arXiv:2602.06649v1 [math.PR] 6 Feb 2026

均匀灾变下的增长模型

´JOAN AMAYA、VALDIVINO V. JUNIOR、FABIO P. MACHADO，´
以及 ALEJANDRO ROLDAN-CORREA

Abstract. 我们研究了以群落为组织形式、且受均匀灾变影响的随机增长模型。为评估种群存续能力，我们分析了个体在灾难性事件发生后采取离散策略的情形。对于这些模型，我们分别在存在和不存在空间约束的情况下，推导出生存概率和平均灭绝时间的显式表达式。此外，我们还通过在具有扩散且不存在空间限制的模型中，将均匀灾变与二项式灾变和几何灾变进行比较，补充了上述分析。在这里，均匀、二项式和几何指的是灾变发生后立即存活的个体数量所服从的概率分布。通过这种比较，我们能够量化不同类型灾难性事件对种群持续存在的影响。

1. Introduction

随机种群模型是数学生物学和生态学中的重要工具，用于理解种群在随机事件影响下如何随时间演化。影响种群动态的最重要生物和环境因素包括灾变与空间约束，它们可能大幅减少种群规模，甚至导致种群灭绝。当灾变发生时，幸存者可能采取适应策略，以提高自身的存活机会。例如，一些群居物种会采用扩散策略，将个体分散开来，以建立新的群落。研究这些模型中的随机灾变，主要是为了更好地理解和预测灾难性事件对种群动态的影响。

灾变可能会摧毁整个种群，也可能只影响其中一部分。为对此类事件建模，通常假设灾变发生时，种群规模会按照某种概率规律减少。 [1, 2, 3, 4,11] 中的模型通过纳入灾难性事件扩展了传统的生灭过程，其中

日期：2026年2月9日。2010 数学主题分类号。60J80, 60J85, 92D25。关键词和短语。分枝过程、灾变、种群动态。F´abio Machado 和 Valdivino Junior 部分获得了 Fapesp (2023/13073-8) 和 CNPq (408590/2024-6) 的资助。Alejandro Roldan 获得了安蒂奥基亚大学（项目编号：2025-80410）的资助。

幸存个体仍聚集在一起，形成单一殖民地。具体而言，Brockwell 等人 [2] 提出了涉及多种灾变类型的生灭过程，例如二项式灾变、几何灾变和均匀灾变。这里的“均匀”“二项式”和“几何”指的是灾变发生后立即存活个体数量所服从的概率分布。这些研究主要探讨灭绝的概率以及灭绝所需的预期时间。

已有多种模型用于分析不同类型的灾变和扩散机制（见 [5, 8, 9, 10, 12, 13, 15]），包括二项灾变和几何灾变。本文研究经历均匀灾变的群落中的结构化种群。我们分析两种策略：第一种策略中，发生此类灾难性事件后，幸存的个体仍留在同一个群落中。第二种情形中，幸存者会扩散，以建立新的群落。

本文分为四节。第 2 节介绍三个描述均匀灾变下种群增长的模型，分别考虑有扩散和无扩散的情形。我们还给出生存概率和平均灭绝时间的相关结果。第 3 节详细讨论这些结果，并比较存在扩散的模型中均匀灾变、二项灾变和几何灾变。最后，第 4 节给出第 2 节所述结果的证明。

2. Models and Results

2.1. 均匀灾变。 种群常会遭遇导致大量个体消亡的灾难性事件。均匀灾变是突发的大规模事件，会瞬间且均匀地影响种群中的很大一部分。典型例子包括野火、飓风、流行病和石油泄漏等自然灾害。这些事件会大幅缩小种群规模，影响其恢复能力和未来增长。它们往往会造成毁灭性后果，且难以预测和管理。为了对此类事件建模，假设种群遭遇灾变时，其规模会按照离散均匀概率分布缩减。具体而言，如果灾变发生时的种群规模为 i，则其会以概率缩减至 j

$$\mu_{ij} = \frac{1}{i}, \quad j \in \{0, 1, \ldots, i-1\}.$$

μ_{ij} 的形式代表所谓的均匀灾变，参见 Brockwell等人 [2]。

在接下来的小节中，我们介绍三种模型。在这些模型中，生活在群落中的个体种群以速率 $\lambda > 0$ 按照泊松过程增长，而均匀灾变则以速率 1 按照泊松过程发生。此外，我们假设每个群落都从一个个体开始。在第一个模型中，每次灾变事件发生后，幸存个体仍聚集在同一个群落中（不分散）。在第二和第三个模型中，幸存者会分散并尝试建立新群落。这两个模型的关键区别在于空间约束：在第二个模型中，某些地点无法用于建立新群落；而在第三个模型中，则不存在此类限制。以下结果刻画了在均匀灾变中幸存的个体数量的分布。

命题 2.1. 设 N 为经历一次均匀灾变后存活的个体数量。

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=n) &= \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right),\\ \mathbb{E}(s^N) &= \frac{\ln(1+\lambda(1-s))}{\lambda(1-s)} \quad and\\ \mathbb{E}(N) &= \frac{\lambda}{2},\end{aligned}$$

其中 Φ 为 *Lerch* 超越函数，定义为

$$\Phi(z,s,a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+a)^s}, \quad |z|<1, \quad a \neq 0, -1, \ldots \tag{2.1}$$

Lerch 超越函数的定义见 Gradshteyn 和 Ryzhik [7, 式 9.550] 。有时，我们使用其积分表示式 [7, 式 9.556], ，即

$$\Phi(z,s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-(a-1)t}}{e^t - z} dt. \tag{2.2}$$

2.2. **无离散增长模型**。 考虑一个种群，其中的个体居住在一个会经历均匀灾变的殖民地中。每次灾变发生后，存活的个体仍聚集在同一个殖民地内。我们假设殖民地起初只有一个个体，并以速率 $\lambda > 0$ 产生新个体，而均匀灾变以速率 1 发生。具体而言，我们将时间 t的种群规模（即殖民地中的个体数量）视为一个连续时间马尔可夫过程$\{X(t)\colon\ t \geq 0\}$，其中 $X(0) = 1$，记作 $C(\lambda)$。其无穷小生成元

$X(t)$ 定义为

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i+1, \\ \frac{1}{i}, & j = 0, \ldots, i-1, \\ -(\lambda+1), & i = j, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

如果以正概率在所有时刻都有个体存在，我们就称过程 $C(\lambda)$存续；也就是说， $X(t) \neq 0$ 对所有 $t > 0$均成立。否则，我们称 $C(\lambda)$ 灭绝。在下面的定理中，我们将证明过程 $C(\lambda)$ 几乎必然灭绝。

定理 2.2。 对所有 $\lambda > 0$，过程 $C(\lambda)$ 都会灭绝。

2.3. 具有扩散和空间限制的增长模型。 设 $\mathbb{T}_d^+$ 是一棵无限有根树，除根节点的度为 d 外，其余顶点的度均为 $d+1$。我们定义一个在 $\mathbb{T}_d^+$ 上发生扩散的过程：从放置在 $\mathbb{T}_d^+$ 根节点上的单个群落开始，该群落只有一个个体。群落中的个体数量按照速率为 $\lambda > 0$ 的泊松过程增长。我们为每个群落关联一个均值为 1 的指数时间，用以表示均匀灾变袭击该群落的时刻。灾变中幸存的每个个体都会在距根节点最远的 d 个相邻顶点中随机选择一个顶点，以建立新群落。若多个前往同一顶点建立新群落的幸存者中，只有一个能成功，其余个体都会死亡。因此，群落发生灾变时，该群落会被 0、1、.....或 d 个群落取代。我们将此过程记为 $C_d(\lambda)$。

过程 $C_d(\lambda)$ 是一个状态空间为 $\{0, 1, 2, \ldots\}^{\mathbb{T}_d^+}$ 的连续时间马尔可夫过程。若过程以正概率在所有时刻都有群落，我们就称其存活。否则，我们称该过程灭绝。我们用 ψ_d 表示过程 $C_d(\lambda)$ 的灭绝概率。利用耦合论证，我们可以证明 ψ_d 是 d 和 λ 的非增函数。以下结果给出了存活—灭绝转变阶段中参数 λ 和 d 的条件，并在 $d = 2$ 和 $d = 3$ 时给出灭绝概率和平均灭绝时间的精确计算。

定理 2.3。 过程 $C_d(\lambda)$ 存活（$\psi_d < 1$）当且仅当

$$\frac{d^2}{d-1} \ln\left(\frac{\lambda + d}{d}\right) < \lambda.$$

定理 2.4。 过程 $C_2(\lambda)$ 存活，当且仅当 $(\psi_2 < 1)$

$$4 \ln\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) < \lambda.$$

此外，

$$\psi_2 = \min\left\{1, \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda + \ln(\lambda+1) - 4\ln\left(1+\lambda/2\right)}\right\}$$

定理 2.5. 过程 $C_3(\lambda)$ 存活（$\psi_3 < 1$）当且仅当

$$\frac{9}{2}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right) < \lambda.$$

此外，

$$\psi_3 = \min\left\{1, \frac{1+2a-9b+\sqrt{(1-9b)^2+4a(2-9c)}}{2(a-9b+9c-1)}\right\},$$

其中

$$a = \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right), \quad c = \frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right).$$

在以下结果中，我们求出过程 $C_d^i(\lambda)$ 几乎必然灭绝时的平均灭绝时间，其中 $d = 2$ 和 $d = 3$。

定理 2.6. 设 τ_d 为过程 $C_d(\lambda)$的灭绝时间。

(1) 如果 $4\ln\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) > \lambda$，那么

$$\mathbb{E}[\tau_2] = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right).$$

其中

$$\alpha = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} \quad and \quad \beta = 1 - \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{(\lambda+2)^4}{16(\lambda+1)}\right).$$

如果$4\ln\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda$，那么 $\mathbb{E}[\tau_2] = \infty$。

(2) 如果 $\frac{9}{2}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right) > \lambda$，那么

$$\mathbb{E}[\tau_3] = \frac{1}{\sqrt{4\alpha\gamma+\theta^2}}\ln\left[\frac{2\alpha-\theta+\sqrt{4\alpha\gamma+\theta^2}}{2\alpha-\theta-\sqrt{4\alpha\gamma+\theta^2}}\right],$$

其中

$$\theta = 1 - \frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{(2\lambda+3)^9}{27^3(\lambda+1)^4}\right) \quad and \quad \gamma = 1 - \frac{1}{2\lambda}\ln\left(\frac{(\lambda+3)^{18}(\lambda+1)^2}{27^3(2\lambda+3)^9}\right).$$

$$If\ \frac{9}{2}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right) = \lambda,\ then\ \mathbb{E}[\tau_3] = \infty.$$

注 2.7。 我们将生存–灭绝相变的临界参数定义为

$$\lambda_d \;=\; \inf\{\lambda > 0 : C_d(\lambda) \text{ survives}\}.$$

由定理 2.3 得出的数值近似结果列于表 1。这些数值表明， λ_d 随维数 d增大而单调递减，并且临界参数在$d \to \infty$时趋近于极限值 $\lambda_\infty = 2$ 。这一极限行为与没有空间约束的有离散模型一致，该模型将在下一节介绍。

d	2	3	5	7	10	20	50	100	200
λ_d	5.026	3.432	2.693	2.456	2.302	2.133	2.053	2.027	2.013

TABLE 1. 临界参数，四舍五入至小数点后三位。

2.4. 有扩散但无空间限制的增长模型。考虑一个由若干个独立群落组成的种群。每个群落最初只有一个个体。每个群落中的个体数量按照速率为 $\lambda > 0$ 的泊松过程独立增长。我们为每个群落关联一个均值为 1 的指数时间，以表示均匀灾变袭击该群落的时刻。每个在灾变中存活下来的个体都会独立于其他所有个体，建立一个新群落。我们将此过程记作 $C_*(\lambda)$，并考虑其从仅有一个个体的单个群落开始的情形。

如果群落在任意时刻都存在的概率为正，我们就称过程 $C_*(\lambda)$ 存活。否则，就称该过程灭绝。

定理 2.8。 分别令 ψ_* 和 τ_* 表示过程 $C_*(\lambda)$的灭绝概率和灭绝时间。

(1)对于 $\lambda > 2$，灭绝概率 ψ_* 由以下方程的最小非负解给出：

$$\ln\big(1 + \lambda(1-s)\big) = \lambda s(1-s).$$

对于 $\lambda \le 2$，该过程几乎必然灭绝，因此 $\psi_* = 1$。

(2) 对于 $\lambda \le 2$，预期灭绝时间为

$$\mathbb{E}[\tau_*] = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{x^2}{\lambda\ln(1+x) - x(\lambda - x)}\,dx.$$

3. Discussion

3.1. 离散作为生存策略。 本研究所得结果揭示了受灾难性事件影响的增长模型的若干定性特征，并使我们能够评估扩散作为一种促进种群长期持续存在的机制的有效性。定理 2.2、2.3、2.6 和 2.8 表明，扩散在防止均匀灾变导致灭绝方面发挥着根本作用。在不存在扩散的情况下（定理 2.2），无论增长率 λ 取何值，种群几乎必然灭绝，且灭绝时间的均值有限。然而，允许扩散时，种群可能以正概率存活，这取决于增长率 λ 与环境空间结构之间的相互作用。

对于生活在齐次树上的种群（定理 2.3–2.6），只要参数d 和 λ 满足定理 2.3 所刻画的不等式，扩散便成为实现正概率存活的有效策略。对 $d = 2$ 和 $d = 3$ 进行的明确计算（定理 2.4、2.5 和 2.6）进一步说明，扩散通过提高生存概率和平均灭绝时间，降低了灭绝风险。

移除空间约束后（定理 2.8），扩散会变得更加有效。在这种情况下，当且仅当 $\lambda > 2$时，种群才能存活，而且可以明确计算临界值。临界参数 λ_d 随着 $d \to \infty$ 单调收敛至 2（表 1），这表明高维环境的表现与无约束模型相似，进一步印证了扩散能显著减轻均匀灾变的影响。总而言之，这些结果表明，扩散是一种稳健的机制，可以延长种群持续存在的时间，并增强其抵御灾难性事件的韧性。

3.2. 灾变类型的比较分析。我们通过在具有扩散但不受空间限制的模型中，将均匀灾变与几何型和二项式灾变进行比较，进一步完善了我们的分析。对于每一类灾变，都可以显式计算相应的灭绝概率，从而使我们能够量化每种灾变事件类型对种群持续存在的影响。

- 几何灾变模型。考虑第 2.4 节所述的模型，但我们现在假设发生的是几何灾变，而不是均匀灾变。也就是说，如果灾变发生时群体规模为 i个体，那么有 j 个体存活的概率为

概率

$$\mu_{ij}^{G}=\begin{cases}(1-p)^{i}, & j=0,\\ p\,(1-p)^{i-j}, & 1\le j\le i.\end{cases}$$

对于此模型，灭绝概率为

$$\psi_G(\lambda,p)=\min\left\{\frac{(1-p)(\lambda+1)}{\lambda(1+\lambda p)},\ 1\right\},$$

见 [8, 定理 2.4 和注释 2.6]。

在均匀灾变的情形下，定理 2.8 表明，灭绝概率为

$$\psi_*(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda<2,\\ \min\{\,s>0:\ln[1+\lambda(1-s)]=\lambda s(1-s)\,\}, & \lambda\ge 2.\end{cases}$$

与几何情形（见 ψ_G（λ， p））相比，图 1 表明，均匀灾变比几何灾变更为严重，导致灭绝概率显著升高，使种群存活更加困难。

• 二项灾变模型。考虑第 2.4 节所述的模型，但现在我们假设发生的是二项灾变，而非均匀灾变。也就是说，如果灾变发生时群体规模为 i个体，那么有 j 个体存活的概率为

$$\mu_{ij}^{B}=\binom{i}{j}p^{j}(1-p)^{i-j},\ 0\le j\le i.$$

对于此模型，灭绝的概率为

$$\psi_B(\lambda,p)=\min\left\{\frac{1-p}{\lambda p},\,1\right\}$$

参见 [8, 定理 2.4 和注释 2.6]。

与由 $\psi_*(\lambda)$ 表示的均匀情形相比，图 2 表明，只要 $p\ge 1/3$，均匀灾变就比二项灾变更为严重。对于 $p<1/3$，曲线表明参数 λ 中存在相变：如果 $\lambda\le\lambda_\bullet(p)$，均匀灾变似乎不如二项灾变严重；而如果$\lambda>\lambda_\bullet(p)$，均匀灾变则变得比其二项对应情形更为严重。对于 $p=0.25$，数值计算表明， $\lambda_\bullet(0.25)\approx 10.58$。

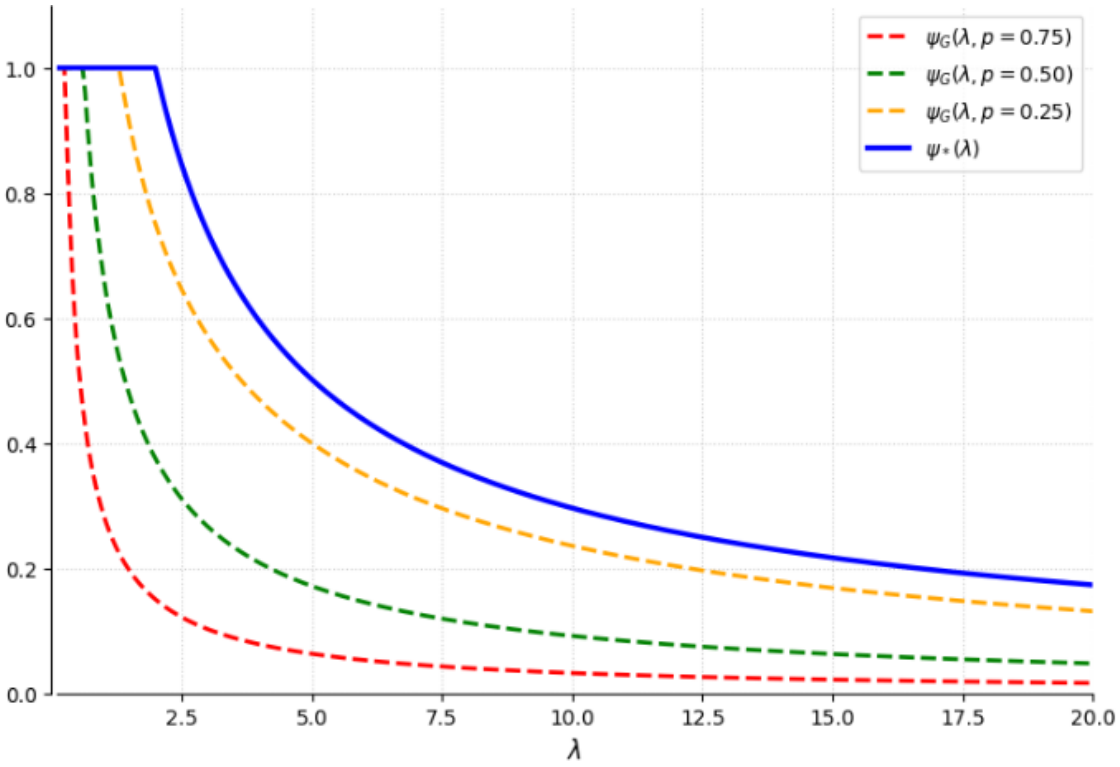

FIGURE 1. 均匀灾变与几何灾变模型中的灭绝概率比较。

4. PROOFS

我们从命题 2.1 的证明开始。在第 3.1 节中，我们建立无离散模型的结果。在第 3.2 节中，我们推导有离散模型且具有空间约束时的结果。最后，在第 3.4 节中，我们证明有离散模型且无空间约束时的结果。

命题 *2.1* 的证明。 设 X_t 为殖民地建立后时刻 t 的个体数量。由于 $X_0 = 1$ ，且种群按照速率为 λ的泊松过程增长，因此我们有

$$\mathbb{P}(X_t = j) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}, \quad j \in \{1, 2, \ldots\}.$$

当殖民地发生均匀灾变时，会对个体造成影响：如果灾变发生时有 j 个体，那么以 $1/j$ 的概率，存活的个体数量为 0、1、2、.....或 $j-1$ 。因此，在时间 T（灾变

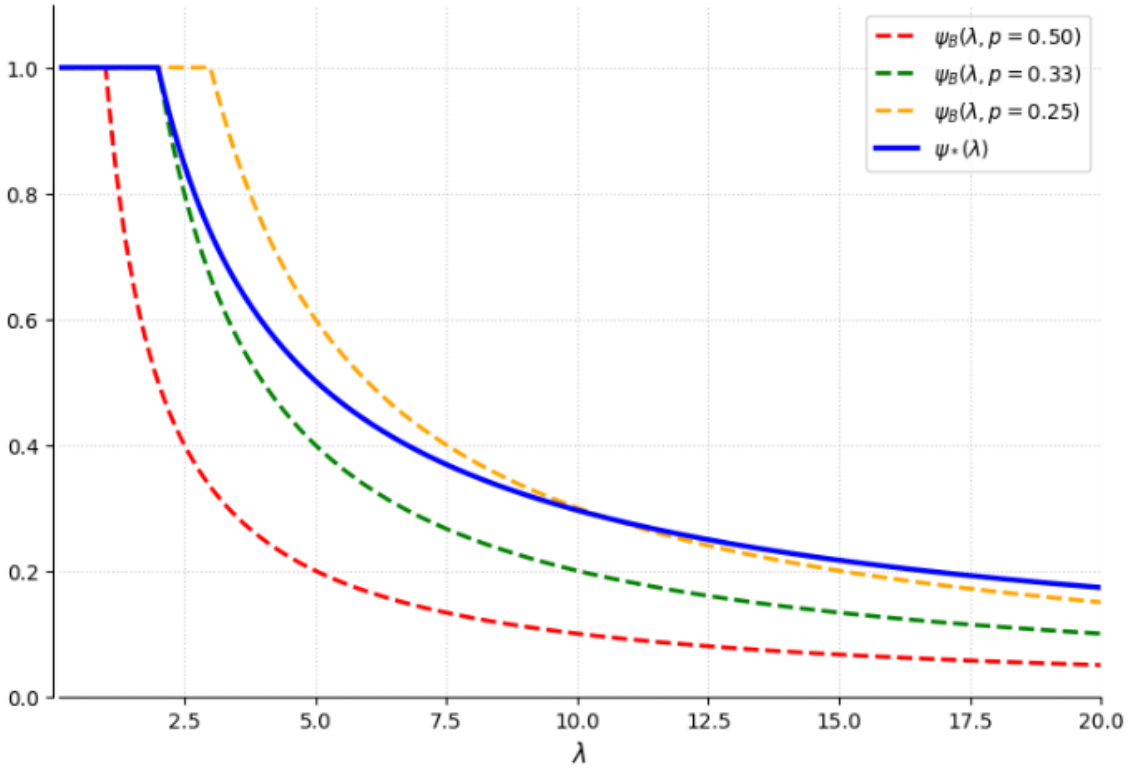

FIGURE 2. 均匀灾变模型与二项灾变模型中的灭绝概率比较。

时刻），该殖民地的幸存者数量满足

$$\mathbb{P}(N = n | X_T = j) = \frac{1}{j}, \quad n \in \{0, 1, 2, \ldots, j-1\}.$$

接下来我们考虑灾变时刻存活个体数量的分布。

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = n) &= \int_0^\infty e^{-t} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \frac{1}{j} dt \\
&= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j+1)!} \int_0^\infty e^{-t(\lambda+1)} t^j dt \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+n+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^j \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right). \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时，最后一行等于 $\ln(\lambda+1)$ ，这是利用恒等式 $\ln(1-x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$ ，对于 $|x| < 1$. 得到的。因此，在计算 N 的矩母函数时，我们有

$$\mathbb{E}(s^N) = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right). \tag{4.2}$$

令 $x = \frac{\lambda}{\lambda+1}$，并利用 Lerch 函数 (2.2) 的积分表示，可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{s\lambda}{\lambda+1}\right)^n \Phi\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}, 1, n+1\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} s^n x^n \Phi(x, 1, n+1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (sx)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-(n+1)t}}{1-xe^{-t}} dt \\
&= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-xe^{-t}} \sum_{n=1}^{\infty} (xse^{-t})^n dt \\
&= \frac{s\ln(1-x) - \ln(1-sx)}{(s-1)x}.
\end{aligned}$$

因此，将其代入 (4.2) 并化简，得到

$$\mathbb{E}(s^N) = \frac{\ln(1-\lambda(s-1))}{\lambda(1-s)}.$$

因此,

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}(s^N) = \frac{[\lambda(s-1)-1]\ln(1+\lambda(1-s)) + \lambda(1-s)}{\lambda(s-1)^2[\lambda(s-1)-1]},$$

and

$$\mathbb{E}(N) = \lim_{s\to 1^-} \frac{d}{ds}\mathbb{E}(s^N) = \frac{\lambda}{2}.$$

□

4.1. 无离散增长模型。 为证明定理 2.2，我们应用下文陈述的 Foster定理。Foster定理的证明可见 Fayolle 等人 [6,定理 2.2。3]。

定理 4.1 (Foster定理)。设 $\{W_n\}_{n\geq 0}$ 是定义在可数状态空间 $\mathcal{A} = \{\alpha_i,\ i \geq 0\}$. 上的不可约、非周期马尔可夫链。那么，当且仅当 $\{W_n\}_{n\geq 0}$ 是遍历的

存在一个正函数 $f(\alpha)$ $\alpha \in \mathcal{A}$、一个数 $\epsilon > 0$ 和一个有限集 $A \subset \mathcal{A}$，使得

$$\mathbb{E}[f(W_{n+1}) - f(W_n) \mid W_n = \alpha_j] \leq -\epsilon, \quad \alpha_j \notin A,$$

$$\mathbb{E}[f(W_{n+1}) \mid W_n = \alpha_i] < \infty, \quad \alpha_i \in A.$$

定理 *2.2* 的证明。令 $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ 为定义在 $C(\lambda)$ 上的离散时间马尔可夫链，其转移概率为

$$P_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}, \quad i \geq 0,$$

$$P_{i,j} = \frac{1}{i(\lambda+1)}, \quad 0 \leq j \leq i-1.$$

$\{Y_n\}$ 的遍历性意味着 $C(\lambda)$ 的灭绝时间具有有限均值。

注意到 $\{Y_n\}$ 是不可约且非周期的。我们使用 Foster定理证明，对于所有 $\lambda > 0$, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ 都是遍历的。考虑函数 $f\colon\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$，定义为 $f(i) = i+1$，$\epsilon > 0$，以及集合

$$A := \left\{ i \in \mathbb{N} : \frac{\lambda}{1+\lambda} - \frac{i+1}{2(1+\lambda)} > -\epsilon \right\}.$$

对于 $\lambda > 0$，集合 A 是有限的。此外，我们有

- $$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y_{n+1}) - f(Y_n) \mid Y_n = i] &= [f(i+1) - f(i)]P_{i,i+1} + \sum_{j=0}^{i-1}[f(j) - f(i)]P_{i,j} \\ &= \frac{\lambda}{1+\lambda} - \frac{i+1}{2(1+\lambda)} \leq -\epsilon \quad \text{for } i \notin A.\end{aligned}$$
- $$\mathbb{E}[f(Y_{n+1}) \mid Y_n = i] = f(i+1)P_{i,i+1} + \sum_{j=0}^{i-1} f(j)P_{i,j} \leq \frac{\lambda(i+2)}{1+\lambda} + \frac{i+1}{2(1+\lambda)} < \infty \text{ for } i \in A.$$

由 Foster定理可知，$\{Y_n\}$ 是遍历的，证明至此完成。 □

4.2. **具有扩散和空间限制的增长模型。**

定理 *2.3* 的证明。 根据 Machado等人 [12,命题 4.3],可得

$$\psi_d < 1 \quad \text{if and only if} \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{d-1}{d}\right)^N\right] < \frac{d-1}{d}.$$

此外，根据命题 2.1，

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{d-1}{d}\right)^N\right] = \frac{d\ln\left(\frac{\lambda+d}{d}\right)}{\lambda}.$$

因此，$\psi_d < 1$ 当且仅当 $d^2 \ln\left(\frac{\lambda+d}{d}\right) < \lambda(d-1)$。

□

定理 *2.4* 的证明。 存活条件是定理 2.3 对于$d = 2$的一个应用。在这种情况下，

$$\psi_2 < 1 \text{ if and only if } 4\ln\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) < \lambda.$$

为了求得灭绝概率，我们考虑 Machado 等人 [12]的命题 4.4。由于 $d = 2$, ψ_2 是方程的最小非负解

$$\sum_{y=0}^{2} s^y \binom{2}{y} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{T(n,y)}{2^n}\mathbb{P}(N=n) = s,$$

其中

$$T(n,y) = \sum_{i=0}^{y}(-1)^i\binom{y}{i}(y-i)^n. \tag{4.3}$$

代入并化简后，我们得到

$$\mathbb{P}(N=0) + 2s\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mathbb{P}(N=n) + s^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n-2}{2^n}\mathbb{P}(N=n) = s.$$

可改写为

$$(1-s)^2\,\mathbb{P}(N=0) + 2s(1-s)\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^N\right] = s(1-s).$$

因此，要么 $s = 1$，要么

$$s = \frac{\mathbb{P}(N=0)}{1+\mathbb{P}(N=0)-2\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^N\right]} = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda+\ln(\lambda+1)-4\ln\left(1+\lambda/2\right)}.$$

其中，最后一个等式由命题 2.1 推出。

□

定理 *2.5* 的证明。 存活条件是将定理 2.3 应用于$d = 3$。在这种情况下，

$$\psi_3 < 1 \text{ if and only if } \frac{9}{8}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right) < \lambda.$$

为了得到灭绝概率，我们考虑 Machado等人 [12] 中的命题 4.4。由于 $d = 3$, ψ_3 是该方程的最小非负解

$$\sum_{y=0}^{3} s^y \binom{3}{y} \sum_{n=y}^{\infty} \frac{T(n,y)}{3^n} \mathbb{P}(N=n) = s,$$

其中 $T(n, y)$ 由方程 (4.3) 给出。

经过代入并化简后，我们得到

$$\mathbb{P}(N=0) + 3s\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{3^n}\mathbb{P}(N=n) + 3s^2\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{2^n-2}{3^n}\mathbb{P}(N=n) + s^3\sum_{n=3}^{\infty} \tfrac{3^n-3\cdot 2^n+3}{3^n}\mathbb{P}(N=n) = s,$$

它可以改写为

$$(1-s)^3\mathbb{P}(N=0) + 3s(1-s)^2\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^N\right] + 3s^2(1-s)\mathbb{E}\left[\left(\tfrac{2}{3}\right)^N\right] = s(1-s^2).$$

利用命题 2.1，我们得到

$$\frac{(1-s)^3}{\lambda}\ln(1+\lambda) + \frac{9s(1-s)^2}{2\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right) + \frac{9s^2(1-s)}{\lambda}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right) = s(1-s^2),$$

其根由 $s = 1$ 和

$$s = \frac{1+2a-9b \pm \sqrt{(1-9b)^2+4a(2-9c)}}{2(a-9b+9c-1)},$$

with

$$a = \frac{\ln(1+\lambda)}{\lambda}, \quad b = \frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+\frac{2\lambda}{3}\right), \quad c = \frac{1}{\lambda}\ln\left(1+\frac{\lambda}{3}\right).$$

□

定理 *2.6* 的证明。首先注意， $C_d(\lambda)$中的每个殖民地都存活一段服从速率为 1 的指数分布的时间，直至遭遇灾变。灾变后幸存的每个个体都会随机选择一个相邻顶点，并尝试在那里建立一个新殖民地。当幸存者数量为 n时，恰有$k \leq$ 个顶点被殖民的概率为

$$\frac{T(n,k)}{d^n}\binom{d}{k},$$

其中

$$T(n,k) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

是满射的数量 $f\colon A \to B$，其中 $|A| = n$ 且 $|B| =$ $k.$

令 W_t 表示模型 C_d（λ）中时刻 t 的群落数量。注意， W_t 是一个具有 $W_0 = 1$ 的连续时间分枝过程。因此，在死亡之前， W_t 中的每个群落

以 p_k 给定的概率产生 $k \le d$ 个子代群体，该概率由下式给出：

$$p_k = \begin{cases} \mathbb{P}(N=0), & k=0, \\ \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \binom{d}{k} \frac{T(n,k)}{d^n} \mathbb{P}(N=n), & 1 \le k \le d-1, \\ \displaystyle 1 - \sum_{j=0}^{d-1} p_j, & k=d. \end{cases} \tag{4.4}$$

此外，$\tau_d = \inf\{t > 0 : W_t = 0\}$。

- 对于 $d=2$，代入 (4.4) 并应用命题 2.1，我们得到

$$p_0 = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda},$$

$$p_1 = 2\Big(\mathbb{E}\Big[\big(\tfrac{1}{2}\big)^N\Big] - \mathbb{P}(N=0)\Big) = \frac{2}{\lambda} \ln\left(\frac{(\lambda+2)^2}{4(\lambda+1)}\right),$$

$$p_2 = 1 - \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{(\lambda+2)^4}{16(\lambda+1)}\right).$$

此外，条件 $4 \ln\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) > \lambda$ 等价于 $p_1 + 2p_2 < 1$。因此，根据 Junior 等人。[10, 引理 4.1(i)], 我们得到

$$\mathbb{E}[\tau_2] = \frac{1}{p_2} \ln\left(\frac{p_0}{p_0 - p_2}\right),$$

由此得到定理 2.6 的结论，其中 $\alpha = p_0$ 和 $\beta = p_2$。

如果 $4 \ln\left(1+\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda$，则 $p_1 + 2p_2 = 1$。在这种情况下，根据 Junior 等人。[10, 引理 4.1(i)],我们有 $\mathbb{E}[\tau_2] = \infty$。

- 对于 $d=3$，代入 (4.4) 并应用命题 2.1，我们得到

$$p_0 = \frac{\ln(\lambda+1)}{\lambda},$$

$$p_1 = 3\big(\mathbb{E}\big[\tfrac{1}{3^N}\big] - \mathbb{P}(N=0)\big) = \frac{3}{2\lambda} \ln\left(\frac{(2\lambda+3)^3}{27(\lambda+1)^2}\right),$$

$$p_2 = 3\Big(\mathbb{E}\Big[\tfrac{2^N-2}{3^N}\Big] + \mathbb{P}(N=0)\Big) = \frac{3}{\lambda} \ln\left(\frac{(\lambda+1)(\lambda+3)^3}{(2\lambda+3)^3}\right),$$

$$p_3 = 1 - \frac{1}{2\lambda} \ln\left(\frac{(\lambda+3)^{18}(\lambda+1)^2}{27^3(2\lambda+3)^9}\right).$$

此外，条件 9 2 ln $\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)>\lambda$ 等价于 $p_1+2p_2+3p_3<1$。因此，根据 Junior等人 [10, 引理 4.1(*ii*)], ，我们得到

$$\mathbb{E}[\tau_3]=\frac{1}{\sqrt{4p_0p_3+(p_2+p_3)^2}}\ln\left[\frac{2p_0-p_2-p_3+\sqrt{4p_0p_3+(p_2+p_3)^2}}{2p_0-p_2-p_3-\sqrt{4p_0p_3+(p_2+p_3)^2}}\right],$$

由此得到定理 2.6 的结论，其中 $\alpha=p_0$，$\theta=p_2+p_3$ 和 $\gamma=p_3$。

若 9 2 ln $\left(1+\frac{\lambda}{3}\right)=\lambda$，则有 $p_1+2p_2+3p_3=1$。因此，根据 Junior 等人 [10, 引理 4.1(*ii*)], $\mathbb{E}[\tau_3]=\infty$。□

4.3. **有离散性但无空间限制的增长模型**。

定理 *2.8* 的证明。过程 $C_*(\lambda)$ 中群落的数量可以建模为一个分枝过程：每个群落以速率 1 存活一段指数分布时间，并在死亡前一刻，根据随机变量 N 的分布产生随机数量的子代群体。N 的分布、期望和生成函数见命题 2.1。

因此，当且仅当 $\lambda>2$ 时，过程 $C_*(\lambda)$ 存活。此外，灭绝概率 ψ_* 是下列方程的最小非负解

$$\frac{\ln[1+\lambda(1-y)]}{\lambda(1-y)}=y.$$

此外，根据 Narayan [14], ，若 $\lambda\le 2$，则平均灭绝时间为

$$\mathbb{E}[\tau_*]=\int_0^1\frac{1-y}{f(y)-y}\,dy,$$

其中

$$f(y)=\frac{\ln[1+\lambda(1-y)]}{\lambda(1-y)},\qquad 0<y<1.$$

□

References

[1] J.R.Artalejo、A.Economou 和 M.J.Lopez-Herrero。研究受二项灾变和几何灾变影响的移民过程中增长指标的评估。数学生物科学与工程**4**，(4)，573 - 594 (2007)。[2] P.J.Brockwell、J.Gani 和 S.I.Resnick。出生、移民与灾变过程。高级应用概率。14，709-731 (1982)。[3] P.J.Brockwell。具有灾变的一般生灭过程的灭绝时间。应用概率杂志，**23** (4)，851-858 (1986)。[4] B.Cairns 和 P.K. Pollet。评估受局部灾变影响的种群的持存时间。*"MODSIM 2003* 国际建模与仿真大会"（*D.A. Post* 编），澳大利亚和新西兰建模与仿真学会，747–752 (2003)。

[5] F Duque、VV Junior、FP Machado、A Rold´an-Correa。受二项灾变影响的增长模型中的灭绝时间。统计力学杂志：理论与实验 **2023** (10)，103501，(2023)。[6] G. Fayolle、V.A.Malyshev 和 M.V.Menshikov。《可数马尔可夫链的构造理论》。剑桥大学出版社 (1995) 。[7] Gradshteyn, I.S. 和 Ryzhik, I.M.：《积分、级数与乘积表》。第七版。爱思唯尔／学术出版社，阿姆斯特丹。由俄语译出，译文由 Alan Jeffrey 和 Daniel Zwillinger 编辑并作序。(2007)。[8] V.V. Junior、F.P.Machado 和 A. Rold´an-Correa。离散作为生存策略。统计物理学杂志 **164**(4)，937 - 951 (2016)。[9] V.V. Junior、F.P.Machado 和 A. Rold´an-Correa。研究受几何灾变影响的增长模型中的扩散策略。统计物理学杂志 **183**，30 (2021)。[10] VV Junior、FP Machado、A Rold´an-Correa。受几何灾变影响的增长模型中的灭绝时间。统计力学杂志：理论与实验 **2023** (4)，043501，(2023)。[11] S.Kapodistria、T. Phung-Duc 和 J. Resing。具有二项灾变的线性出生／移民－死亡过程。工程与信息科学中的概率 **30** (1)，79-111 (2016)。[12] F.P.Machado、A. Rold´an-Correa 和 V.V. Junior。齐次树上的殖民与崩溃。统计物理学杂志 **173**，1386–1407 (2018)。[13] F.P.Machado、A. Rold´an-Correa 和 R.Schinazi。殖民与崩溃。*ALEA*－拉丁美洲概率与数理统计杂志 **14**，719-731 (2017)。[14] P. Narayan。连续时间马尔可夫分枝过程的灭绝时间。澳大利亚统计学杂志**24**，160–164 (1982)[15] R.Schinazi。随机离散有助于存活吗？统计物理学杂志，**159**，(1)，101-107 (2015)。

(Joan J. Amaya) Statistics Department, Institute of Mathematics and Statistics, Uni-versity of São Paulo, CEP 05508-090, São Paulo, SP, Brazil.电子邮箱地址: jjamayat@ime.usp.br (Valdivino V. Junior) Institute of Mathematics and Statistics, Federal University ofGoias, Campus Samambaia, CEP 74001-970, Goiânia, GO, Brazil电子邮箱地址: vvjunior@ufg.br (F´abioP.Machado) Statistics Department, Institute of Mathematics and Statistics, Uni-versity of São Paulo, CEP 05508-090, São Paulo, SP, Brazil.电子邮箱地址: fmachado@ime.usp.br (Alejandro Rold´an) Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Calle 67, no53-108, Medellin, Colombia电子邮箱地址: alejandro.roldan@udea.edu.co