)\,dV.\tag{4.5.13.4}$$

显然，$\Psi_{h,R'}\in C_c^{\infty}((\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}))$ 关于 h 连续依赖。最后，我们将 (4.5.8.3) 中对 $V\in(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})$ 的积分改写为关于.....的二重积分

$$(V_1,V_2)\in(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})\oplus(\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}).$$

经过变量替换 $V_2\mapsto\mathrm{Ad}(\mu m)(V_2)$ 后，表达式 (4.5.13.3) 变为 $\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}},H_{R'^{\theta}}(am)\rangle)$ 与下式的乘积

$$\begin{aligned}&\sum_{U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)}\int_{(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\int_{(\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\Psi_{kg}(\mathrm{Ad}(\mu m)^{-1}(U+V_1)+V_2)\,dV_2dV_1\\ &\qquad=\sum_{U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)}\int_{(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\Psi_{kg,R'}(\mathrm{Ad}(\mu m)^{-1}(U+V_1))\,dV_1.\end{aligned}$$

与 $\mathrm{vol}([N_{R'}^{\theta}])=1$ 一样，表达式 $J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta,\varphi)$ 可写成关于 $g\in G_{\sigma}^{\theta}(\mathbb{A})\backslash G^{\theta}(\mathbb{A}),R'\in\mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta},\theta)$，$k\in K_{\sigma}^{\theta}$，$a\in(A_{R'}^{\theta})^{G,\infty}$ 与 $m\in[M_{R'}^{\theta}]^{R'}$ 的积分和

$$\begin{aligned}&\eta(mkg)\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_{\sigma}^{\theta}},H_{R'^{\theta}}(am)\rangle)\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-T_{R'}',\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))\\ &\sum_{R\in\mathcal{F}^{R'}(P_{1,\sigma}^{\theta},\theta)}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{R'})^{\theta}}\sum_{\mu\in(R^{\theta}\cap M_{R'^{\theta}})(F)\backslash M_{R'^{\theta}}(F)}\hat{\tau}_{R}^{R'}(H_R(\mu m)-T_R')\\ &\qquad\sum_{U\in\mathcal{N}_{\mathfrak{m}_R\cap\mathfrak{s}}(F)}\int_{(\mathfrak{n}_R\cap\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})}\Psi_{kg,R'}(\mathrm{Ad}(\mu m)^{-1}(U+V_1))\,dV_1.\end{aligned}\tag{4.5.13.5}$$

现在说明上述变量代换的合理性。根据富比尼定理，只需证明 (4.5.13.5) 在 g,R',k,a 和 m 上绝对可积。由于按照通常的意义，σ 是 $G(F)$ 中的半单元素（见引理 4.1.4.1），并且根据 [Art86，引理 6.1]，$S(\mathbb{A})\subset G(\mathbb{A})^{1}$，，我们可以且将选择 Σ 的一个紧子集 $G_{\sigma}^{\theta}(\mathbb{A})\backslash G^{\theta}(\mathbb{A})$，使得 $g^{-1}\sigma(\mathbf{U}_{G_{\sigma}}\cap S)(\mathbb{A})g$ 与 φ 的支集的交为空，除非 $g\in\Sigma$。由于 $H_{R'}$ 将 $(A_{R'}^{\theta})^{G,\infty}$ 同胚映射到 $(\mathfrak{a}_{R'}^{G})^{\theta}$，引理 4.5.12.1 蕴含 $\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-$

$T\prime R'$，$\mathcal{Y}_{R'}^{T\,T'}$，$(k,\ g)$) 对于所有 a 在一个关于 k 和 g 连续变化的紧集之外均为零。因此，对于 $(a,\ k,\ g)$，表达式 (4.5.13.5) 在一个与 m 无关的紧集之外为零。于是，对 $m\in[M_{R'}^{\theta}]^{R'}$ 的 (4.5.13.5) 的积分是

$$\eta(kg)\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},H_{R'^{\theta}}(a)\rangle)\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-T'_{R'},\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g)) \tag{4.5.13.6}$$

avec

$$J_{\mathrm{nilp}}^{R',T'}(\eta,2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},\Psi_{kg,R'}) \tag{4.5.13.7}$$

其定义如下文 (4.7.4.3) 所示。根据定理 4.7.3.1，积分 (4.5.13.7) 绝对收敛，且有上界 $\|\Psi_{kg,R'}\|$ 其中 $\|\cdot\|$ 是 $C_c^\infty((\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数。由于将 (4.5.13.6) 与 $\|\Psi_{kg,R'}\|$ 相乘后，可由 (a,k,g) 的一个连续函数控制，因此 (4.5.13.5) 在 g,R',k,a 和 m 上绝对可积。我们已证明，上述所有变量替换均成立。此外，我们还证明了 $J_{\mathfrak{o}}^{T}(\eta,\varphi)$ 等于

$$\begin{aligned}\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})}\sum_{R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)}\Big(\int_{K_\sigma^\theta}\int_{(A_{R'}^\theta)^{G,\infty}}&\eta(kg)\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},H_{R'^{\theta}}(a)\rangle)\\&\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-T'_{R'},\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))J_{\mathrm{nilp}}^{R',T'}(\eta,2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},\Psi_{kg,R'})\,dadk\Big)\,dg.\end{aligned} \tag{4.5.13.8}$$

考虑积分

$$u_{R'}^{T,T'}(k,g)=\int_{(A_{R'}^\theta)^{G,\infty}}\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},H_{R'^{\theta}}(a)\rangle)\Gamma_{R'}^{G}(H_{R'}(a)-T'_{R'},\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))\,da. \tag{4.5.13.9}$$

进行变量替换后可见，$u^{T,_{R'}{}^{T'}}(k,g)$ 等于

$$\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},T_{R'}^{\prime G}\rangle)\int_{(\mathfrak{a}_{R'}^{G})^\theta}\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},X\rangle)\Gamma_{R'}^{G}(X,\mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))\,dX.$$

根据引理 4.5.12.1，这等于

$$\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},T_{R'}^{\prime G}\rangle)\sum_{P\in\mathcal{F}_{R'}^{0}(M_1)}c'_P(2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},-H_P(kg)+T_P-T'_{R'}).$$

因此，引理 4.7.5.1 推出存在一个多项式 $c_{R',P,Q}$，定义在 $\mathfrak{a}_Q^G$ 上，对任意 $Q\in\mathcal{F}(P)$，使得

$$\begin{aligned}u_{R'}^{T,T'}(k,g)=\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},T_{R'}^{\prime G}\rangle)\sum_{P\in\mathcal{F}_{R'}^{0}(M_1)}\sum_{Q\in\mathcal{F}(P)}\\\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},(-H_P(kg)+T_P-T'_{R'})_Q^G\rangle)c_{R',P,Q}((-H_P(kg)+T_P-T'_{R'})_Q^G).\end{aligned}$$

由此可得，$u^{T,_{R'}{}^{T'}}(k,g)$ 可写为

$$\begin{aligned}\sum_{P\in\mathcal{F}_{R'}^{0}(M_1)}\sum_{Q\in\mathcal{F}(P)}&\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},T_Q^G\rangle)\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},T_{R'}^{\prime Q}\rangle)\\&\exp(\langle 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta},-H_Q(kg)^G\rangle)c_{R',P,Q}((-H_P(kg)+T_P-T'_{R'})_Q^G).\end{aligned}$$

由此可得，$u^{T,_{R'}{}^{T'}}(k,\ g)$ 是关于 T 和 $T\prime$ 的指数多项式，其常数项为零，除非

$$(2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{R'^{\theta}}^{G_\sigma^\theta})|_{(\mathfrak{a}_{R'}^{G})^\theta}=0 \tag{4.5.13.10}$$

在这种情形下，$u^{T,\ T'}_{R'}(k,\ g)$ 是关于 T 和 T' 的多项式。在后一种情形下，$u^{T,\ T'}_{R'}(k,\ g)$ 的常数项是其在 $T=T'=0$ 处的值，即

$$\int_{(\mathfrak{a}^G_{R'})^\theta} \Gamma^G_{R'}(X, \mathcal{Y}^{0,0}_{R'}(k,g))\, dX = v'_{R'}(kg)$$

这里再次用到了引理 4.5.12.1。

采用记号 (4.5.13.9)，表达式 (4.5.13.8) 可写为

$$\int_{G^\theta_\sigma(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \sum_{R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P^\theta_{1,\sigma},\theta)} \left(\int_{K^\theta_\sigma} \eta(kg) u^{T,T'}_{R'}(k,g) J^{R',T'}_{\mathrm{nilp}}(\eta, 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}} - 2\rho^{G^\theta_\sigma}_{R'^\theta}, \Psi_{kg,R'})\, dk\right) dg.$$

可以交换关于 $k\in K^\theta_\sigma$ 和 $m\in[M^\theta_{R'}]^{R'}$ 的积分次序（在 $J^{R',T'}_{\mathrm{nilp}}$ 的定义中）。最后一个表达式变为

$$\int_{G^\theta_\sigma(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \sum_{R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P^\theta_{1,\sigma},\theta)} J^{R',T'}_{\mathrm{nilp}}(\eta, 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}} - 2\rho^{G^\theta_\sigma}_{R'^\theta}, \Phi^{T,T'}_{g,R'})\eta(g)\, dg$$

对于任意 $X\in(\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})$，定义

$$\Phi^{T,T'}_{g,R'}(X) = \int_{K^\theta_\sigma} \Psi_{kg,R'}(X) u^{T,T'}_{R'}(k,g)\eta(k)\, dk.$$

注意，$\Phi^{T,\ T'}_{g,\ R'}$，属于 $C^\infty_c((\mathfrak{m}_{R'}\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}))$，并且关于 g 连续变化。此外，$\Phi^{T,\ T'}_{g,\ R'}(X)$ 是关于 T 和 T' 的指数多项式。事实上，作为 T' 的函数，$u^{T,\ T'}_{R'}(k,g)$ 和 $\Phi^{T,T'}_{g,\ R'}(X)$ 只依赖于 T'。设 $\Phi_{g,R'}(X)$ 是 $\Phi^{T,\ T'}_{g,\ R'}(X)$ 的常数项。那么，除非满足（.....），否则 $\Phi_{g,R'}(X)$；若满足，则

$$\Phi_{g,R'}(X) = \int_{K^\theta_\sigma} \Psi_{kg,R'}(X) v'_{R'}(kg)\eta(k)\, dk. \tag{4.5.13.11}$$

根据定理 4.7.5.3，表达式

$$J^{R',T'}_{\mathrm{nilp}}(\eta, 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}} - 2\rho^{G^\theta_\sigma}_{R'^\theta}, \Phi^{T,T'}_{g,R'})$$

是关于 T 和 T' 的指数多项式，其常数项为

$$J^{R'}_{\mathrm{nilp}}(\eta, 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}} - 2\rho^{G^\theta_\sigma}_{R'^\theta}, \Phi_{g,R'}).$$

回顾一下，我们用 $J_{\mathfrak{o}}(\eta,\ \varphi)$ 表示指数多项式 $T\mapsto J^T_{\mathfrak{o}}(\eta,\ \varphi)$ 的常数项，参见 §4.4.5。我们的进展总结于下述定理，该定理是 [Art86 引理 6.2] 的一个类比。

定理 4.5.13.2. — 设 $\varphi\in C^\infty_c(S_{p'}(\mathbb{A}))$。有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta,\varphi) = \int_{G^\theta_\sigma(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \sum_{R'} J^{R'}_{\mathrm{nilp}}(\eta, 2\rho_{\mathfrak{n}_{R'}\cap\mathfrak{s}} - 2\rho^{G^\theta_\sigma}_{R'^\theta}, \Phi_{g,R'})\eta(g)\, dg \tag{4.5.13.12}$$

其中，和遍历满足 (4.5.13.10) 的 $R'\in F^{G_\sigma}(P^\theta_{1,\ \sigma},\theta)$。

注记 4.5.13.3。——对于命题 4.5.1.1 中的 1 型或 2 型因子，条件 (4.5.13.10) 是平凡的。因此，只有 3 型因子需要考虑。为此，该条件类似于带有 $\theta_1=\theta_2$ 的 (3.5.1.1)。关于更明确的描述，可参阅命题 3.5.7.1。

4.6 加权轨道积分

4.6.1. 继续沿用第 4.5.13 节的记号。但在本子小节中，我们假设 $\mathfrak{o} \in \mathfrak{c}_{p',\mathrm{rss}}(F)$ 和 $S_{\mathfrak{o}}(F) \neq \emptyset$（关于 $\mathfrak{c}_{p',\mathrm{rss}}$ 的定义，见 § 4.1.6 和 § 4.1.7）。根据命题 4.1.5.3，$S_{p',\mathfrak{o}}$ 的所有元素都是 G^{θ}-正则半单的，而 $S_{p',\mathfrak{o}}(F)$ 是 $G^{\theta}(F)$-共轭类。回顾一下，我们固定 $P_1 \in \mathcal{F}(P_0^{\theta})$，并且 $\sigma \in (M_{P_1} \cap S_{p',\mathfrak{o}})(F)$ 是一个 (P_1,θ)-非迷向元素。

设 $M \in \mathcal{L}(M_0)$。对一切 $T \in \mathfrak{a}_0^{+}$以及一切 $g \in G(\mathbb{A})$，设 $v_M(g,T)$ 为当 P遍历 $\mathcal{P}(M)$ 时，点 $T_P - H_P(g)$ 的凸包在 $\mathfrak{a}_M^G$ 上的投影的体积。这是 Arthur 在 [Art78，第 951] 页中引入的通常权。它是 $G(\mathbb{A})$ 上的正函数，关于 K右不变，关于 $M(\mathbb{A})$左不变。设 $v_M(g) = v_M(g,0)$。

4.6.2. 利用命题 4.1.5.3，不失一般性，可以假设 $\sigma = x(A)$ 如 (4.1.5.2) 所定义，其中 $A \in \mathfrak{gl}_{\nu}(D)$ 是正则半单的，没有特征值 ± 1，并且在 $\mathfrak{gl}_{\nu}(D)$ 的一个标准Levi子代数中是椭圆的，不妨设其型为 $(\nu_1,\cdots\ \nu_k)$，其中 $\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\nu_i = \nu$。设 $\tilde{G} = GL_{2\nu,D}$、$H = GL_{|p'-q|,D} \times GL_{|p-p'|,D}$ 和 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} A & A - I_{\nu} \\ A + I_{\nu} & A \end{pmatrix}$。根据推论˜4.1.3.4，中心化子 G_{σ_0} 是 G 的一个极大环面。于是得到

$$G_{\sigma} = \tilde{G}_{\sigma_0} \times H.$$

设 $\theta_0 = \begin{pmatrix} I_{\nu} & 0 \\ 0 & -I_{\nu} \end{pmatrix}$。则

$$\tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in GL_{\nu,D}, xA = Ax \right\} \tag{4.6.2.1}$$

与 $GL_{\nu,\ D}$ 的一个极大环面同构。由注记 4.1.5.2 可知，θ 在 H 上的作用是平凡的。因此可得

$$G_{\sigma}^{\theta} = \tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0} \times H. \tag{4.6.2.2}$$

命题 4.6.2.1。——

1. 群 H 归约为单元素集 $\{1\}$ 当且仅当 $p = q = p' = q'$。*2.* 若 $\eta(G_{\sigma}^{\theta}(\mathbb{A})) = 1$，则 $\eta = 1$ 或 $H = \{1\}$。*3.* 若 $\eta^2 = 1$，则断言 *2* 的逆映射也成立。

证明。——断言 1 是显然的，因为 $p+q = p'+q'$。已知 $\eta(H(\mathbb{A})) = 1$ 当且仅当 $\eta = 1$ 或 $H = \{1\}$，这就推出了断言 2。若 $\eta^2 = 1$，则根据 (4.6.2.1)，有 $\eta(\tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0}(\mathbb{A})) = 1$，从而根据 (4.6.2.2) 得到断言 3。□

令 $\tilde{M}_1$ 为 $\tilde{G}$ 中 $\tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0}$环面的极大分裂子环面的中心化子。则有$\tilde{M}_{1,\sigma_0} = \tilde{G}_{\sigma_0}$且 $A_{\tilde{M}_1} = A_{\tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0}} = A_{\tilde{G}_{\sigma_0}}^{\theta_0}$（参见推论 4.5.2.4）。令 $T_0 \subset B$ 为对角矩阵的乘积所成的子群，H的上三角矩阵的乘积所成的子群。则˜有 $M_1 = M_1 \times T_0$，它是 G 的一个半标准 Levi 子群，类型为 $(2\nu_1,\cdots\ 2\nu_k, \underbrace{1,\cdots 1}_{p+q-2\nu})$.

那么

$$P_{1,\sigma} = \tilde{G}_{\sigma_0} \times B \text{ et } P_{1,\sigma}^{\theta} = \tilde{G}_{\sigma_0}^{\theta_0} \times B.$$

因此存在一个双射

$$\mathcal{F}^H(B) \to \mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta}) = \mathcal{F}^{G_{\sigma}}(P_{1,\sigma}^{\theta},\theta) \tag{4.6.2.3}$$

由 $Q \mapsto \tilde{G}_{\sigma_0} \times Q$ 给出。对于 $R \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(P_1^\theta, \sigma)$，由此可得

$$A_R^\theta = A_{R^\theta} \text{ et } [M_R^\theta]^R = [M_{R^\theta}]^1. \tag{4.6.2.4}$$

回顾一下，利用双射 (4.5.10.4)，我们将 $G_\sigma \in \mathcal{L}(M_1)$ 记作 G 中 $A_{G_\sigma}^\theta = A_{G_\sigma^\theta}$ 的中心化子（见 (4.6.2.4)）。此外，我们写作

$$v_\sigma(g,T) = v_{\widetilde{G_\sigma}}(g,T) \text{ et } v_\sigma(g) = v_{\widetilde{G_\sigma}}(g).$$

事实上，有 $G_\sigma = M_1 \times H$，它是 G 的一个半标准 Levi 子群，类型为 $(2\nu_1, \cdots 2\nu_k, |p'-q|, |p-p'|)$。在 §4.5.10 中，我们还看到

$$\mathcal{F}_{G_\sigma}(M_1) = \mathcal{F}(\widetilde{G_\sigma}) \text{ et } A_{\widetilde{G_\sigma}} = A_{G_\sigma}^\theta = A_{G_\sigma^\theta}. \tag{4.6.2.5}$$

引理 4.6.2.2。— </style>对于任意，存在 $\mathrm{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数 $\|\cdot\|$，使得对于任意 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$，都有：

$$\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} |\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma))| v_\sigma(g,T)\, dg \leqslant \|\varphi\|.$$

证明。— 映射 $g \mapsto \mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma)$ 在 $G_\sigma^\theta \backslash G^\theta$ 上诱导出一个同构，将其映到 $S_{p'}$ 的一个光滑闭子流形 R。存在一个连续且满射的限制态射，从 $\mathrm{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$ 到 $\mathrm{S}(R(\mathbb{A}))$。另一方面，借助希尔伯特第90定理和 Shapiro 引理，由 (4.6.2.2) 可推出，对于 F 的任意赋值 v，群 $G_\sigma^\theta(F_v)$ 的第一上同调集是平凡的。于是，所考察的映射将 $G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})$ 双射地映到 $R(\mathbb{A})$。因此，我们得到一个从 $\mathrm{S}(G^\theta(\mathbb{A}))$ 到 $\mathrm{S}(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})) \simeq \mathrm{S}(R(\mathbb{A}))$ 的连续、满射且开映射，该映射由沿 $G_\sigma^\theta(\mathbb{A})$ 的积分给出，参见 §2.1.16。因此，只需证明存在 $\mathrm{S}(G^\theta(\mathbb{A}))$ 上的连续半范数，使得对于任意 $f \in \mathrm{S}(G^\theta(\mathbb{A}))$，都有：

$$\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \left| \int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})} f(hg)\, dh \right| v_\sigma(g,T)\, dg \leqslant \|f\|.$$

因此，只需证明其连续性

$$f \in \mathcal{S}(G^\theta(\mathbb{A})) \mapsto \int_{G^\theta(\mathbb{A})} |f(g)|\, v_\sigma(g,T)\, dg.$$

这里积分的收敛性和连续性显然成立。事实上，权 $v_\sigma(g, T)$ 被某个 $c \max_{P \in \mathcal{P}(\widetilde{G_\sigma})} \left(\|T_P - H_P(g)\|^{\dim(\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G)} \right)$ 所控制，其中 $c > 0$ 是某个常数。此外，若 $\|\cdot\|$ 是 $G(\mathbb{A})$ 上的一个高度，则存在 $c_1 > 0$，使得对任意 $g \in G(\mathbb{A})$，都有 $\|H_P(g)\| \leqslant c_1(1 + \log \|g\|)$。□

4.6.3. 回顾一下，对于任意 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$，记 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi)$ 为多项式指数映射 $T \mapsto J_{\mathfrak{o}}^T(\eta, \varphi)$ 的常数项，参见 §4.4.5。下述命题将 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi)$ 表示为由特征 η 扭曲的加权积分，该积分由权 $v_\sigma(g)$ 构造而成。

定理 4.6.3.1。——设 $\varphi \in \mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$。有 $J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi) = 0$，除非 $\eta(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})) = 1$，在这种情况下有

$$J_{\mathfrak{o}}(\eta, \varphi) = \mathrm{vol}([G_\sigma^\theta]^1) \int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma)) v_\sigma(g) \eta(g)\, dg$$

其中 $[G_\sigma^\theta]^1$ 在*§2.1.9*中定义。

证明。 — 需要证明$\mathcal{S}(S_{p'}(\mathbb{A}))$上两个线性形式的等式；由§4.4.5及引理 4.6.2.2可知它们是连续的。只需在稠密子空间 $C_c^\infty(S_{p'}(\mathbb{A}))$上建立该等式。设 $\varphi \in C_c^\infty(S_{p'}(\mathbb{A}))$，且 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^+$充分正，$\|T^G\|$ 足够大（相对于 φ的支集）。以下论证类似于第 4.5.13 节中的论证。我们从 $J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi)$的表达式(4.5.13.1)开始。但由于 σ 是 G^θ-半单且 G^θ-正则的，根据引理4.5.5.2，$K_R^{\mathrm{unip}}{}_{,\varphi}(x)$的表达式(4.5.7.6)变为 $\varphi(\mathrm{Int}(x^{-1})(\sigma))$，它与$R$无关。由此推出 $J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi)$等于

(4.6.3.1)
$$\int_{[G^\theta]^G} \sum_{R\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)} \sum_{\xi\in R^\theta(F)\backslash G^\theta(F)} \varphi(\mathrm{Int}(\xi x)^{-1}(\sigma)) \left(\sum_{P\in\mathcal{F}_R(M_1)} \varepsilon_P^G \hat{\tau}_P(H_P(\xi x)-T_P) \right) \eta(x)\,dx.$$

与§4.5.13中一样，我们首先也形式上作变量替换，其论证与前者类似，故略去。对ξ, x上的和与积分交换，并利用(4.5.12.1)，得到

$$J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi) = \int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})} \int_{G_\sigma^\theta(F)\backslash(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)} \sum_{R'\in\mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)} \sum_{R\in\mathcal{F}^{R'}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)} \sum_{\delta\in R^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F)}$$
$$\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma))(-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta} \hat{\tau}_R^{R'}(H_R(\delta x)-T_R') \Gamma_{R'}^G(H_{R'}(\delta x)-T_{R'}', \mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(\delta x,g)) \eta(xg)\,dx dg.$$

接着，将 $\delta \in R^\theta(F)\backslash G_\sigma^\theta(F)$上的和分解，并应用 Iwasawa 分解。由于 $\mathrm{vol}([N_{R'}^\theta]) = 1$，表达式 $J_{\mathfrak{o}}^T(\eta,\varphi)$可写成在 $g \in G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})$,$R' \in \mathcal{F}^{G_\sigma}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)$，$k \in K_\sigma^\theta$, $a \in (A_R^\theta)^{G,\infty}$和 $m \in [M_{R'}^\theta]^{R'} = [M_{R'^\theta}]^1$(参见(4.6.2.4))上的积分与求和，其被积表达式为

$$\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma))\eta(mkg)\exp(\langle -2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta}, H_{R'^\theta}(a)\rangle)\Gamma_{R'}^G(H_{R'}(a)-T_{R'}', \mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))$$
$$\sum_{R\in\mathcal{F}^{R'}(P_{1,\sigma}^\theta,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta} \sum_{\mu\in(R^\theta\cap M_{R'^\theta})(F)\backslash M_{R'^\theta}(F)} \hat{\tau}_R^{R'}(H_R(\mu m)-T_R').$$

现在考虑积分

$$u_{R'}^{T,T'}(k,g) = \int_{(A_{R'}^\theta)^{G,\infty}} \exp(\langle -2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta}, H_{R'^\theta}(a)\rangle)\Gamma_{R'}^G(H_{R'}(a)-T_{R'}', \mathcal{Y}_{R'}^{T,T'}(k,g))\,da.$$

通过变量替换以及引理 4.5.12.1 和 4.7.5.1，存在一个多项式 $c_{R',P,Q}$ 在$\mathfrak{a}_Q^G$ 上，对一切 $Q \in \mathcal{F}(P)$，使得

$$u_{R'}^{T,T'}(k,g) = \sum_{P\in\mathcal{F}_{R'}^0(M_1)} \sum_{Q\in\mathcal{F}(P)} \exp(\langle -2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta}, T_Q^G\rangle)\exp(\langle -2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta}, T_{R'}'^Q\rangle)$$
$$\exp(\langle -2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta}, -H_Q(kg)^G\rangle) c_{R',P,Q}((-H_P(kg)+T_P-T_{R'}')_Q^G).$$

因此 $u^T{}_{,R'}{}^{T'}(k,g)$ 是关于 T与 $T_{R'}$的指数多项式，其常数项为零，除非

$$(-2\rho_{R'^\theta}^{G_\sigma^\theta})|_{(\mathfrak{a}_{R'}^G)^\theta} = 0 \tag{4.6.3.2}$$

在此情形下，$u^T{}_{,R'}{}^{T'}(k,g)$ 是关于 T与 $T_{R'}$的多项式。但双射 (4.6.2.3) 蕴含条件 (4.6.3.2) 等价于 $R' = G_{\sigma\circ}$

还必须考虑积分

$$\int_{[M_{R'}^\theta]^{R'}} \eta(m) \sum_{\mu\in(R^\theta\cap M_{R'^\theta})(F)\backslash M_{R'^\theta}(F)} \hat{\tau}_R^{R'}(H_R(\mu m)-T_R')\,dm.$$

根据岩泽分解和 $\mathrm{vol}([N_R^{R',\theta}])=1$，该积分等于对$a'\in(A_R^{R'})^{\theta,\infty}=A^{R'^\theta,R^\theta}{}^{\infty}$，$m'\in[M_R^\theta]^R=[M_{R^\theta}]^1$（参见 (4.6.2.4)）以及 $k'\in K_\sigma^\theta\cap M_{R'^\theta}(\mathbb{A})$ 的积分

$$\eta(m'k')\exp(\langle -2\rho_{R^\theta\cap M_{R'^\theta}}^{M_{R'^\theta}},H_{R^\theta}(a')\rangle)\hat{\tau}_R^{R'}(H_R(a')-T'_R).$$

注意到

$$\int_{a'\in(A_R^{R'})^{\theta,\infty}}\exp(\langle -2\rho_{R^\theta\cap M_{R'^\theta}}^{M_{R'^\theta}},H_{R^\theta}(a')\rangle)\hat{\tau}_R^{R'}(H_R(a')-T'_R)\,da'=C\exp(\langle -2\rho_{R^\theta\cap M_{R'^\theta}}^{M_{R'^\theta}},T'^{R'}_R\rangle)$$

带有一个常数

$$C=\int_{(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta}\exp(\langle -2\rho_{R^\theta\cap M_{R'^\theta}}^{M_{R'^\theta}},H\rangle)\hat{\tau}_R^{R'}(H)\,dH<+\infty.$$

这是关于 $T'^{R'}_R$ 的指数映射函数，其常数项除非.....否则为零

$$(-2\rho_{R^\theta\cap M_{R'^\theta}}^{M_{R'^\theta}})|_{(\mathfrak{a}_R^{R'})^\theta}=0. \tag{4.6.3.3}$$

根据双射 (4.6.2.3)，条件 (4.6.3.3) 等价于 $R=R'$。

由于函数 $T'\mapsto u^{T,R'^{T'}}(k,g)$ 仅依赖于 $T'R'$，根据上述讨论，我们发现常数项 $J_\mathfrak{o}(\eta,\varphi)$ 来自 (4.6.3.1) 中的 $R=G_\sigma$。因此，它是以下表达式的常数项

$$\int_{[G^\theta]^G}\sum_{\xi\in G_\sigma^\theta(F)\backslash G^\theta(F)}\varphi(\mathrm{Int}(\xi x)^{-1}(\sigma))\left(\sum_{P\in\mathcal{F}_{G_\sigma}(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(\xi x)-T_P)\right)\eta(x)\,dx$$

它等于

$$\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma))\left(\int_{G_\sigma^\theta(F)\backslash(G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1)}\sum_{P\in\mathcal{F}_{G_\sigma}(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(xg)-T_P)\eta(xg)\,dx\right)dg.$$

由于 $G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1=G_\sigma^\theta(\mathbb{A})^1\times A^{G,\ }_{\ G_\sigma^\theta}{}^{\infty}$，最后一个表达式变为

$$\int_{G_\sigma^\theta(\mathbb{A})\backslash G^\theta(\mathbb{A})}\varphi(\mathrm{Int}(g^{-1})(\sigma))\left(\int_{A_{G_\sigma^\theta}^{G,\infty}}\sum_{P\in\mathcal{F}_{G_\sigma}(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(ag)-T_P)\,da\right)\left(\int_{[G_\sigma^\theta]^1}\eta(yg)\,dy\right)dg.$$

除非 $\eta(G_\sigma^\theta(\mathbb{A}))=1$，否则它为零；在这种情况下，我们有

$$\int_{[G_\sigma^\theta]^1}\eta(yg)\,dy=\mathrm{vol}([G_\sigma^\theta]^1)\eta(g).$$

此外，利用 (4.6.2.5)，可得

$$\int_{A_{G_\sigma^\theta}^{G,\infty}}\sum_{P\in\mathcal{F}_{G_\sigma}(M_1)}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(H_P(ag)-T_P)\,da=\int_{\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G}\sum_{P\in\mathcal{F}(\widetilde{G_\sigma})}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X+H_P(g)-T_P)\,dX.$$

$\widetilde{\ }$族 $(T_P-H_P(g))_{P\in\mathcal{F}(\widetilde{G_\sigma})}$ 是一个 G_σ-正交且正则的族，其意义见 [LW13，第 1 节5]：这是由 [Art76，引理 36] 以及 $T\in\mathfrak{a}_0^+$这一事实得出的。于是由 [LW13，命题 1.87] 可得

$$X\in\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G\mapsto\sum_{P\in\mathcal{F}(\widetilde{G_\sigma})}\varepsilon_P^G\hat{\tau}_P(X-(T_P-H_P(g)))$$

是凸包在 $\mathfrak{a}_{\widetilde{G_\sigma}}^G$ 上的投影的特征函数，其顶点为（T_P-H_P（g））$_{P\in\mathcal{P}(\widetilde{G_\sigma})}$。取常数项即可得出结论。□

4.7 无穷小变体

4.7.1. 在下文中，我们更改记号，并将命题 4.5.1.1 中的 1 型、2 型或 3 型对称对记为（G, G^θ, θ）。设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，并且

$$\mathfrak{s} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X + \theta(X) = 0\}$$

它与对称空间 G/G^θ在 1 处的切空间相同。在本子小节中，我们回顾 G^θ 对$\mathfrak{s}$作用的“迹公式”的几何展开。对于类型 1 和 2，存在一个 G^θ-等变的 $\mathfrak{g}^\theta$ 与 $\mathfrak{s}$ 之间的同一，分别由 $X \mapsto (X, -X)$和 $X \mapsto X\alpha$ 给出，其中 α 是 K 中的非零元素，满足迹$\kappa/\iota(\alpha) = 0$。在这些情形下，迹公式只是 [Cha02] 的李代数迹公式的一种“相对”改写；而对于类型 3，它是 [Li22]的研究对象。

我们将沿用此前使用的大部分记号，不再赘述。不过，还是要说明其中的几个。固定一个 θ-稳定的极大分裂环面A_0 ，使得 A_0^θ 是 G^θ的极大分裂环面。若 G的抛物子群包含 A_0，或 G^θ的抛物子群包含 A_0^θ，则称其为半标准抛物子群。固定 G的一个 θ-稳定的半标准极小抛物子群 P_0 。那么 P_0^θ 是 G^θ的半标准极小抛物子群。令$\mathcal{F}(P_0^\theta, \theta)$为包含$P_0^\theta$的 G的 θ-稳定半标准抛物子群集合。令$\mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$为包含$P_0^\theta$的 G^θ的抛物子群集合。注意，映射

$$P \mapsto P^\theta$$

从 $\mathcal{F}(P_0^\theta, \theta)$在$\mathcal{F}^\theta(P_0^\theta)$中是满射。对于类型 1 和 2，这个映射是一个双射。

4.7.2. 在 $\mathfrak{s}(F)$上考虑以下等价关系：两个元素等价，当且仅当它们的半单部分（在 $\mathfrak{g}(F)$中的 Jordan 分解）在 $G^\theta(F)$作用下共轭。记$\mathcal{O}$ 为等价类的集合。包含 $0 \in \mathfrak{s}(F)$的等价类称为幂零类。如果 $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ 是幂零的，我们通常会将下标 $\mathfrak{o}$ 替换为“nilp”。

4.7.3. 截断核的上界。 — 记$\mathcal{S}(\mathfrak{s}(\mathbb{A}))$为 $\mathfrak{s}(\mathbb{A})$上的施瓦茨空间。设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{s}(\mathbb{A}))$、 $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$和 $x \in G^\theta(\mathbb{A})$。对任意 $P = MN \in \mathcal{F}(P_0^\theta, \theta)$，连同其 Levi 分解，定义

$$K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(x) = \sum_{X \in \mathfrak{m}(F) \cap \mathfrak{o}} \int_{(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{s})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X + U))\, dU.$$

必要时（仅对 1 型），可将 §2.1.11 中的点 $T_0 \in \mathfrak{a}^{G,0}{}^+$ 替换为 $T_0 + \theta(T_0)$；于是我们可以并且将会假定 $T_0 \in \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}^{G,0}{}^+$。我们对所有 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_0^+$ 定义

$$K_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x) = \sum_{P \in \mathcal{F}(P_0^\theta, \theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_P^G)^\theta} \sum_{\delta \in P^\theta(F) \backslash G^\theta(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T_P) K_{P,\mathfrak{o},\varphi}(\delta x).$$

借助 [Art78 的引理 5.1], ，可见最后一表达式中对 δ 的和是有限的。我们记 $[G^\theta]^G = G^\theta(F) \backslash (G^\theta(\mathbb{A}) \cap G(\mathbb{A})^1)$。

定理 4.7.3.1. —*([Cha02，定理 3.1]和 [Li22，定理 4.14])* 对任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_0^+$和任意 $\chi \in \mathfrak{a}_{G^\theta}^*$，存在一个连续半范数 $\|\cdot\|$ ，定义在 $\mathcal{S}(\mathfrak{s}(\mathbb{A}))$ 上，使得对任意 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{s}(\mathbb{A}))$，有

$$\sum_{\mathfrak{o} \in \mathcal{O}} \int_{[G^\theta]^G} |K_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)| \exp(\langle \chi, H_{G^\theta}(x) \rangle)\, dx \leqslant \|\varphi\|.$$

注 4.7.3.2. — 对于类型 1 和 2，有 $G^\theta(\mathbb{A})\cap G(\mathbb{A})^1 = G^\theta(\mathbb{A})^1$，因此对所有 $\chi \in \mathfrak{a}_{G^\theta}^*$ 和 $x \in [G^\theta]^G$，指数映射$(\langle \chi, H_{G^\theta}(x)\rangle)$的值为 1。

4.7.4. 几何分布。 — 设 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{s}(\mathbb{A}))$，$\mathfrak{o} \in \mathcal{O}$ 和 $\chi \in \mathfrak{a}_{G^\theta,\mathbb{C}}^*$。设 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ 是一个如 §3.4.1 中所述的酉特征。固定一个特征 $\iota \in X^*(G)$。通过与 ι复合，可得一个在子群 A_G^∞ 和$G(F)$ 上平凡的特征 $G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$，仍记作 η。对任意 $T \in T_0 \pm \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_0^+$，定义

$$J_{\mathfrak{o}}^{G,T}(\eta,\chi,\varphi) = \int_{[G^\theta]^G} K_{\mathfrak{o},\varphi}^T(x)\eta(x)\exp(\langle \chi, H_{G^\theta}(x)\rangle)\,dx \tag{4.7.4.1}$$

根据定理 4.7.3.1，该积分绝对收敛。

更一般地，设 $Q \in \mathcal{F}(P_0^\theta,\theta)$ 和 $f \in \mathcal{S}((\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{s})(\mathbb{A}))$。设

$$\mathcal{F}^Q(P_0^\theta,\theta) = \{P \in \mathcal{F}(P_0^\theta,\theta) | P \subset Q\}.$$

记 $\mathrm{O}^{\mathfrak{m}_Q\cap\mathfrak{s}}$为 $(M_Q^\theta(F))$-共轭的半单陪集在 $(\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{s})(F)$ 中的集合。交集 $\mathfrak{o} \cap (\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{s})(F)$ 是有限个（可能为空）陪集 $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_n \in \mathrm{O}^{\mathfrak{m}_Q\cap\mathfrak{s}}$ 的并集。若 M_Q 的抛物子群（分别为 M_Q^θ 的抛物子群）包含 A_0（分别为 A_0^θ），则称其为半标准的。群 $P'_0 = P_0 \cap M_Q$ 是一个 θ-稳定的 M_Q 的极小半标准抛物子群。因此，$B_Q = P'_0 N_Q$ 是一个包含于 Q 的 G 的 θ-稳定极小半标准抛物子群。群 ${P'}_0^\theta = P_0^\theta \cap M_Q^\theta$ 是 M_Q^θ 的极小半标准抛物子群。令 $\mathbf{F}^{M_Q}({P'}_0^\theta,\theta)$ 为包含 $P_0'^\theta$ 的 M_Q 的 θ-稳定半标准抛物子群集合。映射

$$P \mapsto P \cap M_Q \tag{4.7.4.2}$$

诱导出一个从 $\mathcal{F}^Q(P_0^\theta,\ \theta)$ 到 $\mathcal{F}^{M_Q}(P'_0{}^\theta,\ \theta)$ 的双射，其逆映射为映射 $P' \mapsto P'N_Q$。设 $\mathcal{F}^{M_Q^\theta}(P'_0{}^\theta)$ 为包含 $P'_0{}^\theta$ 的 M_Q^θ 的抛物子群集合。对于任意带有其 Levi 分解的 $P' = M'N' \in \mathcal{F}^{M_Q}(P'_0{}^\theta,\ \theta)$、任意 $1 \leqslant i \leqslant n$ 以及任意 $x \in M_Q^\theta(\mathbb{A})$，定义

$$K_{P',\mathfrak{o}_i,f}(x) = \sum_{X\in(\mathfrak{m}'\cap\mathfrak{s})(F)\cap\mathfrak{o}_i} \int_{(\mathfrak{n}'\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})} f(\mathrm{Ad}(x^{-1})(X+U))\,dU.$$

对于任意 $T' \in \mathfrak{a}_0^\theta \cap \overline{\mathfrak{a}_{P'_0}^+}$ 以及任意 M_Q 中的 θ-稳定半标准抛物子群，记 T'_R 为从 wT' 到 $\mathfrak{a}_R^\theta$ 的投影，其中 $w \in W(M_Q,\ A_0^\theta)$ 满足 $P'_0 \subset R_w$（存在性参见注 4.5.13.1）。特别地，对于 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_0^+$，有 $T_{B_Q} \in \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_{B_Q}^+ \subset \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_{P'_0}^+$，并记 $T_R = (T_{B_Q})_R \in \overline{\mathfrak{a}_R^\theta}^\circ$

注 4.7.4.1。——由于 $P'_0 \subset R_w$ 当且仅当 $B_Q \subset (RN_Q)_w$，其中 RN_Q 是 G的一个 θ-稳定半标准抛物子群，因此根据我们的记号，有 $T_R = T_{RN_Q}$。

对任意 $T \in T_0 + \mathfrak{a}_0^\theta \cap \mathfrak{a}_0^+$、任意 $1 \leqslant \overline{i} \leqslant n$ 以及任意 $x \in M_Q^\theta(\mathbb{A})$，定义

$$K_{\mathfrak{o}_i,f}^{Q,T}(x) = \sum_{P'\in\mathcal{F}^{M_Q}(P_0'^\theta,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_{P'}^{M_Q})^\theta} \sum_{\delta\in P'^\theta(F)\backslash M_Q^\theta(F)} \hat{\tau}_{P'}(H_{P'}(\delta x) - T_{P'}) K_{P',\mathfrak{o}_i,f}(\delta x).$$

利用双射 (4.7.4.2) 和注 4.7.4.1，也可以写作

$$K_{\mathfrak{o}_i,f}^{Q,T}(x) = \sum_{P\in\mathcal{F}^Q(P_0^\theta,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_P^Q)^\theta} \sum_{\delta\in P^\theta(F)\backslash Q^\theta(F)} \hat{\tau}_P(H_P(\delta x) - T_P) K_{P\cap M_Q,\mathfrak{o}_i,f}(\delta x).$$

设 $[M_Q^\theta]^Q = M_Q^\theta(F)\backslash(M_Q^\theta(\mathbb{A}) \cap M_Q(\mathbb{A})^1)$。对任意 $\xi \in \mathfrak{a}_{Q^\theta,\mathbb{C}}^*$，定义

$$J_{\mathfrak{o}_i}^{Q,T}(\eta,\xi,f) = \int_{[M_Q^\theta]^Q} K_{\mathfrak{o}_i,f}^{Q,T}(x)\eta(x)\exp(\langle\xi, H_{Q^\theta}(x)\rangle)\,dx.$$

C'本质上是形如 (4.7.4.1) 的分布的乘积。最后，定义

$$J_{\mathfrak{o}}^{Q,T}(\eta,\xi,f) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} J_{\mathfrak{o}_i}^{Q,T}(\eta,\xi,f). \tag{4.7.4.3}$$

4.7.5. 关于 T的行为。 — 设 $\mathcal{F}(Q,\theta)$ 为包含 Q 的 G 的 θ-稳定抛物子群集合。定义

$$\Gamma_Q^G(H,T) = \sum_{R\in\mathcal{F}(Q,\theta)} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_R^G)^\theta}\tau_Q^R(H)\hat{\tau}_R(H-T), \forall H,T\in\mathfrak{a}_0^\theta.$$

对任意固定的 T，由 [LW13 的引理 1.8.3 和 2.9.2] 可知，函数 $\Gamma_Q^G(\cdot\ T)$ 在 $(\mathfrak{a}_Q^G)^\theta$ 上具有紧支集。对于 $\lambda\in\mathfrak{a}^\theta{}_{,Q}{}^*\mathbb{C}$，令

$$c'_Q(\lambda,T) = \int_{(\mathfrak{a}_Q^G)^\theta} \Gamma_Q^G(H,T)\exp(\langle\lambda,H\rangle)\,dH, \forall T\in\mathfrak{a}_Q^\theta.$$

特别地，记

$$p_{Q,\chi}(T) = c'_Q(\chi+2\rho_{\mathfrak{n}_Q\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{Q^\theta}^{G^\theta},T), \forall T\in\mathfrak{a}_Q^\theta.$$

引理 4.7.5.1. — 存在一个多项式 $c_{\lambda,Q,R}$，定义在 $(\mathfrak{a}_R^G)^\theta$ 上，对任意 $R\in F(Q,\theta)$ 均满足

$$c'_Q(\lambda,T) = \sum_{R\in\mathcal{F}(Q,\theta)} \exp(\langle\lambda,T_R^G\rangle)c_{\lambda,Q,R}(T_R^G).$$

特别地，$c'_Q(\lambda,T)$ 是关于 T 的指数多项式。

证明。—它由 [LW13 引理 1.9.1 与 2.9 的证明推出。2] （另见 [Li22，命题 5.6]）。□

注 4.7.5.2. — 对于类型 1 和 2，对一切$H\in(\mathfrak{a}_Q^G)^\theta$，均有指数映射$(\langle\chi+2\rho_{\mathfrak{n}_Q\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{Q^\theta}^{G^\theta},H\rangle) = 1$。由此可知，$p_{Q,\chi}(T)$ 确实是关于 T 的多项式。

我们如下定义 $\varphi_Q^\eta\in\mathcal{S}((\mathfrak{m}_Q\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}))$:

$$\varphi_Q^\eta(X) = \int_{K^\theta}\int_{(\mathfrak{n}_Q\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A})} \varphi(\mathrm{Ad}(k^{-1})(X+V))\eta(k)\,dV\,dk, \forall X\in(\mathfrak{m}_Q\cap\mathfrak{s})(\mathbb{A}).$$

定理 4.7.5.3. — 设 $T,T'\in T_0+\mathfrak{a}_0^\theta\cap\mathfrak{a}_0^+$。

1. 有

$$J_{\mathfrak{o}}^{G,T}(\eta,\chi,\varphi) = \sum_{Q\in\mathcal{F}(P_0',\theta)} p_{Q,\chi}(T_Q^G-T_Q'^G)\exp(\langle\chi+2\rho_{\mathfrak{n}_Q\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{Q^\theta}^{G^\theta},T_Q'^G\rangle)$$
$$\times J_{\mathfrak{o}}^{Q,T'}(\eta,\chi+2\rho_{\mathfrak{n}_Q\cap\mathfrak{s}}-2\rho_{Q^\theta}^{G^\theta},\varphi_Q^\eta).$$

2. 表达式 $J^{Q,}{}_{\mathfrak{o}}{}^{T}(\eta,\xi,f)$ 是关于 T的指数多项式的限制，且与 T_Q无关。

证明。 ——这是对 [Cha02 定理 42] 和 [Li22 定理 58] 的直接推广；这两个定理只涉及满足 $\eta^2 = 1$ 的特征 η，但其证明对任意酉特征仍然成立。□

4.7.6. 根据定理 4.7.5.3，我们将 $J_{\mathfrak{o}}^{Q}(\eta,\ \xi,\ f)$ 定义为 $J^{Q,\ {}^{T}}(\eta,\ \xi,\ f)$ 的常数项。特别地，我们得到定义在$\mathcal{S}((\mathfrak{m}_Q \cap \mathfrak{s})(\mathbb{A}))$上的幂零分布 $J^{Q}{}_{\mathrm{nilp}}(\eta,\ \xi,\ \cdot)$。显然，也可以将本节的构造和结果推广到命题 4.5.1.1 中三种类型的对称对之积的情形。

参考文献

[AG09] A. Aizenbud 和 D. Gourevitch。《广义 Harish-Chandra 下降、Gelfand 对及 Jacquet-Rallis 定理的阿基米德类比》。杜克数学杂志，149(3)：509–567，2009。附录由作者和 Eitan Sayag 撰写。[Art76] J. Arthur。《离散系列的特征作为轨道积分》。数学发明，32(3)：205–261，1976。[Art78] J. Arthur。《约化群的迹公式 I：与 $G(\mathbb{Q})$ 中陪集相关的项》。杜克数学杂志，45：911–952，1978。[Art80] J. Arthur。《约化群的迹公式 II：截断算子的应用》。Compositio Math.，40(1)：87–121，1980。[Art81] J. Arthur。《不变形式下的迹公式》。数学年刊（第 2 辑），114(1)：1–74，1981。[Art85] J. Arthur。《幂单簇上的一个测度》。加拿大数学杂志，37(6)：1237–1274，1985。[Art86] J. Arthur。《关于由轨道得到的一族分布》。加拿大数学杂志，38(1)：179–214，1986。[Art05] J. Arthur。《迹公式导论》。载于《调和分析、迹公式与志村簇》，Clay 数学论文集第 4 卷，第 1–263 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。[Bad08] A. I. Badulescu。《整体 Jacquet-Langlands 对应、重数一与自守表示分类》。数学发明，172(2)：383–438，2008。附录由 Neven Grbac 撰写。[Beu21] R. Beuzart-Plessis。《局部球特征的比较及酉群的 Ichino-Ikeda 猜想》。J. Inst. Math. Jussieu，20(6)：1803–1854，2021。[BPC25] R. Beuzart-Plessis 和 P.-H. Chaudouard。《酉群的整体 Gan-Gross-Prasad 猜想 II：从 Eisenstein 级数到 Bessel 周期》。Forum Math. Pi，13：论文编号 e16，98 页，2025。[BPCZ22] R. Beuzart-Plessis、P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor。《酉群的整体 Gan-Gross-Prasad 猜想：端oscopic 情形》。高等研究院数学出版物，135：183–336，2022。[BR10] A. I. Badulescu 和 D. Renard。《阿基米德赋值处 GL(n) 的酉对偶与整体 Jacquet-Langlands 对应》。Compos. Math.，146(5)：1115–1164，2010。[Cha02] P.-H. Chaudouard。《李代数的迹公式》。数学年刊，322(2)：347–382，2002。[Cha25a] P.-H. Chaudouard。《对称空间 $\mathrm{GL}_n(E)/\mathrm{GL}_n(F)$ 的谱展开》。数学精选（新辑），31(4)：论文编号 71，2025。[Cha25b] P.-H. Chaudouard。《一个加权相对特征》，2025。Arxiv 2512.17056。[CZ21] P.-H. Chaudouard 和 M. Zydor。《Jacquet-Rallis 迹公式的奇异转移》。Compos. Math.，157(2)：303–434，2021。

[FJ93] S. Friedberg 和 H. Jacquet。《线性周期》。J. Reine Angew. Math.，443：91–139，1993。[FMW18] B. Feigon、K. Martin 和 D. Whitehouse。《GL($2n$) 的中心 L 值的周期与非消失性》。以色列数学杂志，225(1)：223–266，2018。[Guo96] J. Guo。《关于 Waldspurger 结果的一个推广》。加拿大数学杂志，48(1)：105–142，1996。[HS01] A. G. Helminck 和 G. W. Schwarz。《与一对交换对合相关的轨道与不变量》。杜克数学杂志，106(2)：237–279，2001。[HS04] A. G. Helminck 和 G. W. Schwarz。《与一对交换对合相关的商空间的光滑性》。加拿大数学杂志，56(5)：945–962，2004。[HW93] A. G. Helminck 和 S. P. Wang。《关于约化群对合的有理性》。数学进展，99(1)：26–96，1993。[Jac86] H. Jacquet。《关于 Waldspurger 的一个结果》。高等师范学校科学年刊（第 4 辑），19(2)：185–229，1986。[Jac97] H. Jacquet。《对称空间的自守谱》。载于《表示论与自守形式》（爱丁堡，1996），纯数学专题讨论会论文集第 61 卷，第 443–455 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。[JC01] H. Jacquet 和 N. Chen。《二次基变换 L 函数的正性》。法国数学会通报，129(1)：33–90，2001。 LJR[H. Jacquet 和 S. Rallis。《线性周期的唯一性》。Compositio Math.，102(1)：65–123，1996。[Li22] H. Li。《Guo-Jacquet 迹公式的一个无穷小变体 I：($GL_{2n,D}$,$GL_{n,D} \times GL_{n,D}$) 的情形》。数学文献，27：315–381，2022。[LW13] J.-P. Labesse 和 J.-L. Waldspurger。《根据星期五上午研讨班讲授的扭曲迹公式》，CRM 专著丛书第 31 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2013。Robert Langlands 作序。 [英语/法语对照文本]。[MOY25] N. Matringe、O. Offen 和 C. Yang。《自守表示区分性的交织周期、L 函数与局部-整体原理》，2025。[MW94] C. Mœglin 和 J.-L. Waldspurger。《谱分解与 Eisenstein 级数》，数学进展丛书第 113 卷。Birkhäuser 出版社，巴塞尔，1994。《圣经》的意译。[Nad05] D. Nadler。《实环格拉斯曼流形上的层》。数学发明，159(1)：1–73，2005。[PV89] V. L. Popov 和 Eh. B. Vinberg。《不变量理论》。载于《代数几何 IV：线性代数群、不变量理论》，数学科学百科全书第 55 卷，123–278 页（1994）；译自 Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya 55，137–309 页（1989），1989。[Ric82] R. W. Richardson。《关于代数群和李群的轨道》。澳大利亚数学会通报，25(1)：1–28，1982。[RR96] C. Rader 和 S. Rallis。《 $\mathfrak{p}$-进对称空间上的球特征》。美国数学杂志，118(1)：91–178，1996。[Sak13] Y. Sakellaridis。《球簇上的球函数》。美国数学杂志，135(5)：1291–1381，2013。[Sak16] Y. Sakellaridis。《光滑半代数栈的施瓦茨空间》。数学精选（新辑），22(4)：2401–2490，2016。[Sak19] Y. Sakellaridis。《通过迹公式实现相对函子性与函数方程》。越南数学学报，44(2)：351–389，2019。

[Spr09] T. A. Springer. 线性代数群。现代 Birkhäuser 经典丛书。Birkhäuser Bos- ton, Inc., 马萨诸塞州波士顿，第二版，2009 年。[SV17] Y. Sakellaridis 和 A. Venkatesh。球簇上的周期与调和分析。*Astérisque*，(396)：viii+360，2017 年。[Tak23] S. Takeda。对称簇的对偶群与区分表示，2023 年。[Wal85] J.-L. Waldspurger。关于某些自守函数在其对称中心处的取值。*Compositio Math.*，54(2)：173–242，1985 年。[XZ25] H. Xue 和 W. Zhang。扭曲线性周期与一种新的相对迹公式。*PekingMath. J.*，8(3)：533–600，2025 年。[Yu13] C.-F. Yu。中心单代数的特征多项式。*Taiwanese J. Math.*，17(1)：351–359，2013 年。[Zha15] C. Zhang。关于线性周期。*Math. Z.*，279(1-2)：61–84，2015 年。[Zyd20] M. Zydor。Jacquet–Rallis 的粗相对迹公式。*J. ReineAngew. Math.*，762：195–259，2020 年。[Zyd22] M. Zydor。约化子群上的自守形式的周期。*Ann. Sci. Éc. Norm.Supér. (4)*，55(1)：141–183，2022 年。

Pierre-Henri Chaudouard 巴黎大
学城 法国国家科学研究中心
IMJ-PRG 索菲·热尔曼大楼 8 赋值
Aurélie Nemours 法国巴黎
F-75013 法国大学研究院 电子邮箱：
P
i
e
r
r
e-
Henri.Chaudouard@imj-prg.fr
Huajie Li 丘成桐数学科学中心 清华
大学 北京 100084 中国 电子邮箱：
lihuajie@mail.tsinghua.edu.cn