arXiv:2602.06646v1 [math.PR] 6 Feb 2026

Carnot群路径空间上的 Talagrand 型运输不等式

PETER K. FRIZ[1,2],HELENA KREMP[1,2], VAIOS LASCHOS[2], MATTHIAS LIERO[2],和
BENJAMIN A. ROBINSON[3]

摘要

我们研究 Carnot群上布朗运动分布律的 Talagrand 型运输不等式。一个重要例子是将标准布朗运动提升为布朗粗糙路径。我们在增强路径空间上给出直接证明，该证明还表明，在运输问题中将耦合限制为适应耦合时仍可取等号。此外，我们证明了 Carnot群上热核测度满足 Talagrand不等式，并通过自底向上论证推导出 Carnot群上布朗运动分布律所满足的不等式。我们对这一增强 Wiener 测度的研究，推进了一项长期计划：将维纳测度的关键性质推广到增强 Wiener 测度这一非交换背景中；这对于 Lyons 粗糙路径理论至关重要。在非交换的次黎曼状态空间中，我们观察到与欧几里得情形不同的现象。特别是，尽管自顶向下投影论证能够从路径空间上的相应不等式推出欧几里得空间上的 Talagrand不等式，但在 Carnot群背景下，此类投影论证却会失效。我们还研究了海森堡群的黎曼近似，在这种情况下，可以部分克服自顶向下投影失效的问题。最后，我们表明，Talagrand不等式中使用的代价函数是一个自然的选择，因为它可由离散化代价的极限得到，其意义为 Γ-收敛。

Contents

1. 引言 2 2. 设定 5 2.1. Talagrand不等式预备知识 5 2.2. 二步Carnot群 8 2.3. 代价函数选择的讨论 $C_{\mathcal{H}}$ 133. Carnot群上布朗运动的Talagrand不等式——通过F¨ollmer漂移的直接方法 14 4. 高斯粗糙路径的Talagrand不等式——通过压缩的直接方法 16 5. Carnot群上热核测度的Talagrand不等式 17 5.1. 从对数Sobolev不等式到Talagrand不等式 17 5.2. 从热半群估计到Talagrand不等式 19 5.3. 海森堡型群上的Talagrand不等式 20 6. Carnot群上布朗运动的Talagrand不等式——自底向上方法 20

[1]Technische Universtität Berlin, Berlin, Germany
[2]Weierstrass-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Berlin, Germany[3]Department of Statistics, University of Klagenfurt, Austria*E-mail addresses*: friz@math.tu-berlin.de, kremp@wias-berlin.de, artnoage@gmail.com, liero@wias.berlin.de,benjamin.robinson@aau.at.*Date*: 2026年2月9日.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 39B62, 49Q22, 53C17, 60E15,60L20.*Key words and phrases.* Carnot群、对数 Sobolev 不等式、最优传输、粗糙路径、Talagrand不等式、运输不等式。

6.1. 从Carnot群上的Talagrand不等式到路径空间上的Talagrand不等式 20 6.2. 自上而下投影失效与代价函数爆炸 24 6.3. 海森堡群的黎曼近似 28 6.4. Γ-代价函数的收敛 31 7. 超越二步Carnot群 37 致谢 参考文献

37
37

1. Introduction

设 $\mu \in \mathcal{P}(E)$ 是波兰空间 E 上的博雷尔概率测度。给定一个可测代价函数c: $E \times E \to [0,\infty]$，若 μ 满足常数为 $\alpha > 0$ 的 Talagrand $\mathcal{T}_2$ 传输不等式，记作 $\mu \in \mathcal{T}_2(E,c,\alpha)$，则对任意 $\nu \in \mathcal{P}(E)$，都有

$$\mathrm{T}^2_{c,2}(\mu,\nu) \coloneqq \inf_{\lambda\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{E\times E} c^2(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y) \;\le\; \frac{2}{\alpha}\,H(\nu\|\mu),$$

其中，$\Pi(\mu,\nu)$ 表示 μ 与 ν 之间的耦合集合，而 $H(\nu\|\mu)$ 表示 ν 关于 μ的相对熵。若代价由 E上的度量 d 诱导，即 $c(x,y) = d(x,y)$，则上述定义化为经典的 2-Wasserstein 表述，

$$W_2^2(\mu,\nu) \;\le\; \frac{2}{\alpha}\,H(\nu\|\mu), \qquad \forall \nu \in \mathcal{P}(E).$$

我们在此不作详细讨论，只指出根据 [OV00]的结果，测度集中与对数 Sobolev 不等式之间存在重要联系。Talagrand [Tal96]最早证明了标准高斯测度在 R^d 上满足欧几里得代价下的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。针对取值于 R^d、代价由 Cameron–Martin 距离给出的布朗运动的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，最早见于 [FU02]。随后，[Leh13]给出了类似的证明，利用 [F¨ol86, F¨ol88]中的内禀漂移及 Girsanov 定理，直接在 Wiener 空间上证明了该$\mathcal{T}_2$ 不等式。使用 Girsanov 定理的其他证明也见于.[DGW04] 和 [FU04]。另一方面，Wiener 空间上的 $\mathcal{T}_2$ 不等式也可以由高斯乘积情形推得。事实上，[Tal96] 已经研究了无限高斯乘积情形；显式构造可参见 [Rie17]及其中的参考文献。这种所谓的自底向上方法利用了 $\mathcal{T}_2$ 不等式的张量化性质以及布朗运动的截断展开。正如 [Leh13]和 [F¨ol22], 所指出的，考虑布朗桥，也可以从路径空间上的 $\mathcal{T}_2$不等式推出 R^d 上的 Talagrand $\mathcal{T}_2$ 不等式。这就给出了 Talagrand $\mathcal{T}_2$ 不等式的一种所谓自顶向下方法。本文首次研究最优传输与粗糙分析相关方面之间的联系，考察当 R^d 替换为某个 Carnot 群时，$\mathcal{T}_2$ 不等式是否成立，以及自底向上和自顶向下方法是否适用。

粗糙路径理论的兴起（例如，参见 [Lyo98, FV10]）凸显了将（d维）布朗运动 B 提升至自由二阶幂零群（在 R^d 上）的根本重要性；这就是取值于二步卡诺群 G 的布朗运动的一个例子。该过程记作

$$\boldsymbol{B}_t = \Big(B_t,\ \mathrm{Anti}\Big(\int_0^t B_s \otimes \mathrm{d}B_s\Big)\Big),$$

根据作者和上下文的不同，该过程也称为水平布朗运动、增强布朗运动或布朗粗糙路径。当 $d = 2$ 时，相关的群不过是经典的（$2+1$）维海森堡群 $\mathrm{H} \cong \mathrm{R}^3$，其群运算为

$$\big((x,y,z),(x',y',z')\big) \mapsto \big(x+x', y+y', z+z'+(xy'-x'y)/2\big).$$

尽管与本文并无直接关系，但我们指出，最优传输与海森堡群的交汇研究由 [AR04]开创；关于Carnot群背景下的近期研究，另见 [AS20] 。

我们先约定一些记号。除非另有说明，$\mu = \mathrm{Law}(B)$表示定义在 $\Omega = C_0([0,T], \mathrm{R}^d)$ 上的维纳测度，其高斯单位时间边缘分布为 $\mu_1 = \mathcal{N}(0, I_d)$。类似地，将 $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{Law}(\boldsymbol{B})$称为定义在

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} = C_0([0,T], \mathbb{G}),$$

其单位时间边缘分布为（非高斯） $\boldsymbol{\mu}_1$，我们称之为 G 上的热核测度。过去 20 年来，自 [LQZ02], 的工作起，维纳测度的诸多性质（包括样本路径正则性、Cameron–Martin平移、Schilder大偏差原理、Stroock–Varadhan支撑定理）已从 μ 推广至 $\boldsymbol{\mu}$，从而显著推动了随机分析的发展（例如，参见 [FV10、Lyo14、FH20]及其中的参考文献）。关于抽象观点，另见 [CF26] 。由此自然引出一个问题：针对高斯测度（分别为维纳测度）的Talagrand传输不等式，能否推广至 G 上的热核测度（分别为增强 Wiener 测度）？自底向上和自顶向下方法在多大程度上仍然适用？本文将对这些问题给出相当完整的回答。

我们证明了 $\mathcal{T}_2$ 不等式，该不等式针对 $\boldsymbol{\mu}$，采用代价函数 $C_{\mathcal{H}}$ 定义在$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$上，

$$C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}}) := \begin{cases} \|h\|_{\mathcal{H}}, & \text{if } \overline{\boldsymbol{\omega}} = T_h \boldsymbol{\omega}, \text{ for some } h \in \mathcal{H}, \\ +\infty, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中， $\mathcal{H}$ 是 μ 的Cameron–Martin空间，而 T_h 本质上是粗糙路径理论 [FV10]中熟知的平移（或移位）算子。我们给出了多种策略来证明代价 $C_{\mathcal{H}}$ 在$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$上的 $\mathcal{T}_2$ 不等式：既包括自底向上策略，也包括通过应用收缩原理 [DGW04, Rie17] ，或将结果从 [Leh13]提升至Carnot群情形的直接方法。

自底向上方法包括证明Carnot群上热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 满足一个 $\mathcal{T}_2$ 不等式，并利用Talagrand不等式的张量化性质，推导出增强 Wiener 测度 $\boldsymbol{\mu}$的相应结果。我们采用的方法是在时间上离散化布朗运动，而非像 [Rie17, F¨ol22]那样考虑级数展开。通过Otto–Villani论证 [OV00, GL13], ，可由对数 Sobolev 不等式推出Carnot群上热核测度的$\mathcal{T}_2$ 不等式。后者目前仅部分可用：根据 [Li06, Eld10] ，我们已知Heisenberg群（以及所谓的H型群）上的某些热半群估计，它们蕴含所需的对数 Sobolev 不等式。只要有正确的热半群估计，我们的证明便不依赖H型设定，且适用于一般的二步Carnot群。

我们进一步通过两种不同的方法，直接在路径空间上证明 $\boldsymbol{\mu}$ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。首先，我们对标准布朗运动的提升应用收缩原理，从而由维纳测度的$\mathcal{T}_2$ 不等式推出该结果。这一方法也可推广到更一般的高斯

[1]与标准的粗糙路径框架不同，我们在此处理一般的二步Carnot群。

过程的提升；参见 [FV10第 15]章。或者，我们利用F¨ollmer在 [F¨ol86、F¨ol88]中的内禀漂移，遵循 [Leh13]的策略，证明 $\boldsymbol{\mu}$的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。后一方法为所谓的适应传输不等式提供了更多认识。正如 [Ald81、Las18、BBBE20a、BBBE20b],所指出的，对于涉及随机过程分布的最优传输问题，宜考虑这些分布之间的适应耦合，而非一般耦合。我们确定了代价 $C_{\mathcal{H}}$ 的最优适应传输计划，并证明在限制于适应耦合时， $\mathcal{T}_2$ 不等式中等号成立。

与欧几里得情形的一个关键区别在于，在 Carnot 群的非交换次黎曼情形中，自顶向下方法会失效。事实上，在欧几里得情形中，给定维纳测度 μ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，可以应用收缩原理推导出 μ_1 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。然而，对于增强 Wiener 测度 $\boldsymbol{\mu}$，这种收缩原理论证不再成立，因此我们无法从 $\boldsymbol{\mu}$ 的相应不等式推导出热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。考虑对 Carnot 群作黎曼近似（仍然是非交换的），我们发现自顶向下方法在一定程度上得以恢复。给定逼近黎曼流形上布朗运动的分布律 $\boldsymbol{\mu}^{\varepsilon}$ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，收缩原理意味着$\boldsymbol{\mu}_1^{\varepsilon}$ 满足关于 $p \in [1,2)$ 的 $\mathcal{T}_p$ 不等式，但不满足关于 $p=2$ 的不等式。

我们指出，我们的代价 $C_{\mathcal{H}}$ 不同于 [Rie17，推论 1.4], 中考虑的代价。后者是根据群中路径投影到其第一分量后的差的 Cameron–Martin范数定义的，而且结果表明它是次优的（参见第 2.3 节的讨论）。我们的代价 $C_{\mathcal{H}}$ 是一种自然的选择，原因如下： $C_{\mathcal{H}}$ 可以作为“有限维代价” C_n 的变分极限（更准确地说，是Γ-极限；参见第 6.4 节）得到，而这些有限维代价源自我们的自底向上方法:

$$C_n^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{\omega}_{t_{k-1}^n,t_k^n}, \overline{\boldsymbol{\omega}}_{t_{k-1}^n,t_k^n}), \quad \boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}},$$

其中 d_{CC} 表示 G 上的 Carnot–Caratheodory度量。我们在第 6.4 节证明，代价函数 C_n 的 Γ-收敛也会导致最优传输代价 $\mathrm{T}_{C_n,\,2}(\boldsymbol{\mu},\,\cdot)$ 收敛到 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},\,2}(\boldsymbol{\mu},\,\cdot)$。

请注意，尽管我们直接证明 $\mathcal{T}_2$ 不等式的方法简洁优雅，且适用范围更广，但自底向上方法，尤其是 Γ-收敛，为如何选择最自然的代价函数提供了清晰的信息。

为方便读者，我们将研究结果概括为简明的陈述。

定理 1.1（直接方法，参见定理 3.3 及第 4 节中的推广）。 在$\boldsymbol{\Omega}$上的测度 $\boldsymbol{\mu}$ $_{\mathbb{G}}$满足（$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，$C_{\mathcal{H}}$，1)不等式 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2$。

定理 1.2（自底向上，参见定理6.6）。 假设存在 $\alpha > 0$，使得 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2$（$\mathbb{G}$ d_{CC}，α）。那么 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2$（$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，$C_{\mathcal{H}}$，$\alpha$）。

定理 1.3 ($\mathcal{T}_2$ 在群上，参见定理 5.3)。 设 $\mathbb{G}$ 为 H 型群。则存在 $\alpha > 0$ 使得 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$。

定理 1.4 (适应耦合，参见定理 3.3)。 设 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\mathbf{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 上满足 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$的概率测度。则 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 之间的最优适应耦合可显式给出，并且

$$\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})^2 = 2H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}).$$

定理 1.5 (代价近似，参见定理 6.22 和 6.28)。

(i) 逐点收敛 $C_n \to C_{\mathcal{H}}$ 不成立（反例），*(ii)* 关于$\mathbf{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \mathbf{\Omega}_{\mathbb{G}}$上的一致拓扑， Γ-收敛[2] $C_n \xrightarrow{\Gamma} C_{\mathcal{H}}$ 成立，*(iii)* 关于 $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega}_{\mathbb{G}})$上的弱拓扑，$\mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\cdot) \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\cdot)$ 成立。

定理 1.6 (自顶向下——成立与失效)。 收缩原理

(i) 给出蕴含关系 $\mu \in \mathcal{T}_2(\Omega\ \|.-.\|_{\mathcal{H}},\alpha) \implies \mu_1 \in \mathcal{T}_2(R^d,|.-.|,\alpha)$，*(ii)* 无论 $\alpha,\alpha'>0$为何，都不能推出 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(\Omega\ C_{\mathcal{H}},\alpha) \implies \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(G\ d_{\mathrm{CC}},\alpha')$，*(iii)* 对于 $p\in[1,2)$，给出较弱的蕴含关系 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon \in \mathcal{T}_2(\Omega^{\mathbb{H}_\varepsilon}, C^\varepsilon_{\mathcal{H}},\alpha) \implies \boldsymbol{\mu}^\varepsilon_1 \in \mathcal{T}_p(H_\varepsilon, d_\varepsilon, \widetilde{\alpha}(\varepsilon,p))$，其中$(H_\varepsilon,d_\varepsilon)$是$(2+1)$维海森堡群的黎曼近似。

本文结构如下。第 2 节包含关于 Talagrand不等式的预备结果，并介绍我们关于二步Carnot群的设定。在第 3 节中，我们给出一种直接方法，借助 F¨ollmer 的内禀漂移证明 Carnot群上布朗运动分布律的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，并证明在适应传输计划情形下等式成立。在第 4 节中，我们利用收缩原理，通过直接方法证明一般高斯粗糙路径的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。第 5 节研究 Carnot群上热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 的 Talagrand不等式，以及它与对数 Sobolev 不等式和热半群估计的联系。第 6.1 节给出一种自底向上方法，作为第 5 节结果的推论来证明 $\boldsymbol{\mu}$的 $\mathcal{T}_2$不等式。在第 6.2 节中，我们通过例子表明，不能将 $\boldsymbol{\mu}$的 $\mathcal{T}_2$ 不等式向下投影为 $\boldsymbol{\mu}_1$的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，并且代价函数 C_n逐点爆炸。在第 6.3 节中，我们研究海森堡群的黎曼近似，由此可以部分克服代价爆炸与投影失效的问题。在第 6.4 节中，我们证明代价 C_n 到 $C_{\mathcal{H}}$的 Γ-收敛。我们在第 7 节中以对结果向高阶Carnot群推广的评述作为结语。

2. Setting

在本节中，我们首先汇集与Talagrand不等式相关的定义和结果。接下来，我们定义二步Carnot群的设定，并引入路径取值于Carnot群的布朗运动，以及路径上的提升与平移操作。利用平移算子，我们定义一个合适的代价函数 $C_{\mathcal{H}}$，它出现在我们的 $\mathcal{T}_2$ 不等式中。

2.1. Talagrand不等式的预备知识。 设 μ,ν 是波兰空间 E上的两个博雷尔概率测度，令 $\Pi(\mu,\nu)$表示在 $E\times E$上以 μ,ν为边缘分布的概率测度集合。此类测度称为耦合（或传输计划）。 ν 相对于 μ 的相对熵定义为

$$H(\nu\|\mu) = \begin{cases} \int_E \log\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\,\mathrm{d}\nu & \text{if } \nu \ll \mu, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

[2]回顾一下， Γ-收敛是变分法理论中关于泛函序列的一种自然收敛概念，它保证极小化子与极小值的收敛。

定义 2.1。设 E是一个波兰空间，且 $c\colon E\times E\to[0,\infty]$是一个可测函数。若博雷尔概率测度 μ 满足 E 上的代价-信息不等式，代价为 c、参数为$\alpha>0$、指数为 $p\in[1,\infty)$，则称其满足该不等式；对于任意定义在 E上的博雷尔概率测度 ν，

$$\mathrm{T}_{c,p}(\mu,\nu)\le\sqrt{\frac{2}{\alpha}H(\nu\|\mu)},\quad\text{where}\quad \mathrm{T}_{c,p}(\mu,\nu):=\Big(\inf_{\lambda\in\Pi(\mu,\nu)}\int\int c^p(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

记为 $\mu\in\mathcal{T}_p(E,\ c,\ \alpha)$，并称 μ 满足一个 $\mathcal{T}_p$ 不等式。[3]

特别地，我们关注 $p=2$的情形。在 R^d上，Talagrand [Tal96] 证明了标准高斯测度满足关于欧几里得代价的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。此后，Talagrand 的结果被推广到路径空间上的维纳测度。

令 B 表示 R^d上的标准布朗运动，令 μ_1 =Law(B_1)表示 R^d上的标准高斯测度，并令 μ =Law(B)表示 $\Omega:=C_0([0,1],\mathrm{R}^d)$上的维纳测度。$\mu$ 的 Cameron–Martin 空间定义为

$$\mathcal{H}:=\{\,h\colon[0,1]\to\mathbb{R}^d\text{ absolutely continuous}:\dot h\in L^2,\ h_0=0\,\}=W_0^{1,2}([0,1],\mathbb{R}^d),\tag{2.1}$$

Cameron–Martin 范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 定义为 $\|h\|_{\mathcal{H}}^2=\int_0^1|\dot h_t|^2\,\mathrm{d}t$，其中 $h\in\mathcal{H}$。全文中，对于 $p\in[1,\infty]$, $W^{1,\ p}([0,1],\mathrm{R}^d)$表示通常的索伯列夫空间，而 $W^{1,\ p}_{0}([0,1],\mathrm{R}^d)$表示满足 $x_0=0$ 的子空间，其中 $x\in W^{1,\ p}_{0}([0,1],\mathrm{R}^d)$。

定义Cameron–Martin代价 $c_{\mathcal{H}}\colon\ \Omega\times\Omega\to[0,\infty]$ 如下

$$c_{\mathcal{H}}(x,y):=\begin{cases}\|y-x\|_{\mathcal{H}}, & y-x\in\mathcal{H},\\ +\infty & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{2.2}$$

¨ ¨则维纳测度 μ 满足 $\mathcal{T}_2$ 不等式（参见 [FU02、DGW04、FU04、Leh13]）：

$$\mu\in\mathcal{T}_2(\Omega,c_{\mathcal{H}},1).\tag{2.3}$$

收缩原理。下述关于 $\mathcal{T}_p$ 不等式的收缩原理是 [Rie17引理4.1]的一个特例。

引理2.2. 设(E,d)、(S,ρ) 为度量空间，其中(E,d) 为波兰空间，设 $c\colon\ E\times E\to[0,\infty]$ 与$\widetilde{c}\colon$ $S\times S\to[0,\infty]$ 为*Borel*可测函数，并设 η为 E上的博雷尔概率测度。设$\psi\colon\ E\to S$与 $L\colon\ E\to[0,\infty]$ 为满足以下条件的可测函数

$$\widetilde{c}(\psi(x),\psi(\overline{x}))\le L(x)c(x,\overline{x}),$$

对所有 x、$\overline{\ }x\in E_0$成立，其中 $E_0\subseteq E$ 满足 $\eta(E_0)\ =1$。

假设 $\eta\in\mathcal{T}_2(E,c,\alpha)$，其中某个 $\alpha\in(0,\infty)$。那么，对于任意满足 $L\in L^q(\eta)$ *for*$q=\frac{2p}{2-p}\in[2,\infty]$ 的 $p\in[1,2]$，我们有 $\psi_\sharp\eta\in\mathcal{T}_p(S,\widetilde{c},\alpha\|L\|^{-2}_{L^q(\eta)})$。

注 2.3. 特别是，定理 2.2 中的收缩原理使我们能够将定理 1.1 中使用的拓扑从一致拓扑提升为 $\beta\in(\frac13,\frac12)$ 上的 β-H¨older 拓扑（关于该拓扑的定义，参见 [FV10, Section8] ）。事实上, -对于 $E=C_0([0,1],$ G) 和 $\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{P}_2(E)$，布朗运动的分布律

[3]由于 c^p 只是 $E\times E$ 上可测函数的另一种情形，因此不失一般性，可以取 $p=1$。不过，我们发现这个定义在本文后文中很有用。

在 G 上，我们有 $\boldsymbol{\mu}(\widetilde{E}) = 1$，其中 $\widetilde{E} = C_0^{\beta}([0,1],\mathrm{G})$ 对某个 $\beta \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ 成立。因此，定义 $\widetilde{c} = c|_{\widetilde{E}\times\widetilde{E}}$，由定理 2.2，定理 1.1 中的结果 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(E,c,\alpha)$ 可推广至 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(E,\widetilde{c},\alpha)$。

我们指出，在其他情形下并未观察到这种直接提升拓扑的做法。例如，要证明大偏差原理可以从一致拓扑提升到 H¨older 拓扑，过程要复杂得多；参见 [FV05, 定理 39]，，其证明基于大偏差的逆收缩原理 [DZ10, 定理 4.2.4]。

适应的 $\mathcal{T}_p$ 不等式。对于度量空间 (S,d)，p-瓦瑟斯坦距离 $\mathrm{T}_{d,p}$ 可度量 $\mathcal{P}_p(S)$ 上的弱拓扑。然而，当 S 中的元素被视为随机过程时，这种拓扑不足以体现过程相关滤过所编码的信息流。已有研究表明，适应弱拓扑和适应瓦瑟斯坦距离更为适用；例如参见 [Ald81, Las18, BBBE20a, BBBE20b]。适应瓦瑟斯坦距离是适应型（也称为双因果）最优传输问题的一个特例，定义如下。

定义 2.4。设 E 是一个波兰空间，且 $\mu,\nu \in \mathcal{P}(C([0,1],E))$. 设 $\lambda \in \Pi(\mu,\nu)$，并设 X, Y 是取值于$C([0,1],E)$的随机变量，其分布律为 $\lambda = \mathrm{Law}(X,Y)$。记 $\mathcal{F}^X$（分别为 $\mathcal{F}^Y$）为相对于 μ（分别为 ν）对 X（分别为 Y）的自然滤过作完备化所得的滤过。若在 λ下满足以下条件独立性，则称 λ 为适应耦合：对所有 $t \in [0,1]$,

$$\mathcal{F}_t^Y \text{ is independent of } \mathcal{F}_1^X \text{ given } \mathcal{F}_t^X \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_t^X \text{ is independent of } \mathcal{F}_1^Y \text{ given } \mathcal{F}_t^Y.$$

我们用 $\Pi_{\mathrm{ad}}(\mu,\nu)$ 表示所有此类耦合构成的集合。对于可测函数 $c\colon C([0,1],E) \times C([0,1],E) \to [0,\infty]$，定义适应最优传输问题

$$\mathrm{T}_{c,p}^{\mathrm{ad}}(\mu,\nu) \coloneqq \Big(\inf_{\lambda\in\Pi_{\mathrm{ad}}(\mu,\nu)} \int\int c^p(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

若存在 $\alpha > 0$ 使得……，则称 $\mu \in \mathcal{P}(C([0,1],E))$ 满足某个 $p \in [1,\infty)$ 下的适应 T_p 不等式

$$\mathrm{T}_{c,p}^{\mathrm{ad}}(\mu,\nu) \le \sqrt{\frac{2}{\alpha}H(\nu\|\mu)}.$$

在这一适应框架中，[Las18 的引理 5] 以及 [F¨ol22 的定理 3] 表明，维纳测度满足以 $\alpha = 1$ 为常数的适应 $\mathcal{T}_2$ 不等式，并且等式成立；即

$$\mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}^{\mathrm{ad}}(\mu,\nu) = \sqrt{2H(\nu\|\mu)}. \tag{2.4}$$

注 2.5. 对于连续时间随机过程，[BBP+25] 给出了适应最优传输问题与适应瓦瑟斯坦距离的另一种定义，该定义具有额外理想的拓扑性质。该问题的值被定义为介于 $\mathrm{T}_{c,p}$ 与 $\mathrm{T}_c^{\mathrm{ad}},_p$之间。因此，在此框架下，适应 $\mathcal{T}_2$ 不等式显然仍然成立。然而，此情形下的等式尚未得到研究，我们将其留待今后的工作，并选择在本文中聚焦于定理 2.4 所给出的定义。

注记 2.6. 对于取值于某个波兰空间 E、具有 n 个时间步的离散时间过程，也可以考虑它们的分布，即 E^n上的概率测度，并类似于定理 2.4 定义一个适应最优传输问题。在此框架下，[Par26，推论 1.8] 表明，$\mathcal{T}_1$ 不等式等价于其适应对应形式。此外，[Par26，推论 1.9] 表明，对于概率

具有有限指数矩的测度，对所有 $p > 1$，适应 $\mathcal{T}_p$ 不等式均成立，其常数可由指数矩与时间步数显式给出，从而将 [BV05] 的结果推广到适应框架。对于$\mathbb{R}^n$上的标准高斯分布， [BBLZ17，命题 5.10] 利用动态规划论证证明了适应 $\mathcal{T}_2$ 不等式。正如 [BBLZ17，注记 5.11],所指出的，在离散时间情形下一般不能期望等式成立。

2.2. 二步 Carnot群。 设 $\mathbb{G}$ 是一个二步 Carnot群，即一个连通、单连通的幂零李群，其左不变向量场的李代数 $\mathfrak{g}$ 维数为 $m = d_1 + d_2$，并具有分层 $\mathfrak{g} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$，满足 $\mathcal{V}_2 = [\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_1]$, $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] = \{0\}$。固定一个适应基 $(V_1, \ldots, V_m)$，使得 $(V_1, \ldots, V_{d_1})$ 是 $\mathcal{V}_1$ 的一组基。利用指数坐标，我们可以且将 $\mathbb{G}$ 视为 $\mathbb{R}^m$,

$$\mathbb{G} \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{d_1}, x_{d_1+1}, \ldots, x_m) = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{R}^{d_2} \cong \mathbb{R}^m,$$

其群运算采用 Baker–Campbell–Hausdorff形式,

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]. \tag{2.5}$$

不妨假设 $V_i(\mathbf{0}) = e_i$，它们是 $\mathbb{R}^m$ 的典范基向量。对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}$，令 $\ell_{\boldsymbol{x}} \colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ 表示由 $\ell_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ 定义的左乘映射，其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{G}$；令 $\mathrm{d}\ell_{\boldsymbol{x}} \colon T\mathbb{G} \to T\mathbb{G}$ 表示其微分。由左不变性， $V_i(\boldsymbol{x}) = \mathrm{d}\ell_{\boldsymbol{x}} e_i$, $i = 1, \ldots, m$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}$。

在 $\mathfrak{g}$ 上赋予左不变度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$，使得 V_i 构成标准正交基。定义结构常数 *struc-ture constants* $w_{ij} \in \mathbb{R}^{d_2}$，对于 $i, j \in \{1, \ldots, d_1\}$，令 $w_{ij}^k := \langle [V_i, V_j], V_k \rangle = -w_{ji}^k$，对于 $k \in \{d_1+1, \ldots, m\}$；参见 [BLU07，第 3 节2]。于是，(2.5) 中的群运算可写为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ((x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)})) \mapsto \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \Big(x^{(1)} + y^{(1)},\, x^{(2)} + y^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}(x_i^{(1)} y_j^{(1)} - x_j^{(1)} y_i^{(1)})\Big).$$

为简化记号，我们引入算子 $\mathbb{W} \colon \mathbb{R}^{d_1 \times d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$，其通过结构常数表示为

$$\mathbb{W}A = \sum_{i,j=1}^{d_1} w_{ij} A_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d_1} w_{ij}(A_{ij} - A_{ji}) = \sum_{i<j} w_{ij}(A_{ij} - A_{ji}), \quad A \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_1}.$$

利用此定义，我们可以将 $\boldsymbol{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$、 $\boldsymbol{y} = (y^{(1)}, y^{(2)})$ 的群运算重写为

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \Big(x^{(1)} + y^{(1)},\, x^{(2)} + y^{(2)} + \frac{1}{2}\mathbb{W}(x^{(1)} \otimes y^{(1)})\Big).$$

令 $\Delta_{\mathbb{G}} := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d_1} V_i^2$ 表示 $\mathbb{G}$ 上的次拉普拉斯算子，并通过其作用定义水平梯度 $\nabla_{\mathbb{G}}$

$$\nabla_{\mathbb{G}} f := \sum_{i=1}^{d_1} (V_i f) V_i \in \mathcal{V}_1, \quad \text{for } f \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}.$$

令 $H\mathbb{G} \subset T\mathbb{G}$ 为群 $\mathbb{G}$ 的水平切丛，即切丛 $T\mathbb{G}$ 的左不变子丛，使得 $H_{\boldsymbol{e}}\mathbb{G} = \{ V(\mathbf{0}) : V \in \mathcal{V}_1 \}$，其中 $\boldsymbol{e}$ 是 $\mathbb{G}$ 的单位元。对于$i \in \{1, 2\}$，定义投影算子 $\pi_i \colon \mathbb{G} \to \mathbb{R}^{d_i}$ 如下

$$\pi_i(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(i)}. \tag{2.6}$$

G 上因子为 $s>0$ 的膨胀形式为

$$\delta_s((x^{(1)},x^{(2)})) \coloneqq (sx^{(1)}, s^2x^{(2)}). \tag{2.7}$$

哈尔 G上的测度与$\mathbb{R}^m$上的勒贝格测度 $\mathcal{L}^m$ 一致。对于可测的 $E\subseteq\mathbb{R}^m$，我们有 ve

$$\mathcal{L}^m(\delta_s E) = s^Q\mathcal{L}^m(E), \tag{2.8}$$

其中 $Q=d_1+2d_2$ 称为G的齐性维数 。

我们赋予G由 HG诱导的卡诺–Carath´éodory结构，定义如下。绝对连续曲线 $\gamma\colon [0,1]\to$ G称为水平曲线，若对几乎所有 $t\in[0,1]$，都有 $\dot\gamma_t\in H_{\gamma_t}$G。于是， $x,y\in$ G之间的卡诺– *Carath´eodory*距离 定义为

$$d_{\mathrm{CC}}(x,y) = \inf\left\{\int_0^1 |\dot\gamma_t|\,\mathrm{d}t : \gamma \text{ horizontal}, \gamma_0=x, \gamma_1=y\right\}, \tag{2.9}$$

其中$|\cdot| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_{\circ}}$

我们注意到，水平路径必然对几乎处处的 $t\in[0,1]$ 满足：

$$\dot\gamma_t = \sum_{i=1}^{d_1} V_i(\gamma_t)\langle\dot\gamma_t, V_i(\gamma_t)\rangle =: \sum_{i=1}^{d_1} V_i(\gamma_t)\dot h_t^i, \tag{2.10}$$

因此，它们与绝对连续函数 $h\in$ AC$([0,1],\mathbb{R}^{d_1})$ 一一对应。对于式（2.6）中的第一层投影 π_1，有 $h=\pi_1\gamma$

定义 2.7（典范提升）。 典范提升 $\Psi\colon$ AC$([0,1],\mathbb{R}^{d_1})\to C([0,1],$ G$)$ 定义为 $\Psi(h)\coloneqq\gamma$，其中 $\gamma\in C([0,1],$ G$)$ 与 $h\in$ AC$([0,1],\mathbb{R}^{d_1})$ 由式（2.10）联系。具体而言，有

$$\dot\gamma_t^{(1)} = \dot h_t, \quad \dot\gamma_t^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}h_t^i\dot h_t^j = \frac{1}{2}\mathsf{W}\big(h_t\otimes\dot h_t\big), \quad \text{for } t\in[0,1].$$

根据周–拉谢夫斯基定理， d_{CC} 实际上是一个距离，并且关于左乘不变，且相对于式（2.7）定义的膨胀是齐次的。度量空间 (G d_{CC}) 是一个波兰测地空间（例如参见 [AS20，第 2.4] 节）。我们用 $|\cdot|_{\mathbb{G}}$ 表示由 d_{CC} 在 G 上诱导的范数。还可以在 G 上赋予由下式定义的规范距离 d_g

$$d_g(x,y) = |(y^{-1}x)^{(1)}| + |(y^{-1}x)^{(2)}|^{\frac{1}{2}},$$

对于 x， $y\in$ G。G 上的所有齐次范数都等价。特别地，存在常数 $\kappa\in(0,\ \infty)$，使得

$$\frac{1}{\kappa}d_g(x,y) \le d_{\mathrm{CC}}(x,y) \le \kappa\, d_g(x,y); \tag{2.11}$$

例如，参见 [BLU07，命题 5.1.4]。

注 2.8（度量导数）。 曲线 $\gamma\colon[0,1]\to$ G 在 $t\in[0,1]$ 处的度量导数定义为

$$|\dot\gamma_t|_{d_{\mathrm{CC}}} \coloneqq \lim_{s\to t}\frac{d_{\mathrm{CC}}(\gamma(s),\gamma(t))}{|s-t|}.$$

若 γ绝对连续，则度量导数几乎处处存在，且 $|\dot\gamma_t|_{d_{\mathrm{CC}}} = |\dot\gamma_t|$；参见 [Mon01，定理 1.3.5]。此外，度量导数在以下意义下是最小的：对于所有满足 $d_{\mathrm{CC}}(\gamma(s)\ \gamma(t)) \le \int_s^t m(r)\,\mathrm{d}r$, $0\le s<t\le 1$ 的 $m\in L^1([0,1])$，均有 $|\dot\gamma_t|_{d_{\mathrm{CC}}}\le m$ ；参见 [AGS08，定理 1.1.2]。

注 2.9 （自由二步Carnot群）。 自由二步幂零情形 G $= \mathrm{F}^{d_1,\,2}$ 即 G $\cong \mathrm{R}^{d_1} \oplus \mathfrak{so}(d_1)$（将外代数 $\wedge^2\mathrm{R}^{d_1}$ 与 $\mathfrak{so}(d_1)$等同后）。空间 $\mathfrak{so}(d_1)$由$\{\, e_{[i,j]} :\ 1 \le i < j \le d_1 \,\}$张成，其中 $e_{[i,j]} := \frac{1}{2}(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i)$，维数为 $d_2^* = d_1(d_1-1)/2$。将括号记作 $[e_i, e_j] = e_{[i,j]}$，结构常数 $w_{ij}^{[p,q]}$ 化为克罗内克符号。

所有其他二步Carnot群都可以视为自由群的商群，由 $d_2 \le d_2^*$和结构常数刻画。例如，$(2n+1)$ 维海森堡群 $\mathrm{H}^n \cong \mathrm{R}^{2n} \oplus \mathrm{R}$ 具有 $d_1 = 2n$, $d_2 = 1$和 $w_{1,\,2} = w_{3,\,4} = \cdots = w_{2n-1,\,2n} = 1$（交换指标时符号反转，否则为零）。对于 $d_1 = 2$，我们得到熟悉的例子 H $= \mathrm{H}^1 \cong \mathrm{F}^{2,2}$。令 $(x,\ y,\ z) \in$ H 表示 H 中的一个规范元素，则左不变向量场为

$$V_1 = \partial_x + \tfrac{1}{2} y \partial_z, \quad V_2 = \partial_y - \tfrac{1}{2} x \partial_z, \quad V_3 = [V_1, V_2] = \partial_z.$$

注 2.10 （海森堡型群）。 二步卡诺群中有一类特殊的群，即海森堡型群，简称 H 型群，它们具有一些额外性质。对我们而言，最重要的是，已知 H 型群上成立 Talagrand不等式；参见第 5.3 节。感兴趣的读者可参阅 [BLU07，第 18] 章。

若对每个 $z \in \mathrm{R}^{d_2}$，都存在一个线性映射 $\mathsf{J}_{\mathbb{G}}(z) : \mathrm{R}^{d_1} \to \mathrm{R}^{d_1}$，使得.....则二步卡诺群 G $\cong \mathrm{R}^{d_1} \oplus \mathrm{R}^{d_2}$ 是一个H 型群。

$$\mathsf{J}_{\mathbb{G}}(z)^2 = -|z|^2 \mathrm{id} \quad \text{and} \quad \big\langle \mathsf{W}(x \otimes y), z \big\rangle_{\mathbb{R}^{d_2}} = \langle \mathsf{J}_{\mathbb{G}}(z) x, y \rangle_{\mathbb{R}^{d_1}} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^{d_1}.$$

注意，必然有 $d_1 \in 2\mathbb{N}$ 和 $d_2 \le d_1/2$。顾名思义，海森堡群 $\mathrm{H}^n \cong \mathrm{R}^{2n} \oplus \mathrm{R}$ 是 H 型群的典型例子，其中映射 $\mathsf{J}_{\mathbb{H}^n}$: $\mathrm{R}^{2n} \to \mathrm{R}^{2n}$ 定义为

$$\mathsf{J}_{\mathbb{H}^n}(z) = \begin{pmatrix} 0 & -zI_n \\ zI_n & 0 \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

***G* 上的布朗运动。**设 $B = (B_t)_{t \in [0,1]}$ 是定义在滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, \mathrm{P})$ 上的 d_1 维布朗运动。我们将 G 上的布朗运动 $\boldsymbol{B}$ 定义为一个连续的、取值于 G 的马尔可夫过程，其生成元为 $\Delta_{\mathbb{G}}$，它通过求解以下随机微分方程得到

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t = \sum_{i=1}^{d_1} V^i(\boldsymbol{B}_t)\, \mathrm{d}B_t^i, \tag{2.12}$$

更明确地写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t^{(1)} = \mathrm{d}B_t, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t^{(2)} = \frac{1}{2}\mathsf{W}(B_t \otimes \mathrm{d}B_t).$$

注意，由于 $B = (B_1, \ldots, B_{d_1})$ 是标准布朗运动，因此这里 Itô 积分与 Stratonovich 积分没有区别。

布朗运动 $\boldsymbol{B}$ 取值于空间

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} := C_0([0,1], \mathbb{G})$$

由从原点出发的连续G值路径构成。我们记 $\boldsymbol{\mu}$ = 分布律($\boldsymbol{B}$)与 μ = 分布律(B)，以及$\boldsymbol{\mu}_t$ = 分布律($\boldsymbol{B}_t$)、μ_t = 分布律(B_t)，对于 $t > 0$。对于路径 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，令$\boldsymbol{\omega}_{s,t} = \boldsymbol{\omega}_s^{-1}\boldsymbol{\omega}_t$、$s \le t$表示其增量。

我们赋予空间$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$由度量$d_\infty$诱导的一致拓扑，其定义为

$$d_\infty(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) \coloneqq \sup_{t\in[0,1]} d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{\omega}_t,\overline{\boldsymbol{\omega}}_t). \tag{2.13}$$

注意到（$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，$d_\infty$）是一个波兰空间。

根据 H¨ormander 定理，$\Delta_{\mathbb{G}}$是一个次椭圆的算子，因此相应的热核 $\mathfrak{p}$：（0，∞）×G $\to$（0，∞）是光滑的 [H¨or67, Koh73, Hai11, BB15]。注意，对于所有 $t>0$，$\boldsymbol{\mu}_t$ 的密度为$\mathfrak{p}_t$：G $\to$（0，∞）。对于 $t>0$，我们还定义热半群 $P_t = e^{t\Delta_{\mathbb{G}}}$，其定义为

$$P_t f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{G}} f(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-1})\mathfrak{p}_t(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{G}} f(\boldsymbol{y})\mathfrak{p}_t(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{G}, \tag{2.14}$$

对于任意 $f\in L^1$（$\boldsymbol{\mu}_t$），其中 P_0 等于恒等算子。

平移 G值路径。令 AC_0（$[0,1]$,R^d）表示从原点出发的绝对连续曲线空间，并回顾定理 2.7 中的典范提升 Ψ：AC_0（$[0,1],\mathrm{R}^{d_1}$）$\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。由于（G d_{CC}）是一个测地空间，以下逼近引理是直接的（参见 [FV10, 引理 5.19，定理 7.32]）。

引理 2.11（测地逼近）。每个取值于$\mathbb{G}$的连续路径 $\boldsymbol{\omega}$在 $[0,T]$上的一致极限，都是绝对连续水平曲线；即 $\boldsymbol{\omega}^n = \Psi(\omega^n)$，其中 $\omega^n\in\mathrm{AC}_0([0,1],\mathbb{R}^{d_1})$，且 Ψ定义见定义 *2.7*。

现在，我们将典范提升扩展为提升映射，使其定义在从原点出发的连续曲线空间 $\Omega = C_0([0,1],\mathrm{R}^{d_1})$ 上。注意，定理 2.11 中 $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(2)})$ 的测地逼近同时依赖于 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$。因此，为了扩展典范提升，我们还引入一种仅基于 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ 的逼近。对于连续路径 $\omega\in\Omega$，令 $\widehat{\omega}^n\in\mathrm{AC}_0([0,1],\mathrm{R}^{d_1})$ 表示 ω 在二进网格 $(k2^{-n})_{k\in\{0,\dots,2^n\}}$ 上的分段线性逼近，其中 $n\in\mathbb{N}$；注意，$\widehat{\omega}^n\to\omega$ 在 Ω 的一致拓扑下。

定义 2.12.（提升）将典范提升 Ψ: $\mathrm{AC}_0([0,1],\mathrm{R}^{d_1})\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$扩展为提升映射 $\Psi:\Omega\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，定义为

$$\Psi(\omega) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\Psi(\widehat{\omega}^n), & \text{if the limit exists,}\\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{2.15}$$

对于 $\omega\in\Omega$。将 Ψ 的定义域 定义为 $\mathrm{Dom}(\Psi) \coloneqq \{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\Psi(\widehat{\omega}^n)$ 存在 $\}\subset\Omega$。

通过对一般二阶 Carnot 情形下 [FV10, Corollary 13.19] 的证明稍作修改，即可得到以下结论。

命题 2.13. 设 B 是一个 d_1 维布朗运动。那么，(2.12) 中定义的 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B} = \Psi(B) = \lim_{n\to\infty}\Psi(B^n)$ 几乎处处成立。特别地，可得 $\mu(\mathrm{Dom}(\Psi)) = 1$。

定义了适用于一般曲线 $\omega\in C_0([0,1],\mathrm{R}^{d_1})$ 的提升 Ψ 后，我们现在可以陈述以下引理，该引理联系了$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 上的绝对连续测度 $\boldsymbol{\nu}\ll\boldsymbol{\mu}$ 与 Ω 上的绝对连续测度 $\nu\ll\mu$。

引理 2.14. 设 $\boldsymbol{\nu}$ 是 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 上的博雷尔概率测度。则 $\boldsymbol{\nu}\ll\boldsymbol{\mu}$ 当且仅当存在 Ω 上的博雷尔概率测度 ν，使得 $\nu\ll\mu$ 且 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$。

证明。 首先假设存在满足 $\boldsymbol{\nu}=\Psi_\sharp\nu$ 的 $\nu\ll\mu$。则对任意满足 $\boldsymbol{\mu}(A)=0$ 的博雷尔 $A\subseteq\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，我们有 $\mu(\Psi^{-1}(A))=\boldsymbol{\mu}(A)=0$，从而

$$\boldsymbol{\nu}(A)=\nu(\Psi^{-1}(A))=0.$$

现在假设 $\boldsymbol{\nu}\ll\boldsymbol{\mu}$。令 $\boldsymbol{\rho}:=\frac{d\boldsymbol{\nu}}{d\boldsymbol{\mu}}$ 并通过 $\frac{d\nu}{d\mu}=\boldsymbol{\rho}\circ\Psi$ 定义测度 ν，使得 $\nu\ll\mu$。由定理2.13，$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\setminus\Psi(\Omega))=0$ 且 $\boldsymbol{\mu}=\Psi_\sharp\mu$。因此

$$\nu(\Omega)=\int_\Omega\boldsymbol{\rho}(\Psi(\omega))\mu(\mathrm{d}\omega)=\int_{\Psi(\Omega)}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})=\int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}}\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})=1,$$

因此 ν 是 Ω 上的概率测度。此外，对于任意博雷尔可测的 $A\subset\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$,

$$\boldsymbol{\nu}(A)=\int_A\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\mu}(\mathrm{d}\boldsymbol{\omega})=\int_{\Psi^{-1}(A)}\boldsymbol{\rho}(\Psi(\omega))\mu(\mathrm{d}\omega)=\int_{\Psi^{-1}(A)}\nu(\mathrm{d}\omega)=\nu(\Psi^{-1}(A))$$

因此 $\boldsymbol{\nu}=\Psi_\sharp\nu$。 □

我们将在下文的定理 2.16 中证明，下述平移映射定义良好。

定义 2.15。 （平移映射）对于 $h\in\mathrm{AC}_0([0,1],\mathbb{R}^{d_1})$，定义平移映射 $T_h\colon\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 如下：

$$T_h\boldsymbol{\omega}=\lim_{n\to\infty}\Psi(\omega^n+h),\quad\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}},\tag{2.16}$$

其中，$(\omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 表示定理 2.11 中的测地逼近。

命题 2.16. 定理 *2.15* 中定义的平移映射满足以下性质：

(i) 对于 $h\in\mathcal{H}$，平移映射 T_h 有定义。*(ii)* 对于 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)})\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 和 $h\in\mathcal{H}$，平移映射 $T_h\boldsymbol{X}$ 显式地表示为

$$(T_h\boldsymbol{X})_t^{(1)}=\boldsymbol{X}_t^{(1)}+h_t,\quad(T_h\boldsymbol{X})_t^{(2)}=\boldsymbol{X}_t^{(2)}+\frac{1}{2}\mathsf{W}\left(\mathbb{X}_t^1+\mathbb{X}_t^2+\mathbb{X}_t^3\right),$$

其中

$$\mathrm{d}\mathbb{X}_t^1=\boldsymbol{X}_t^{(1)}\otimes\mathrm{d}h_t,\quad\mathrm{d}\mathbb{X}_t^2=h_t\otimes\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{(1)},\quad\mathrm{d}\mathbb{X}_t^3=h_t\otimes\mathrm{d}h_t.$$

(iii) 若 $\boldsymbol{X}$ 由 $\boldsymbol{X}=\Psi(X)$ 给出，其中 $X\in\mathrm{Dom}(\Psi)$，则对于 $h\in\mathcal{H}$,

$$T_h\boldsymbol{X}=T_h\Psi(X)=\Psi(X+h).\tag{2.17}$$

(iv) 映射 $\mathrm{AC}_0([0,1],\mathbb{R}^{d_1})\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，$(h,\boldsymbol{X})\mapsto T_h\boldsymbol{X}$ 连续。

证明。 若 $\boldsymbol{X}=\Psi(X)$ 是一条绝对连续水平曲线，则有 $T_h\boldsymbol{X}=\Psi(X+h)$，对于$h\in\mathcal{H}$。因此，根据 $\mathrm{AC}_0([0,1],\mathbb{R}^{d_1})$ 上提升的定义，(ii) 成立。当 X 仅为连续函数时，(ii) 的表示式（其中包含 $\mathbb{X}^1,\mathbb{X}^2,$ 中的交叉积分）仍然有意义，这是由黎曼–斯蒂尔杰斯积分的基本性质保证的。根据黎曼–斯蒂尔杰斯积分的连续性，我们得到 (2.16) 中的极限存在，因此 (i) 和 (ii) 成立。

现在令 $X\in\mathrm{Dom}(\Psi)$，因此对于分段线性逼近（$\widehat{X}^n$），有 $\boldsymbol{X}=\Psi(X)=\lim_{n\to\infty}\Psi(X^n)$。令 $h\in\mathcal{H}$。则 $\boldsymbol{X}^{(1)}=\lim_{n\to\infty}\widehat{X}^n$ 且 $\boldsymbol{X}^{(2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\mathsf{W}\mathbb{X}^{0,n}$，其中 $\mathrm{d}\mathbb{X}_t^{0\,n}=\widehat{X}_t^n\otimes,\mathrm{d}\,\widehat{X}_t^n$。根据 Ψ 在 $\mathrm{AC}_0([0,1],\mathbb{R}^d)$ 上的定义，我们有

$$\Psi(\widehat{X}^n+h)=\Big(\widehat{X}^n+h,\,\frac{1}{2}\mathsf{W}(\mathbb{X}_t^{0,n}+\mathbb{X}_t^{1,n}+\mathbb{X}_t^{2,n}+\mathbb{X}_t^3)\Big),$$

其中 $\mathbb{X}^{1,n}$、$\mathbb{X}^{2,n}$ 按（ii）中的定义给出，只是将 X 替换为 $\widehat{X}^n$；而 $\mathbb{X}^3$ 按（ii）中的定义给出。由 Riemann–Stieltjes积分 的连续性以及（ii），可推出 $\lim_{n\to\infty}\Psi(X^n+h)=T_h\Psi(X)$。这就证明了（iii）。

最后，(iv) 也可由 Riemann–Stieltjes积分的连续性性质以及 (ii) 中的表示得出。□

注 2.17. 从命题 2.16 的 (ii) 部分可以明显看出，我们可以沿任意绝对连续的 h 平移任意 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)})\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。当处理阶数严格大于 2 的 Carnot群时，情况会更加复杂，参见 [FV10, 第 9.4 节。6], ；当 h 的正则性较低时，情况亦是如此，例如 Hurst参数为 $H<1/2$ 的分数布朗运动的 Cameron–Martin路径；参见第 4 节。在这些情况下，必须在 $\boldsymbol{X}$ 的路径空间上引入适当的 p-变差或 H¨older 粗糙路径正则性。

注 2.18. 对于任意 $h\in\mathcal{H}$ 和 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，对定理 2.16 中 $T_h\boldsymbol{X}$ 的表达式进行变换，可得 $\boldsymbol{X}_{s,t}^{-1}(T_h\boldsymbol{X})_{s,t}=(\boldsymbol{Z}_{s,t}^{(1)},\boldsymbol{Z}_{s,t}^{(2)})$，其中 $s,t\in[0,1]$, $s\le t$，且

$$\boldsymbol{Z}_{s,t}^{(1)}=h_{s,t},\quad \boldsymbol{Z}_{s,t}^{(2)}=\frac{1}{2}\Big(\mathbb{X}_{s,t}^1+\mathbb{X}_{s,t}^2+\mathbb{X}_{s,t}^3+2X_t\otimes h_s-(X_s\otimes h_s+X_t\otimes h_t+h_s\otimes h_t)\Big).$$

此外，定义 （$\boldsymbol{h}=\Psi(h)$）。然后，通过分部积分，我们发现，对于任意 $s,\ t\in[0,1]$ 满足 $s\le t$ ，

$$\boldsymbol{\theta}_{s,t}\coloneqq\boldsymbol{h}_{s,t}^{-1}\boldsymbol{X}_{s,t}^{-1}(T_h\boldsymbol{X})_{s,t}=\Big(0,\int_s^t \mathsf{W}h_{s,r}\otimes \mathrm{d}X_r\Big).$$

增量 $\boldsymbol{\theta}_{s,\ t}$ 可以解释为平移路径 $T_h\boldsymbol{X}$ 的增量与通过提升路径 $\boldsymbol{h}$进行（右）平移的增量 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{h}$之间非交换性的误差。

现在我们使用平移映射在 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$上定义一个代价函数。

定义 2.19。 定义代价函数 $C_{\mathcal{H}}\colon\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\to[0,\infty]$ 为

$$C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\coloneqq\begin{cases}\|h\|_{\mathcal{H}}, & \text{if } \boldsymbol{Y}=T_h\boldsymbol{X},\ \text{for some } h\in\mathcal{H},\\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{2.18}$$

引理 2.20。 代价 $C_{\mathcal{H}}\colon\ \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\to[0,\infty]$ 是下半连续的。

证明。 令 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，并设 $(\boldsymbol{X}^n),(\boldsymbol{Y}^n)\subset\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 是满足 $(\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n)\to(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的序列。我们不妨假设存在一个子序列 $n_k\to\infty$，使得 $\boldsymbol{Y}^{n_k}=T_{h^{n_k}}\boldsymbol{X}^{n_k}$，其中 $h^{n_k}=\pi_1\boldsymbol{Y}^{n_k}-\pi_1\boldsymbol{X}^{n_k}\in\mathcal{H}$，且 $\liminf_{n\to\infty}C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{X}^n,\boldsymbol{Y}^n)=\lim_{k\to\infty}C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{X}^{n_k},\boldsymbol{Y}^{n_k})=:I<\infty$。于是我们有

$$I=\lim_{k\to\infty}C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{X}^{n_k},\boldsymbol{Y}^{n_k})=\liminf_{k\to\infty}\|h^{n_k}\|_{\mathcal{H}}\ge\|h\|_{\mathcal{H}},$$

其中 $h=\pi_1\boldsymbol{Y}-\pi_1\boldsymbol{X}\in\mathcal{H}$。由定理 2.16 (iv) 中证明的平移的连续性可知，$\boldsymbol{Y}=T_h\boldsymbol{X}$，因此 $C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\|h\|_{\mathcal{H}}$。□

2.3. **关于代价函数选择的讨论** $C_{\mathcal{H}}$。 代价函数的选择 $C_{\mathcal{H}}$ 是自然的，因为它是序列 C_n 的 Γ-极限，如第 6.4 节所示。此外，$C_{\mathcal{H}}$ 具有一项关键性质：只要 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})=+\infty$，就有 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})=+\infty$。事实上，假设 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})<\infty$，则存在一个耦合 $\boldsymbol{\lambda}\in\Pi(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$，使得

$$\boldsymbol{\lambda}(\{\,(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}:\ \overline{\boldsymbol{\omega}}=T_{\overline{\omega}-\omega}\boldsymbol{\omega},\,\overline{\omega}-\omega\in\mathcal{H}\,\})=1,$$

并且 $\int C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{\omega},\underline{\omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\underline{\omega}) < \infty$。根据定理2.13，我们有 $\boldsymbol{\mu} = \Psi_\sharp\mu$；再将其与定理 2.16 中的（2.17）结合，可得

$$\boldsymbol{\lambda}(\{\,(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} :\ \boldsymbol{\omega} = \Psi(\omega),\, \overline{\boldsymbol{\omega}} = \Psi(\overline{\omega}),\, \overline{\omega} - \omega \in \mathcal{H}\,\}) = 1.$$

因此，存在 $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$，使得 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$。根据伊藤表示定理和 Girsanov 定理，我们还有 $\nu \ll \mu$。因此，$\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu \ll \Psi_\sharp\mu = \boldsymbol{\mu}$，且 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}) < \infty$。

~这与代价函数 $C_{\mathcal{H}} := c_{\mathcal{H}} \circ (\pi_1 \times \pi_1)$: $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to [0,\infty]$ 形成对照，该函数出现在 [Rie17, Corollary 1.4] 的代价-信息不等式中。事实上，考虑海森堡群 G $\cong \mathrm{R}^2 \oplus \mathrm{R}$ 上的布朗运动 $\boldsymbol{B} = (B,\ \mathrm{A})$。令 $\boldsymbol{\nu} = \mathrm{Law}(\boldsymbol{X})$，其中 $\boldsymbol{X} = (B,\ \mathrm{X})$ 定义如下。令$M \in (0,\ \infty)$，并定义 $\mathrm{X}_0 = 0$ 和 $\mathrm{X}_{s,\ t} = \mathrm{A}_{s,\ t} + (t-s)M$，对所有 $s,\ t \in [0,1]$，其中 $s < t$。由于 $\boldsymbol{X}$ 仅在第二个分量上与 $\boldsymbol{B}$ 不同，我们看到

$$0 \le \mathrm{T}^2_{\widetilde{C}_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) \le \mathbb{E}\Big[\widetilde{C}^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{X})\Big] = \mathbb{E}\Big[c^2_{\mathcal{H}}(B,B)\Big] = 0.$$

然而，$\boldsymbol{\nu}$ 并非关于 $\boldsymbol{\mu}$绝对连续。事实上，假设 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$，定理 2.14 表明，对某个概率测度 $\nu \ll \mu$，有 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$。因此，$\boldsymbol{\nu}(\Psi(\Omega)) = \nu(\Omega) = 1$。另一方面，由于 $\boldsymbol{\nu} = \mathrm{Law}(\boldsymbol{X})$且 $\boldsymbol{X} = (B,\ \mathrm{X}) \neq \Psi(B)$，我们可知 $\boldsymbol{\nu}(\Psi(\Omega)) < 1$，这就产生了矛盾。因此，$H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}) = +\infty$。

3. Talagrand for Brownian motion on Carnot groups – Direct approach via Föllmer drift

本节给出 Talagrand 关于二步卡诺群上布朗运动分布律的 $\mathcal{T}_2$ 不等式的第一个证明。我们遵循 [Leh13] 和 [F¨ol22], 的策略，采用 [F¨ol86、F¨ol88]中的 F¨ollmer 内禀漂移。此外，我们证明，将范围限制在适应耦合时，$\mathcal{T}_2$ 不等式中可以取等号；在经典情形下，[Las18 引理 5]和 [F¨ol22 定理 3]已证明这一点。

我们首先给出 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 上适应耦合的刻画。特别地，我们证明，定理 2.4 中适应耦合的定义与 [F¨ol22, Definition 1]中的定义一致。

引理 3.1. 假设 $\nu \ll \mu$。那么，$\lambda \in \Pi(\mu,\nu)$ 是适应耦合，当且仅当存在一个~滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\ \mathbb{Q})$，其上定义了过程 X, Y，使得 X 是布朗运动，Y是适应过程，且在 $\mathbb{Q}$ 下有 $\lambda = \mathrm{Law}(X, Y)$。

假设 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$。那么，$\boldsymbol{\lambda} \in \Pi(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$ 是适应耦合，当且仅当存在 $\nu \ll \mu$ 和一个适应耦合 $\lambda \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\mu,\ \nu)$，使得 $\boldsymbol{\lambda} = (\Psi \times \Psi)_\sharp\lambda$。

证明。 假设 $\nu \ll \mu$。根据 [Las18, Lemma 4], ，我们的适应耦合定理 2.4 等价于 [Las18, Definition 1] 的对称对应表述（见 [Las18, Section 4.1]）。于是，第一个结论由 [Las18, Propositions 3 and 4] 得出。

现在假设 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$。由定理 2.14，存在 $\nu \ll \mu$ 使得 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$。如果 X 是一个具有自然滤过 $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ 的 R^{d_1} 值过程，并且该滤过按照 X 的分布律完备化；而 $\boldsymbol{X} = \Psi(X)$ 是一个具有自然滤过 $(\boldsymbol{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,1]}$ 的 G值过程，并且该滤过按照 $\boldsymbol{X}$ 的分布律完备化，那么，对于所有 $t \in [0,1]$，$\boldsymbol{\mathcal{F}}_t = \Psi(\mathcal{F}_t)$。由于 $\boldsymbol{\mu} = \Psi_\sharp\mu$ 且 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$，我们有 $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$ 当且仅当$\boldsymbol{\lambda} = (\Psi \times \Psi)_\sharp\lambda$，其中某个 $\lambda \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\mu,\nu)$ 满足该条件。□

注 3.2. 根据定理 3.1，若 $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu})$，则存在定义在~某个滤过概率空间 $(\Omega\ \mathcal{F},\ (\mathcal{F}_t),\ \mathrm{Q})$ 上的 $\boldsymbol{X} = \Psi(X)$ 和 $\boldsymbol{Y} = \Psi(Y)$，使得 $\boldsymbol{\lambda} =$ 分布律$_{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{Y})$，其中 $\boldsymbol{X}$ 是 G 上的布朗运动

，且 $\boldsymbol{Y}$是一个适应的 G值过程；分布律$_{\mathbb{Q}}$ 表示在 Q 下的分布律。于是，令 E$_{\mathbb{Q}}$ 表示相对于 Q 的期望，我们有

$$\int C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})].$$

现在我们证明本节的主要结果，说明 $\boldsymbol{\mu}$ 满足 $\mathcal{T}_2$ 不等式，并且限制在适应耦合上时等号成立。

定理 3.3。 设 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$。则存在 $\nu \ll \mu$ 使得 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp \nu$，并且存在定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的可预测过程 b^ν，满足 $b^\nu \in L^2$、 ν-几乎处处，使得 $B^\nu := B - \int_0^{\cdot} b_t^\nu \mathrm{d}t$ 在 ν 下是一个布朗运动，并且 $\boldsymbol{\lambda}^* =$ 分布律$_\nu(\Psi(B^\nu)\ \Psi(B))$ 是 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $\boldsymbol{\nu}$ 的唯一最优适应耦合，其中

$$\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})^2 \le \mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})^2 = \mathbb{E}_\nu[C_{\mathcal{H}}^2(\Psi(B^\nu),\Psi(B))] = 2H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}). \tag{3.1}$$

特别地， $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$、 $C_{\mathcal{H}}$、 $1)$。

证明。 根据定理 2.14，存在 Ω 上的概率测度 ν，满足 $\nu \ll \mu$ 和 $\Psi_\sharp \nu = \boldsymbol{\nu}$。记作 $\boldsymbol{\rho} := \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}$，则有 $\mathrm{d}_{\mu}^{\nu} = \boldsymbol{\rho} \circ \Psi_{\mathrm{d}}$。由于 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \setminus \Psi(\Omega)) = 0$，根据定理2.13，我们得到

$$H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}) = \int_{\Psi(\Omega)} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega}) \log(\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\omega}))\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega}) = \int_\Omega \boldsymbol{\rho}(\Psi(\omega)) \log(\boldsymbol{\rho}(\Psi(\omega))\,\mathrm{d}\mu(\omega) = H(\nu\|\mu).$$

我们可以应用 [F¨ol22, 命题 1]，得到存在一个可预测过程 b^ν，使得 $b^\nu \in L^2$, ν ν -几乎处处成立，且 $B^\nu = B - \int_0^{\cdot} b_t^\nu \mathrm{d}t$ 在 with 下是布朗运动

$$\mathbb{E}_\nu[\|B^\nu - B\|_{\mathcal{H}}^2] = 2H(\nu\|\mu) = 2H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}). \tag{3.2}$$

此外，由 [F¨ol22, 定理 3] 可知， $\lambda^* = \mathrm{Law}_\nu(B^\nu,\ B)$ 是 μ 与 ν之间唯一的最优适应耦合。根据定理 3.1， $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathrm{Law}_\nu(\Psi(B^\nu)\ \Psi(B))$ 是 $\boldsymbol{\mu} = \Psi_\sharp \mu$与 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp \nu$的一个适应耦合。因此，利用 (2.18) 中 $C_{\mathcal{H}}$ 的定义，

$$\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu)^2 = \mathbb{E}_\nu[\|B^\nu - B\|_{\mathcal{H}}^2] = \mathbb{E}_\nu[C_{\mathcal{H}}^2(\Psi(B^\nu),\Psi(B))] \ge \mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})^2. \tag{3.3}$$

另一方面，由于 $c_{\mathcal{H}} \circ (\pi_1 \times \pi_1) \le C_{\mathcal{H}}$，应用定理 3.1 得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu)^2 = \inf_{\lambda \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\mu,\nu)} \int_{\Omega\times\Omega} c_{\mathcal{H}}^2(\omega,\overline{\omega})\,\mathrm{d}\lambda(\omega,\overline{\omega}) &= \inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} c_{\mathcal{H}}^2(\pi_1\boldsymbol{\omega},\pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) \\
&\le \inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \Pi_{\mathrm{ad}}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) \\
&= \mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})^2.
\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\boldsymbol{\lambda}^*$ 的最优性，并且

$$\mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})^2 = \mathbb{E}_\nu[C_{\mathcal{H}^2}(\Psi(B^\nu),\Psi(B))] = \mathbb{E}_\nu[\|B^\nu - B\|_{\mathcal{H}}^2] = \mathrm{T}^{\mathrm{ad}}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu)^2.$$

应用 (3.2) 得到 (3.1)，而由定理 3.1 可知最优解唯一。 □

注3.4。 假设 h 是一个适应过程，且 $h \in \mathcal{H}$ 几乎处处成立，并令 $\boldsymbol{\nu}$ =Law($T_h\boldsymbol{B}$)。那么在定理 3.3 中，我们可以取 $b^\nu = h$。事实上，根据 Girsanov 定理，在 ν 下， $B - h$ 是一个布朗运动，并且 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}) = H(\nu\|\mu) = \mathrm{E}_\nu[\log \mathrm{d}\nu/\mathrm{d}\mu] = \mathrm{E}_\nu[\|h\|_{\mathcal{H}}^2]$。

4. Talagrand for Gaussian rough paths – Direct approach via contraction

现在，我们沿用 [Rie17]的收缩方法，在更一般的情形下给出Talagrand $\mathcal{T}_2$ 不等式的另一种证明。

设 Z 是一个 d维连续高斯过程，它存在一个二阶“粗糙路径”提升 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}(\omega)$，且 $\boldsymbol{Z}\in\mathcal{D}$ 几乎处处成立，其中 $\mathcal{D}$ 是一个适当的 p-变差（或 β-H¨older）粗糙路径空间（参见 [FV10，第 15]章）。关于高斯过程可提升为高斯粗糙路径的条件，参见 [FV10，第 15]章。这里我们只假设这样的提升存在。令 $\nu\in\mathcal{P}(\Omega)$表示该高斯过程 Z的分布律， $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{P}(\mathcal{D})$表示 $\boldsymbol{Z}$的分布律， $\mathcal{H}_\nu$ 表示 Z 的Cameron–Martin空间（参见 [Jan97，第8章第 4]节）。

已知一般的高斯过程满足 $\mathcal{T}_2$ 不等式，其中 $\alpha=1$ ，且代价为

$$\widetilde{c}_{\mathcal{H}_\nu}(x,y)=\begin{cases}\|h\|_{\mathcal{H}_\nu}, & \text{if } x-y\in\mathcal{H}_\nu,\\ +\infty, & \text{otherwise;}\end{cases}$$

¨即 $\nu\in\mathcal{T}_2(\Omega\ \widetilde{c}_{\mathcal{H}_\nu},\ 1)$；参见 [FU04，定理 3.1] 和 [Rie17，定理 1.2]。
我们采用以下假设。

~ ~假设 4.1。 假设存在 $\Omega\subseteq\Omega$，满足 $\nu(\Omega)=1$ ，使得

~ ~ ~(i) 存在一个 Borel 可测提升映射 $\Psi\colon\Omega\to\mathcal{D}$ ，满足 $\pi_1\Psi(x)=x$，对任意 $x\in\Omega$，其中 π_1 是到第一分量的~投影，使得 $\Psi(Z)=\boldsymbol{Z}$ 几乎处处；(ii) 存在一个连续平移映射

$$\mathcal{H}_\nu\times\mathcal{D}\to\mathcal{D},\quad (h,\boldsymbol{x})\mapsto\widetilde{T}_h\boldsymbol{x},$$

使得

$$\widetilde{T}_h\widetilde{\Psi}(x)=\widetilde{\Psi}(x+h),\quad x\in\widetilde{\Omega},\quad h\in\mathcal{H}_\nu. \tag{4.1}$$

注释 4.2。 根据标准结果 [FV10，第 15], 章，我们可知定理 4.1 对 $Z=B$ 分数布朗运动及其在二步卡诺群 G 中的提升 $\boldsymbol{B}$ 成立，其路径空间为 $\mathcal{D}=C_0^{p-\mathrm{var}}([0,1],\mathrm{G})$，其中 $H\in(1/3,\ 1/2]$, $p\in(1/H,\ 3)$。也可以推广到 $H>1/4$，代价是将其提升 Z 至三阶 Carnot 群；为简洁起见，这里不详述。

~**定义 4.3.** 仿照 (2.18)，定义代价 $C_{\mathcal{H}_\nu}\colon\ \mathcal{D}\times\mathcal{D}\to[0,\infty]$，如下:

$$\widetilde{C}_{\mathcal{H}_\nu}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}):=\begin{cases}\|h\|_{\mathcal{H}_\nu}, & \text{if } \boldsymbol{Y}=\widetilde{T}_h\boldsymbol{X},\ \text{for some } h\in\mathcal{H}_\nu,\\ +\infty, & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{4.2}$$

~其中 T_h 是定理 4.1 中的平移。

~由于假设平移具有连续性，我们可以恢复 $C_{\mathcal{H}_\nu}$ 的可测性（参见定理 2.20）。类似于 [Rie17], , 但针对不同的代价，通过应用定理 2.2 中的收缩原理，我们将 Talagrand 不等式提升到粗糙路径空间 $\mathcal{D}$ 上。

~**定理4.4**。 设定理 *4.1*成立。那么 $\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{T}_2(\mathcal{D},C_{\mathcal{H}_\nu},1)$。

~证明。性质 (4.1) 表明，对于 $h \in \mathcal{H}_\nu$，路径 $x \in \Omega$ 满足 $x = y + h$ 当且仅当
~ ~ ~ ~ ~Ψ(x) $= T_h\Psi(y)$。因此，对于 $x - y \in \mathcal{H}_\nu$，我们有 $\Psi(y + (x - y)) = T_{x-y}\Psi(y)$，从而

$$\|x - y\|^2_{\mathcal{H}_\nu} = \widetilde{C}^2_{\mathcal{H}_\nu}(\widetilde{\Psi}(x), \widetilde{\Psi}(y)).$$

~ ~ ~ ~ ~类似地，如果 $x - y \notin \mathcal{H}_\nu$，那么 Ψ(x) 不是 Ψ(y) 的平移，因此 $C_{\mathcal{H}_\nu}$(Ψ(x) Ψ(y)) $= +\infty$。结合~ ~ ~ν ∈ $\mathcal{T}_2$(Ω $\widetilde{c}_{\mathcal{H}_\nu}$, 1)、 ν (Ω) $= 1$以及 $C_{\mathcal{H}_\nu}$和 Ψ的可测性，应用收缩原理~(定理 2.2)并取 $L = 1$，即可得到 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{T}_2(\mathcal{D}, C_{\mathcal{H}_\nu}, 1)$。□

5. Talagrand for the heat kernel measure on Carnot groups

本节将说明，二步卡诺群 G 上的 $\mathcal{T}_2$ 不等式可由对数 Sobolev 不等式推出，而后者又可由热半群估计导出。特别地，当 G 为 H 型群时，我们证明热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 满足 $\mathcal{T}_2$不等式。第 6 节中，我们将应用这一结果，通过自底向上方法证明路径空间上也成立 $\mathcal{T}_2$ 不等式。

5.1. 从对数 Sobolev 不等式到 Talagrand。 我们采用 Otto–Villani [OV00],提出的方法，即从对数 Sobolev 不等式推出 $\mathcal{T}_2$ 不等式。我们将运用 Gigli–Ledoux [GL13] 对 Otto–Villani 结果的推广。Gigli–Ledoux[GL13] 的结果依赖于针对利普希茨测试函数的对数 Sobolev 不等式；我们通过光滑化论证表明，只需要求针对光滑测试函数的对数 Sobolev 不等式即可放宽这一条件；参见定理 5.1。此外，对于热核测度，我们证明针对光滑测试函数的对数 Sobolev 不等式可由某些热半群估计推出；参见定理 5.2。对于定理 2.10 中定义的 H 型群这一特殊情形，所需的热半群估计已为人所知。因此，在定理 5.3 中，我们证明 H 型群上的热核测度满足 $\mathcal{T}_2$ 不等式，特别地，海森堡群上的热核测度也满足该不等式。

设 G 是一个二步卡诺群。回顾一下，对于式 (2.9) 中定义的 Carnot–Carath´eodory 度量 d_{CC}，空间 (G d_{CC}) 是一个波兰空间。因此，对于 G 上的任意博雷尔概率测度 $\boldsymbol{\eta}$，空间 (G d_{CC}, $\boldsymbol{\eta}$) 按照 [GL13] 的意义是一个度量测度空间。

对于局部利普希茨函数 f: G → R，定义局部利普希茨常数 Lip$_{\mathbb{G}}$(f) 如下：

$$\mathrm{Lip}_{\mathbb{G}}(f)(\boldsymbol{x}) \coloneqq \limsup_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}} \frac{|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})|}{d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{G}.$$

根据 Pansu [Pan89] 对拉德马赫定理的推广（另见 [DPMM$^+$25、PS17], 和 [LD25，定理 11.3.2]），我们得到每个利普希茨连续函数 f: $U \subseteq$ G → R 都是 Pansu 可微的，且勒贝格几乎处处成立。特别地，其梯度 $\nabla_{\mathbb{G}} f$ 几乎处处存在，并且 Lip$_{\mathbb{G}}$(f)($\boldsymbol{x}$) $= |\nabla_{\mathbb{G}} f(\boldsymbol{x})|_{\mathbb{G}}$，对 $\mathcal{L}^m$-几乎每个 $\boldsymbol{x} \in$G 都成立。

我们称 G 上满足 $\boldsymbol{\eta} \ll \mathcal{L}^m$ 的博雷尔概率测度 $\boldsymbol{\eta}$ 满足对数 Sobolev 不等式，若存在 $\alpha \in (0, \infty)$ 使得

$$2\alpha \int_{\mathbb{G}} f \log f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \le \int_{\{f>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|^2_{\mathbb{G}}}{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}, \quad \text{for all } f \in C^\infty_c(\mathbb{G}, [0, \infty)), \int_{\mathbb{G}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = 1. \tag{LSI}$$

我们首先证明（对数 Sobolev 不等式）蕴含一个 $\mathcal{T}_2$ 不等式。作为中间步骤，我们证明对数 Sobolev 不等式对利普希茨函数同样成立，从而可以应用 [GL13，定理 5.2]。

定理 5.1. 假设 $\boldsymbol{\eta}$ 是$\mathbb{G}$ 上的博雷尔概率测度，且 $\boldsymbol{\eta} \ll \mathcal{L}^m$ 对某个 $\alpha \in (0,\infty)$满足（对数 Sobolev 不等式）。则对任意利普希茨函数 $f\colon \mathbb{G} \to [0,\infty)$，且 $\int_{\mathbb{G}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = 1$,

$$2\alpha \int_{\mathbb{G}} f \log f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \le \int_{\{f>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}^2}{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}. \tag{5.1}$$

此外， $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$。

证明。 我们按照 AS20 定理 4 的证明，通过磨光来论证。考虑 $f\colon \mathrm{G} \to [0,\infty)$ 关于 $\int_{\mathbb{G}} f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} = 1$ 利普希茨连续。特别地，其梯度 $\nabla_{\mathbb{G}} f$ 几乎处处相对于 $\mathcal{L}^m$ 存在。

设 $\rho\colon \mathrm{G} \to \mathrm{R}$ 是 G 上的对称光滑磨光核，即函数 $\rho \in C_c^\infty(\mathrm{R}^m, [0,\infty))$，满足 $\mathrm{supp}\rho \subset B_1$, $0 \le \rho \le 1$, $\rho(\boldsymbol{x}^{-1}) = \rho(\boldsymbol{x})$，对所有 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{G}$ 均成立，且 $\int_{\mathbb{G}} \rho \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1$。对于 $k \in$ 自然数集中的元素和 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{G}$，令$\rho_k(\boldsymbol{x}) = k^Q \rho(\delta_k \boldsymbol{x})$，并定义磨光 $\widehat{f}_k = \rho_k \star f$ 如下

$$\widehat{f}_k(\boldsymbol{x}) \coloneqq (\rho_k \star f)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{G}} \rho_k(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{-1}) f(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \int_{\mathbb{G}} \rho_k(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{G}.$$

对每个 $k \in$ 自然数集，还定义一个光滑截断函数 $\chi_k \in C_c^\infty(\mathrm{R}^m,\ [0,1])$，使得 $\chi_k = 1$ 属于 B_k，$\chi_k = 0$ 属于 B_{2k}^c，并且对某个常数 $C \in (0,\ \infty)$，有 $|\nabla_{\mathbb{G}} \chi_k|_{\mathbb{G}} \le C/k$，并定义 $f_k \coloneqq f_k\, \chi_k$。

因此，对于每个 $k \in$ 自然数集，$f_k \in C_c^\infty(\mathrm{G}\ [0,\infty))$。此外，$f_k \to f$ 属于 $L^1(\boldsymbol{\eta})$，因此沿某个子序列几乎处处满足 $\boldsymbol{\eta}$。由 Fatou引理，我们有

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{G}} f_k \log f_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \ge \int_{\mathbb{G}} f \log f \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

接下来，我们证明 (5.1) 右侧在用 f_k 替代 f 时的上极限估计。注意，由于 Carnot–Caratheodory 距离的左不变性，对于 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{G}$，我们有

$$\frac{|\widehat{f}_k(\boldsymbol{x}_1) - \widehat{f}_k(\boldsymbol{x}_2)|}{d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)} \le \int_{\mathbb{G}} \rho_k(\boldsymbol{y}) \frac{|f(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_1)|}{d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \le \int_{\mathbb{G}} \rho_k(\boldsymbol{y}) \frac{|f(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_1)|}{d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}^{-1}\boldsymbol{x}_2)} \,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

因此，对 $\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$ 取上极限后，我们得到 $\mathrm{Lip}_{\mathbb{G}} f_k(\boldsymbol{x}) \le \rho_k \star \mathrm{Lip}_{\mathbb{G}} f(\boldsymbol{x})$，或者等价地，$|\nabla_{\mathbb{G}} f_k|_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{x}) \le \rho_k \star |\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}(\boldsymbol{x})$。利用这一估计，柯西–施瓦茨不等式给出

$$|\nabla_{\mathbb{G}} \widehat{f}_k|_{\mathbb{G}}^2 \le \Big[\rho_k \star \Big(\chi_{\{f>0\}} \sqrt{f} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}}{\sqrt{f}}\Big)\Big]^2 \le f_k \Big(\rho_k \star \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}^2}{f} \chi_{\{f>0\}}\Big).$$

将 f_k 乘以截断函数 χ_k 并应用乘积法则，我们估计

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \int_{\{f_k>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f_k|_{\mathbb{G}}^2}{f_k} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} &\le \limsup_{k\to\infty} \int_{\{\widehat{f}_k>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} \widehat{f}_k|_{\mathbb{G}}^2}{\widehat{f}_k} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{G}} \rho_k \star \left(\frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}^2}{f} \chi_{\{f>0\}}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{\eta} \le \int_{\{f>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f|_{\mathbb{G}}^2}{f} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.\end{aligned}$$

定义 $I_k \coloneqq \int_{\mathbb{G}} f_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}$，以及归一化函数 $\widetilde{f}_k \coloneqq f_k / I_k$，对每个 $k \in$ 自然数集。于是，由（对数 Sobolev 不等式 ），最后，

$$\begin{aligned}2\alpha \int_{\mathbb{G}} f_k \log f_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} &= 2\alpha I_k \int_{\mathbb{G}} \widetilde{f}_k \log \widetilde{f}_k \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} + 2\alpha I_k \log I_k \\ &\le I_k \int_{\{\widetilde{f}_k>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} \widetilde{f}_k|_{\mathbb{G}}^2}{\widetilde{f}_k} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} + 2\alpha I_k \log I_k = \int_{\{f_k>0\}} \frac{|\nabla_{\mathbb{G}} f_k|_{\mathbb{G}}^2}{f_k} \,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta} + 2\alpha I_k \log I_k.\end{aligned}$$

我们得出

$$2\alpha\int_{\mathbb{G}} f\log f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\le\liminf_{k\to\infty}2\alpha\int_{\mathbb{G}} f_k\log f_k\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\le\limsup_{k\to\infty}\int_{\{f_k>0\}}\frac{|\nabla_{\mathbb{G}}f_k|_{\mathbb{G}}^2}{f_k}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}\le\int_{\{f>0\}}\frac{|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2}{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}.$$

因此，Lipschitz 连续函数的对数 Sobolev 不等式得以建立。

最后，由于 $(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}},\ \boldsymbol{\eta})$ 是 [GL13]，意义下的度量测度空间，我们根据 [GL13 定理 5.2] 得出 $\boldsymbol{\eta}\in\mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}},\ \alpha)$。□

5.2. **从热半群估计到 Talagrand**。现在我们专门讨论热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 的情形，并给出对于某个 $\alpha\in(0,\ \infty)$，$\boldsymbol{\mu}_1\in\mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}},\ \alpha)$ 的一个充分条件。

正如 [Eld10 第 5] 节和 [BBBC08 备注 6.6]，中所指出的，可以从以下热半群估计推出 $\boldsymbol{\mu}_1$ 的对数 Sobolev 不等式（LSI）：存在常数 $K\in(0,\ \infty)$，使得

$$|\nabla_{\mathbb{G}}P_tf|_{\mathbb{G}}\le KP_t(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}),\quad\text{for all } f\in C_c^\infty(\mathbb{G},\mathbb{R}),\ t\ge0,\tag{5.2}$$

其中 P_t 是 (2.14) 中定义的热半群。事实上，对于海森堡群 $\mathbb{G}=\mathbb{H}=\mathbb{H}^1$, [Li06，Th´eor`eme 1.1] 证明了估计 (5.2)，而 [Li06, Corollaire 1.2] 指出，按照 [ABC+00, Th´eor`eme 5.4.7]中的论证，(LSI) 可直接由此推出。更一般地，对于 $\mathbb{G}=\mathbb{H}^n$，[HZ10, Theorem 7.3]和 [BBBC08, Theorem 6.1] 证明了 (LSI) 成立，同样依赖于热半群估计 (5.2)。为完整起见，我们在定理 5.2 中给出证明：对于任意二步卡诺群，热半群估计 (5.2) 蕴含对数 Sobolev 不等式 (LSI)。根据定理 5.1，该$\mathcal{T}_2$ 不等式也可推出。

定理 5.2。设$\mathbb{G}$ 是一个二阶 *Carnot*群，并假设存在 $K\in(0,\infty)$ 使得 $\boldsymbol{G}$ 上的热半群 P满足估计(5.2)对所有 $t\in[0,1]$均成立。令 $\alpha=\frac{1}{2K^2}$。则$\mathbb{G}$上的热核测度 $\boldsymbol{\mu}_1$ 满足常数为 α的对数 ***Sobolev*** 不等式 (LSI)，且 $\boldsymbol{\mu}_1$ 满足不等式 $\mathcal{T}_2$ $\boldsymbol{\mu}_1\in\mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}},\alpha)$。

证明。假设 P_t 对所有 $t\in[0,1]$均满足 (5.2)。令 $\phi\in C^2(I,\mathbb{R})$，其中 R 属于某个区间 $I\subset$，并进一步假设 $\phi''>0$ 且函数 $-1/\phi''$ 是凸函数。令 $f\in C_c^\infty(\mathbb{G},\mathbb{R})$，并令 $t\in[0,1]$。那么，根据热方程以及次拉普拉斯算子的链式法则，对任意 $s\in[0,t]$,

$$\begin{aligned}\partial_sP_s\phi(P_{t-s}f)&=P_s\big(\Delta_{\mathbb{G}}\phi(P_{t-s}f)-\phi'(P_{t-s}f)\Delta_{\mathbb{G}}P_{t-s}f\big)\\&=P_s\big(\phi''(P_{t-s}f)|\nabla_{\mathbb{G}}P_{t-s}f|_{\mathbb{G}}^2\big).\end{aligned}$$

热半群估计 (5.2) 和柯西–施瓦茨不等式意味着

$$\begin{aligned}|\nabla_{\mathbb{G}}P_{t-s}f|_{\mathbb{G}}^2\le K^2\big(P_{t-s}(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}})\big)^2&=K^2\Big(P_{t-s}\big(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}\sqrt{\phi''(f)}\cdot1/\sqrt{\phi''(f)}\big)\Big)^2\\&\le K^2P_{t-s}(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2\phi''(f))P_{t-s}(1/\phi''(f)),\end{aligned}$$

并且，根据詹森不等式,

$$\phi''(P_{t-s}f)\le\frac{-1}{P_{t-s}(-1/\phi''(f))}=\frac{1}{P_{t-s}(1/\phi''(f))}.$$

因此

$$\begin{aligned}\partial_sP_s\phi(P_{t-s}f)&=P_s\big(\phi''(P_{t-s}f)|\nabla_{\mathbb{G}}P_{t-s}f|_{\mathbb{G}}^2\big)\\&\le K^2P_sP_{t-s}(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2\phi''(f))=K^2P_t(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2\phi''(f)),\end{aligned}$$

积分后得到

$$P_t\phi(f)-\phi(P_tf)=\int_0^t\partial_sP_s\phi(P_{t-s}f)\,\mathrm{d}s\le K^2tP_t(|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2\phi''(f)).$$

现在令 $\phi\colon(0,\infty)\to\mathrm{R}$ 为 $\phi(x)=x\log x$，对所有 $x\in(0,\infty)$ 均成立，并假设 $f\colon\mathrm{G}\to(0,\infty)$。于是我们得到如下形式的对数 Sobolev 不等式：

$$P_t(f\log f)-P_tf\log(P_tf)\le K^2tP_t\frac{|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2}{f}.$$

为得到 (LSI)，令 $t=1$，在单位元处计算不等式两边的值，并进一步假设 $\int_{\mathbb{G}}f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1=1$。于是

$$\int_{\mathbb{G}}f\log f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1\le K^2\int_{\mathbb{G}}\frac{|\nabla_{\mathbb{G}}f|_{\mathbb{G}}^2}{f}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1.$$

注意到，允许 $f\colon\mathrm{G}\to[0,\infty)$，我们有 $\int_{\mathbb{G}}f\log f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1=\int_{\{f>0\}}f\log f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}_1$。因此，(LSI) 以常数 $\alpha=\frac{1}{2K^2}$ 成立。

应用定理 5.1，我们进一步得到 $\boldsymbol{\mu}_1\in\mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}},\alpha)$。 □

5.3. **海森堡型群上的 Talagrand 不等式**。对于任意 H 型群 G，[Eld10, Theorem 2.4]证明热半群估计 (5.2) 成立。因此，我们得到定理 5.2 的以下推论。

定理 5.3。设$\mathbb{G}$ 为一个 H 型群。则存在 $\alpha>0$，使得$\mathbb{G}$ 上的热核测度$\boldsymbol{\mu}_1$ 满足常数为 α 的对数 *Sobolev* 不等式(LSI)，并且 $\boldsymbol{\mu}_1$ 满足不等式 $\mathcal{T}_2$ $\boldsymbol{\mu}_1\in\mathcal{T}_2(\mathbb{H}\ d_{\mathrm{CC}},\alpha)$。

证明。根据 [Eld10, Theorem 2.4], ，估计式 (5.2) 在 G 上以某个常数 K成立。因此，取 $\alpha=\frac{1}{2K^2}$，结论由定理 5.2 得出。□

我们指出，定理 5.3 中可能的最佳常数为 $\alpha\le1/2$，因为 [Eld10, Proposition 4.1]表明，(5.2) 中的最优常数满足 $K\ge\sqrt{\frac{3d_1+5}{3d_1+1}}$。

6. Talagrand for Brownian motion on Carnot groups – Bottom-up approach

在第 5 节中，我们讨论了 Carnot群上 Talagrand 运输不等式的可用性，这是对数 Sobolev 不等式和热核估计的推论。本节将展示，如何通过重缩放和张量化论证，将 Carnot群上热核测度的 $\mathcal{T}_2$ 不等式转化为相应路径空间上的 $\mathcal{T}_2$ 不等式；见第 6.1 节。我们指出，与欧几里得情形相比，这种方法为非交换次黎曼情形中的最优传输问题带来了有趣的见解；见第 6.2 节和第 6.3 节。最后，我们证明，路径空间上由 (2.18) 定义的代价函数自然地作为基于 Carnot群上 Carnot–Caratheodory 距离的离散化代价函数的 Γ-极限出现；见第 6.4 节。

本节中，设 $\mathrm{G}\cong\mathrm{R}^{d_1}\oplus\mathrm{R}^{d_2}$ 为二步卡诺群，并令 $d=d_1$；参见第 2.2 节。回顾 $\boldsymbol{B}$ 表示 G 上的布朗运动，其分布律为 $\boldsymbol{\mu}=$分布律$(\boldsymbol{B})$，且对 $t\in[0,1]$ 的时间边缘分布为 $\boldsymbol{\mu}_t=$ 分布律$(\boldsymbol{B}_t)$。

6.1. **从 Carnot 群上的 Talagrand 到路径空间上的 Talagrand**。本节的主要结果是，群 G 上关于 $\boldsymbol{\mu}_1$ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式蕴含空间 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 上关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的 $\mathcal{T}_2$ 不等式，其中该空间由从原点出发的连续 G 值路径构成。

我们首先证明热核测度满足以下缩放性质。

引理 6.1. 假设 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$，其中 $\alpha \in (0,\infty)$。那么，对于任意 $t \in (0,1]$，$\boldsymbol{\mu}_t \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha t^{-1})$。

证明。我们断言，G 上的热核测度满足以下缩放关系

$$\boldsymbol{\mu}_t = (\delta_{s^{-1}})_\sharp \boldsymbol{\mu}_{s^2 t}, \tag{6.1}$$

对于任意 $s > 0$, $t \in [0,1]$。为此，回忆一下，$\mathfrak{p}: (0,\infty) \times \mathrm{G} \to (0,\infty)$ 表示 G 上的热核，Q 表示 G 的齐性维数，$\mathcal{L}^m$ 表示 G 上的勒贝格测度。于是，如同在 (2.8) 中那样，对于任意 $s>0$，有 $(\delta_s)_\sharp \mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = s^{-Q}\mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$。此外，根据 [AS20，定理 2.3], ，对于任意 $s>0, t \in [0,1]$ 和 $\boldsymbol{x} \in \mathrm{G}$，我们有 $\mathfrak{p}_{s^2 t}(\delta_s \boldsymbol{x}) = s^{-Q}\mathfrak{p}_t(\boldsymbol{x})$。因此，对于任意博雷尔集 $A \subseteq \mathrm{G}$,

$$\begin{aligned}\mu_t(A) = \int_A \mathfrak{p}_t(\boldsymbol{x})\mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) &= s^Q \int_A (\mathfrak{p}_{s^2 t} \circ \delta_s)(\boldsymbol{x})\mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) \\ &= s^Q \int_{\delta_{s^{-1}}(A)} \mathfrak{p}_{s^2 t}(\boldsymbol{x})(\delta_s)_\sharp \mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = \int_{\delta_{s^{-1}}(A)} \mathfrak{p}_{s^2 t}(\boldsymbol{x})\mathcal{L}^m(\mathrm{d}\boldsymbol{x}) = (\delta_{s^{-1}})_\sharp \mu_{s^2 t}(A).\end{aligned}$$

这就证明了该结论。现在固定 $t \in (0,1]$。将 $s = t^{-\frac{1}{2}}$ 代入 (6.1)，得到 $\boldsymbol{\mu}_t = (\delta_{\sqrt{t}})_\sharp \boldsymbol{\mu}_1$。映射 $\delta_{\sqrt{t}}: \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 是 L-利普希茨映射，其利普希茨常数为 $L = \sqrt{t}$。因此，由于 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$，定理 2.2 推出 $\boldsymbol{\mu}_t \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha t^{-1})$。□

现在考虑乘积空间 $\mathrm{G}^{2^n} = \mathrm{G} \times \cdots \times \mathrm{G}$，其中 $n \in$ 属于自然数集，并应用 $\mathcal{T}_2$ 不等式的无维数依赖的张量化性质。定义 $d_{\mathrm{CC},n}: \mathrm{G}^{2^n} \times \mathrm{G}^{2^n} \to [0,\infty)$，使得

$$d^2_{\mathrm{CC},n}(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{x}}) \coloneqq 2^n \sum_{i=1}^{2^n} d^2_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}_i, \overline{\boldsymbol{x}}_i),$$

对于 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$，$\boldsymbol{x} \equiv (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ 属于 G^{2^n}。我们有以下张量化结果。

命题 6.2. 设 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$，其中 $\alpha \in (0,\infty)$。那么，对任意 $n \in$ 自然数集，$\boldsymbol{\mu}_{2^{-n}}^{\otimes 2^n} \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}^{2^n}, d_{\mathrm{CC},n}, \alpha)$。

证明. 固定 $n \in$ 自然数集。首先注意到 $\boldsymbol{\mu}_{2^{-n}} \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha 2^n)$，由定理 6.1 得出。定义 $\widetilde{d}_{\mathrm{CC},n}: \mathrm{G}^{2^n} \to [0,\infty)$ 如下

$$\widetilde{d}^2_{\mathrm{CC},n}(\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{2^n} d^2_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}_i, \overline{\boldsymbol{x}}_i),$$

对于 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$，$\boldsymbol{x} \equiv (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n) \in \mathrm{G}^{2^n}$。由于 $(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}})$ 是一个波兰空间，[GL07，定理 6] 蕴含 $\mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha 2^n)$ 具有无维数依赖的张量化性质；即 $\boldsymbol{\mu}_{2^{-n}}^{\otimes 2^n} \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}^{2^n}, \widetilde{d}_{\mathrm{CC},n}, \alpha 2^n)$。应用定理 2.2，并令 ψ 等于单位元，我们得到 $\boldsymbol{\mu}_{2^{-n}}^{\otimes 2^n} \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}^{2^n}, d_{\mathrm{CC},n}, \alpha)$。□

接下来，我们证明路径空间上测度的相对熵界。对于 $n \in$ 自然数集，令 $t_k^n = k2^{-n}$ for $k \in \{0, \ldots, 2^n\}$，并定义 $\Gamma^n: \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to \mathrm{G}^{2^n}$ 为将路径投影到其二进增量的映射；即 $\Gamma^n \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_{0,\ t_1^n},\ \boldsymbol{\omega}_{t_1^n,\ t_2^n},\ \ldots\ldots,\ \boldsymbol{\omega}_{t_{2^n-1}^n,\ 1})$，其中 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。然后定义代价函数 $C_n: \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to [0,\infty)$，其定义为

$$C_n(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}}) \coloneqq d_{\mathrm{CC},n}(\Gamma^n \boldsymbol{\omega}, \Gamma^n \overline{\boldsymbol{\omega}}), \quad \boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}. \tag{6.2}$$

引理 6.3。设 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}},\ \alpha)$，其中 $\alpha \in (0,\ \infty)$，并令 $\boldsymbol{\nu}$ 为 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$上的博雷尔概率测度。定义 $\boldsymbol{\mu}^n = \Gamma^n_\sharp \boldsymbol{\mu}$、$\boldsymbol{\nu}^n = \Gamma^n_\sharp \boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\mathbb{G}^{2^n})$。则当 $n \to \infty$ 时，$H(\boldsymbol{\nu}^n \| \boldsymbol{\mu}^n) \nearrow H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})$，并且对于任意 $n \in \mathbb{N}$，

$$\mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) \le \sqrt{\frac{2}{\alpha} H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})};$$

即 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}, C_n, \alpha)$。

证明。根据 $\boldsymbol{B}$ 的增量的独立性和平稳性，我们有 $\boldsymbol{\mu}^n = \Gamma^n_\sharp \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^{\otimes 2^n}_{2^{-n}}$，因此由定理 6.2 可得 $\boldsymbol{\mu}^n \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}^{2^n}, d_{\mathrm{CC},n}, \alpha)$。

如 [DGW04，引理 2.1], 所示

$$H(\boldsymbol{\nu}^n \| \boldsymbol{\mu}^n) = \inf \Big\{ H(\boldsymbol{\eta}\|\boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}),\, \Gamma^n_\sharp \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu}^n \Big\}, \tag{6.3}$$

并且我们看到，右侧随 n 增大，且以上界 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})$ 为界。为说明该极限等于 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})$，我们引入分段线性插值映射 $R^n\colon \mathbb{G}^{2^n} \to \Omega_{\mathbb{G}}$，其定义满足 $\Gamma^n \circ R^n = \mathrm{id}$，而其像 $\mathrm{Im}(R^n) \subset \Omega_{\mathbb{G}}$ 是除二进有理数 t^n_k，$k \in \{0,\dots,2^n\}$ 处外均为线性的路径集合。定义 $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^n = R^n_\sharp \boldsymbol{\mu}^n$, $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n = R^n_\sharp \boldsymbol{\nu}^n \in \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$。由于 $R^n\colon \mathbb{G}^{2^n} \to \mathrm{Im}(R^n)$ 是双射，对其及其逆映射分别应用式 (6.3) 中给出的表示，可得等式 $H(\boldsymbol{\nu}^n\|\boldsymbol{\mu}^n) = H(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n\|\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^n)$。我们仿照 [AGS08，推论 9.4.6], ，如下得出结论。对于任意 $\boldsymbol{\omega} \in \Omega_{\mathbb{G}}$，有 $R^n \circ \Gamma^n(\boldsymbol{\omega}) \to \boldsymbol{\omega}$，当 $n \to \infty$ 时成立，因此由控制收敛可得 $\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\mu}$，且 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}$。接着，利用相对熵的联合下半连续性（例如参见 [AGS08，引理 9.4.3]）以及式 (6.3) 所蕴含的上界，我们得出

$$\lim_{n\to\infty} H(\boldsymbol{\nu}^n\|\boldsymbol{\mu}^n) = \lim_{n\to\infty} H(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n\|\widetilde{\boldsymbol{\mu}}^n) = H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}).$$

最后，对于任意 $n \in$ 自然数集，$\boldsymbol{\mu}^n \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}^{2^n},\ d_{\mathrm{CC},\ n},\ \alpha)$ 可推出

$$\mathrm{T}^2_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{T}^2_{d_{\mathrm{CC},n},2}(\boldsymbol{\mu}^n,\boldsymbol{\nu}^n) \le \frac{2}{\alpha} H(\boldsymbol{\nu}^n\|\boldsymbol{\mu}^n) \le \frac{2}{\alpha} H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}). \qquad \square$$

在讨论本节的主要结果之前，我们先证明一个关于 $\mathbb{R}^d$ 上欧几里得代价及其相关的 Cameron–Martin 代价 $c_{\mathcal{H}}$（定义见 (2.1)）的辅助引理。对于 $n \in$ 自然数集，定义 $c_n\colon \Omega \times \Omega \to [0,\infty)$ 如下：

$$c_n^2(\omega,\overline{\omega}) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} |\overline{\omega}_{t^n_{k-1},t^n_k} - \omega_{t^n_{k-1},t^n_k}|^2, \tag{6.4}$$

对于 $\overline{\omega},\ \omega \in \Omega$。以下引理的 (ii) 部分是最优传输中的一个标准稳定性结果，例如可由 [Rie17, 引理 1.1] 推出。(iii) 部分也将在定理 6.21 中使用。

引理 6.4。

(i) 对于每个 $(\omega,\overline{\omega}) \in \Omega \times \Omega$，$(c_n(\overline{\omega},\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个递增序列，并且

$$\lim_{n\to\infty} c_n(\omega,\overline{\omega}) = c_{\mathcal{H}}(\omega,\overline{\omega}). \tag{6.5}$$

(ii) 对任意 $\nu \in \mathcal{P}(\Omega)$，以下收敛沿某个子序列成立：

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{c_n,2}(\mu,\nu) = \mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu). \tag{6.6}$$

(iii) 对任意 $(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 以及 $n \in$ 自然数集，

$$C_n(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) \geq c_n(\pi_1\boldsymbol{\omega},\pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}}). \tag{6.7}$$

注 6.5. 我们将在定理 6.6 中证明，(6.6) 中的收敛和 (6.7) 中的下界蕴含下估计 $\liminf_{n\to\infty} \mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) \geq \mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$。我们将在第 6.4 节中推导出一个更强的结果，即证明代价函数 C_n 收敛于代价 $C_{\mathcal{H}}$，其中 Γ 表示收敛方式。这说明 $C_{\mathcal{H}}$ 确实是自然的极限代价。此外，我们还证明，C_n 的 Γ 收敛蕴含沿着适当的概率测度序列 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$，相应运输问题 $\mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n)$ 的收敛。

证明. 令 $\omega,\overline{\omega} \in \Omega$，并记 $h = \omega - \overline{\omega}$。根据定义，序列 $(c_n(\omega,\overline{\omega}))_{n\in\mathbb{N}}$ 是递增的。假设 $h \in \mathcal{H}$。那么

$$\lim_{n\to\infty} c_n^2(\omega,\overline{\omega}) = \lim_{n\to\infty} 2^n \sum_{k=1}^{2^n} |h_{t_{k-1}^n,t_k^n}|^2 = \int_0^1 |\dot{h}_t|^2 \,\mathrm{d}t = \|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

对于 $h \notin \mathcal{H}$，上述极限为 $+\infty$。这证明了 (i) 部分。

对于 (ii) 部分，注意到对每个 $n \in$ 自然数集，$\mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu)$ 和 $\mathrm{T}_{c_n,2}(\mu,\nu)$ 均存在极小化子，例如由 [Vil09, 定理 4.1], 可知，因为代价函数是下半连续且非负的。设 $\lambda^* \in \Pi(\mu,\nu)$ 在 $\mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu)$ 中达到下确界。那么，由单调收敛定理，

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{T}_{c_n,2}^2(\mu,\nu) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} c_n^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) = \int_{\Omega\times\Omega} c_{\mathcal{H}}^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) = \mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}^2(\mu,\nu).$$

另一方面，对每个 $n \in$ 自然数集，设 $\lambda^n \in \Pi(\mu,\nu)$ 在 $\mathrm{T}_{c_n,2}(\mu,\nu)$ 中达到下确界。由于 $\Pi(\mu,\nu)$ 是紧的，Prohorov 定理蕴含 $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ 沿某个子序列 $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ 弱收敛至某个 $\widetilde{\lambda} \in \Pi(\mu,\nu)$。由单调性，对任意 $m \in$ 自然数集，

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \mathrm{T}_{c_{n_k},2}^2(\mu,\nu) = \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} c_{n_k}^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\lambda^{n_k}(\omega,\overline{\omega}) &\geq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} c_m^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\lambda^{n_k}(\omega,\overline{\omega}) \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} c_m^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\widetilde{\lambda}(\omega,\overline{\omega}).\end{aligned}$$

再次应用单调收敛定理，

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty} \mathrm{T}_{c_{n_k},2}^2(\mu,\nu) \geq \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega\times\Omega} c_m^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\widetilde{\lambda}(\omega,\overline{\omega}) &= \int_{\Omega\times\Omega} c_{\mathcal{H}}^2(\omega,\overline{\omega}) \,\mathrm{d}\widetilde{\lambda}(\omega,\overline{\omega}) \\ &\geq \mathrm{T}_{c_{\mathcal{H}},2}^2(\mu,\nu).\end{aligned}$$

现在注意，对于 $\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{G}$，$d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}) \geq |\pi_1\boldsymbol{x} - \pi_1\overline{\boldsymbol{x}}|$。事实上，根据卡诺–卡拉泰奥多里度量的定义，

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}) &= \min\Big\{ \int_0^1 |\dot{\gamma}_t| \,\mathrm{d}t : \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{G} \text{ horizontal}, \gamma_0 = \boldsymbol{x}, \gamma_1 = \overline{\boldsymbol{x}} \Big\} \\ &\geq \inf\Big\{ \int_0^1 |\dot{\gamma}_t| \,\mathrm{d}t : \gamma\colon [0,1] \to \mathbb{G} \text{ horizontal}, \pi_1\gamma_0 = \pi_1\boldsymbol{x}, \pi_1\gamma_1 = \pi_1\overline{\boldsymbol{x}} \Big\} \\ &= \min\Big\{ \int_0^1 |\dot{g}_t| \,\mathrm{d}t : g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^d \text{ absolutely continuous}, \ g_0 = \pi_1\boldsymbol{x}, g_1 = \pi_1\overline{\boldsymbol{x}} \Big\} \\ &= |\pi_1\boldsymbol{x} - \pi_1\overline{\boldsymbol{x}}|.\end{aligned}$$

因此，对于 $\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$,

$$C_n^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{\omega}_{t_{k-1}^n,t_k^n}, \overline{\boldsymbol{\omega}}_{t_{k-1}^n,t_k^n}) \geq 2^n \sum_{k=1}^{2^n} |\pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}}_{t_{k-1}^n,t_k^n} - \pi_1\boldsymbol{\omega}_{t_{k-1}^n,t_k^n}|^2 = c_n^2(\pi_1\boldsymbol{\omega}, \pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}}).$$

至此，(iii) 部分得证。 □

现在我们可以证明本节的主要结果。

定理6.6。 设$\mathbb{G}$为一个步阶为2的*Carnot*群，并假设 $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathbb{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$，其中 $\alpha \in (0,\infty)$。则 $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}, C_{\mathcal{H}}, \alpha)$。

证明。 如果 $\boldsymbol{\nu}$ 关于 $\boldsymbol{\mu}$不绝对连续，则 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu}) = +\infty$ ，代价-信息不等式显然成立。

现在假设 $\boldsymbol{\nu} \ll \boldsymbol{\mu}$。回顾由 (2.15) 给出的提升映射 Ψ: $C([0,1],\mathrm{R}^d) \to C([0,1],\mathrm{G})$。根据定理 2.13, $\boldsymbol{\mu} = \Psi_\sharp\mu$；根据定理 2.14，存在 $\nu \ll \mu$ 使得 $\boldsymbol{\nu} = \Psi_\sharp\nu$。现在令$\lambda^* \in \Pi(\mu,\nu)$满足

$$\mathrm{T}^2_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu) = \int_{\Omega\times\Omega} c_{\mathcal{H}}^2(\omega,\overline{\omega})\,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) = \int_{\Omega\times\Omega} \|\overline{\omega}-\omega\|_{\mathcal{H}}^2\,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}).$$

~我们有 $\lambda^*(\{(\omega,\overline{\ }\omega) \in \Omega\times\Omega\overline{\ }:\ \omega-\omega \in \mathcal{H}\}) = 1$，并且 $\boldsymbol{\lambda} = (\Psi\times\Psi)_\sharp\lambda^* \in \Pi(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu})$ 是一个可容许耦合。利用定理 2.16 中提升和平移的性质 (2.17)，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}}) &= \int_{\Omega\times\Omega} C_{\mathcal{H}}^2(\Psi(\omega),\Psi(\overline{\omega}))\,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} C_{\mathcal{H}}^2(\Psi(\omega), T_{\overline{\omega}-\omega}\Psi(\omega))\,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) \\ &= \int_{\Omega\times\Omega} \|\overline{\omega}-\omega\|_{\mathcal{H}}^2\,\mathrm{d}\lambda^*(\omega,\overline{\omega}) = \mathrm{T}^2_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu).\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu}) \leq \mathrm{T}^2_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\ \nu)$。

结合定理 6.4 中的 (6.6) 和 (6.7)，我们得到

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{T}^2_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}) \geq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{T}^2_{c_n,2}(\mu,\nu) \geq \mathrm{T}^2_{c_{\mathcal{H}},2}(\mu,\nu) \geq \mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}).$$

由定理 6.3 可知，$\mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu}) \leq \frac{2}{\alpha}H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})$。 – □

定理 6.7。 设$\mathbb{G}$是一个 H 型群。则空间$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} = C_0([0,1],\mathbb{G})$ 上的测度 $\boldsymbol{\mu}$ 满足代价-信息不等式

$$\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}, C_{\mathcal{H}}, \alpha),$$

对于定理 *5.3* 中的 $\alpha > 0$ 。

证明。 由定理 5.3, $\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_2(\mathrm{G}\ d_{\mathrm{CC}}, \alpha)$。由此可根据定理6.6得出结论。 □

6.2. **自上而下投影的失效与代价函数的爆炸**。本节指出经典欧几里得情形与 Carnot群情形之间的两个主要差异。与欧几里得情形不同，我们无法将定理6.6中的 Talagrand不等式投影下来，得到关于 $\boldsymbol{B}_1$ 的 Talagrand不等式。此外，代价函数 C_n 不会逐点收敛到代价 $C_{\mathcal{H}}$。

我们首先给出欧几里得情形下相应的投影结果，并通过定理 2.2 中的收缩原理加以证明。令 $\widetilde{P}_1$: $\Omega \to \mathrm{R}^{d_1}$， $\omega \mapsto \omega_1$ 表示在时刻 $t=1$ 取路径值的映射，并回顾式 (2.1) 中定义的欧几里得 Cameron–Martin代价 $c_{\mathcal{H}}$。

命题 6.8. 设 η 是 Ω 上的博雷尔概率测度，并假设 $\eta \in \mathcal{T}_2(\Omega\ c_{\mathcal{H}}, \alpha)$，其中某个$\alpha \in (0, \infty)$成立。那么$(\widetilde{P}_1)_\sharp \eta \in \mathcal{T}_2(\mathbb{R}^{d_1}, |.-.|, \alpha)$，其中 $|\cdot|$ 表示 $\mathbb{R}^{d_1}$上的欧几里得范数。

证明。 对任意满足 $\omega - \omega \in \mathcal{H}$ 的 $\omega,\omega \in \Omega$，詹森不等式意味着

$$\|\omega - \overline{\omega}\|_\infty^2 = \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t (\dot{\omega}_s - \dot{\overline{\omega}}_s)\,\mathrm{d}s \right|^2 \le \sup_{t\in[0,1]} t \int_0^t |\dot{\omega}_s - \dot{\overline{\omega}}_s|^2\,\mathrm{d}s \le \int_0^1 |\dot{\omega}_s - \dot{\overline{\omega}}_s|^2\,\mathrm{d}s = \|\omega - \overline{\omega}\|_{\mathcal{H}}^2$$

因此，对任意 $\omega,\omega \in \Omega$,

$$|\widetilde{P}_1\omega - \widetilde{P}_1\overline{\omega}|^2 \le \|\omega - \overline{\omega}\|_\infty^2 \le c_{\mathcal{H}}^2(\omega, \overline{\omega}).$$

由此，定理 2.2 中的收缩原理给出所要证明的结论。 □

现在考虑 G 上布朗运动 $\boldsymbol{B}$ 的分布律 $\boldsymbol{\mu}$。令 P_1: $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to$ G 表示将 G 值路径投影到其终时刻取值的投影；即对任意 $\boldsymbol{\omega} \in$G，有 $P_1\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1$。假设存在 $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbb{G}} \subseteq \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，满足 $\boldsymbol{\mu}(\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathbb{G}}) = 1$，以及某个可测函数 L: $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to [0, \infty]$，使得

$$d_{\mathrm{CC}}(P_1\boldsymbol{\omega}, P_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \le L(\boldsymbol{\omega}) C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}), \tag{6.8}$$

对所有 $\boldsymbol{\omega}$， $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。如果 $L \in L^\infty(\boldsymbol{\mu})$，那么根据定理 2.2， $\boldsymbol{\mu}$ 的不等式蕴含 $\boldsymbol{\mu}_1$的不等式。如果对于某个 $q \in [2, \infty)$，我们只有 $L \in L^q(\boldsymbol{\mu})$，那么定理 2.2 仍然蕴含 $p = \frac{2q}{2+q} \in [1, 2)$ 的不等式。以下结果表明，任何这样的 L 对任意 $q \in [2, \infty]$ 都不能属于 L^q，因此定理 2.2 中的收缩原理不适用。

命题 6.9。 令 L: $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to [0, \infty]$ 如 (6.8) 中所示。则 $\boldsymbol{\mu}(L = \infty) > 0$。特别地，对于任意 $q \in (0, \infty]$, $L \notin L^q(\boldsymbol{\mu})$。

我们在定理 6.9 的证明中，以及下文定理 6.11 的证明中，再次用到下面这个例子。

引理 6.10. 令 $a > 0$，并定义 $h \in \mathcal{H}$ 为 $h_t = (at, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{d_1}$，对所有 $t \in [0,1]$均成立。则对于任意 s， $t \in [0,1]$ 满足 $s \le t$，存在一个标准正态随机变量 $Z_{s,t}$，使得

$$d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{B}_{s,t}, (T_h\boldsymbol{B})_{s,t}) \ge aC(t-s)^{\frac{3}{2}} |Z_{s,t}|,$$

其中某个常数 $C > 0$ 与 a、 s 和 t无关。此外，对于满足 $u \le v \le s \le t$的 u、 v、 s、 $t \in [0,1]$，随机变量 $Z_{u,v}$ 和 $Z_{s,t}$ 相互独立。

证明。 对于 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}^{(1)}, \boldsymbol{B}^{(2)})$，记作 $\boldsymbol{B}^{(1)} = (B^1, \ldots, B^{d_1})$。设 s， $t \in [0,1]$ 满足 $s \le t$。由于 h 仅在其第一分量上非零，定理 2.18 推出

$$\boldsymbol{B}_{s,t}^{-1}(T_h\boldsymbol{B})_{s,t} = \left(h_{s,t}, a\sum_{j=2}^{d_1} w_{1,j} \int_s^t (s-r)\,\mathrm{d}B_r^j \right).$$

选取 $k \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $s_k^2 := \sum_{j=2}^{d_1} |w_{1,\ j}^{k}|^2 > 0$。根据 d_{CC} 的左不变性以及估计式 (2.11)，存在常数 $\kappa > 0$ 使得

$$d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{B}_{s,t}, (T_h\boldsymbol{B})_{s,t}) \geq a\kappa^{-1} \left| \sum_{j=2}^{d_1} w_{1,j} \int_s^t (s-r)\, \mathrm{d}B_r^j \right| \geq a\kappa^{-1} \left| \sum_{j=2}^{d_1} w_{1,j}^k \int_s^t (s-r)\, \mathrm{d}B_r^j \right|.$$

根据伊藤等距性，我们可以定义一个标准正态随机变量

$$Z_{s,t} := s_k^{-1}(t-s)^{-\frac{3}{2}}\sqrt{3} \sum_{j=2}^{d_1} w_{1,j}^k \int_s^t (s-r)\, \mathrm{d}B_r^j.$$

因此，令 $C = 3^{-\frac{1}{2}}\kappa^{-1}s_k$，我们有

$$d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{B}_{s,t}, (T_h\boldsymbol{B})_{s,t}) \geq aC(t-s)^{\frac{3}{2}}|Z_{s,t}|.$$

独立性来自布朗增量的独立性。 □

定理 *6.9* 的证明。反设 $\boldsymbol{\mu}(L < \infty) = 1$。令 $\boldsymbol{B}$ 为 G 上的布朗运动，令 $\delta > 0$，并通过 $h_t = (\delta t,\ 0。。。0) \in \mathrm{R}^{d_1}$ 定义 $h \in \mathcal{H}$，对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。根据定理 6.10，存在一个与 δ 无关的常数 $C > 0$ 以及一个标准正态随机变量 Z，使得下界为

$$d_{\mathrm{CC}}^2(P_1\boldsymbol{B}, P_1(T_h\boldsymbol{B})) \geq \delta C|Z|.$$

另一方面，根据代价 $C_{\mathcal{H}}$ 的定义，

$$C_{\mathcal{H}}^2(\boldsymbol{B}, T_h\boldsymbol{B}) = \|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \delta^2.$$

因此，(6.8) 意味着

$$C\delta|Z| \leq L(\boldsymbol{B})\delta^2.$$

Since $|Z|$ 和 $L(\boldsymbol{B})$ 都几乎处处有限，令 $\delta \to 0$ 取极限即可得到矛盾 . □

现在我们证明，与欧几里得情形不同，(6.2) 中定义的代价函数 C_n 不一定逐点收敛到 $C_{\mathcal{H}}$。同样，我们使用定理 6.10 中的例子。

命题 6.11. 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathbb{G}$ 上的布朗运动，并定义 $h \in \mathcal{H}$ 为 $h_t = (t,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{d_1}$，对所有 $t \in [0,1]$ 均成立。则

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{B}, T_h\boldsymbol{B}) = \infty$$

几乎处处。

证明。固定 $n \in$ 自然数集。由定理 6.10，存在独立标准正态随机变量 $Z_{n,\ k}$，$k \in \{1, \dots, 2^n\}$，使得

$$C_n^2(\boldsymbol{B}, T_h\boldsymbol{B}) = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{B}_{t_{k-1}^n, t_k^n}, (T_h\boldsymbol{B})_{t_{k-1}^n, t_k^n}) \geq C2^{-n/2} \sum_{k=1}^{2^n} |Z_{n,k}|.$$

注意到 $(|Z_{n,k}|)_{k=1,\dots,2^n}$ 是均值为 $\sqrt{2/\pi}$、方差为$1-2/\pi$的独立半正态随机变量。因此，由切比雪夫不等式，对任意 $\delta>0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{2^n}\frac{|Z_{n,k}|-\sqrt{2/\pi}}{2^n}\right|>\delta\right)\le\delta^{-2}(1-2/\pi)2^{-n}.$$

右端项在 n 上可求和，因此根据第一个博雷尔–坎泰利引理,

$$\lim_{n\to\infty}2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}|Z_{n,k}|=\sqrt{2/\pi}\quad\text{almost surely.}$$

因此，我们有

$$\liminf_{n\to\infty}C_n^2(\boldsymbol{B},T_h\boldsymbol{B})\ge C\liminf_{n\to\infty}2^{n/2}\cdot2^{-n}\sum_{k=1}^{2^n}|Z_{n,k}|=C\sqrt{2/\pi}\lim_{n\to\infty}2^{n/2}=+\infty,$$

几乎处处。 □

当边缘分布由确定性平移联系起来时，我们可以确定代价为 $C_{\mathcal{H}}$的最优耦合，并得到以下等式。

引理 6.12。 设 $h\in\mathcal{H}$ 为确定性的，且 $\boldsymbol{\nu}=$ 分布律$(T_h\boldsymbol{B})$。那么$\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$ 存在唯一的最优耦合，该耦合由一个蒙日映射诱导，并且

$$\mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})=\mathbb{E}[C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{B},T_h\boldsymbol{B})]=2H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})<\infty.$$

证明。第二个等式由定理 3.3 得出。事实上，若 $\boldsymbol{\nu}=\mathrm{Law}(T_h\boldsymbol{B})$，则根据定理 3.3，$h=b^\nu$ 是 Föllmer 漂移 b^ν。由于 $\boldsymbol{\nu}=\mathrm{Law}(T_h\boldsymbol{B})\ll\boldsymbol{\mu}$，我们有 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})<\infty$。现在，根据 $C_{\mathcal{H}}$ 的定义以及 $h\in\mathcal{H}$ 是确定性的这一事实，我们得到 $\boldsymbol{\lambda}^*=\mathrm{Law}(\boldsymbol{B},T_h\boldsymbol{B})$ 的最优性。为此，令 $\boldsymbol{\lambda}\in\Pi(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu})$，并考虑事件 $E:=\{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\in\Omega_{\mathbb{G}}\times\Omega_{\mathbb{G}}:\ \boldsymbol{\omega}=T_{\pi_1\boldsymbol{\omega}-\pi_1\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega}\}$。若$\boldsymbol{\lambda}(E)<1$，则根据 $C_{\mathcal{H}}$ 的定义，我们有 $\int C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})=+\infty$。现在假设 $\boldsymbol{\lambda}(E)=1$。那么，根据詹森不等式,

$$\begin{aligned}\int C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})&=\int\|\pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}}-\pi_1\boldsymbol{\omega}\|^2_{\mathcal{H}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\\&\ge\left\|\int\pi_1\overline{\boldsymbol{\omega}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\nu}(\overline{\boldsymbol{\omega}})-\int\pi_1\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right\|^2_{\mathcal{H}}=\|h\|^2_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

当且仅当 $\boldsymbol{\lambda}(\{(\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\omega})\in\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}:\ \overline{\pi_1\boldsymbol{\omega}}-\pi_1\boldsymbol{\omega}=h\})=1$ 时，等号成立。结合 $\boldsymbol{\lambda}(E)=1$ 这一条件可知，任意最优耦合都集中在函数 $T_h\colon\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\to\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 的图像上。因此，存在唯一的蒙日形式最优耦合，由 $\boldsymbol{\lambda}^*=(\mathrm{id}\times T_h)_\sharp\boldsymbol{\mu}=$分布律$(\boldsymbol{B},\ T_h\boldsymbol{B})$ 给出，并且 $\mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu})=\mathrm{E}[C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{B},\ T_h\boldsymbol{B})]$。□

注 6.13。 设 $h\in\mathcal{H}$ 如定理 6.11 中所述。由于 $\boldsymbol{\nu}=$分布律$(T_h\boldsymbol{B})\ll\boldsymbol{\mu}$，因此有 $H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})<\infty$。由定理 6.3 可知，$\mathrm{T}^2_{C_n,2}(\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\nu})\le H(\boldsymbol{\nu}\|\boldsymbol{\mu})<\infty$。然而，定理 6.11 表明 $\lim_{n\to\infty}C_n(\boldsymbol{B},\ T_h\boldsymbol{B})=+\infty$ 几乎处处成立。因此，对于某些 C_n, $n\in$自然数集，分布律$(\boldsymbol{B},\ T_h\boldsymbol{B})$ 是次优的。

对于海森堡群 $\mathbb{G}=\mathbb{H}^n$，当 $\mathrm{T}_{d_{\mathrm{CC}},2}(\boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_1)$ 时，这种次优性就已经可见。事实上，[AR04，定理 5.1] 表明，存在唯一的最优耦合，且该耦合集中在某个函数 $\phi\colon\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$ 的图像上。以定理 6.10 中的 h 为例，显然 $\mathrm{Law}(\boldsymbol{B}_1,\ (T_h\boldsymbol{B})_1)$ 不集中在任何此类图像上，因为 $(T_h\boldsymbol{B})_1$ 关于 $\sigma(\boldsymbol{B}_1)$ 不可测。

6.3. 海森堡群的黎曼近似。 对于经典维纳空间，我们考虑取值于 $\mathbb{R}^d$ 、具有欧几里得几何的路径。在当前的 Carnot群设定中，我们注意到以下两点区别：

(i) ($\mathbb{G}$ d_{CC}) 是一个次黎曼度量空间（次拉普拉斯算子是次椭圆的）；(ii) $\mathbb{G}$ 上的群运算是非交换的。

在 [CDPT07 的定理 2.12]中证明了，任何 Carnot群都可以在带基点的戈罗夫–豪斯多夫收敛的意义下由黎曼流形逼近；另见 [AS20 第 2.5]节，以及关于海森堡群的 [AR04 第 6]节。在进行这一逼近时，我们离开了次黎曼情形，但仍保留非交换性。我们观察到，在这种情形下，路径空间上的 $\mathcal{T}_2$ 不等式同样成立（命题 6.14），并且定理 6.11 中所示的离散化代价函数的爆炸不会发生（见命题 6.17）。定理 6.9 中所表明的、无法经由投影在底空间上恢复 $\mathcal{T}_2$ 不等式这一失败仍然可以观察到（命题 6.16）。然而，与次黎曼情形不同，我们可以利用收缩原理，对任意 $p \in [1,2)$在底空间上得到 $\mathcal{T}_p$ 不等式（命题 6.15）。

为了便于本节的阐述，我们专门讨论海森堡群 $\mathbb{H} = \mathbb{H}^1 \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$。回顾左不变向量场 $(V_1, V_2, V_3) = (X, Y, Z)$，其中

$$X = \partial_x + \tfrac{1}{2} y \partial_z, \quad Y = \partial_y - \tfrac{1}{2} x \partial_z, \quad Z = [X, Y] = \partial_z,$$

以及群运算

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}' = \big(x + x', y + y', z + z' + \tfrac{1}{2}(xy' - x'y)\big), \quad \boldsymbol{x} = (x, y, z),\ \boldsymbol{x}' = (x', y', z') \in \mathbb{H}.$$

对于 $\varepsilon > 0$，定义流形 M_ε 为配备欧几里得拓扑和正交归一基 (X, Y, Z_ε) 的 $\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$，其中 $Z_\varepsilon = \varepsilon Z$。令 d_ε 表示诱导的黎曼距离，它同样是左不变的。根据 [CDPT07，定理 2.12], ($\mathbb{H}$ d_{CC}) 是黎曼流形 $(M_\varepsilon, d_\varepsilon)$ 在$\varepsilon \to 0$时的极限，这里指带基点的戈罗夫–豪斯多夫收敛。与 [AR04，第 6], 节一样，我们看到，对于任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_\varepsilon$,

$$d_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \inf\Big\{ \int_0^1 \sqrt{|\dot\gamma_t^1|^2 + |\dot\gamma_t^2|^2 + \varepsilon^{-2}|\dot\gamma_t^3 - \tfrac{1}{2}(\gamma_t^1 \dot\gamma_t^2 - \dot\gamma_t^1 \gamma_t^2)|^2}\, \mathrm{d}t : \gamma \in \mathrm{AC}([0,1], M_\varepsilon),\ \gamma_0 = \boldsymbol{x}, \gamma_1 = \boldsymbol{y} \Big\},$$

and, for $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$ with $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$,

$$d_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le d_{\varepsilon_1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sup_{\varepsilon > 0} d_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

此外 根据 [Jui14，引理 1.1], ，存在一个常数 $c > 0$ ，使得对于任意 $\varepsilon > 0$, $\boldsymbol{x}$， $\boldsymbol{y} \in M_\varepsilon$ ，

$$d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le d_\varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + c\varepsilon. \tag{6.9}$$

我们还将用到以下界。存在一个常数 $\kappa > 0$ ，使得对于任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\boldsymbol{x} = (0, 0, z) \in M_\varepsilon$,

$$\overline{\kappa}(|z|^{\frac{1}{2}} - \varepsilon) \le d_\varepsilon(0, \boldsymbol{x}) \le \varepsilon^{-1}|z|, \tag{6.10}$$

其中，下界由 (2.11) 与 (6.9) 结合得出，而上界则通过考察一条纯竖直路径的长度得到。

在空间 $(M_\varepsilon,\ d_\varepsilon)$ 上，我们采用与 H 上相同的非交换群运算，但此处的距离d_ε 是黎曼距离。

考虑R^3上的布朗运动 B，其分布律为 μ，Cameron–Martin空间为 $\mathcal{H}=W^{1,2}0([0,1],\mathrm{R}^3)$。我们可以通过以下方式在$(M_\varepsilon,d_\varepsilon)$上定义布朗运动 $\boldsymbol{B}^\varepsilon$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t^\varepsilon = X(\boldsymbol{B}^\varepsilon)\,\mathrm{d}B_t^1 + Y(\boldsymbol{B}^\varepsilon)\,\mathrm{d}B_t^2 + Z_\varepsilon\,\mathrm{d}B_t^3,$$

并令 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon=$为$\boldsymbol{B}^\varepsilon$的分布律。具体而言， $\boldsymbol{B}^\varepsilon=(\boldsymbol{B}^{\varepsilon,(1)},\boldsymbol{B}^{\varepsilon,(2)})$，其中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t^{\varepsilon,(1)}=\mathrm{d}(B^1,B^2)_t,\quad \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t^{\varepsilon,(2)}=\frac{1}{2}(B_t^2\,\mathrm{d}B_t^1-B_t^1\,\mathrm{d}B_t^2)+\varepsilon\,\mathrm{d}B_t^3.$$

设$\Omega:=C_0([0,1],\mathrm{R}^3)$以及$\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon:=C_0([0,1],M_\varepsilon)$，并通过以下方式定义映射 $\Psi^\varepsilon\colon\Omega\to\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$

$$\Psi^\varepsilon(\omega)=(0,\varepsilon\omega^3)\Psi((\omega^1,\omega^2)),\quad \omega=(\omega^1,\omega^2,\omega^3)\in\Omega,$$

其中 Ψ 是定理 2.12中定义的提升映射。将其定义域定义为$\mathrm{Dom}(\Psi^\varepsilon):=\{\omega=(\omega^1,\omega^2,\omega^3)\in\Omega:(\omega^1,\omega^2)\in\mathrm{Dom}(\Psi)\}$。当 ω绝对连续时， Ψ^ε 具有如下显式形式

$$\Psi^\varepsilon(\omega)_t=\Big((\omega_t^1,\omega_t^2),\ \frac{1}{2}\int_0^t(\omega_r^1\,\mathrm{d}\omega_r^2-\omega_r^2\,\mathrm{d}\omega_r^1)+\varepsilon\omega_t^3\Big),\quad t\in[0,1].$$

与定理2.13类似，我们有 $\boldsymbol{B}^\varepsilon=\Psi^\varepsilon(B)$几乎处处成立。我们还可以定义平移映射$T_h^\varepsilon\colon\ \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon\to\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$，对任意 $h=(h^1,\ h^2,\ h^3)\in\mathcal{H}$，定义为

$$T_h^\varepsilon\boldsymbol{\omega}=(0,\varepsilon h^3)T_{(h^1,h^2)}\boldsymbol{\omega},\quad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon.$$

于是，与定理 2.16 类似，对任意 $\omega\in\mathrm{Dom}(\Psi^\varepsilon)$ 和 $h\in\mathcal{H}$，我们有

$$T_h^\varepsilon\Psi^\varepsilon(\omega)=\Psi^\varepsilon(\omega+h).$$

现在定义代价函数 $C_{\mathcal{H}}^\varepsilon\colon\ \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon\times\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon\to[0,\infty]$，定义为

$$C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\boldsymbol{\omega},\widetilde{\boldsymbol{\omega}})=\begin{cases}\|h\|_{\mathcal{H}}, & \text{if }\widetilde{\boldsymbol{\omega}}=T_h^\varepsilon\boldsymbol{\omega},\quad \text{for some } h\in\mathcal{H},\\ +\infty, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

采用与定理4.4相同的方法，我们看到 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon$ 满足关于此代价的 $\mathcal{T}_2$ 不等式。

命题 6.14。 我们有代价-信息不等式 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon\in\mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon,C_{\mathcal{H}}^\varepsilon,1)$。

证明。 如第2.1节所述， $\mu\in\mathcal{T}_2(\Omega\ c_{\mathcal{H}},\ 1)$，其中代价 $c_{\mathcal{H}}$在 (2.2) 中定义。我们还有$\boldsymbol{\mu}^\varepsilon=\Psi_\sharp^\varepsilon\mu$以及 $\mu(\mathrm{Dom}(\Psi^\varepsilon))=1$。此外，对任意 $x,\ y\in\mathrm{Dom}(\Psi^\varepsilon)$ 且 $h:=y-x\in\mathcal{H}$,

$$C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon(x),\Psi^\varepsilon(y))=C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon(x),\Psi^\varepsilon(x+h))=C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\Psi^\varepsilon(x),T_h^\varepsilon\Psi^\varepsilon(x))=\|h\|_{\mathcal{H}}^2=c_{\mathcal{H}}(x,y).$$

在 $y-x\notin\mathcal{H}$ 的情况下，两边都是无穷大。因此，应用定理 2.2 中的收缩原理，我们有 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon\in\mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon,\ C_{\mathcal{H}}^\varepsilon,1)$。□

与次黎曼情形不同， $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon\in\mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon,\ C_{\mathcal{H}}^\varepsilon,\ 1)$ 蕴含一个 $\mathcal{T}_p$ 不等式，适用于 $\boldsymbol{\mu}_1^\varepsilon:=$分布律$(\boldsymbol{B}_1^\varepsilon)$，对于 $p\in[1,2)$，其常数取决于 ε。

令 $P_1\colon\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon\to M_\varepsilon$ 表示投影 $P_1(\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\omega}_1$，对于 $\boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$，使得 $\boldsymbol{\mu}_1^\varepsilon=(P_1)_\sharp\boldsymbol{\mu}^\varepsilon$。

命题 6.15. 假设 $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon\in\mathcal{T}_2(\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon,C_{\mathcal{H}}^\varepsilon,1)$。那么，对任意 $p\in[1,2)$，存在 $\alpha(\varepsilon,p)>0$，使得 $\lim_{\varepsilon\to0}\alpha(\varepsilon,p)=0$，且 $\boldsymbol{\mu}_1^\varepsilon\in\mathcal{T}_p(M_\varepsilon,d_\varepsilon,\alpha(\varepsilon,p))$。

证明. 假设 $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$，其中 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h^\varepsilon \boldsymbol{\omega}$，对某个 $h \in \mathcal{H}$。定义 $\boldsymbol{h} = \Psi^\varepsilon(h)$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_1 = \boldsymbol{\omega}_1^{-1}(T_h^\varepsilon \boldsymbol{\omega})_1$。那么

$$d_\varepsilon(P_1(\boldsymbol{\omega}), P_1(\widetilde{\boldsymbol{\omega}})) \le d_\varepsilon(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) + d_\varepsilon(0, \boldsymbol{h}_1).$$

我们用曲线 $t \mapsto \boldsymbol{h}_t$ 在 $\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$ 中的长度来估计 $d_\varepsilon(0, \boldsymbol{h}_1)$，得到

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(0, \boldsymbol{h}_1) &\le \int_0^1 \sqrt{|\dot{h}_r^1|^2 + |\dot{h}_r^2|^2 + \varepsilon^{-2}|\varepsilon \dot{h}_r^3 + \tfrac{1}{2}(h_r^1 \dot{h}_r^2 - h_r^2 \dot{h}_r^1) - \tfrac{1}{2}(h_r^1 \dot{h}_r^2 - h_r^2 \dot{h}_r^1)|^2}\, \mathrm{d}r \\ &= \int_0^1 \sqrt{|\dot{h}_r^1|^2 + |\dot{h}_r^2|^2 + |\dot{h}_r^3|^2}\, \mathrm{d}r \le \|h\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

与定理 2.18 类似，通过分部积分，

$$\boldsymbol{h}_1^{-1} \boldsymbol{\gamma}_1 = \Big(0, \int_0^1 \Big(h_r^1 \,\mathrm{d}\omega_r^2 - h_r^2 \,\mathrm{d}\omega_r^1\Big)\Big), \tag{6.12}$$

因此，由 (6.10) 得，

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{\gamma}_1) &\le \varepsilon^{-1} \Big| \int_0^1 \Big(h_r^1 \,\mathrm{d}\omega_r^2 - h_r^2 \,\mathrm{d}\omega_r^1\Big) \Big| \\ &\le 2\varepsilon^{-1} \|\omega\|_\infty \|h\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

其中 $\|\omega\|_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |(\omega_t^1, \omega_t^2)|$。因此

$$d_\varepsilon(P_1(\boldsymbol{\omega}), P_1(\widetilde{\boldsymbol{\omega}})) \le (1 + 2\varepsilon^{-1}\|\omega\|_\infty)\|h\|_{\mathcal{H}} = (1 + 2\varepsilon^{-1}\|\omega\|_\infty) C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}).$$

如果不存在满足 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h \boldsymbol{\omega}$ 的 $h \in \mathcal{H}$，则同一不等式显然成立。接下来注意，对于任意 $q \in [1, \infty)$，$\boldsymbol{\omega} \mapsto \|\omega\|_\infty \in L^q(\boldsymbol{\mu})$。令 $p \in [1, 2)$ 并设 $q = \frac{2p}{2-p} \in [2, \infty)$。由定理 2.2 的收缩原理，我们得到

$$\boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{T}_p(M_\varepsilon, d_\varepsilon, \alpha(\varepsilon, p)), \quad \text{where} \quad \alpha(\varepsilon, p) = \big(1 + 2\varepsilon^{-1} \mathbb{E}[\|B\|_\infty^q]^{\frac{1}{q}}\big)^{-2},$$

并且我们看到 $\lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon,\ p) = 0$。 □

然而，与次黎曼情形类似，无法通过收缩原理得到 a $\mathcal{T}_2$ 不等式，正如下一个结果所示。

命题 6.16。设 $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon$，使得 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\Omega}) = 1$，并设 $L: \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon \to [0, \infty]$ 是一个可测函数，使得

$$d_\varepsilon(P_1 \boldsymbol{\omega}, P_1 \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \le L(\boldsymbol{\omega}) C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}),$$

对所有 $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}$ 均成立。则 $L \notin L^\infty(\boldsymbol{\mu}^\varepsilon)$。

证明。反设 $L \in L^\infty(\boldsymbol{\mu}^\varepsilon)$。定义 $h \in \mathcal{H}$，使得对所有 $t \in [0, 1]$，$h_t = (t,\ 0,\ 0) \in \mathbb{R}^3$，。然后，与定理 6.10 类似，我们可以应用 (6.12) 和 (6.10)，得知存在一个标准正态随机变量 Z 及一个常数 $C(\varepsilon) > 0$，使得

$$d_\varepsilon^2(\boldsymbol{B}_1^\varepsilon, (T_h^\varepsilon \boldsymbol{B}^\varepsilon)_1) \ge C(\varepsilon)|Z|.$$

我们还有 $C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\boldsymbol{B}^\varepsilon,\ T_h^\varepsilon \boldsymbol{B}^\varepsilon) = \|h\|_{\mathcal{H}} = 1$。因此 $C(\varepsilon)|Z| \le L(\boldsymbol{B}^\varepsilon)$。由于 $|Z|$ 不是本质有界的，我们便得到矛盾。□

最后，在黎曼几何情形中，我们没有观察到定理 6.11 中所示的爆炸。对于 $n \in$ 自然数集，定义一个代价 C_n^ε: $\boldsymbol{\Omega}^\varepsilon \times \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon \to [0,\infty)$，其定义如下:

$$C_n^\varepsilon(\boldsymbol{\omega},\widetilde{\boldsymbol{\omega}})^2 = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_\varepsilon^2(\boldsymbol{\omega}_{t_{k-1}^n,t_k^n}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{t_{k-1}^n,t_k^n}), \quad \boldsymbol{\omega},\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}^\varepsilon.$$

命题 6.17. 对于任意 $h \in \mathcal{H}$，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} C_n^\varepsilon(\boldsymbol{B}^\varepsilon, T_h^\varepsilon \boldsymbol{B}^\varepsilon) \le C_{\mathcal{H}}^\varepsilon(\boldsymbol{B}^\varepsilon, T_h^\varepsilon \boldsymbol{B}^\varepsilon) = \|h\|_{\mathcal{H}},$$

几乎处处。

证明。定义 $\boldsymbol{Z}$，令 $\boldsymbol{Z}_{s,\,t} = \boldsymbol{B}_{s\,t}^{-1}\,(T_h^\varepsilon \boldsymbol{B})_{s,\,t}$，其中 $s,\ t \in [0,1]$ 满足 $s \le t$，且 $\boldsymbol{h} = \Psi^\varepsilon(h)$。令 $n \in$ 属于自然数集。由杨氏不等式，我们估计

$$C_n^\varepsilon(\boldsymbol{B}^\varepsilon, T_h^\varepsilon \boldsymbol{B}^\varepsilon)^2 \le (1+n) C_n^\varepsilon(\boldsymbol{h},\boldsymbol{Z})^2 + (1+\tfrac{1}{n}) C_n^\varepsilon(0,\boldsymbol{h})^2. \tag{6.13}$$

与 (6.11) 中一样，我们用曲线 $\boldsymbol{h}$ 的长度来估计 $d_\varepsilon(\boldsymbol{h}_{t_{k-1}^n},\ \boldsymbol{h}_{t_k^n})$；即

$$d_\varepsilon(\boldsymbol{h}_{t_{k-1}^n}, \boldsymbol{h}_{t_k^n}) \le \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \sqrt{|\dot h_r^1|^2 + |\dot h_r^2|^2 + |\dot h_r^3|^2}\,\mathrm{d}r.$$

应用柯西–施瓦茨不等式，我们有

$$C_n^\varepsilon(0,\boldsymbol{h})^2 = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_\varepsilon^2(\boldsymbol{h}_{t_{k-1}^n}, \boldsymbol{h}_{t_k^n}) \le \sum_{k=1}^{2^n} \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \Big(|\dot h_r^1|^2 + |\dot h_r^2|^2 + |\dot h_r^3|^2\Big)\mathrm{d}r = \|h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

因此

$$\limsup_{n\to\infty} (1+\tfrac{1}{n}) C_n^\varepsilon(0,\boldsymbol{h})^2 \le \|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

接下来，类似于 (6.12) 和定理 2.18，我们有

$$\boldsymbol{h}_{s,t}^{-1}\boldsymbol{Z}_{s,t} = \Big(0, \int_s^t \Big(h_{s,r}^1\,\mathrm{d}B_r^2 - h_{s,r}^2\,\mathrm{d}B_r^1\Big)\Big).$$

因此，利用估计 (6.10) 以及 B 几乎处处 β-Hölder 连续这一事实，对任意$\beta \in (0,1/2)$，存在一个常数 $c>0$，使得我们有以下几乎处处成立的界

$$\begin{aligned} d_\varepsilon^2(0, \boldsymbol{h}_{s,t}^{-1}\boldsymbol{Z}_{s,t}) &\le \varepsilon^{-2}\Big|\int_s^t h_{s,r}^1\,\mathrm{d}B_r^2\Big|^2 + \varepsilon^{-2}\Big|\int_s^t h_{s,r}^2\,\mathrm{d}B_r^1\Big|^2 \\ &\le c\varepsilon^{-2}\|B\|_\beta^2 |t-s|^{1+2\beta}\int_s^t |\dot h_r|^2\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中 $\|B\|_\beta$ 是 B的 β-Hölder 范数。因此

$$C_n^\varepsilon(\boldsymbol{h},\boldsymbol{Z})^2 = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_\varepsilon^2(0, \boldsymbol{h}_{t_{k-1}^n,t_k^n}^{-1}\boldsymbol{Z}_{t_{k-1}^n,t_k^n}) \le c\varepsilon^{-2}2^n 2^{-(1+2\beta)n}\|h\|_{\mathcal{H}}^2\|B\|_\beta^2 = c\varepsilon^{-2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2\|B\|_\beta^2 2^{-2\beta n},$$

因此 $\lim_{n\to\infty}(1+n)C_n^\varepsilon(\boldsymbol{h},\boldsymbol{Z})^2 = 0$ 几乎处处成立。由 (6.13) 得证。 □

6.4. **Γ-代价函数的收敛**。尽管我们在定理 6.11 中证明了代价函数 C_n会发生点态爆炸，我们现在证明 C_n 确实在变分意义下收敛到 $C_{\mathcal{H}}$。更确切地说，序列 C_n 按照 Γ-收敛的意义收敛到 $C_{\mathcal{H}}$；这是一种收敛概念

它适用于以渐近下界和上界表述的极小化问题族。在度量空间 (E, d_E) 上，我们称泛函序列 $F_n\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Γ按$\cup\{\infty\}$ -收敛到极限 $F_\infty\colon E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，如果

(i) 对每个属于 E的序列 $x_n \to x$，都有 $F_\infty(x) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x_n)$；并且

(ii) 对每个 $x \in E$，都存在一个属于 E 的序列 $\widetilde{x}_n \to x$，使得 $\limsup_{n\to\infty} F_n(\widetilde{x}_n) \le F_\infty(x)$。

条件 (ii) 中的序列 $(\widetilde{x}_n)$ 称为恢复序列，因为通过给 x添加适当的振荡，它可以从近似能量 $F_n(\widetilde{x}_n)$ 中“恢复”正确的能量水平$F_\infty(x)$。可以将Γ-收敛视为对能量景观渐近行为的描述，这与大偏差原理十分相似；大偏差原理通过速率函数刻画概率测度的渐近行为。事实上，已有多篇文献研究了 Γ-收敛与大偏差原理之间的相互作用；例如参见 [Mar18, Ber18]。 Γ-收敛的一项主要优点是其稳定性：泛函的收敛意味着最小值收敛，并且在较弱的紧性假设下，（几乎）极小化子的收敛也成立。关于全面论述，请参阅专著[DM93, Bra02, Rin18]。

我们将看到，代价函数 C_n 的 Γ-收敛蕴含相应最优传输问题的收敛；也就是说，对于每个 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$，都存在一个概率测度序列$\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$，使得相应的传输代价 $\mathrm{T}_{C_n,\,2}(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n,\ \boldsymbol{\mu})$ 在 $n \to \infty$ 时收敛到 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},\,2}(\boldsymbol{\nu},\ \boldsymbol{\mu})$。

在欧几里得情形中，若代价 c_n 按照 (6.4) 定义，则对于 $\omega,\ \widetilde{\omega} \in C_0([0,1];\mathbb{R}^d)$，当 $h = \omega - \widetilde{\omega}$ 时，有公式 $c_n(\omega,\ \widetilde{\omega}) = \int_0^1 |\partial_s \widehat{h}^n|^2\,\mathrm{d}s$，其中 $\widehat{h}^n$ 是 h 的分段仿射插值函数。容易验证，当 $h \in \mathcal{H}$ 时，$c_n(\omega,\ \widetilde{\omega})$ 收敛到 $\|h\|_{\mathcal{H}}$；否则收敛到 $+\infty$；参见定理 6.4。特别地，在此情形下，c_n 的 Γ-收敛同样成立，且极限代价不变。

回顾一下，我们考虑度量空间 $(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \qquad\qquad , d_\infty)$, 其中 d_∞ 是式 (2 中定义的一致度量 .13)。我们从以下引理开始，它给出了水平曲线的代价逐点收敛到 Cameron–Martin 范数。

引理 6.18. 设 $h \in \mathcal{H}$，并令 $\boldsymbol{h} = \Psi(h)$ 表示其在 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 中的提升。那么，对于式 (6.2) 中定义的代价函数族 $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$，有 $C_n(0, \boldsymbol{h}) \le \|h\|_{\mathcal{H}}$，且 $\lim_{n\to\infty} C_n(0, \boldsymbol{h}) = \|h\|_{\mathcal{H}}$。

证明。设 $h \in \mathcal{H}$，并令 $\boldsymbol{h} = \Psi(h)$。曲线 $t \mapsto \boldsymbol{h}_t \in \mathbb{G}$ 是水平曲线，因此对每个$0 \le s < t \le 1$，都有

$$d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_s, \boldsymbol{h}_t) \le \int_s^t |\dot{h}_r|\,\mathrm{d}r.$$

应用 H¨older 不等式，我们得到估计

$$C_n^2(0, \boldsymbol{h}) = 2^n \sum_{i=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_{t_i^n}, \boldsymbol{h}_{t_{i-1}^n})^2 \le \sum_{i=1}^{2^n} \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} |\dot{h}_r|^2\,\mathrm{d}r = \|h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

对左侧取上极限得到 $\limsup_{n\to\infty} C_n(0,\ \boldsymbol{h}) \le \|h\|_{\mathcal{H}}$。

为证明下界，对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义分段常值函数 $g^n\colon [0,1] \to [0,\infty)$，令 $g_t^n = 2^n d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_{t_i^n}, \boldsymbol{h}_{t_{i-1}^n})$ 对 $t \in [t_{i-1}^n, t_i^n)$，$i \in \{1,\dots,n\}$。注意，序列 (g^n) 在 $L^2([0,1])$ 中一致有界。因此，我们可以提取一个弱收敛子列，使得 $g^{n_k} \to g$ in$L^2([0,1])$。对于给定的 $0 \le r < s \le 1$，我们可以找到指标 i_n，$j_n \in \{1,\dots,2^n\}$，使得对于 $r_n = t_{i_n}^n$ 和 $s_n = t_{j_n}^n$，

$$0 \le r_n \le r < s \le s_n \le 1, \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty} r_n = r, \quad \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

根据三角不等式以及 $t \mapsto \boldsymbol{h}_t$ 的连续性，存在一个序列 $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}$，使得 $\varepsilon_n \to 0$ 且

$$d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_r, \boldsymbol{h}_s) \le \sum_{i=j}^{j_n} d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_{t_i^n}, \boldsymbol{h}_{t_{i-1}^n}) + d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_r, \boldsymbol{h}_{r_n}) + d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_s, \boldsymbol{h}_{s_n}) = \int_{r_n}^{s_n} g_t^n \,\mathrm{d}t + \varepsilon_n.$$

令 $n \to \infty$ 趋于极限，可推得 $d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{h}_r, \boldsymbol{h}_s) \le \int_r^s g_t \,\mathrm{d}t$。现在，根据度量导数的最小性（见定理 2.8），我们得到对于几乎处处的 $t \in (0, 1)$，$g_t \ge |h_t|$。最后，由于 $C_n^2(0, \boldsymbol{h}) = 2^n \sum_{i=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}^2(\boldsymbol{h}_{t_i^n}, \boldsymbol{h}_{t_{i-1}^n})$，范数的下半连续性意味着

$$\liminf_{n\to\infty} C_n^2(0, \boldsymbol{h}) = \liminf_{n\to\infty} \int_0^1 (g_t^n)^2 \,\mathrm{d}t \ge \int_0^1 g_t^2 \,\mathrm{d}t \ge \|h\|_{\mathcal{H}}^2,$$

由此完成证明。 □

下一个引理表明，代价 C_n 沿着收敛到极限 $\boldsymbol{\omega}$，$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 的序列 $\boldsymbol{\omega}^n$，$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n$ 会发散，其中这些极限的差 $\boldsymbol{\omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 是一个纯垂直过程；即 $t \mapsto (\boldsymbol{\omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}})_t \in (0, \theta_t)$。

引理 *6.19.* 设 $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，并设 $(\boldsymbol{\omega}^n), (\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 为序列，使得 $\lim_{n\to\infty} (\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = (\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$。假设存在一个非零的 $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，满足 $\boldsymbol{\theta}_t = (0, \theta_t)$，且对所有 $t \in [0, T]$ 均有 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_t = \boldsymbol{\omega}_t \boldsymbol{\theta}_t$。那么 $\lim_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = \infty$。

证明。反设 $C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$ 关于 n 一致有界。利用 (2.11) 中规范距离 d_g 与 Carnot–Carathéodory 距离 d_{CC} 的等价性，可得下界

$$C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)^2 = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} d_{\mathrm{CC}}\big(\boldsymbol{\omega}^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}\big)^2 \ge \frac{2^n}{\kappa} \sum_{k=1}^{2^n} d_g\big(\boldsymbol{\omega}^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}\big)^2 \ge \frac{2^n}{\kappa} \sum_{k=1}^{2^n} \big|\theta^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}\big|,$$

其中 $\theta^n_{s,t} = \pi_2((\boldsymbol{\omega}^n_{s,t})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_{s,t})$ 是垂直过程的增量。令 $\widehat{\theta}^n_t$ 表示与增量 $\theta^n_{t^n_{k-1}, t^n_k}$ 对应的分段仿射插值函数，且 $\theta^n_0 = 0$。上述估计给出界 $C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)^2 \ge \frac{2^n}{\kappa} \|\widehat{\theta}^n\|_{W^{1,1}}$，其中左侧根据假设关于 n 一致有界。因此 $\widehat{\theta}^n \to 0$ 属于 $W^{1,1}_0([0,1], \mathbb{R}^{d_2})$，从而 $\theta \equiv 0$ 作为 $W^{1,1}_0([0,1], \mathbb{R}^{d_2}) \hookrightarrow C_0([0,1], \mathbb{R}^{d_2})$，这就导出了矛盾。我们得出 $\lim_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = \infty$。 □

现在证明 C_n 的 Γ-收敛定义中的条件 (ii)，即恢复序列的存在性。事实上，我们证明一个更强的版本；见注 6.23。

命题 6.20. 设 $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，并设 $(\boldsymbol{\omega}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 是一个满足 $\boldsymbol{\omega}^n \to \boldsymbol{\omega}$ 的序列。那么存在一个序列 $(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，使得 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n \to \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 并且

$$\limsup_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \le C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}). \tag{6.14}$$

证明。我们只需考虑 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$ for $h \in \mathcal{H}$ 的情形，因为根据定义，(2.18) 中的 $C_{\mathcal{H}}$ 使得 (6.14) 右侧否则为无穷大，而该不等式显然成立。令 $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$、$h \in \mathcal{H}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$。考虑一个序列 $(\boldsymbol{\omega}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，使得 $\boldsymbol{\omega}^n \to \boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\overline{\boldsymbol{\omega}}^n := T_h\boldsymbol{\omega}^n \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。根据定理 2.16 中平移映射的连续性，$\overline{\boldsymbol{\omega}}^n \to \widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$ in $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$。如注 2.18 中所述，我们引入非交换误差

$$\boldsymbol{\theta}^n_{s,t} := \boldsymbol{h}^{-1}_{s,t}(\boldsymbol{\omega}^n_{s,t})^{-1}\overline{\boldsymbol{\omega}}^n_{s,t} = \big(0, \theta^n_{s,t}\big),$$

$$\text{where} \quad \theta^n_{s,t} = \Big(\int_s^t \mathsf{W} h_{s,r} \otimes \mathrm{d}\omega^n_r\Big).$$

我们定义 $\boldsymbol{\vartheta}^n \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，使其增量满足 $(\boldsymbol{\vartheta}^n_{t^n_{k-1}})^{-1}\boldsymbol{\vartheta}^n_{t^n_k} = \boldsymbol{\theta}^n_{t^n_{k-1},t^n_k}$。事实上，我们令 $\boldsymbol{\vartheta}^n_t = (\mathbf{0}, \vartheta^n_t)$，其中

$$\vartheta^n_0 = 0 \quad \text{and} \quad \vartheta^n_t = \vartheta^n_{t^n_{k-1}} + \theta^n_{t^n_{k-1},t}, \quad \text{for} \quad t \in (t^n_{k-1}, t^n_k],\ k \in \{1,\dots,2^n\}.$$

我们强调，对于任意的 $t \in [0,1]$，$\boldsymbol{\vartheta}^n_t$ 都是群 G 的中心中的一个元素。特别地，它与 G 中的每个元素都可交换。因此，定义曲线 $t \mapsto \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_t = \boldsymbol{\omega}^n_t(\boldsymbol{\vartheta}^n_t)^{-1} \in \mathsf{G}$，可得其增量满足

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_{s,t} = \overline{\boldsymbol{\omega}}^n_{s,t}(\boldsymbol{\vartheta}^n_{s,t})^{-1} = (\boldsymbol{\vartheta}^n_{s,t})^{-1}\overline{\boldsymbol{\omega}}^n_{s,t}, \quad 0 \le s \le t \le 1.$$

利用 d_{CC} 的左不变性和 $\boldsymbol{\vartheta}^n$ 的定义，我们发现，对于 $k \in \{1,\dots,2^n\}$，

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{CC}}(\boldsymbol{\omega}^n_{t^n_{k-1},t^n_k}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n_{t^n_{k-1},t^n_k}) &= d_{\mathrm{CC}}\big(0, (\boldsymbol{\omega}^n_{t^n_{k-1},t^n_k})^{-1}\overline{\boldsymbol{\omega}}^n_{t^n_{k-1},t^n_k}(\boldsymbol{\vartheta}^n_{t^n_{k-1},t^n_k})^{-1}\big) \\ &= d_{\mathrm{CC}}\big(0, \boldsymbol{h}_{t^n_{k-1},t^n_k}\boldsymbol{\theta}^n_{t^n_{k-1},t^n_k}(\boldsymbol{\theta}^n_{t^n_{k-1},t^n_k})^{-1}\big) = d_{\mathrm{CC}}(0, \boldsymbol{h}_{t^n_{k-1},t^n_k}). \end{aligned}$$

定理 6.18 现在允许我们取上极限。更确切地说，我们有

$$\limsup_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = \limsup_{n\to\infty} C_n(0, \boldsymbol{h}) \le C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}).$$

剩下要证明的是 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n \to \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$。由于收敛 $\boldsymbol{\omega}^n \to \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$，只需证明 $\boldsymbol{\vartheta}^n \to 0$ 属于$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，或者等价地，$\vartheta^n \to 0$ 属于 $C([0,1], \mathbb{R}^{d_2})$。根据 ϑ^n 的定义，我们可找到一个常数 $C > 0$，使得

$$\|\vartheta^n\|_\infty \le C \sup_{k=1,\dots,2^n} \max_{i<j} \sup_{t\in[t^n_{k-1},t^n_k]} |\omega^{n,i}_t - \omega^{n,i}_{t^n_k}| \big\|\dot{h}^j\big\|_{L^1}.$$

由于 $\boldsymbol{\omega}^n$ 一致收敛于 $\boldsymbol{\omega}$，右侧在 $n \to \infty$ 时趋于零。 □

现在我们证明 Γ-收敛定义中条件 (i) 所要求的下估计。

命题 6.21。设 $\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，且设 $(\boldsymbol{\omega}^n), (\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 为满足 $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = (\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$ 的序列。则 $\liminf_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \ge C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$。

证明。考虑一对曲线 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 以及一对序列 $(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \subset \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，使得 $\lim_{n\to\infty}(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) = (\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$。我们将考虑三种情况。

情况 *1a*。首先，我们考虑这样的情形：$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$ 对于某个 $h \in \mathcal{H}$。不妨设 $I := \liminf_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) < \infty$，否则不等式显然成立。令 $h^n = \pi_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n - \pi_1\boldsymbol{\omega}^n$，使得 $h^n \to h$ 属于 $C([0,1], \mathbb{R}^{d_1})$。现在应用定理 6.4 (iii)，可得

$$\liminf_{n\to\infty} C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n)^2 \ge \liminf_{n\to\infty} 2^n \sum_{k=1}^{2^n} |h^n_{t^n_k} - h^n_{t^n_{k-1}}|^2 = \liminf_{n\to\infty} \|\widehat{h}^n\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{6.15}$$

其中 $\widehat{h}^n$ 是 h^n的分段仿射插值函数。由于 $I \in [0,\infty)$，我们可以假设 h^n 在$\mathcal{H}$ 中有界，且弱收敛到极限 $h \in \mathcal{H}$，我们看到该极限等于 h。由 L^2 范数的弱下半连续性可得 $\liminf_{n\to\infty} C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n)^2 \ge \|h\|^2_{\mathcal{H}}$。

情形 *1b*. 现在假设 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$，其中 $h = \pi_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \pi_1\boldsymbol{\omega} \notin \mathcal{H}$。那么 $C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \infty$。再次假设 $I := \liminf_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) < \infty$，按照上述相同的论证可得 $h \in \mathcal{H}$，这与假设矛盾。因此，$\liminf_{n\to\infty} C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n)^2 = \infty$。

情形 *2*. 现在假设 $h := \pi_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \pi_1\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{H}$ but $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \ne T_h\boldsymbol{\omega}$；也就是说，$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ 不是 $\boldsymbol{\omega}$的平移。我们证明 $C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n) \to \infty$。定义 $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = T_h\boldsymbol{\omega}$，根据假设，$\widehat{\boldsymbol{\omega}} \ne \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ but $\pi_1\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \pi_1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$。因此，

存在 $\theta \in C([0,1],\mathrm{R}^{d_2})$，使得 $\theta \not\equiv 0$ 且 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \widehat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\theta}$，其中 $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{0}, \theta)$。由定理 6.20，我们可找到一个序列 $\widehat{\boldsymbol{\omega}}^n$，使得 $\widehat{\boldsymbol{\omega}}^n \to \widehat{\boldsymbol{\omega}}$ 并且

$$\limsup_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widehat{\boldsymbol{\omega}}^n) \le C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widehat{\boldsymbol{\omega}}) = \|h\|_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{6.16}$$

现在，由三角不等式和估计式 $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$，对于任意 $a, b \in \mathrm{R}$，我们有

$$C_n(\widehat{\boldsymbol{\omega}}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)^2 \le 2C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widehat{\boldsymbol{\omega}}^n)^2 + 2C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n)^2.$$

根据（6.16），右侧的第一项有上界 $2\|h\|_{\mathcal{H}}^2$。由定理 6.19，我们还有 $\lim_{n\to\infty} C_n(\widehat{\boldsymbol{\omega}}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)^2 = \infty$。因此我们得出 $\lim_{n\to\infty} C_n(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n, \boldsymbol{\omega}^n) = \infty$。□

结合定理6.20和定理6.21，我们推得如下 Γ-收敛。

推论 6.22. 在配备一致拓扑的$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$上，我们有 Γ-收敛 $C_n \xrightarrow{\Gamma} C_{\mathcal{H}}$。

证明. liminf不等式直接由命题 6.21 得出。在此情形下，limsup不等式为：对于每一对 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，我们都可以找到一个序列 $(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$，使其收敛到 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$，满足

$$\limsup_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{\omega}^n, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \le C_n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}).$$

命题6.20告诉我们，实际上可以取任意一个收敛到 $\boldsymbol{\omega}$ 的序列 $\boldsymbol{\omega}^n$，以及通过添加适当扰动构造的序列 $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n$。□

注 6.23。需要指出的是，命题 6.20强于 Γ-收敛中的标准 lim sup 条件。特别地，我们可以选择常值序列 $\boldsymbol{\omega}^n = \boldsymbol{\omega}$，使得恢复序列通过映射 $\Phi^n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = (\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$获得。我们将利用该映射 Φ^n 构造传输~方案 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 的序列，使其成为与 C_n相关的最优传输问题族的恢复序列；见下文命题6.26。

在证明代价函数 C_n的 Γ-收敛后，现在可以推出相应传输问题的 Γ-收敛。对于 $n \in$ 自然数集，定义传输泛函族 I_n: $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}) \to [0,\infty]$ 以及 I_∞: $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}) \to [0,\infty]$ 如下

$$\mathrm{I}_n(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \quad \text{and} \quad \mathrm{I}_\infty(\boldsymbol{\lambda}) = \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_{\mathcal{H}}^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}).$$

命题 6.24. 设 $(\boldsymbol{\lambda}^n) \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 是一列概率测度，且 $\boldsymbol{\lambda}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\lambda}$ *in* $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$。那么

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(\boldsymbol{\lambda}^n) \ge \mathrm{I}_\infty(\boldsymbol{\lambda}).$$

证明。 根据斯科罗霍德表示定理，存在一个概率空间 $(\Xi, \mathfrak{A}, \mathrm{P})$ 以及随机变量 $\boldsymbol{Y}^n$: $\Xi \to \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$和 $\boldsymbol{Y}$: $\Xi \to \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，使得 $\boldsymbol{\lambda}^n = \boldsymbol{Y}^n{}_{\#}\mathrm{P}$、 $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{Y}_{\#}\mathrm{P}$，且 $\boldsymbol{Y}^n \to \boldsymbol{Y}$ 几乎处处成立。由此可得

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}})^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^n &= \liminf_{n\to\infty} \int_{\Xi} C_n(\boldsymbol{Y}^n)^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\ge \int_{\Xi} \liminf_{n\to\infty} C_n(\boldsymbol{Y}^n)^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \ge \int_{\Xi} C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{Y})^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}})^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda},\end{aligned}$$

由Fatou引理和定理 6.21。 □

注记6.25。 给定定理6.24，我们得到定理6.6的一个更为直接的证明。事实上，将定理 6.3与定理6.24结合起来，即可立即得到该结果。

命题6.26. 设 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$。则存在一个序列 $(\boldsymbol{\lambda}^n) \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 使得 $\boldsymbol{\lambda}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\lambda}$ 并且

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{I}_n(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^n) \le \mathrm{I}_\infty(\boldsymbol{\lambda}). \tag{6.17}$$

证明. 我们可以假设 (6.17) 右端有限，否则该不等式显然成立。特别地，我们有 $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \mapsto C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \in L^1(\boldsymbol{\lambda})$，并且对于 $\boldsymbol{\lambda}$-几乎处处的 $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，有 $\boldsymbol{\omega} = T_h \boldsymbol{\omega}$ 对于 $h = \pi_1(\boldsymbol{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{H}$。

定义 $\boldsymbol{\lambda}^n = \Phi^n_{\#}\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$，其中 $\Phi^n \colon \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \to \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$ 按照定理6.23中的方式将 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$ 映射为 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n)$。那么，对于任意 $(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \in \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}$，我们有 $\Phi^n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) \to (\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$，且当 $n \to \infty$ 时 $\boldsymbol{\lambda}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\lambda}$。由定理6.20和定理6.21，

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\Phi^n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})) = C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}). \tag{6.18}$$

此外，由定理 6.18 可得 $C_n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}^n) \le \|h\|_{\mathcal{H}} = C_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$。利用 Fatou引理以及可积上界 $C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})$，得到

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n^2(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}})\, \mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^n = \limsup_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n^2(\Phi^n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \le \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} \limsup_{n\to\infty} C_n^2(\Phi^n(\boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}))\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}.$$

断言现在由 (6.18) 得出。 □

推论6.27。 在赋予弱拓扑的 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 上，我们有 Γ-收敛 $\mathrm{I}_n \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{I}_\infty$。

以下定理是本情形下 Γ-收敛基本定理的一个版本。

定理 6.28。 设 $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$。则 $\mathrm{T}_{C_n,\,2}(\boldsymbol{\eta}, \cdot) \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},\,2}(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$ 关于 $\mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$上的弱拓扑成立。也就是说

(i) 对任意 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$ 以及任意满足 $\boldsymbol{\nu}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}$ 的 $(\boldsymbol{\nu}^n) \subset \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$，$\mathit{liminf}_{n\to\infty} T_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}^n) \ge T_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$；以及 *(ii)* 对任意 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$，存在一个序列 $(\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n) \subset \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$，使得 $\lim_{n\to\infty} T_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n) = T_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$。

证明。 (i) 设 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 和 $(\boldsymbol{\nu}^n) \subset \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$ 满足 $\boldsymbol{\nu}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}$，并设 $(\boldsymbol{\lambda}^n) \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 是一列用于 $\mathrm{T}_{C_n,\,2}(\boldsymbol{\eta}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n)$ 的最优传输计划。由普罗霍罗夫定理，其边缘分布是紧的，因此我们可以假设 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 弱收敛到极限 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$；参见 [AGS08, 引理 5.2.2]。极限 $\boldsymbol{\lambda}$ 的边缘分布为 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$，因此是用于 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$ 的一个可行传输计划。利用命题 6.24，我们得到以下一系列不等式

$$\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu}) \le \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n^2(\boldsymbol{\omega}, \overline{\boldsymbol{\omega}})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}^n = \liminf_{n\to\infty} \mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta}, \widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n).$$

(ii) 现在令 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 为 $\mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},\,2}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\nu})$ 的一个最优传输计划（注意，$C_{\mathcal{H}}$ 是下半连续的；见定理 2.20）。设传输计划序列 $(\boldsymbol{\lambda}^n) \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 如定理 6.26 中所给出，并将 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n$ 定义为 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 的第二边缘分布，其中 $n \in \mathrm{N}$。 $\boldsymbol{\lambda}^n$ 的第一边缘分布为

对所有 $n \in \mathbb{N}$ 均固定为 $\boldsymbol{\eta}$。因此 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}$。此外，根据定理 6.26 以及 $\boldsymbol{\lambda}$ 的最优性，

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C_n^2(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}^n \le \mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}).$$

另一方面，若 $(\boldsymbol{\lambda}^n) \subset \mathcal{P}(\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}})$ 是一列 $\mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n)$ 的最优传输计划，我们可以假设 $\boldsymbol{\lambda}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\lambda}$，其中极限 $\boldsymbol{\lambda}$ 的边缘分布为 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$。由命题 6.24 可得

$$\mathrm{T}^2_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}) \le \int_{\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}\times\boldsymbol{\Omega}_{\mathbb{G}}} C^2_{\mathcal{H}}(\boldsymbol{\omega},\overline{\boldsymbol{\omega}})\,\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{\lambda}} \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{T}^2_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta},\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n).$$

结合这两个估计即可证明该结论。 □

注 6.29. 一般而言，我们无法排除存在一列 $\boldsymbol{\nu}^n$ 收敛到某个极限 $\boldsymbol{\nu}$，使得 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n) > \mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu})$。定理 6.28 的关键在于，序列 $\widetilde{\boldsymbol{\nu}}^n$ 是通过恢复映射 Φ^n 的推前构造得到的一列特殊序列。下面这个更强的结果是否成立，是一个有趣的问题：令 $\delta_{\Pi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n)}$ 表示可容许计划集合的凸指标函数（取值于 $\{0,\infty\}$），即 $\delta_{\Pi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n)}(\boldsymbol{\lambda}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\lambda} \in \Pi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n)$，并令 $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{P}(\Omega)$，$(\boldsymbol{\nu}^n) \subset \mathcal{P}(\Omega_{\mathbb{G}})$，使得 $\boldsymbol{\nu}^n \rightharpoonup \boldsymbol{\nu}$ 且 $\sup_{n\in\mathbb{N}} H(\boldsymbol{\nu}^n\|\boldsymbol{\eta}) < \infty$。我们是否有 Γ-收敛 $\mathrm{I}_n + \delta_{\Pi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n)} \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{I}_\infty + \delta_{\Pi(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu})}$? 这一性质将意味着，对于每一列相对熵有限的收敛序列 $\boldsymbol{\nu}^n$，都有 $\mathrm{T}_{C_n,2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu}^n) \to \mathrm{T}_{C_{\mathcal{H}},2}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\nu})$。

7. Beyond step-2 Carnot groups

本工作的部分结果在一般 Carnot群的情形下仍然成立（例如，参见 [BLU07]）。然而，已知满足对数 Sobolev 不等式的 Carnot群包括海森堡群及更一般的 H型群；如第 2.2 节所述，它们都是二步 Carnot群的例子。这解释了我们为何聚焦于二步情形。尽管如此，定理 5.1 对群的步数没有限制，适用于一般 Carnot群，且在采用恰当定义后，证明无需修改。同样，定理 6.1、定理 6.2 和定理 6.3 也可不作修改地推广到一般 Carnot群的情形。最后，在对 $N > 2$ 施加额外正则性假设的情况下，定理6.6 对 $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{d_1,\,N}$ 也成立，即适用于步-N 自由 Carnot群。在 p-变差路径空间上，对于任何使得沿绝对连续路径的平移有定义的 p，定理 6.6 的证明仍然有效；另请参见定理 2.17。

致谢。PF、HK 和 ML 感谢德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）通过 CRC/TRR 388“粗糙分析、随机动力学及相关领域”项目（项目编号 516748464）子项目 A02 提供资助。该项目还资助了 BR 的研究访问，在此期间完成了本工作的部分内容。VL 的研究部分获得了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）SFB1294/1-318763901 的资助。

References

[ABC+00] C´ecile An´e、S´ebastien Blach`ere、Djalil Chafai、Pierre Foug`eres、Ivan Gentil、Florent Malrieu、Cyril Roberto 和 Gr´egory Scheffer。 *Sur les Inégalités de Sobolev Logarithmiques*，第 10 卷，收录于 *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*。法国数学会，巴黎，2000 年。[AGS08] Luigi Ambrosio、Nicola Gigli 和 Giuseppe Savar´e。 *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space ofProbability Measures*。苏黎世 ETH 数学讲义。Birkh¨auser 出版社，巴塞尔，第二版，2008 年。[Ald81] David J. Aldous。《弱收敛与过程的一般理论》。未出版专著：加州大学伯克利分校统计学系，1981 年。

[AR04] Luigi Ambrosio 和 S´everine Rigot。海森堡群中的最优质量运输。 *J. Funct. Anal.*，208(2)：261–301，2004 年。[AS20] Luigi Ambrosio 和 Giorgio Stefani。Carnot群中的热流与熵流。 *Rev. Mat. Iberoam.*，36(1)：257–290，2020 年。[BB15] Marco Bramanti 和 Luca Brandolini。Carnot群上次拉普拉斯算子的 H¨ormander 定理证明。*Nonlinear Anal.*，126：170–200，2015 年。[BBBC08] Dominique Bakry、Fabrice Baudoin、Michel Bonnefont 和 Djalil Chafa¨ı。关于海森堡群上热核的梯度界。 *J. Funct. Anal.*，255(8)：1905–1938，2008 年。[BBBE20a] Julio Backhoff-Veraguas、Daniel Bartl、Mathias Beiglb¨ock 和 Manu Eder。适配Wasserstein距离与数理金融中的稳定性。 *Finance Stoch.*，24(3)：601–632，2020 年。[BBBE20b] Julio Backhoff-Veraguas、Daniel Bartl、Mathias Beiglb¨ock 和 Manu Eder。所有适配拓扑都相同。 *Probab. Theory Relat. Fields*，178(3-4)：1125–1172，2020 年。[BBLZ17] Julio Backhoff-Veraguas、Mathias Beiglb¨ock、Yiqing Lin 和 Anastasiia Zalashko。离散时间中的因果运输及其应用。 *SIAM J. Optim.*，27(4)：2528–2562，2017 年。[BBP+25] Daniel Bartl、Mathias Beiglb¨ock、Gudmund Pammer、Stefan Schrott 和 Xin Zhang。连续时间随机过程的 Wasserstein 空间。 *arXiv:2501.14135*，2025 年。[Ber18] Robert J. Berman。关于吉布斯测度的大偏差、平均能量与 Gamma收敛。 *Constr.Approx.*，48(1)：3–30，2018 年。[BLU07] Andrea Bonfiglioli、E. Lanconelli 和 F. Uguzzoni。 *Stratified Lie Groups and Potential Theory for theirSub-Laplacians*。施普林格数学专著。施普林格，柏林，柏林，2007 年。[Bra02] Andrea Braides。 *Γ-convergence for beginners*，第 22 卷，收录于 *Oxford Lecture Series in Mathematics and itsApplications*。牛津大学出版社，牛津，2002 年。[BV05] Fran¸cois Bolley 和 C´edric Villani。加权 Csisz´ar-Kullback-Pinsker 不等式及其在运输不等式中的应用。 *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*，14(3)：331–352，2005 年。[CDPT07] Luca Capogna、Donatella Daniellie、Scott D. Pauls 和 Jeremy T. Tyson（编）。 *An Introduction to theHeisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem*，第 259 卷，收录于 *Progress in Mathematics*。Birkh¨auser，巴塞尔，2007 年。[CF26] Gideon Chiusole 和 Peter K. Friz。迈向抽象维纳模型空间。 *Probab. Theory Related Fields*，2026 年。即将出版。[DGW04] Hac`ene Djellout、Arnaud Guillin 和 Liming Wu。运输成本-信息不等式及其在随机动力系统和扩散过程中的应用。 *Ann. Probab.*，32(3B)，2004 年。[DM93] Gianni Dal Maso。 *An introduction to Γ-convergence*，第 8 卷，收录于 *Progress in Nonlinear Differential Equationsand their Applications*。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1993 年。[DPMM+25] Guido De Philippis、Andrea Marchese、Andrea Merlo、Andrea Pinamonti 和 Filip Rindler。关于 Pansu 定理的逆命题。 *Arch. Ration. Mech. Anal.*，249(1)：3，2025 年。[DZ10] Amir Dembo 和 Ofer Zeitouni。 *Large Deviations Techniques and Applications*，第 38 卷，收录于 *Stochastic Modelling and Applied Probability*。施普林格出版社，柏林，2010 年。1998 年第二版的校订重印本。[Eld10] Nathaniel Eldredge。 *H*型群上次椭圆热核的梯度估计。 *J. Funct. Anal.*，258(2)：504–533，2010 年。[FH20] Peter K. Friz 和 Martin Hairer。 *A Course on Rough Paths*。Universitext。施普林格，Cham，第二版，2020 年。[F¨ol86] Hans F¨ollmer。Wiener 空间上的时间反演。载于 *Stochastic Processes – Mathematics and Physics (Bielefeld1984)*，第 1158 卷，收录于 *Lecture Notes in Mathematics*，第 119–129 页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1986 年。[F¨ol88] Hans F¨ollmer。随机场与扩散过程。载于 *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII、1985–87*，第 1362 卷，收录于 *Lecture Notes in Mathematics*，第 101–203 页。施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，1988 年。

[F¨ol22] Hans F¨ollmer. Wiener 空间上的最优耦合与 Talagrand运输不等式的推广。载于 George Yin 和 Thaleia Zariphopoulou（编）， *Stochastic Analysis, Filtering, and Stochastic Optimization*，第 30 页。施普林格，2022 年。[F¨U02] Denis Feyel 和 Ali S. ¨Ust¨unel。Wiener 空间上的测度输运与 Girsanov定理。 *C. R. Math.Acad. Sci. Paris*, 334(11):1025–1028, 2002.[F¨U04] Denis Feyel 和 Ali S. ¨Ust¨unel。Wiener 空间上的 Monge–Kantorovich 测度输运与 Monge–Amp`ere 方程。 *Probab. Theory Related Fields*, 128(3):347–385, 2004.[FV05] Peter K. Friz 和 Nicolas B. Victoir。布朗粗糙路径的近似及其在随机分析中的应用。 *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 41(4):703–724, 2005.[FV10] Peter K. Friz 和 Nicolas B. Victoir。 *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths*，第 120 卷（ *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*）。剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。[GL07] Nathael Gozlan 和 Christian L´eonard。运用大偏差方法研究若干运输成本不等式。*Probab. Theory Related Fields*, 139(1-2):235–283, 2007.[GL13] Nicola Gigli 和 Michel Ledoux。从对数 Sobolev 不等式到 Talagrand 不等式：一个简明证明。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33(5):1927–1935, 2013.[Hai11] Martin Hairer。关于 Malliavin证明的 H¨ormander 定理证明。 *Bull. Sci. Math.*, 135(6-7):650–666, 2011.[H¨or67] Lars H¨ormander。次椭圆二阶微分方程。 *Acta Math.*, 119:147–171, 1967.[HZ10] Waldemar Hebisch 和 Boguslaw Zegarli´nski。度量测度空间上的强制不等式。 *J. Funct. Anal.*, 258(3):814–851, 2010.[Jan97] Svante Janson。 *Gaussian Hilbert Spaces*，第 129 卷（ *Cambridge Tracts in Mathematics*）。剑桥大学出版社，剑桥，1997 年。[Jui14] Nicolas Juillet。海森堡群中的最优传输扩散。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 50(3-4):693–721, 2014.[Koh73] Joseph J. Kohn。伪微分算子与次椭圆性。载于 *Partial differential equations (Proc.Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971)*，第 XXIII 卷（ *Proc. Sympos.Pure Math.*），第 61–69 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1973 年。[Las18] R´emi Lassalle。因果传输计划及其 Monge–Kantorovich 问题。 *Stoch. Anal. Appl.*, 36(3):452–484, 2018.[LD25] Enrico Le Donne。 *Metric Lie Groups*，第 306 卷（ *Graduate Texts in Mathematics*）。施普林格，Cham，2025 年。齐次观点下的 Carnot-Carath´eodory 空间。[Leh13] Joseph Lehec。熵的表示公式与泛函不等式。 *Ann. Inst. Henri PoincaréProbab. Stat.*, 49(3):885–899, 2013.[Li06] Hong-Quan Li。海森堡群上热半群梯度的最优估计。*J. Funct. Anal.*, 236(2):369–394, 2006.[LQZ02] Michel Ledoux、Zhongmin Qian 和 Tusheng Zhang。通过粗糙路径研究扩散过程的大偏差与支撑定理。 *Stochastic Process. Appl.*, 102(2):265–283, 2002.[Lyo98] Terry J. Lyons。由粗糙信号驱动的微分方程。 *Rev. Mat. Iberoamericana*, 14(2):215–310, 1998.[Lyo14] Terry J. Lyons。粗糙路径、签名与流上函数的建模。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. IV*，第 163–184 页。Kyung Moon Sa，首尔，2014 年。[Mar18] Mauro Mariani。大偏差的 Γ-收敛方法。 *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 18(3):951–976, 2018.[Mon01] Roberto Monti。 *Distances, Boundaries and Surface Measures in Carnot-Carathéodory Spaces*。博士论文，特伦托大学，2001 年。可于 `https://cvgmt.sns.it/paper/3706/` 查阅。[OV00] Felix Otto 和 C´edric Villani。Talagrand 不等式的推广及其与对数 Sobolev 不等式的联系。 *J. Funct. Anal.*, 173(2):361–400, 2000.[Pan89] Pierre Pansu。Carnot-Carath´eodory 度量与秩一对称空间的拟等距。 *Ann.of Math.*, 129(1):1–60, 1989.[Par26] Jonghwa Park。关于适应瓦瑟斯坦距离的一种 T_1 运输不等式。 *Electron. Commun. Probab.*, 31:1–12, 2026。

[PS17] Andrea Pinamonti 和 Gareth Speight。孔隙性、可微性与 Pansu 定理。 *J. Geom. Anal.*, 27(3):2055–2080, 2017。[Rie17] Sebastian Riedel。高斯过程驱动的扩散过程的运输成本不等式。 *Elec-tron. J. Probab.*, 22(24), 2017。[Rin18] Filip Rindler。 *Calculus of Variations*。Universitext。施普林格，Cham，2018 年。[Tal96] Michel Talagrand。高斯测度及其他乘积测度的运输成本。 *Geom. Funct. Anal.*, 6(3):587–600, 1996。[Vil09] C´edric Villani。 *Optimal Transport, Old and New*，第 338 卷（ *Grundlehren der mathematischen Wis-senschaften*）。施普林格，2009 年。